

О ДЕРЕВЬЯХ ЗАДАННОГО ДИАМЕТРА  
С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ КОЛИЧЕСТВОМ  
 $k$ -ДИСТАНЦИОННЫХ НЕЗАВИСИМЫХ МНОЖЕСТВ

Д. С. Талецкий<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
ул. Большая Печерская, 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия

<sup>2</sup> Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского,  
пр. Гагарина, 23, 603950 Нижний Новгород, Россия

E-mail: dmitalmail@gmail.com

**Аннотация.** Множество вершин графа называется  $k$ -дистанционным независимым, если расстояние между любыми двумя его вершинами больше некоторого целого числа  $k \geq 1$ . В работе рассматривается задача описания  $n$ -вершинных деревьев фиксированного диаметра  $d$ , содержащих максимально и минимально возможное число  $k$ -дистанционных независимых множеств среди всех таких деревьев. Задача на максимум решается для случая  $1 < k < d \leq 5$  при всех достаточно больших значениях  $n$ . Задача на минимум существенно более простая и решается для всех значений параметров  $1 < k < d < n$ . Ил. 4, библиогр. 10.

**Ключевые слова:** дерево, независимое множество,  $k$ -дистанционное независимое множество, диаметр.

### Введение

Независимым множеством графа называется произвольное подмножество попарно не смежных его вершин.  $k$ -Дистанционным независимым множеством (сокращённо  $k$ -ДНМ) графа называется подмножество его вершин, любые две из которых находятся на расстоянии более  $k \geq 1$  друг от друга. В частности, 1-ДНМ является обычным независимым множеством. Диаметром  $\text{diam}(G)$  связного графа  $G$  называется максимально возможное расстояние между двумя его вершинами. Через  $i_k(G)$  обозначается число различных  $k$ -ДНМ, которое содержит граф  $G$ . Будем называть  $n$ -вершинное дерево диаметра  $d$   $(i_k, d, n)$ -максимальным

---

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 21–11–00194).

(( $i_k, d, n$ )-минимальным), если оно содержит максимально (минимально) возможное число  $k$ -ДНМ среди всех таких деревьев.

Обозначим через  $S_{d,n}$   $n$ -вершинное дерево диаметра  $d$ , полученное из пути  $P_d$  присоединением  $n - d$  листьев к одному из его концов. Очевидно, что звезда  $S_n$ , изоморфная  $S_{2,n}$ , является единственным ( $i_1, 2, n$ )-максимальным деревом. В [1] показано, что для всех  $2 < d < n$  единственным ( $i_1, d, n$ )-максимальным деревом является граф  $S_{d,n}$ . С другой стороны, ( $i_1, d, n$ )-минимальные деревья устроены значительно сложнее, и задача их описания в случае  $d \geq 8$  остаётся открытой. В работе [2] описаны ( $i_1, d, n$ )-минимальные деревья при  $d \leq 4$  и произвольном  $n$ , а также при  $d = 5$  и всех достаточно больших  $n$ . В [3] доказаны некоторые важные свойства ( $i_1, d, n$ )-минимальных деревьев при  $d \geq 6$  и частично описана структура ( $i_1, 6, n$ )-минимальных деревьев. В недавней работе [4] описаны ( $i_1, 6, n$ )-минимальные и ( $i_1, 7, n$ )-минимальные деревья при  $n > 160$  и  $n > 400$  соответственно.

На сегодняшний день известно сравнительно мало результатов, связанных с  $k$ -ДНМ в графах. В [5–9] получены оценки на число  $k$ -дистанционной независимости графа (т. е. на наибольшую мощность его  $k$ -ДНМ). В [10] перечисляются  $k$ -ДНМ простого пути  $P_n$  при некоторых дополнительных ограничениях.

В настоящей работе исследуются ( $i_k, d, n$ )-максимальные и ( $i_k, d, n$ )-минимальные деревья в случае  $k \geq 2$ . Ясно, что при  $k \geq d$  каждое  $n$ -вершинное дерево диаметра  $d$  содержит ровно  $n + 1$   $k$ -ДНМ (каждое  $k$ -ДНМ в этом случае содержит не более одной вершины дерева), поэтому интерес представляет только нетривиальный случай  $k < d$ . Для всех  $1 < k < d \leq 5$  и  $n \geq 120$  найдено ( $i_k, d, n$ )-максимальное дерево  $\hat{T}_{k,d,n}$  и доказано, что оно единственно. Кроме того, для всех  $1 < k < d < n$  найдено ( $i_k, d, n$ )-минимальное дерево  $T_{k,d,n}$  и указаны все тройки  $(k, d, n)$ , для которых это дерево единственно.

