ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель–июнь 2023. Т. 30, № 2. С. 91–108

УДК 519.865.3 DOI 10.33048/daio.2023.30.759

СВЯЗЬ ДВУХ ПОДХОДОВ К МОДЕЛИ ФИШЕРА

В. И. Шмырёв[1, 2]

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
[2] Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: `shvi@math.nsc.ru`

Аннотация. Работа продолжает исследования автора по проблеме отыскания равновесия в экономических моделях обмена. Для модели Фишера ранее было известно предложенное Гейлом и Айзенбергом сведéние проблемы равновесия к некоторой оптимизационной задаче. Однако конечных алгоритмов на этом пути получено не было. Автором был предложен оригинальный подход полиэдральной комплементарности, сводящий проблему равновесия к оптимизационной задаче иного типа, что дало возможность разработать простые конечные алгоритмы отыскания равновесных цен. Полученные две оптимизационные задачи принципиально отличны, и не известно сведéния одной к другой. Однако сравнительно недавно с использованием специальной схемы двойственности была показана эквивалентность соответствующих двойственных задач. В данной работе излагается общая схема двойственности для выпуклых задач оптимизации, объясняющая природу двойственности, и на её основе установлена эквивалентность двух упомянутых оптимизационных задач для отыскания равновесия в модели Фишера. Ил. 1, библиогр. 17.

Ключевые слова: модель обмена, экономическое равновесие, оптимизационная задача, симплекс, комплементарность, двойственность.

Введение

Для общего случая линейной модели обмена [1] первый конечный алгоритм был предложен Ивесом [2], который свёл проблему к задаче линейной комплементарности. Предложенный автором настоящей работы

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF–2022–0019).

подход полиэдральной комплементарности [3] базируется на принципиально отличной идее. Был предложен новый инструмент анализа проблемы, оформившийся впоследствии в виде задачи полиэдральной комплементарности. Подход не имеет аналогов и позволил получить легко реализуемые конечные алгоритмы не только для общей линейной модели обмена [4], но и для более сложных моделей [5]. Наиболее простые алгоритмы получаются для модели с фиксированными бюджетами, известной как модель Фишера [6]. Айзенберг и Гейл получили первое сведéние проблемы равновесия в этой модели к некоторой оптимизационной задаче [7]. Этот результат был использован многими авторами для исследования алгоритмической стороны вопроса. Некоторый обзор по этой теме можно найти в [8]. Задача Гейла — Айзенберга имеет линейные ограничения, но несмотря на это конечных алгоритмов на этом пути получено не было.

Подход полиэдральной комплементарности даёт альтернативный вариант оптимизационной задачи для проблемы Фишера [3, 9]. Предложенное сведéние также было использовано для получения итеративных алгоритмов как для простейшего варианта модели Фишера, так и в случае наличия дополнительных ограничений на закупки [10]. Однако главное преимущество этого подхода в том, что он даёт конечные алгоритмы, базирующиеся на простой конструкции транспортной задачи.

Кроме этого чисто практического результата, подход привёл к анализу вопросов качественного характера. Проблема равновесия в общей модели обмена была сведена к задаче о неподвижной точке кусочно постоянных точечно-множественных отображений симплекса цен в себя. Оказалось, что для общей модели обмена отображения локально обладают особым свойством монотонности, характерным для задач линейной комплементарности с положительными главными минорами матрицы ограничений (класс P). Это было использовано для разработки конечного алгоритма. Особый класс отображений характеризует модель Фишера — это регулярные отображения. Потенциальность таких отображений позволила свести проблему к оптимизационной задаче.

Подходы Гейла — Айзенберга и полиэдральной комплементарности внешне абсолютно не схожи, и долгое время считалось, что эти подходы никак не связаны между собой. До настоящего времени не установлена эквивалентность предложенных двух оптимизационных задач, но в [11, 12] была показана связь соответствующих двойственных задач.

В настоящей работе рассматривается схема двойственности, обобщающая классическую схему с функцией Лагранжа. По мнению автора этот взгляд на природу двойственности представляет самостоятельный интерес безотносительно к рассматриваемому вопросу о двух подходах к модели Фишера. Идейно схема примыкает к предложенной в [13]. Эта схема позволяет для любой оптимизационной задачи предложить разные варианты двойственных задач. Показано, что в применении к модели Фишера из одной и той же задачи можно в качестве двойственных получить как задачу Гейла — Айзенберга, так и задачу из подхода полиэдральной комплементарности, вскрывая тем самым их внутреннюю связь. По-видимому, это первый случай, когда не удаётся получить эквивалентность двух задач непосредственно, но это оказалось возможным при помощи соответствующих двойственных задач.

