ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель–июнь 2023. Т. 30, № 2. С. 81–90

УДК 519.853.3 DOI 10.33048/daio.2023.30.762

СООТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Е. А. Нурминский

Дальневосточный федеральный университет,
пос. Аякс, 10, 690922 Владивосток, Россия
E-mail: `nurminskiy.ea@dvfu.ru`

Аннотация. Сформулированы и доказаны общие соотношения эквивалентности между вычислениями опорных функций выпуклых множеств и операциями проекции на них: асимптотическая эквивалентность операции проекции и вычисления опорной функции произвольного выпуклого замкнутого ограниченного множества, эквивалентность задачи об элементе минимальной нормы и регуляризованной задачи суплинейной оптимизации. Приведённые результаты существенно упрощают и обобщают полученные ранее доказательства для аналогичных соотношений в задачах линейной оптимизации. Ил. 1, библиогр. 10.

Ключевые слова: выпуклая оптимизация, регуляризация, проекция, опорная функция.

Введение

Цель этой заметки — представить несколько полезных результатов, относящихся к взаимозависимости выпуклой оптимизации и операции проекции. Эти результаты обобщают и существенно упрощают полученные ранее соотношения для полиэдральных множеств и задач линейной оптимизации [1, 2]. Первый аппроксимационный результат показывает, что значение опорной функции выпуклого множества для заданного опорного вектора может быть вычислено с любой точностью при помощи операции проектирования удалённой точки, находящейся на луче, генерированном этим вектором. Поскольку решение любой выпуклой оптимизационной задачи эквивалентно вычислению опорной функции, этот результат может быть использован для разработки новых алгоритмических подходов в выпуклой оптимизации. В случае линейной

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования (соглашение № 075–02–2023–946).

оптимизации возможно получить даже точное решение, для получения точного решения нелинейной выпуклой задачи достаточно выполнения некоторых дополнительных условий типа острого минимума [3, 4]. В общем случае можно получить приближённое решение, точность которого может быть оценена.

Следующий результат демонстрирует возможность решить задачу поиска вектора минимальной длины в выпуклом множестве, эквивалентную задаче проекции, при помощи безусловной минимизации суммы простейшей квадратичной функции и опорной функции заданного выпуклого множества. Этот результат впервые был сформулирован в [5] только для политопов, и доказательство в явном виде использовало конечность множества крайних точек. Однако конечный результат формулировался в независимой от этого форме, что наводило на мысль, что данное соотношение выполняется и в общем случае неполиэдральных выпуклых множеств. В настоящей заметке этот результат получен при помощи нового, чисто алгебраического доказательства. Таким образом, показано, что, действительно, данная эквивалентность имеет место и в общем случае замкнутых ограниченных выпуклых множеств.

Оба соотношения могут быть использованы для развития новых алгоритмических идей, что является предметом дальнейших исследований.

1. Обозначения и предварительные результаты

В основном в статье используются стандартные обозначения конечномерного выпуклого анализа, тем не менее приведём их здесь во избежание путаницы и неправильного понимания.

Через E обозначаем основное евклидово векторное пространство, в котором векторы, как правило, обозначаются строчными латинскими буквами $a, b, \ldots, x, y, z$ при необходимости с нижними и верхними индексами, диакритическими маркерами и пр. Используем специальные обозначения для нулевого вектора $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ и вектора из единиц $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)$.

Размерность пространства E при необходимости определяется как $\dim E$, и пространство размерности n обозначается через E^n, если в этом возникает необходимость. Неравенства между векторами и алгебраические суммы векторов, умножение векторов на вещественные числа определяются покомпонентно. Последние две операции естественным образом обобщаются на множества векторов:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}, \quad \alpha A = \{\alpha a \mid a \in A\}.$$

Линейное подпространство $L \subset E$ определяется как множество, инвариантное относительно сложения и умножения на вещественные числа: $L = L + L = \alpha L$ для любого вещественного $\alpha \neq 0$.

Неотрицательная часть E обозначается через $E_+ = \{x \geqslant \mathbf{0}\}$. Множество, состоящее из одного элемента, скажем a, будем при обозначении отождествлять с самим элементом.