## 1. Некоторые определения и обозначения

Как обычно, через  $N[v]$  обозначается замкнутая окрестность вершины  $v$ , т. е. множество, состоящее из  $v$  и всех смежных с ней вершин. Для  $s \geq 1$  обозначим через  $N_s[v]$  множество всех вершин, находящихся на расстоянии не более чем  $s$  от вершины  $v$ .

Вершина дерева  $T$  называется *предлистовой*, если она смежна хотя бы с одним его листом; *центральной*, если она находится на расстоянии не более  $\lfloor \frac{\text{diam}(T)+1}{2} \rfloor$  от всех его листьев. Как известно, деревья чётного диаметра содержат ровно одну центральную вершину, а деревья нечётного диаметра — ровно две. *Диаметральным путём* дерева  $T$  называется его простой путь, содержащий  $\text{diam}(T) + 1$  вершин. Лист дерева  $T$ , являющийся концом диаметрального пути  $T$ , назовём *диаметральным*.

Напомним, что через  $i_k(G)$  обозначается число различных  $k$ -ДНМ, которое содержит граф  $G$ . Через  $i_k^+(G, v)$  ( $i_k^-(G, v)$ ) обозначается число  $k$ -ДНМ графа  $G$ , содержащих (не содержащих) вершину  $v$ . Нетрудно видеть, что при всех  $n \geq 2$  и  $k \geq 1$  для любого  $n$ -вершинного дерева  $T$  и любой его вершины  $v$  имеет место строгое неравенство  $i_k^+(T, v) < i_k^-(T, v)$ . Действительно, обозначим через  $u$  произвольного соседа  $v$ . Тогда

$$i_k^-(T, v) \geq i_k(T \setminus N_1[v]) + i_k^+(T, u) > i_k(T \setminus N_k[v]) = i_k^+(T, v).$$

Обозначим через  $M_{a,b}^l$  дерево диаметра 4, центральная вершина которого смежна с  $l$  листьями,  $a$  путями  $P_2$  и  $b$  центральными вершинами путей  $P_3$ . Обозначим через  $M_{a,b,c,d'}^{p,q}$  дерево диаметра 5, полученное из леса  $M_{a,b}^p \cup M_{c,d'}^q$  соединением центральных вершин двух его поддеревьев. Будем использовать обозначение  $M_{a,b}$  для дерева  $M_{a,b}^0$  и  $M_n$  — для  $n$ -вершинного дерева  $M_{a,b}$ , где  $a \leq 2$  (см. рис. 1). Кроме того, через  $M'_{a,b,c,d'}$  обозначим дерево  $M_{a,b,c,d'}^{1,0}$ , а через  $M_{a,b,c,d'}$  — дерево  $M_{a,b,c,d'}^{0,0}$ .

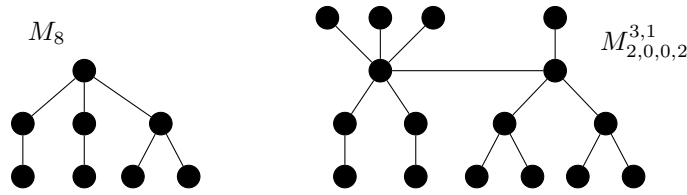


Рис. 1. Деревья  $M_8$  и  $M_{2,0,0,2}^{3,1}$

Будем называть  $(i_k, d, n)$ -максимальное ( $(i_k, d, n)$ -минимальное) дерево *максимальным* (*минимальным*), если значения параметров  $k, d$  и  $n$  понятны из контекста.

## 2. Случай $(i_{2k'}, 2k' + 1, n)$ -максимальных деревьев

Рассмотрим дерево  $T$  диаметра  $2k' + 1$  с центральными вершинами  $u$  и  $v$ . Обозначим через  $T_u$  максимальное по включению поддерево  $T$ , содержащее вершину  $u$  и не содержащее вершины  $v$ . Аналогичным образом определим поддерево  $T_v$ . Обозначим через  $l_u$  и  $l_v$  число диаметральных листьев  $T$ , содержащихся в поддеревьях  $T_u$  и  $T_v$  соответственно.

**Теорема 1.** Для всех  $n \geq 2k' + 2$  и  $k' \geq 1$  каждое  $(i_{2k'}, 2k' + 1, n)$ -максимальное дерево единственно и изоморфно пути  $P_{2k'}$ , к концам которого присоединено  $\lfloor \frac{n-2k'+1}{2} \rfloor$  и  $\lfloor \frac{n-2k'}{2} \rfloor$  листьев соответственно.