1. Модель Фишера

Изложению основных результатов предпошлём краткое описание модели Фишера. Модель Фишера — это частный случай модели обмена, когда бюджеты участников фиксированы. Пусть в модели m участников. Каждый участник $i \in I = \{1, \ldots, m\}$ располагает некоторой суммой денег (бюджетом) λ_i. На эти деньги участник закупает товары, имеющиеся на рынке в заданных количествах. Пусть на рынке имеется n товаров и каждого товара $j \in J = \{1, \ldots, n\}$ ровно одна единица. Пусть свой вектор закупок $x^i \in R^n_+$ участник i выбирает, стараясь максимизировать свою функцию предпочтения (c^i, x^i). При заданном векторе цен $p \in R^n_+$ задача участника i имеет вид

$$(c^i, x^i) \to \max \tag{1}$$

при условиях

$$(p, x^i) \leqslant \lambda_i, \tag{2}$$

$$x^i \geqslant 0. \tag{3}$$

Требуется найти такой *равновесный* вектор цен $\widetilde{p}$, при котором среди оптимальных решений задач участников найдутся векторы $\widetilde{x}^{\,i}(\widetilde{p})$, удовлетворяющие условиям баланса товаров:

$$\sum_{i \in I} \widetilde{x}^{\,i}_j(\widetilde{p}) = 1, \quad j \in J,$$

где $\widetilde{x}^{\,i}_j(\widetilde{p})$ — компоненты вектора $\widetilde{x}^{\,i}(\widetilde{p})$. Ясно, что для векторов $\widetilde{x}^{\,i}(\widetilde{p})$ неравенства (2) должны выполняться как равенства.

Из приведённого условия баланса товаров следует, что

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = \sum_{j \in J} p_j. \tag{4}$$

Будем считать, что $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i = 1$, следовательно, вектор цен p принадлежит единичному симплексу

$$\sigma = \Bigl\{ p \in \mathbb{R}^n_+ \mid \sum_{j \in J} p_j = 1 \Bigr\}.$$

Для этой модели было предложено два разных подхода. Исторически первым был подход Гейла — Айзенберга. Он состоял в том, что модели сопоставлялась оптимизационная задача следующего вида.

Задача Гейла — Айзенберга:

$$\sum_{i\in I}\lambda_i \ln \sum_{j\in J} c_j^i x_j^i \to \max$$

при условиях

$$\sum_{i\in I} x_j^i = 1, \quad j \in J, \tag{5}$$

$$x_j^i \geqslant 0, \quad (i,j) \in I \times J,$$

где c_j^i, x_j^i — компоненты векторов c^i, x^i.

Очень просто показывается, что равновесные цены модели задаются оптимальными значениями множителями Лагранжа для уравнений (5).

Второй подход к отысканию равновесия в модели Фишера был разработан В. И. Шмырёвым [6]. Предложенный алгоритм возник как реализация общего подхода [3] применительно к данному случаю. Порождающей задачей является параметрическая транспортная задача

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{ij} \ln c_j^i \to \max \tag{6}$$

при следующих ограничениях:

$$\sum_{j\in J} z_{ij} = \lambda_i, \quad i \in I,$$

$$\sum_{i\in I} z_{ij} = p_j, \quad j \in J,$$

$$z_{ij} \geqslant 0, \quad (i,j) \in I \times J.$$

Параметрами задачи являются цены p_j. Уравнения этой задачи представляют собой финансовые балансы для участников и товаров. Переменные z_{ij} вводятся равенствами $z_{ij} = p_j x_j^i$.

Это классическая транспортная задача. В предположении (4) её множество допустимых решений непусто, и она разрешима при любом векторе цен $p \in \sigma$. Будем считать, что выполняется условие двойственной невырожденности и, следовательно, решение всегда единственно.

Пусть $f(p)$ — функция, задающая оптимальное значение целевой функции (6). С ней можно связать две функции, позволяющие свести проблему равновесия к двум оптимизационным задачам на симплексе цен.

Первая из функций имеет вид $\varphi(p) = h(p) - f(p)$, где $h(p) = (p, \ln p)$ для $p \in \sigma^\circ$ и $h(p) = 0$ на границе симплекса. Здесь $\ln p$ — это вектор с компонентами $\ln p_j$. Функция $\varphi(p) = h(p) - f(p)$ строго выпуклая и, следовательно, имеет на σ единственную точку минимума, которая ввиду свойств функции h принадлежит σ°.

Задача в подходе полиэдральной комплементарности:

$$\varphi(p) = h(p) - f(p) \to \min_{p \in \sigma}.$$

Вторая из упомянутых функций связана с функцией f^*, сопряжённой к f [17], и задаётся формулой $\psi(q) = f^*(\ln q)$, $q \in \sigma^\circ$. Заметим, что рассматриваемая функция f вогнутая. Для произвольной вогнутой функции g сопряжённая функция g^* определяется равенством $g^*(y) = \inf_x \{(y, x) - g(x)\}$. Функции $\varphi(p)$ и $\psi(q)$ связаны неравенством

$$\varphi(p) \geqslant \psi(q), \quad p, q \in \sigma^\circ.$$

Равенство в этом неравенстве достигается, только если $p = q$ [14].

Результатом рассмотрений автора [6] (см. также [14]) является

Теорема 1. *Равновесный вектор цен модели Фишера задаётся точкой максимума функции $\psi(q)$ и точкой минимума функции $\varphi(p)$.*

Таким образом, для функций $\varphi(p)$ и $\psi(q)$ имеет место картина двойственности, как в линейном программировании, и вместо минимизации функции $\varphi(p)$ можно максимизировать функцию $\psi(q)$. Для этой функции в работе автора [14] получено явное задание.