Выпуклая оболочка множества X определяется и обозначается общепринятым образом:

$$\mathrm{co}(X) = \left\{ z = \sum_{i=1}^{|X_f|} \alpha_i x^i \mid x^i \in X_f \subset X,\, |X_f| < \infty,\, \alpha_i \geqslant 0,\, \sum_{i=1}^{|X_f|} \alpha_i = 1 \right\},$$

где $|X_f|$ — мощность конечного подмножества X_f множества X. Конечно, вследствие теоремы Каратеодори достаточно рассмотреть множества X_f с $|X_f| \leqslant \dim E + 1$. Коническая оболочка X определяется так: $\mathrm{Co}(X) = \bigcup\limits_{\alpha \geqslant 0} \alpha\, \mathrm{co}(X)$.

Скалярное произведение векторов x и y из E обозначается через xy, а норма вектора x — это $\|x\|^2 = xx$. Норма множества $A \subset E$ определяется как $\|A\| = \sup\limits_{a \in A} \|a\|$. С помощью скалярного произведения ортогональное дополнение $L^\perp$ линейного подпространства $L \subset E$ определяется следующим образом: $L^\perp = \{x \in E \mid xz = 0 \text{ для всех } z \in L\}$. Среди других специальных множеств отметим канонический симплекс: $\Delta = E_+ \cap \{x \in E \mid \mathbf{1}x = 1\}$.

Операция проекции точки $p \in E$ на выпуклое замкнутое подмножество $X \subset E$ определена и обозначается таким образом:

$$p \downarrow X = \operatorname*{argmin}_{x \in X} \|p - x\|,$$

т. е. $p \downarrow X \in X$ и $\min\limits_{x \in X} \|p - x\| = \|p - p \downarrow X\|$. Для замкнутого выпуклого X эта операция хорошо определена и липшицево непрерывна относительно p с константой Липшица, не превосходящей 1, т. е. $\|p \downarrow X - q \downarrow X\| \leqslant \|p - q\|$. Эта операция естественным образом обобщается на множества: $A \downarrow X = \{a \downarrow X \mid a \in A\} \subset X$.

Приведём краткий список алгебраических свойств проекции.

• Идемпотентность: $(p \downarrow X) \downarrow X = p \downarrow X$;

• линейность: для линейного подпространства $L \subset E$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$\alpha p \downarrow L = \alpha(p \downarrow L), \quad (p + q) \downarrow L = p \downarrow L + q \downarrow L;$$

• операции сдвига и масштабирования сочетаются с проекцией следующим образом ($\tau > 0$):

$$(a + b) \downarrow X = a \downarrow (X - b) + b, \quad (\tau a) \downarrow X = \tau(a \downarrow (\tau^{-1} X));$$

• ортогональная декомпозиция: $p = p \downarrow L + p \downarrow L^\perp$;

• взаимная ортогональность: для любого линейного подпространства $L \subset E$ имеем $L^\perp \downarrow L = L \downarrow L^\perp = \mathbf{0}$, в силу этого $X \downarrow L^\perp = (X + L) \cap L^\perp$.

Для замкнутого ограниченного множества $X \subset E$ и вектора c определим опорную функцию

$$(X)_c = \sup_{x \in X} cx = cx^c, \tag{1}$$

где $x^c \in X$. Это выпуклая суплинейная функция (иногда используется термин суперлинейная), надграфик которой представляет собой выпуклый конус с вершиной в начале координат. Образующие конуса порождаются элементами множества X, и функция линейна на каждом луче, выходящем из начала координат.

2. Асимптотическая эквивалентность выпуклой оптимизации и проекционных задач

В этом разделе докажем, что решение выпуклой оптимизационной задачи может быть аппроксимировано с произвольной точностью решением специально сконструированной проекционной задачи. Этот результат является непосредственным следствием следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть $X \subset E$ — замкнутое ограниченное подмножество и $c \in E$. Тогда для любого x^0*

$$(X)_c = \lim_{\tau \to \infty} c((x^0 + \tau c) \downarrow X). \tag{2}$$

Доказательство. Из условий оптимальности для $(x^0 + \tau c) \downarrow X$ следует, что

$$(x^0 + \tau c - (x^0 + \tau c) \downarrow X)(x - (x^0 + \tau c) \downarrow X) \leqslant 0 \tag{3}$$

для любого $x \in X$. Разделив (3) на $\tau > 0$, получим

$$(c + \tau^{-1}(x^0 - (x^0 + \tau c)) \downarrow X)(x - (x^0 + \tau c) \downarrow X) \\ = (c + z^0_{\tau,c})(x - (x^0 + \tau c) \downarrow X) \leqslant 0, \tag{4}$$

где $z^0_{\tau,c} = \tau^{-1}(x^0 - (x^0 + \tau c) \downarrow X)$ и

$$\|z^0_{\tau,c}\| \leqslant \tau^{-1}(\|x^0\| + \|(x^0 + \tau c) \downarrow X\|) \leqslant \tau^{-1}(\|x^0\| + \|X\|). \tag{5}$$