**Доказательство.** Очевидно, что каждое  $2k'$ -ДНМ дерева  $T$  содержит не более одной вершины из поддерева  $T_u$  и не более одной вершины из поддерева  $T_v$ . При этом если оно содержит ровно две вершины, то обе

они являются диаметральными листьями  $T$ . Тогда найдётся  $(l_u + 1)(l_v + 1)$   $k$ -ДНМ (включая пустое множество), все элементы которых являются диаметральными листьями. Кроме того, существует  $(n - l_u - l_v)$   $k$ -ДНМ, состоящих из одной вершины, не являющейся диаметральным листом. Таким образом,

$$i_{2k'}(T) = (n - l_u - l_v) + (l_u + 1)(l_v + 1) = n + l_u l_v + 1.$$

Ясно, что величина  $l_u l_v$  будет принимать наибольшее значение в случае, если  $T$  содержит минимально возможное число нелистовых вершин и  $|l_u - l_v| \leq 1$ . Значит,  $T$  изоморфно простому пути  $P_{2k'}$ , к концам которого присоединено  $l_u$  и  $l_v$  листьев соответственно. Считаем, что  $l_u \geq l_v$ , тогда  $l_u = \lfloor \frac{n-2k'+1}{2} \rfloor$  и  $l_v = \lfloor \frac{n-2k'}{2} \rfloor$ . Теорема 1 доказана.

Таким образом, в этом разделе описаны  $(i_2, 3, n)$ -максимальные деревья  $\widehat{T}_{2,3,n}$  и  $(i_4, 5, n)$ -максимальные деревья  $\widehat{T}_{4,5,n}$  (см. рис. 2). Показано, что при всех допустимых значениях  $n$  такие деревья единственны с точностью до изоморфизма.

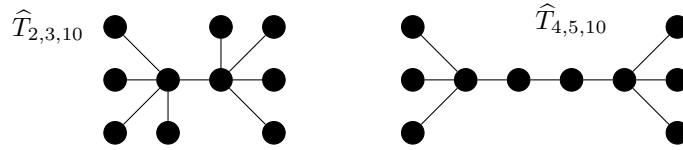


Рис. 2. Деревья  $\widehat{T}_{2,3,10}$  и  $\widehat{T}_{4,5,10}$

### 3. Случай $(i_k, 4, n)$ -максимальных деревьев

Напомним, что граф  $S_{4,n}$  является единственным с точностью до изоморфизма  $(i_1, 4, n)$ -максимальным деревом [1]. В этом разделе покажем, что при  $k \in \{2, 3\}$  и  $n \geq 53$  граф  $M_n$  является единственным  $(i_k, 4, n)$ -максимальным деревом.

**3.1. Вариант  $d = 4, k = 2$ .** Пусть центральная вершина  $u$  дерева  $T$  диаметра 4 смежна с  $l$  листьями, а также с  $m \geq 2$  предлистовыми вершинами  $u_1, \dots, u_m$ . Введём обозначение  $\mathcal{L} = \prod_{i=1}^m \deg(u_i)$ .

**Лемма 1.** *Имеет место равенство*

$$i_2(T) = 1 + \sum_{i=1}^m \frac{\mathcal{L}}{\deg(u_i)} + (l + 1) \cdot \mathcal{L}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно видеть, что существует  $\mathcal{L}$  2-ДНМ, все элементы которых являются диаметральными листьями. Тогда найдётся  $(l+1) \cdot \mathcal{L}$  2-ДНМ, не содержащих ни одной нелистой вершины дерева. Кроме того, для каждого  $1 \leq i \leq m$  существует  $\frac{\mathcal{L}}{\deg(u_i)}$  2-ДНМ, содержащих вершину  $u_i$ , причём каждое из них не содержит других вершин из окрестности  $N[u]$ . Наконец, найдётся единственное 2-ДНМ  $\{u\}$ , содержащее центральную вершину  $u$ . Лемма 1 доказана.

Для деревьев вида  $M_{a,b}^l$  имеет место равенство  $\mathcal{L} = 2^a \cdot 3^b$ , а значит,

$$i_2(M_{a,b}^l) = 1 + a \cdot 2^{a-1} \cdot 3^b + b \cdot 2^a \cdot 3^{b-1} + (l+1) \cdot 2^a \cdot 3^b.$$

**Теорема 2.** Для всех  $n \geq 53$  единственным  $(i_2, 4, n)$ -максимальным деревом является дерево  $M_n$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим некоторое  $(i_2, 4, n)$ -максимальное дерево  $T$  и докажем по шагам, что оно совпадает с  $M_n$ .