Целью рассмотрений этой работы является доказательство эквивалентности задачи Гейла — Айзенберга и задачи из подхода полиэдральной комплементарности, что достигается путём использования излагаемой ниже общей схемы двойственности.

2. Обобщённая двойственность

Под задачей выпуклой оптимизации будем понимать задачу вида

$$f(x) \to \max_{x \in X},$$

где f — некоторая вогнутая функция, а X — выпуклое замкнутое множество в R^n. Предполагается, что точка безусловного максимума функции f не принадлежит множеству X, а f дифференцируема.

В математическом программировании множество X задаётся системой неравенств типа $f_i(x) \leqslant 0$ с выпуклыми функциями f_i. Классическая схема получения двойственной задачи базируется на рассмотрении функции Лагранжа. С краткой предысторией развития идей двойственности можно познакомиться в [13]. Следовало бы лишь упомянуть об оригинальном использовании функции Лагранжа для получения двойственной задачи в квадратичном программировании [15].

В линейном программировании используется более простая схема: путём суммирования условий задачи, умноженных на подходящие множители, требуется получить самую хорошую оценку на целевую функцию — снизу в случае минимизации или сверху в случае максимизации (см. [16]).

Эти подходы являются частными случаями более общей схемы, которая состоит в следующем. Рассматривается параметризованное семейство выпуклых множеств X_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, являющихся расширениями множества X: $X_\alpha \supsetneq X$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Предполагается, что пересечение всех этих множеств совпадает с множеством X:

$$\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha = X.$$

Для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ рассматривается вспомогательная задача максимизации функции f на множестве X_α:

$$f(x) \to \max_{x \in X_\alpha}. \tag{7}$$

Вводится множество D тех α, для которых эта задача разрешима и

$$\max_{x \in X_\alpha} f(x) < \sup f(x).$$

Предполагается, что множество D непусто и выпукло.

Вводится функция $\varphi(\alpha)$, задающая значение функции f на оптимальном векторе x^α введённой вспомогательной задачи. Полагаем $\varphi(\alpha) = +\infty$ для $\alpha \notin D$. Функция $\varphi(\alpha)$ предполагается непрерывной и квазивыпуклой на D:

$$\varphi((1-t)\alpha_1 + t\alpha_2) \leqslant \max\{\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2)\}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{A},\ t \in (0,1), \tag{8}$$

и это неравенство строгое, если $\varphi(\alpha_1) \neq \varphi(\alpha_2)$. Квазивыпуклость функции $\varphi(\alpha)$ обеспечивает отсутствие локальных минимумов.

В качестве двойственной задачи вводится задача вида

$$\varphi(\alpha) \to \min_{\alpha \in D}. \tag{9}$$

Легко видеть, что ввиду того, что $X \subset X_\alpha$ при всех $\alpha \in D$, имеем *неравенство двойственности*

$$f(x) \leqslant \varphi(\alpha), \quad x \in X,\ \alpha \in D. \tag{10}$$

Если это неравенство для некоторых $x^* \in X$, $\alpha^* \in D$ обращается в равенство, то очевидно, что x^* решает исходную задачу, а α^* решает двойственную, тем самым обе задачи разрешимы и оптимальные значения их целевых функций совпадают:

$$\max_{x \in X} f(x) = \min_{\alpha \in D} \varphi(\alpha).$$

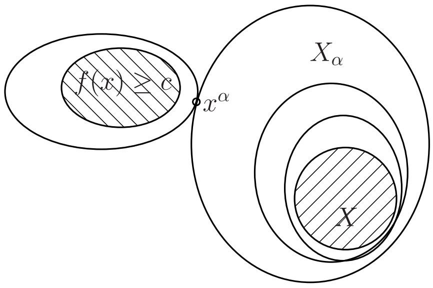

Рис. 1. Общая схема двойственности

В этом случае будем говорить, что имеет место *равенство двойственности.*

Несложно сформулировать достаточное условие для справедливости этого равенства.

Теорема 2. *При сделанных предположениях о семействе $\mathfrak{A}$ для справедливости равенства двойственности достаточно, чтобы любая гиперплоскость, опорная к множеству X, была опорной и к некоторому множеству из семейства $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Пусть $x^* \in X$ решает исходную задачу и Q — множество более предпочтительных точек: $Q = \{x \mid f(x) > f(x^*)\}$. Это открытое выпуклое множество. В силу известных теорем выпуклого анализа существует гиперплоскость H с нормалью $\nabla f(x^*)$, разделяющая множества X и Q. Эта плоскость будет опорной к множеству X: $(\nabla f(x^*), x - x^*) \leqslant 0$ при всех $x \in X$. Если в семействе $\mathfrak{A}$ найдётся множество X_{α^*}, для которого гиперплоскость H также будет опорной, то из того, что $x^* \in X \subset X_{\alpha^*}$, следует оптимальность x^* в соответствующей вспомогательной задаче и будет выполняться равенство двойственности: $\varphi(\alpha^*) = f(x^*)$.