Переходя в (4) к пределу по $\tau \to \infty$, получим

$$cx \leqslant cx^c \quad \text{для любого } x \in X, \tag{6}$$

где $x^c \in X$ — произвольная предельная точка $(x^0 + \tau c) \downarrow X$, $\tau \to \infty$. Такая предельная точка x^c существует, поскольку X — замкнутое и ограниченное множество по предположению. Является ли такая точка единственной, вопрос открытый. Из (6) следует, что

$$(X)_c \geqslant cx^c \geqslant \max_{x \in X} cx = (X)_c\,,$$

что доказывает теорему. Теорема 1 доказана.

Чтобы увязать эту теорему с задачами выпуклой оптимизации, достаточно вспомнить, что для конечной выпуклой функции $f(\cdot)$ и ограниченного замкнутого выпуклого $X \subset E$

$$\min_{x \in X} f(x) = \min_{\substack{x \in X, \\ f(x) - \xi \leqslant 0}} \xi = - \max_{\substack{x \in X, \\ f(x) - \xi \leqslant 0}} (-\xi) = -(\overline{X})_{\overline{p}}, \tag{7}$$

где $\overline{X} = \{\overline{x} = (x, \xi) \mid x \in X,\ f(x) - \xi \leqslant 0\}$ и $\overline{p} = (\mathbf{0}, -1)$. Для математической корректности в применении теоремы 1 к множеству $\overline{X}$ необходимо гарантировать ограниченность $\overline{X}$. В данном случае это, в общем-то, формальное требование может быть легко удовлетворено добавлением произвольной верхней границы $\bar{f} \geqslant \inf\limits_{x \in X} f(x)$ для ξ. Для этой цели подойдёт, например, любое $x^0 \in X$, которое тривиальным образом предоставит искомую верхнюю границу $\bar{f} = f(x^0)$.

В заключение остаётся заметить, что неравенство (5) предоставляет оценку точности для приближённого значения опорной функции $(X)_c$ для конечного $\tau > 0$ и, следовательно, даёт оценку точности решения оптимизационной проблемы (7).

3. Проективные задачи и регуляризированная оптимизация опорных функций

В этом разделе рассмотрим преобразование проекционной задачи

$$(x^0 + \tau c) \downarrow X = \operatorname*{argmin}_{x \in X} \|x - x^0 - \tau c\|^2, \tag{8}$$

которая, как показано в разд. 2, аппроксимирует опорную функцию $(X)_c$. Проблема (8) представляет собой задачу квадратичного программирования с ограничениями, которые зависят от способа задания множества X и могут существенно усложнить её решение.

Так как

$$(x^0 + \tau c) \downarrow X = (\mathbf{0} + x^0 + \tau c) \downarrow X = \mathbf{0} \downarrow (X - x^0 - \tau c) + x^0 + \tau c, \tag{9}$$

задача (8), по сути дела, сводится к проблеме нахождения вектора наименьшей длины $\mathbf{0} \downarrow (X - x^0 - \tau c) = \mathbf{0} \downarrow Z$, где можно игнорировать в данный момент подробности определения множества Z.

По ряду причин полезно преобразовать её в другую задачу, напоминающую использование точных штрафных функций (см., например, работу [6] и ссылки в ней) для решения задач условной оптимизации, но на самом деле существенно от них отличающуюся.

Теорема 2. *Пусть Z — замкнутое ограниченное выпуклое множество. Тогда*

$$\min_{z \in Z} \frac{1}{2}\|z\|^2 = \frac{1}{2}\|\mathbf{0} \downarrow Z\|^2 = -\min_{z} \left\{ \frac{1}{2}\|z\|^2 + (Z)_z \right\}. \tag{10}$$

Доказательство. Напомним определения индикаторной функции:

$$\mathrm{Ind}_X(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \in Z, \\ \infty & \text{иначе}, \end{cases} \tag{11}$$