ШАГ 1. Покажем, что  $T$  имеет вид  $M_{a,b}^l$ . Пусть это не так. Тогда его центральная вершина  $u$  смежна хотя бы с одной вершиной  $u_0$  степени  $q_0 \geq 4$ . Обозначим через  $w_1$  и  $w_2$  два произвольных листа, смежных с  $u_0$ . Через  $T_1$  обозначим дерево, полученное удалением этих листьев из  $T$ , а через  $T_2$  — дерево, полученное удалением вершины  $u_0$  и всех смежных с ней листьев из  $T$ . Заменяем в дереве  $T$  рёбра  $u_0w_1$  и  $u_0w_2$  на  $uw_1$  и  $w_1w_2$  и обозначим через  $T'$  получившееся дерево. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} i_2(T) &= i_2(T_1) + i_2^+(T, w_1) + i_2^+(T, w_2) = i_2(T_1) + 2 \cdot i_2^-(T_2, u), \\ i_2(T') &= i_2(T_1) + i_2^+(T', w_2) + i_2^+(T', w_1) \geq i_2(T_1) + i_2^-(T_1, u) + 1. \end{aligned}$$

Обозначим через  $w_3$  произвольный лист, смежный с  $u_0$  в  $T_1$ . Тогда

$$i_2^-(T_1, u) \geq (q_0 - 2) \cdot i_2^+(T_1, w_3) \geq (q_0 - 2) \cdot i_2^-(T_2, u),$$

откуда  $i_2(T') > i_2(T)$ , что противоречит максимальнойности  $T$ .

ШАГ 2. Покажем, что  $T$  имеет вид  $M_{a,b}$ . Пусть это не так. Тогда  $T$  имеет вид  $M_{a,b}^l$ , где  $l > 0$ . Если при этом  $a > 0$ , то рассмотрим дерево  $M_{a-1,b+1}^{l-1}$ . Имеют место равенства

$$\begin{aligned} i_2(M_{a,b}^l) &= 1 + a \cdot 2^{a-1} \cdot 3^b + b \cdot 2^a \cdot 3^{b-1} + (l+1) \cdot 2^a \cdot 3^b, \\ i_2(M_{a-1,b+1}^{l-1}) &= 1 + (a-1) \cdot 2^{a-2} \cdot 3^{b+1} + (b+1) \cdot 2^{a-1} \cdot 3^b + l \cdot 2^{a-1} \cdot 3^{b+1}. \end{aligned}$$

Легко проверить, что при  $a, b, l \geq 0$  неравенство

$$i_2(M_{a-1,b+1}^{l-1}) > i_2(M_{a,b}^l)$$

равносильно неравенству  $3a + 2b + 6l > 15$ , которое верно при всех  $n \geq 53$ .

Если же  $a = 0$ , то  $T$  имеет вид  $M_{0,b}^l$  и  $i_2(M_{0,b}^l) = 1 + b \cdot 3^{b-1} + (l+1) \cdot 3^b$ . Тогда при всех  $b, l \geq 1$  имеем

$$i_2(M_{2,b-1}^{l-1}) = 1 + 4 \cdot 3^{b-1} + 4 \cdot (b-1) \cdot 3^{b-2} + 4 \cdot l \cdot 3^{b-1} > i_2(M_{0,b}^l).$$

Таким образом, при  $l > 0$  дерево  $M_{a,b}^l$  не максимальное.

**ШАГ 3.** Покажем, что  $T$  изоморфно  $M_n$ . Достаточно доказать, что при  $n \geq 53$  и  $a \geq 3$  верно неравенство  $i_2(M_{a,b}) < i_2(M_{a-3,b+2})$ . Имеем

$$i_2(M_{a,b}) = 1 + a \cdot 2^{a-1} \cdot 3^b + b \cdot 2^a \cdot 3^{b-1} + 2^a \cdot 3^b,$$

$$i_2(M_{a-3,b+2}) = 1 + (a-3) \cdot 2^{a-4} \cdot 3^{b+2} + (b+2) \cdot 2^{a-3} \cdot 3^{b+1} + 2^{a-3} \cdot 3^{b+2}.$$

Поскольку при  $n \geq 53$  и  $a \geq 3$  верно  $3a + 2b \geq 40$ , требуемое неравенство выполнено. Теорема 2 доказана.

Заметим, что при  $n = 52$  утверждение теоремы неверно, так как

$$i_2(M_{3,15}) = i_2(M_{0,17}).$$

**3.2. Вариант  $d = 4, k = 3$ .** Объектом нашего изучения по-прежнему является дерево  $T$  диаметра 4 с центральной вершиной  $u$ , смежной с  $l \geq 0$  листьями, а также с предлистовыми вершинами  $u_1, \dots, u_m$ , при этом  $\mathcal{L} = \prod_{i=1}^m \deg(u_i)$ .

**Лемма 2.** *Имеет место равенство  $i_3(T) = 1 + \deg(u) + \mathcal{L}$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Ясно, что существует ровно  $1 + \deg(u)$  3-ДНМ, содержащих хотя бы одну вершину из окрестности  $N[u]$ . Кроме того, найдётся  $\mathcal{L}$  3-ДНМ, не содержащих ни одной вершины из  $N[u]$ , откуда и следует требуемое равенство. Лемма 2 доказана.