Так же просто показывается, что разрешимость двойственной задачи влечёт разрешимость исходной и выполнение требуемого равенства. Для этого достаточно заметить, что если некоторая точка $\widehat{x}$ не принадлежит множеству X, то найдётся гиперплоскость, опорная к X и строго отделяющая $\widehat{x}$ от X. Кроме того, из условия теоремы вытекает, что найдётся множество X_α, обладающее тем же свойством отделимости. Таким образом, если α^* решает двойственную задачу и x^* — соответствующее решение вспомогательной задачи на X_{α^*}, то $x^* \in X$ и x^* — решение исходной задачи. Теорема 2 доказана.

Изложенная схема введения двойственной задачи идейно повторяет схему, рассмотренную в [13]. Отличие состоит лишь в том, что каждое множество X_α предполагается заданным посредством некоторой функции g через неравенство $g(x) \leqslant 0$. Семейство рассматриваемых множеств порождается некоторым семейством G таких функций. Рассмотрим этот случай более подробно.

Множество G естественно предполагается выпуклым конусом. Пусть, как и выше, $x^* \in X$ — оптимальное решение исходной задачи и $G(x^*) = \{g \in G \mid g(x^*) = 0\}$. Точка x^* будет граничной для каждого из множеств X_α, порождаемого функциями $g \in G(x^*)$. Пусть Z — конус нормалей гиперплоскостей, опорных к этим множествам в точке x^*. Ясно, что Z — выпуклый конус ввиду выпуклости множества G. Аналогично является выпуклым конусом и множество V нормалей гиперплоскостей, опорных в точке x^* к множеству X. Ввиду того, что $X \subset X_\alpha$, имеем $Z \subseteq V$, и равенство двойственности выполнено, если $Z = V$. Тогда из того, что $\nabla f(x^*) \in V$, следует $\nabla f(x^*) \in Z$. Это означает, что найдётся функция $g \in G(x^*)$, порождающая множество X_{α^*}, для которого точка x^* будет также оптимальной.

Стандартный подход к задаче выпуклого программирования. Традиционная схема введения двойственных задач для задач выпуклого программирования базируется на рассмотрении функции Лагранжа. Легко видеть, что, применяя рассматриваемую схему, мы получим прежние конструкции.

Рассмотрим задачу выпуклого программирования с системой ограничений $f_i(x) \leqslant 0$, $i \in I = \{1, \ldots, m\}$. Функции f_i предполагаются дифференцируемыми. Кроме того, пусть выполнено условие регулярности (условие Слейтера): существует точка $\overline{x}$, для которой все неравенства задачи выполняются как строгие. Вводя неотрицательные множители α_i, можно принять $\mathfrak{A} = \mathbb{R}^m_+$ и в качестве семейства G рассматривать функции $g = \sum \alpha_i f_i$. Имеем $X_\alpha = \bigl\{x \mid \sum\limits_{i \in I} \alpha_i f_i(x) \leqslant 0\bigr\}$. Пусть x^* — оптимальное решение задачи. При условии регулярности конус V будет конической оболочкой градиентов $\nabla f_i(x^*)$ при $i \in I(x^*) = \{i \in I \mid f_i(x^*) = 0\}$. Для образования конуса Z нужно рассматривать нормали функций g таких, что $g(x^*) = 0$. Ввиду условия $\alpha_i \geqslant 0$ это приводит к рассмотрению в формуле для g лишь функций f_i при $i \in I(x^*)$. Таким образом, конус Z будет конической оболочкой тех же градиентов, что и конус V. Равенство двойственности будет выполняться.

Блочный подход к задаче выпуклого программирования. Допустим, что множество ограничений задачи разбито на r групп (блоков). Это соответствует разбиению множества I на подмножества $I_1, \ldots, I_r$. Для каждого подмножества I_k будем рассматривать всевозможные линейные комбинации с неотрицательными коэффициентами соответствующих функций, получая таким образом функции $\widehat{f}_k$. Семейство этих функций принимаем в качестве множества G, порождающего семейство множеств X_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Теперь для образования конуса Z следует образовать коническую оболочку градиентов $\nabla \widehat{f}_k(x^*)$ при $k \in \widehat{G}(x^*) = \{s \mid \widehat{f}_s(x^*) = 0\}$. Поскольку функции $\widehat{f}_k$ являются линейными комбинациями с неотрицательными коэффициентами функций f_i соответствующего блока и $\widehat{f}_k(x^*) = 0$ лишь при $f_i(x^*) = 0$ для всех $i \in I_k$, конус Z представляет собой коническую оболочку градиентов $\nabla f_i(x^*)$ при $i \in I(x^*)$, т. е. совпадает с конусом V.

Таким образом, равенство двойственности при таком получении двойственной задачи остаётся в силе.

Основной результат данной работы состоит в применении изложенной схемы двойственности к модели Фишера. Показано, как из одной и той же задачи, меняя семейство $\mathfrak{A}$, можно получить как задачу из подхода полиэдральной комплементарности, так и оптимизационную задачу Гейла — Айзенберга. При этом в последнем случае используется изложенный блочный вариант.