а также оператора сопряжения, который преобразует выпуклую функцию f в сопряжённую функцию f^*:

$$f^*(g) = \sup_z \{gz - f(z)\}.$$

Применяя сопряжение к индикаторной функции и используя теорию двойственности, получаем известные соотношения

$$(\mathrm{Ind}_Z(z))^*_g = (Z)_g\,, \quad ((Z)_g)^*_z = \mathrm{Ind}_Z(z),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}_Z(x) = \sup_g \{xg - (Z)_g\} &= \sup_g \{xg - \sup_{x' \in Z} x'g\} \\ &= \sup_g \inf_{x' \in Z} \{xg - x'g\} = \sup_g \inf_{x' \in Z} g(x - x'). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\min_{z \in Z} \frac{1}{2}\|z\|^2 = \min_z \left\{ \frac{1}{2}\|z\|^2 + \mathrm{Ind}_Z(z) \right\} \\ &= \min_z \left\{ \frac{1}{2}\|z\|^2 + \sup_g \inf_{z' \in Z} g(z - z') \right\} = \min_z \sup_g \inf_{z' \in Z} \left\{ \frac{1}{2}\|z\|^2 + g(z - z') \right\} \\ &= \sup_g \inf_z \min_{z' \in Z} \left\{ \frac{1}{2}\|z\|^2 + g(z - z') \right\} = \sup_g \min_{z' \in Z} \left\{ -gz' + \min_z \{ \frac{1}{2}\|z\|^2 + gz \} \right\} \\ &= \sup_g \min_{z' \in Z} \left\{ -gz' - \frac{1}{2}\|g\|^2 \right\} = \sup_g \left\{ -\sup_{z' \in Z} \{ gz' - \frac{1}{2}\|g\|^2 \} \right\} \\ &= -\min_g \left\{ \frac{1}{2}\|g\|^2 + \sup_{z' \in Z} (gz') \right\} = -\min_g \left\{ \frac{1}{2}\|g\|^2 + (Z)_g \right\}. \end{aligned}$$

что совпадает с (10) с точностью до обозначения переменных. Теорема 2 доказана.

Заключение

Диаграмма на рис. 1 наглядным образом демонстрирует соотношения между различными оптимизационными задачами, рассмотренными в этой заметке.

Стрелка, ведущая от задачи A к задаче B, означает, что решение B может быть точно получено решением A. Двусторонняя стрелка обозначает эквивалентность, т. е. решение одной из задач может быть также точно получено из решения другой. Односторонняя штриховая стрелка

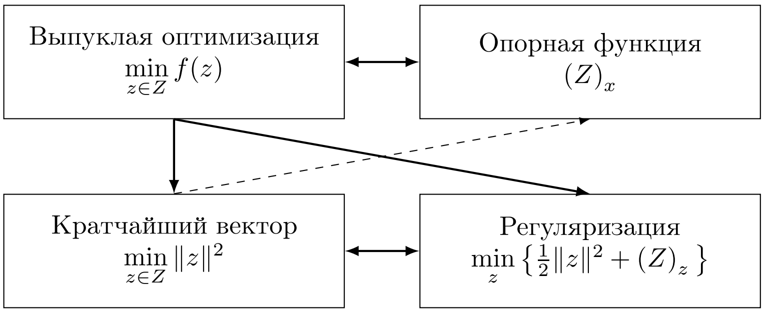

Рис. 1. Соотношения эквивалентности

означает, что задача вычисления опорной функции может быть аппроксимирована задачей вычисления вектора минимальной длины. Очевидно, что этот небольшой граф связный и решение любой из этих задач может быть сведено или, по крайней мере, аппроксимировано с любой точностью решением произвольной иной задачи, возможно, с использованием других промежуточных формулировок.

Особый интерес представляют новые алгоритмические возможности для использования операций проекции для решения оптимизационных задач. Проекционные операторы обладают рядом полезных свойств, таких как однозначность, непрерывность, нерасширяемость, что демонстрируется множеством работ по их использованию для решения многочисленных задач. Масштаб этих работ можно оценить по так и не превзойдённому обзору [7]. Вместе с тем всё ещё дискутируется их вычислительная эффективность [8–10], что представляет определённый вызов для энтузиастов проекционных подходов.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Nurminski E. A.** Single-projection procedure for linear optimization // J. Glob. Optim. 2016. V. 66, No. 1. P. 95–110.
2. **Нурминский Е. А.** Проекция на внешне заданные полиэдры // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 3. С. 387–396.
3. **Аблаев С. С., Макаренко Д. В., Стонякин Ф. С., Алкуса М. С., Баран И. В.** Субградиентные методы для задач негладкой оптимизации с некоторой релаксацией условия острого минимума // Компьют. исследования и моделирование. 2022. Т. 14, № 2. С. 473–495.
4. **Bui H. T., Burachik R. S., Nurminski E. A., Tam M. K.** Single-projection procedure for infinite dimensional convex optimization problems. Ithaca, NY: Cornell Univ., 2022. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv:2210.11252).