**Теорема 3.** *При  $n \geq 5, n \neq 7$  единственным  $(i_3, 4, n)$ -максимальным деревом является дерево  $M_n$ . При  $n = 7$  деревья  $M_7$  и  $M_{3,0}$  и только они  $(i_3, 4, n)$ -максимальны.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** При  $5 \leq n \leq 7$  выполнение условия теоремы легко проверить перебором всех  $n$ -вершинных деревьев диаметра 4. Предположим, что при  $n \geq 8$  найдётся  $(i_3, 4, n)$ -максимальное дерево  $T$ , не изоморфное  $M_n$ . Аналогично предыдущей теореме проведём доказательство по шагам.

**ШАГ 1.** Покажем, что  $T$  имеет вид  $M_{a,b}^l$ . Пусть это не так. Тогда его центральная вершина  $u$  смежна с некоторой вершиной  $u_0$  такой, что  $\deg(u_0) = q_0 \geq 4$ . Обозначим через  $u_1, \dots, u_m$  других соседей вершины  $u$  и положим  $\mathcal{L}' = \prod_{i=1}^m \deg(u_i)$ . Обозначим через  $w_1$  и  $w_2$  два произвольных

листа, смежных с  $u_0$ . Заменяем в  $T$  рёбра  $u_0w_1$  и  $u_0w_2$  рёбрами  $uw_1$  и  $w_1w_2$ . Обозначим через  $T'$  полученное дерево. Тогда

$$i_3(T') = 1 + (\deg(u) + 1) + 2 \cdot (q_0 - 2) \cdot \mathcal{L}' > 1 + \deg(u) + q_0 \cdot \mathcal{L}' = i_3(T);$$

противоречие с максимальностью  $T$ .

**ШАГ 2.** Покажем, что  $T$  имеет вид  $M_{a,b}$ . Пусть это не так. Тогда  $T$  имеет вид  $M_{a,b}^l$ , где  $l \geq 1$ , т. е. вершина  $u$  смежна хотя бы с одним листом  $w$ . В этом случае  $i_3^+(T, w) = 1$ , поскольку все вершины дерева  $T$  находятся на расстоянии не более 3 от  $w$ . Рассмотрим некоторый диаметральный путь  $w_1u_1uu_2w_2$  в  $T$ , заменим ребро  $uw$  ребром  $u_1w$  и обозначим через  $T'$  получившееся дерево. Ясно, что множество  $\{w, w_2\}$  является 3-НДМ в  $T'$ , откуда  $i_3^+(T', w) \geq 2$ . С другой стороны,  $i_3^-(T, w) = i_3^-(T', w) = i_3(M_{a,b}^{l-1})$ , откуда  $i_3(T) < i_3(T')$ , что противоречит максимальности  $T$ .

**ШАГ 3.** Покажем, что  $T$  изоморфно  $M_n$ . Пусть это не так. Тогда  $T$  изоморфно дереву  $M_{a,b}$ , где  $a \geq 3$ . Покажем, что  $i_3(M_{a,b}) < i_3(M_{a-3,b+2})$ . Поскольку при  $n \geq 8$  и  $a \geq 3$  верно  $2^{a-3} \cdot 3^b > 1$ , то

$$i_3(M_{a,b}) = 1 + (a + b) + 2^a \cdot 3^b < 1 + (a + b - 1) + 2^{a-3} \cdot 3^{b+2} = i_3(M_{a-3,b+2});$$

противоречие с максимальностью  $T$ . Теорема 3 доказана.

#### 4. Случай $(i_k, 5, n)$ -максимальных деревьев

**4.1. Вариант  $d = 5, k = 2$ .** Обозначим через  $T''$  дерево  $M_{a,b,c,d}^{1,1}$  с центральными вершинами  $u$  и  $v$ , которые смежны с листьями  $u'$  и  $v'$  соответственно. Обозначим через  $T'$  результат удаления листа  $v'$  из  $T''$ , а через  $T$  результат удаления листа  $u'$  из  $T'$ . Отметим, что деревья  $T$  и  $T'$  изоморфны деревьям  $M_{a,b,c,d}$  и  $M'_{a,b,c,d}$  соответственно.

**Лемма 3.** *Имеют место равенства*

$$\begin{aligned} i_2^-(T_u, u) &= 2^a \cdot 3^b + a \cdot 2^{a-1} \cdot 3^b + b \cdot 2^a \cdot 3^{b-1}, \\ i_2^-(T_v, v) &= 2^c \cdot 3^{d'} + c \cdot 2^{c-1} \cdot 3^{d'} + d' \cdot 2^c \cdot 3^{d'-1}, \\ i_2(T) &= 2^a \cdot 3^b + 2^c \cdot 3^{d'} + i_2^-(T_u, u) \cdot i_2^-(T_v, v), \\ i_2(T') &= i_2(T) + 2^a \cdot 3^b \cdot i_2^-(T_v, v), \\ i_2(T'') &= i_2(T') + 2^c \cdot 3^{d'} \cdot i_2^-(T_u, u) + 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'}. \end{aligned}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Первые два равенства вытекают из леммы 1. Докажем третье равенство. Если некоторое 2-ДНМ  $I$  дерева  $T$  содержит его центральную вершину  $u$  (соответственно  $v$ ), то все остальные вершины  $I$  являются диаметральными листьями поддерева  $T_v$  ( $T_u$ ). Кроме того, для