3. Иллюстративный пример

Изложенная схема двойственности позволяет для любой конкретной оптимизационной задачи получать разные варианты двойственной задачи, меняя используемое семейство множеств X_α. Проиллюстрируем это на примере задачи линейного программирования. В качестве конкретного иллюстративного примера рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} f(x) = 3x_1 + 2x_2 \to \min, \\ x_1 + x_2 \geqslant 1, \\ x_1 - x_2 \geqslant 2, \\ x_1 \geqslant 3. \end{gathered}$$

Эта задача на минимум, что вносит очевидные коррективы в предыдущие рассмотрения. Оптимальным решением является $x^* = (3, -2)$.

Стандартный вариант двойственной задачи.

$$\begin{gathered} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 \to \max, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 2, \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geqslant 0. \end{gathered}$$

Эта задача получается из общей схемы, если принять $\mathfrak{A} = \mathbb{R}^3_+$ и множества X_α описывать неравенствами, полученными суммированием неравенств задачи, умноженных на соответствующие коэффициенты α_i. Решением двойственной задачи является вектор $\alpha^* = (2, 0, 1)$ и $\varphi(\alpha^*) = 5$.

Блочный подход к получению двойственной задачи. Разделим ограничения задачи на два блока: первое неравенство отнесём в первый блок, а второе и третье — во второй. Имеем $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{2, 3\}$. Вводим неотрицательные множители: α_1 для первого блока и α_2, α_3 для второго блока. Получаем два ограничения во вспомогательной задаче:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 \geqslant \alpha_1,$$
$$(\alpha_2 + \alpha_3)x_1 - \alpha_2 x_2 \geqslant 2\alpha_2 + 3\alpha_3.$$

На α_i в каждом блоке нужно наложить дополнительно некоторые условия нормировки. Примем $\alpha_1 = 1$, временно откладывая вопрос о нормировке во втором блоке. Вспомогательная задача принимает вид

$$3x_1 + 2x_2 \to \min,$$
$$x_1 + x_2 \geqslant 1,$$
$$(\alpha_2 + \alpha_3)x_1 - \alpha_2 x_2 \geqslant 2\alpha_2 + 3\alpha_3.$$

Здесь α_2, α_3 являются параметрами задачи. Несложные выкладки позволяют получить её решение как функции этих параметров:

$$x_1^* = \frac{3\alpha_2 + 3\alpha_3}{2\alpha_2 + \alpha_3}, \quad x_2^* = \frac{-\alpha_2 - 2\alpha_3}{2\alpha_2 + \alpha_3}.$$

Примем в качестве условия нормировки во втором блоке равенство $3\alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Получаем

$$x_1^* = 3\alpha_2 + 3\alpha_3, \quad x_2^* = -\alpha_2 - 2\alpha_3.$$

Для значения целевой функции $3x_1^* + 2x_2^*$ имеем $3x_1^* + 2(1 - x_1^*) = x_1^* + 2$. Таким образом, $\varphi(\alpha) = 2 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3$.

В итоге двойственная задача принимает вид

$$2 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 \to \max,$$
$$2\alpha_2 + \alpha_3 = 1,$$
$$\alpha_2, \alpha_3 \geqslant 0.$$

Её решение: $\alpha_2^* = 0,\ \alpha_3^* = 1$ и $\varphi(\alpha^*) = 5$. Легко убедиться, что полученная двойственная задача эквивалентна классическому варианту.

4. Связь двух подходов к модели Фишера

Вернёмся к рассмотрению главного вопроса о связи подходов Гейла — Айзенберга и полиэдральной комплементарности.

Теорема 3. *Задача Гейла — Айзенберга и задача минимизации функции $\varphi(p)$ в подходе полиэдральной комплементарности двойственны одной и той же задаче — задаче максимизации функции $\psi(q)$ и порождаются двумя разными семействами расширений допустимого множества X.*

Доказательство. Для функции $\psi(q)$ в [14] приводится явное задание в виде следующей формулы:

$$\psi(q) = -\sum_{i\in I} \lambda_i \max_{j\in J} \ln \frac{c_j^i}{q_j}. \tag{11}$$

I. Задача минимизации функции $\varphi(p)$. Покажем, что задача минимизации функции $\varphi(p)$ получается при применении стандартного подхода для получения двойственной задачи к задаче максимизации функции $\psi(q)$. Тем самым будет показано, что имеет место аналог известного факта из линейного программирования: задача, двойственная к двойственной, совпадает с исходной задачей.

Несложно убедиться, что задача максимизации $\psi(q)$ ввиду положительности λ_i эквивалентна задаче

$$\widetilde{\psi}(q,u) = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i \to \min_{q,u} \tag{12}$$

при условиях

$$q \in \sigma^\circ,$$

$$u_i \geqslant \ln \frac{c_j^i}{q_j}, \quad (i,j) \in I \times J, \tag{13}$$

т. е.

$$u_i \geqslant \ln c_j^i - \ln q_j, \quad (i,j) \in I \times J. \tag{14}$$

Применим к этой задаче стандартный подход к образованию двойственной задачи. Домножив неравенства (14) на неотрицательные множители z_{ij} и сложив их, получим неравенство

$$\sum_{i\in I} u_i \sum_{j\in J} z_{ij} \geqslant \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{ij} \ln c_j^i - \sum_{j\in J} \ln q_j \sum_{i\in I} z_{ij}. \tag{15}$$