5. **Нурминский Е. А.** Ускорение итеративных методов проекции на многогранник // Дальневосточный математический сборник. Вып. 1. Владивосток: Ин-т прикл. математики, 1995. С. 51-62.
6. **Dolgopolik M. V.** Exact penalty functions with multidimensional penalty parameter and adaptive penalty updates // Optim. Lett. 2022. V. 16, No. 4. P. 1281–1300.
7. **Bauschke H. H., Borwein J. M.** On projection algorithms for solving convex feasibility problems // SIAM Rev. 1996. V. 38. P. 367–426.
8. **Gould N. I. M.** How good are projection methods for convex feasibility problems? // Comput. Optim. Appl. 2008. V. 40, No. 1. P. 1–12.
9. **Censor Y., Chen W., Combettes P. L., Davidi R., Herman G. T.** On the effectiveness of projection methods for convex feasibility problems with linear inequality constraints // Comput. Optim. Appl. 2012. V. 51, No. 3. P. 1065–1088.
10. **Johnstone P. R., Eckstein J.** Convergence rates for projective splitting // SIAM J. Optim. 2019. V. 29, No. 3. P. 1931–1957.

Нурминский Евгений Алексеевич

Статья поступила
1 января 2023 г.
После доработки —
21 февраля 2023 г.
Принята к публикации
22 февраля 2023 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
April–June 2023. Vol. 30, No. 2. P. 81–90

UDC 519.853.3 DOI 10.33048/daio.2023.30.762

EQUIVALENCE RELATIONS IN CONVEX OPTIMIZATION

E. A. Nurminski

Far Eastern State University,
10 Ayaks Bay, 690922 Vladivostok, Russia
E-mail: `nurminskiy.ea@dvfu.ru`

Abstract. This article formulates and proves several useful correlations between support functions of convex sets and projection operations over them, such as asymptotic equivalence of projection operations and computation of support functions for general convex closed bounded sets, as well as equivalence between least-norm and regularized convex suplinear optimization problems. These results generalize previously known equivalences for linear optimization problems and provide new and greatly simplified proofs for them. Illustr. 1, bibliogr. 10.

Keywords: convex optimization, regularization, projection, support function.

REFERENCES

1. **E. A. Nurminski,** Single-projection procedure for linear optimization, *J. Glob. Optim.* **66** (1), 95–110 (2016).
2. **E. A. Nurminski,** Projection onto polyhedra in outer representation, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **48** (3), 387–396 (2008) [Russian] [*Comput. Math. Math. Phys.* **48** (3), 367–375 (2008)].
3. **S. S. Ablaev, D. V. Makarenko, F. S. Stonyakin, M. S. Alkousa,** and **I. V. Baran,** Subgradient methods for non-smooth optimization problems with some relaxation of sharp minimum, *Kompyut. Issled. Model.* **14** (2), 473–495 (2022) [Russian].
4. **H. T. Bui, R. S. Burachik, E. A. Nurminski,** and **M. K. Tam,** Single-projection procedure for infinite dimensional convex optimization problems (Cornell Univ., Ithaca, NY, 2022) (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:2210.11252).

This research is supported by Ministry of Science and Higher Education (Agreement 075–02–2023–946).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **17** (2) (2023).

5. **E. A. Nurminski,** Accelerating iterative methods for projection on polyhedrons, in *Dalnevostochnyi Matematicheskii Sbornik,* No. 1 (Inst. Prikl. Mat., Vladivostok, 1995), pp. 51-62 [Russian].
6. **M. V. Dolgopolik,** Exact penalty functions with multidimensional penalty parameter and adaptive penalty updates, *Optim. Lett.* **16** (4), 1281–1300 (2022).
7. **H. H. Bauschke** and **J. M. Borwein,** On projection algorithms for solving convex feasibility problems, *SIAM Rev.* **38**, 367–426 (1996).
8. **N. I. M. Gould,** How good are projection methods for convex feasibility problems? *Comput. Optim. Appl.* **40** (1), 1–12 (2008).
9. **Y. Censor, W. Chen, P. L. Combettes, R. Davidi,** and **G. T. Herman,** On the effectiveness of projection methods for convex feasibility problems with linear inequality constraints, *Comput. Optim. Appl.* **51** (3), 1065–1088 (2012).
10. **P. R. Johnstone** and **J. Eckstein,** Convergence rates for projective splitting, *SIAM J. Optim.* **29** (3), 1931–1957 (2019).

Evgeni A. Nurminski

Received January 1, 2023
Revised February 21, 2023
Accepted February 22, 2023