каждого 2-НДМ  $I_u$  дерева  $T_u$  и каждого 2-ДНМ  $I_v$  дерева  $T_v$ , не содержащих вершин  $u$  и  $v$  соответственно, множество  $I_u \cup I_v$  является 2-ДНМ дерева  $T$ . Четвёртое равенство следует из соотношений  $i_2^-(T', u') = i_2(T)$  и  $i_2^+(T', u') = 2^a \cdot 3^b \cdot i_2^-(T_v, v)$ . Аналогично пятое равенство вытекает из соотношений  $i_2^-(T'', v') = i_2(T')$  и  $i_2^+(T'', v') = 2^c \cdot 3^{d'} \cdot i_2^-(T_u, u) + 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'}$ . Лемма 3 доказана.

**Лемма 4.** При  $n \geq 120$  каждое  $(i_2, 5, n)$ -максимальное дерево имеет вид  $M_{a,b,c,d'}$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, что найдётся  $(i_2, 5, n)$ -максимальное дерево  $T$ , для которого утверждение леммы неверно. Рассмотрим четыре случая.

**СЛУЧАЙ 1.** Хотя бы одна из центральных вершин  $T$  (считаем, что вершина  $u$ ) смежна с вершиной  $u_0$  степени  $q_0 \geq 4$ . В этом случае действуем аналогично шагу 1 теоремы 2. Обозначим через  $w_1$  и  $w_2$  два произвольных листа, смежных с  $u_0$ . Через  $T_1$  обозначим дерево, полученное удалением этих листьев из  $T$ . Через  $T_2$  обозначим дерево, полученное удалением вершины  $u_0$  и всех смежных с ней листьев из  $T$ . Заменяем в дереве  $T$  рёбра  $u_0w_1$  и  $u_0w_2$  на  $uw_1$  и  $w_1w_2$ , обозначим через  $T'$  получившееся дерево. Нетрудно видеть, что

$$i_2(T) = i_2(T_1) + i_2^+(T, w_1) + i_2^+(T, w_2) = i_2(T_1) + 2 \cdot i_2^-(T_2, u),$$

$$i_2(T') = i_2(T_1) + i_2^+(T', w_2) + i_2^+(T', w_1) \geq i_2(T_1) + (q_0 - 2) \cdot i_2^-(T_2, u) + 1.$$

Таким образом,  $i_2(T') > i_2(T)$ , что противоречит максимальнойности  $T$ .

**СЛУЧАЙ 2.** Хотя бы одна из центральных вершин  $T$  (считаем, что это вершина  $u$ ) смежна с двумя различными листьями  $u'$  и  $u''$ . Удалим ребро  $uu''$ , добавим ребро  $u'u''$  и обозначим получившееся дерево через  $T'$ . Очевидно, что  $i_2^-(T, u'') = i_2^-(T', u'')$ . Кроме того, любое 2-ДНМ дерева  $T$ , содержащее вершину  $u''$ , является 2-ДНМ дерева  $T'$ , поскольку оно не содержит вершин  $u$  и  $u'$ . Однако множество  $\{u'', v\}$  является 2-ДНМ  $T'$ , но не является 2-ДНМ  $T$ , откуда  $i_2^+(T', u'') > i_2^+(T, u'')$  и  $i_2(T') > i_2(T)$ , что противоречит максимальнойности  $T$ .

**СЛУЧАЙ 3.** Дерево  $T$  имеет вид  $M_{a,b,c,d'}^{1,1}$ . Напомним, что через  $u$  и  $v$  обозначаются его центральные вершины, а через  $u'$  и  $v'$  — смежные с ними листья. Обозначим через  $\widehat{T}$  результат удаления этих листьев из  $T$ . По лемме 3 имеем

$$i_2(T) = i_2(\widehat{T}) + 2^a \cdot 3^b \cdot i_2^-(\widehat{T}_v, v) + 2^c \cdot 3^{d'} \cdot i_2^-(\widehat{T}_u, u) + 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'}.$$

Рассмотрим дерево  $T'$ , полученное из дерева  $T$  заменой ребра  $vv'$  на  $u'v'$ . Тогда

$$i_2(T') = i_2(\widehat{T}) + i_2^+(T', v') + i_2^+(T', u') = i_2(\widehat{T}) + i_2^-(\widehat{T}, u) + 2^a \cdot 3^b \cdot i_2^-(\widehat{T}_v, v).$$