Это неравенство вместе с требованием $q \in \sigma^\circ$ задаёт множество X_α. Роль параметров α_i выполняют множители z_{ij}. На этом множестве нужно выполнить оптимизацию (12). Легко показать, что эта задача будет разрешимой лишь при условии, что все коэффициенты при неизвестных u_i в неравенстве (15) пропорциональны коэффициентам λ_i. В противном случае будет $\inf \sum_{i\in I} \lambda_i u_i = -\infty$. Таким образом, при некотором $t > 0$ должно выполняться условие

$$\sum_{j\in J} z_{ij} = t\lambda_i, \quad i \in I.$$

С другой стороны, множество X_α не изменится при пропорциональном изменении множителей z_{ij}, поэтому здесь можно считать $t = 1$. В итоге получаем такую систему условий:

$$\sum_{j\in J} z_{ij} = \lambda_i, \quad i \in I. \tag{16}$$

Эти уравнения задают множество D, о котором говорилось ранее при описании общей схемы. В результате неравенство (15) принимает вид

$$\sum_{i\in I} \lambda_i u_i \geqslant \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{ij} \ln c_j^i - \sum_{j\in J} \ln q_j \sum_{i\in I} z_{ij}.$$

Левая часть этого неравенства совпадает с минимизируемой функцией, а правая задаёт оценку снизу, которая зависит от $q \in \sigma^\circ$. Оптимальное значение функции будет совпадать с этой оценкой, когда оценка минимальна при вариации точки $q \in \sigma^\circ$. В результате приходим к задаче

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{ij} \ln c_j^i - \sum_{j\in J} \ln q_j \sum_{i\in I} z_{ij} \to \min_{q\in\sigma^\circ}. \tag{17}$$

Введём вспомогательные переменные p_j формулой

$$p_j = \sum_{i\in I} z_{ij}.$$

Имеем

$$\sum_{j\in J} p_j = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} z_{ij} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{ij} = \sum_{i\in I} \lambda_i = 1.$$

Таким образом, $p \in \sigma$.

Минимизируемая функция в задаче (17) принимает вид

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{ij} \ln c_j^i - (p, \ln q) \to \min_{q\in\sigma^\circ}. \tag{18}$$

Известно, что

$$(p, \ln p) \geqslant (p, \ln q), \quad p, q \in \sigma^\circ.$$

В результате оптимальное значение в задаче (17) таково:

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{ij} \ln c_j^i - (p, \ln p).$$

Мы получили оптимальное значение во вспомогательной задаче оптимизации исходной функции на множестве X_α, т. е. значение функции $\varphi(\alpha)$. Отметим, что здесь вектор p зависит от переменных z_{ij}. Двойственная задача состоит в максимизации полученного значения при изменении параметров α, в данном случае — множителей z_{ij}. Введём функцию $f(p)$, которая задаёт оптимальное значение в задаче

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} z_{ij} \ln c_j^i \to \max,$$

$$\sum_{j\in J} z_{ij} = \lambda_i, \quad i \in I,$$

$$\sum_{i\in I} z_{ij} = p_j, \quad j \in J,$$

$$z_{ij} \geqslant 0, \quad (i,j) \in I \times J.$$

В итоге двойственная задача принимает вид

$$h(p) - f(p) \to \min_{p\in\sigma},$$

где $h(p) = (p, \ln p)$ для $p \in \sigma^\circ$ и $h(p) = 0$ на границе симплекса σ. Это задача, лежащая в основе подхода полиэдральной комплементарности к модели Фишера.

II. Задача Гейла — Айзенберга. Вернёмся к задаче максимизации функции $\psi(q)$ и покажем, как из неё при ином выборе семейства выпуклых множеств X_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, в качестве двойственной получается задача Гейла — Айзенберга.

Используя монотонность функции ln, перейдём к эквивалентной формуле для $\psi(q)$:

$$\psi(q) = -\sum_{i\in I} \lambda_i \ln \max_{j\in J} \frac{c^i_j}{q_j}. \tag{19}$$

Задача максимизации этой функции эквивалентна следующей:

$$\widetilde{\psi}(q,u) = \sum_{i\in I} \lambda_i \ln u_i \to \min_{q,u} \tag{20}$$

при условиях

$$q \in \sigma^\circ,$$

$$u_i \geqslant \lambda_i \frac{c^i_j}{q_j}, \quad (i,j) \in I \times J, \tag{21}$$

т. е.

$$u_i q_j \geqslant \lambda_i c^i_j, \quad (i,j) \in I \times J. \tag{22}$$

Для получения двойственной задачи вводим множители $x_{ij} \geqslant 0$. Они выполняют роль параметров α_i в общей схеме, описанной ранее. Используем блочный вариант схемы. Домножим на эти множители неравенства (22) и просуммируем по j в каждой группе при фиксированном i. Получим систему неравенств

$$u_i(q, x^i) \geqslant \lambda_i(c^i, x^i), \quad i \in I, \tag{23}$$

где $x^i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$. Эти неравенства вместе с требованием

$$\sum_{j\in J} q_j = 1 \tag{24}$$

и $q > 0$ задают множество X_α, на котором следует рассматривать вспомогательную задачу минимизации функции $\widetilde{\psi}(q, u)$. Получающееся оптимальное значение задаст оценку снизу в задаче (20). Двойственная задача будет заключаться в максимизации такой оценки путём изменения множителей x_{ij}.

Условие (23) не изменится, если домножить вектор x^I на положительный множитель. Можно наложить дополнительное условие, исключающее такую возможность. В качестве таких условий принимаем равенства

$$(q, x^i) = \lambda_i, \quad i \in I. \tag{25}$$

Тогда из (23) следует, что

$$u_i \geqslant (c^I, x^i), \quad i \in I.$$

Функция ln возрастающая, и минимизация по u_i функции $\widetilde{\psi}(q, u)$ во вспомогательной задаче даст оптимальное значение: $\sum\limits_{i \in I} \lambda_i \ln(c^I, x^i)$. Его нужно максимизировать в двойственной задаче, меняя x^i. На x^i имеем ограничение (25), зависящее от q. Покажем, как можно избавиться от переменных q. Добавим систему уравнений

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J. \tag{26}$$

Домножая обе части равенства на q_j и суммируя, получим (24). Таким образом, это условие на q можно отбросить, заменив его системой (26). Остаются условия (25) и $q > 0$. Если отбросить и их, в качестве двойственной задачи получаем в точности задачу Гейла — Айзенберга. Как известно, в результате её решения получаются оптимальные x^i и вектор равновесных цен $q > 0$, для которых условия (25) выполняются. Таким образом, искомая двойственная задача совпадает с задачей Гейла — Айзенберга. Теорема 3 доказана.

Заключение

Проведённые исследования позволяют прояснить связь двух разных подходов к отысканию равновесных цен в экономической модели обмена с фиксированными бюджетами (модель Фишера) — подхода Гейла — Айзенберга и предложенного автором подхода полиэдральной комплементарности. Изучается природа двойственности для выпуклых задач оптимизации. Для задач выпуклого программирования предлагаемый подход к получению двойственной задачи отличается от обычно рассматриваемых схем на основе функции Лагранжа.

Автор выражает искреннюю признательность анонимному рецензенту за содержательные замечания и полезные советы, способствовавшие улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Gale D.** The linear exchange model // J. Math. Econ. 1976. V. 3, No. 2. P. 205–209.
2. **Eaves B. C.** A finite algorithm for linear exchange model // J. Math. Econ. 1976. V. 3, No. 2. P. 197–203.
3. **Шмырёв В. И.** Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 5. С. 1062–1066.
4. **Шмырёв В. И.** Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 2. С. 162–175.
5. **Шмырёв В. И.** Обобщённая линейная модель обмена // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2006. Т. 13, № 2. С. 74–102.
6. **Шмырёв В. И.** Об одном алгоритме отыскания равновесия в линейной модели обмена с фиксированными бюджетами // Сиб. журн. индустр. математики. 2008. Т. 11, № 2. С. 139–154.
7. **Eisenberg E., Gale D.** Consensus of subjective probabilities: The pari-mutuel method // Ann. Math. Stat. 1959. V. 30, No. 1. P. 165–168.
8. **Devanur N. R., Papadimitriou C. H., Saberi A., Vazirani V. V.** Market equilibrium via a primal-dual algorithm for a convex program // J. ACM. 2008. V. 55, No. 5, ID 22. 18 p.
9. **Shmyrev V. I.** An algorithmic approach for searching an equilibrium in fixed budget exchange models // Russian contributions to game theory and equilibrium theory. Heidelberg: Springer, 2006. P. 217–235. (Theory Decis. Libr., Ser. C; V. 39).
10. **Birnbaum B., Devanur N. R., Xiao L.** Distributed algorithms via gradient descent for Fisher markets // Proc. 12th ACM Conf. Electronic Commerce (San Jose, CA, USA, June 5–9, 2011). New York: ACM, 2011. P. 127–136.
11. **Cole R., Devanur N., Gkatzelis V., Faira K. J., Mai T., Vazirani V. V., Yazdanbod S.** Convex program duality, Fisher markets, and Nash social welfare // Proc. 2017 ACM Conf. Economics and Computation (Cambridge, MA, USA, June 26–30, 2017). New York: ACM, 2017. P. 459–460.
12. **Шмырёв В. И.** Двойственность в линейных экономических моделях обмена // Тр. Ин-та математики и механики. 2020. Т. 26, № 3. С. 258–274.
13. **Svaiter B. F.** A new duality theory for mathematical programming // J. Math. Program. Oper. Res. 2011. V. 60, No. 8–9. P. 1209–1231.
14. **Shmyrev V. I.** Polyhedral complementarity approach to equilibrium problem in linear exchange models // Optimization algorithms — Examples. London: IntechOpen, 2018. P. 27–46.
15. **Деннис Дж. Б.** Математическое программирование и электрические цепи. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 215 с.

16. **Шмырёв В. И.** Введение в математическое программирование. М.: Ин-т компьют. исслед., 2002. 192 с.
17. **Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.