Покажем, что  $i_2(T') > i_2(T)$ . Предполагаем, что  $n \geq 120$ , тем самым  $2 \cdot (a + c) + 3 \cdot (b + d') \geq 118$ . В этом случае верно неравенство

$$\begin{aligned} i_2^-(\widehat{T}, u) &> i_2^-(\widehat{T}_u, u) \cdot i_2^-(\widehat{T}_v, v) = 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'} \cdot \left(1 + \frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{c}{2} + \frac{d'}{3}\right) \\ &> 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'} \cdot \left(2 + \frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) = 2^c \cdot 3^{d'} \cdot i_2^-(\widehat{T}_u, u) + 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $i_2(T) < i_2(T')$ , что противоречит максимальнойности  $T$ .

СЛУЧАЙ 4. Дерево  $T$  имеет вид  $M'_{a,b,c,d'}$ . Рассмотрим все возможные варианты и покажем, что в каждом из них  $T$  не максимально.

ВАРИАНТ  $b \geq 1$ . Рассмотрим дерево  $M_{a+2,b-1,c,d'}$ . Имеем

$$\begin{aligned} i_2(M'_{a,b,c,d'}) &= 2^a \cdot 3^b + 2^c \cdot 3^{d'} \\ &\quad + (2^{a+1} \cdot 3^b + a \cdot 2^{a-1} \cdot 3^b + b \cdot 2^a \cdot 3^{b-1}) \cdot i_2^-(T_v, v), \\ i_2(M_{a+2,b-1,c,d'}) &= 2^{a+2} \cdot 3^{b-1} + 2^c \cdot 3^{d'} + (2^{a+2} \cdot 3^{b-1} \\ &\quad + (a+2) \cdot 2^{a+1} \cdot 3^{b-1} + (b-1) \cdot 2^{a+2} \cdot 3^{b-2}) \cdot i_2^-(T_v, v). \end{aligned}$$

Тогда для всех  $b \geq 1$  верно  $i_2(M'_{a,b,c,d'}) < i_2(M_{a+2,b-1,c,d'})$ .

ВАРИАНТ  $a \geq 3, b = 0$ . Рассмотрим дерево  $M_{a-1,1,c,d'}$ . Имеем

$$\begin{aligned} i_2(M'_{a,0,c,d'}) &= 2^a + 2^c \cdot 3^{d'} + 2^{a-2} \cdot (2a+8) \cdot i_2^-(T_v, v), \\ i_2(M_{a-1,1,c,d'}) &= 3 \cdot 2^{a-1} + 2^c \cdot 3^{d'} + 2^{a-2} \cdot (3a+5) \cdot i_2^-(T_v, v). \end{aligned}$$

Тогда для всех  $a \geq 3$  верно  $i_2(M'_{a,0,c,d'}) < i_2(M_{a-1,1,c,d'})$ .

ВАРИАНТ  $a \leq 2, b = 0, c = 1$ . Рассмотрим дерево  $M'_{a+1,0,0,d'}$ . Имеем

$$\begin{aligned} i_2(M'_{a,0,1,d'}) &= 2^a + 2 \cdot 3^{d'} + 2^{a-1} \cdot 3^{d'-1} \cdot (a+4) \cdot (2d'+9), \\ i_2(M'_{a+1,0,0,d'}) &= 2^{a+1} + 3^{d'} + 2^{a-1} \cdot 3^{d'-1} \cdot (2a+10) \cdot (d'+3). \end{aligned}$$

Тогда для всех  $a \leq 2$  и  $d' \geq 7$  верно  $i_2(M'_{a,0,1,d'}) < i_2(M'_{a+1,0,0,d'})$ .

ВАРИАНТ  $a \leq 2, b = 0, c = 2$ . Рассмотрим дерево  $M'_{a+2,0,0,d'}$ . Имеем

$$\begin{aligned} i_2(M'_{a,0,2,d'}) &= 2^a + 4 \cdot 3^{d'} + 2^{a-1} \cdot 3^{d'-1} \cdot (a+4) \cdot (4d'+24), \\ i_2(M'_{a+2,0,0,d'}) &= 2^{a+2} + 3^{d'} + 2^{a-1} \cdot 3^{d'-1} \cdot (4a+24) \cdot (d'+3). \end{aligned}$$

Тогда для всех  $a \leq 2$  и  $d' \geq 7$  верно  $i_2(M'_{a,0,2,d'}) < i_2(M'_{a+2,0,0,d'})$ .