Шмырёв Вадим Иванович

Статья поступила
15 декабря 2022 г.
После доработки —
15 февраля 2023 г.
Принята к публикации
16 февраля 2023 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
April–June 2023. Vol. 30, No. 2. P. 91–108

UDC 519.865.3 DOI 10.33048/daio.2023.30.759

CONNECTION OF TWO APPROACHES TO THE FISHER MODEL

V. I. Shmyrev[1, 2]

[1] Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
[2] Novosibirsk State University,
2 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: `shvi@math.nsc.ru`

Abstract. The article continues the author's research on the problem of finding equilibrium in economic exchange models. For the Fisher model, it was previously known that the equilibrium problem can be reduced to some optimization problem. This result was obtained by Gale and Eisenberg, while the final algorithms on this way were not found. The author proposed the original polyhedral complementarity approach, which generated an optimization problem of a different type. This approach made possible the development of finite algorithms for finding the equilibrium. So far, the equivalence of these two optimization problems has not been shown. However, it turned out that the dual problems obtained in a special way are equivalent. In this paper, a general scheme of duality for convex optimization problems is proposed. This scheme allows us to clarify the nature of duality and the relationship between the Gale–Eisenberg and the polyhedral complementarity approaches. Illustr. 1, bibliogr. 17.

Keywords: exchange model, economic equilibrium, optimization problem, simplex, complementarity, duality.

REFERENCES

1. **D. Gale,** The linear exchange model, *J. Math. Econ.* **3** (2), 205–209 (1976).
2. **B. C. Eaves,** A finite algorithm for linear exchange model, *J. Math. Econ.* **3** (2), 197–203 (1976).
3. **V. I. Shmyrev,** On an approach to the determination of equilibrium in elementary exchange models, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **268** (5), 1062–1066 (1983) [Russian] [*Sov. Math. Dokl.* **27** (1), 230–233 (1983)].

This research is carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (Project FWNF–2022–0019).

4. **V. I. Shmyrev,** An algorithm for the search of equilibrium in the linear exchange model, *Sib. Mat. Zh.* **26** (2), 162–175 (1985) [Russian] [*Sib. Math. J.* **26** (2), 288–300 (1985)].
5. **V. I. Shmyrev,** A generalized linear exchange model, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **13** (2), 74–102 (2006) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **2** (1), 125–142 (2008)].
6. **V. I. Shmyrev,** An algorithm for finding equilibrium in the linear exchange model with fixed budgets, *Sib. Zh. Ind. Mat.* **11** (2), 139–154 (2008) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **3** (4), 505–518 (2009)].
7. **E. Eisenberg** and **D. Gale,** Consensus of subjective probabilities: The pari-mutuel method, *Ann. Math. Stat.* **30** (1), 165–168 (1959).
8. **N. R. Devanur, C. H. Papadimitriou, A. Saberi,** and **V. V. Vazirani,** Market equilibrium via a primal-dual algorithm for a convex program, *J. ACM* **55** (5), ID 22, 18 p. (2008).
9. **V. I. Shmyrev,** An algorithmic approach for searching an equilibrium in fixed budget exchange models, in *Russian Contributions to Game Theory and Equilibrium Theory* (Springer, Heidelberg, 2006), pp. 217–235 (Theory Decis. Libr., Ser. C, Vol. 39).
10. **B. Birnbaum, N. R. Devanur,** and **L. Xiao,** Distributed algorithms via gradient descent for Fisher markets, in *Proc. 12th ACM Conf. Electronic Commerce, San Jose, CA, USA, June 5–9, 2011* (ACM, New York, 2011), pp. 127–136.
11. **R. Cole, N. Devanur, V. Gkatzelis, K. J. Faira, T. Mai, V. V. Vazirani,** and **S. Yazdanbod,** Convex program duality, Fisher markets, and Nash social welfare, in *Proc. 2017 ACM Conf. Economics and Computation, Cambridge, MA, USA, June 26–30, 2017* (ACM, New York, 2017), pp. 459–460.
12. **V. I. Shmyrev,** Duality in linear economic models of exchange, *Tr. Inst. Mat. Mekh.* **26** (3), 258–274 (2020) [Russian].
13. **B. F. Svaiter,** A new duality theory for mathematical programming, *J. Math. Program. Oper. Res.* **60** (8–9), 1209–1231 (2011).
14. **V. I. Shmyrev,** Polyhedral complementarity approach to equilibrium problem in linear exchange models, in *Optimization Algorithms — Examples* (IntechOpen, London, 2018), pp. 27–46.
15. **J. B. Dennis,** *Mathematical Programming and Electrical Networks* (MIT Press, Cambridge, MA, 1959; Izd. Inostr. Lit., Moscow, 1961 [Russian]).
16. **V. I. Shmyrev,** *Introduction to Mathematical Programming* (Inst. Kompyut. Issled., Moscow, 2002) [Russian].
17. **R. Rockafellar,** *Convex Analysis* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1970; Mir, Moscow, 1973 [Russian]).

Vadim I. Shmyrev

Received December 15, 2022
Revised February 15, 2023
Accepted February 16, 2023