ВАРИАНТ  $a \leq 2, b = 0, c \geq 3$ . Рассмотрим дерево  $M'_{a,0,c-3,d'+2}$ . Имеем

$$\begin{aligned} i_2(M'_{a,0,c,d'}) &= 2^a + 2^c \cdot 3^{d'} + 2^{c-4} \cdot 3^{d'-1} \cdot (48 + 24c + 16d') \cdot i_2^-(T_u, u), \\ i_2(M'_{a,0,c-3,d'+2}) &= 2^a + 2^{c-3} \cdot 3^{d'+2} \\ &\quad + 2^{c-4} \cdot 3^{d'-1} \cdot (27c + 18d' + 9) \cdot i_2^-(T_u, u). \end{aligned}$$

Так как  $a \leq 2$ , то  $3c + 2d' \geq 40$ , а значит,  $i_2(M'_{a,0,c,d'}) > i_2(M'_{a,0,c-3,d'+2})$ .

ВАРИАНТ  $a = 1$ ,  $b = c = 0$ . Рассмотрим дерево  $M_{0,3,0,d'-2}$ . Имеем

$$\begin{aligned} i_2(M'_{1,0,0,d'}) &= 2 + 3^{d'} + 5 \cdot (3^{d'} + d' \cdot 3^{d'-1}), \\ i_2(M_{0,3,0,d'-2}) &= 27 + 3^{d'-2} + 54 \cdot (3^{d'-2} + (d' - 2) \cdot 3^{d'-3}). \end{aligned}$$

Тогда для всех  $d' \geq 12$  верно  $i_2(M'_{1,0,0,d'}) < i_2(M_{0,3,0,d'-2})$ .

ВАРИАНТ  $a = 2$ ,  $b = c = 0$ . Рассмотрим дерево  $M_{1,3,0,d'-2}$ . Имеем

$$\begin{aligned} i_2(M'_{2,0,0,d'}) &= 4 + 3^{d'} + 12 \cdot (3^{d'} + d' \cdot 3^{d'-1}), \\ i_2(M_{1,3,0,d'-2}) &= 54 + 3^{d'-2} + 135 \cdot (3^{d'-2} + (d' - 2) \cdot 3^{d'-3}). \end{aligned}$$

Тогда для всех  $d' \geq 3$  верно  $i_2(M'_{2,0,0,d'}) < i_2(M_{1,3,0,d'-2})$ . Лемма 4 доказана.

**Лемма 5.** Пусть  $(i_2, 5, n)$ -максимальное дерево  $T$  имеет вид  $M_{a,b,c,d'}$ . Если при этом  $3a + 2b \geq 40$ , то  $a \leq 2$ . Если же  $3c + 2d' \geq 40$ , то  $c \leq 2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что  $3a + 2b \geq 40$  и  $a \geq 3$ . По лемме 3 имеют место соотношения

$$\begin{aligned} i_2(M_{a,b,c,d'}) &= 2^a \cdot 3^b + 2^c \cdot 3^{d'} + 2^a \cdot 3^b \cdot \left(1 + \frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \cdot i_2^-(T_v, v), \\ i_2(M_{a-3,b+2,c,d'}) &= 2^{a-3} \cdot 3^{b+2} + 2^c \cdot 3^{d'} \\ &\quad + 2^{a-3} \cdot 3^{b+2} \cdot \left(\frac{1}{6} + \frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \cdot i_2^-(T_v, v). \end{aligned}$$

Легко проверить, что в случае  $3a + 2b \geq 40$  имеет место неравенство  $i_2(M_{a,b,c,d'}) < i_2(M_{a-3,b+2,c,d'})$ , что противоречит максимальнойности  $T$ . Случай  $3c + 2d' \geq 40$  рассматривается аналогично. Лемма 5 доказана.

**Лемма 6.** Если  $n \geq 120$ , то каждое  $(i_2, 5, n)$ -максимальное дерево имеет вид  $M_{a,b,c,d'}$ , при этом  $|(3a + 2b) - (3c + 2d')| \leq 2$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 4 каждое максимальное дерево имеет вид  $M_{a,b,c,d'}$ . Предположим, что  $3a + 2b + 3 \leq 3c + 2d'$ . Если  $d' = 0$ , то  $c \leq 13$  по лемме 5, откуда  $3a + 2b \leq 36$  и  $n < 120$ , что противоречит условию леммы. Если же  $d' \geq 1$ , то рассмотрим дерево  $M_{a,b+1,c,d'-1}$ . Имеем

$$\begin{aligned} i_2(M_{a,b,c,d'}) &= 2^a \cdot 3^b + 2^c \cdot 3^{d'} + 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'} \cdot \left(1 + \frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{c}{2} + \frac{d'}{3}\right), \\ i_2(M_{a,b+1,c,d'-1}) &= 2^a \cdot 3^{b+1} + 2^c \cdot 3^{d'-1} \\ &\quad + 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'} \cdot \left(\frac{4}{3} + \frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{c}{2} + \frac{d'}{3}\right). \end{aligned}$$

Из этих соотношений следует неравенство

$$i_2(M_{a,b+1,c,d'-1}) - i_2(M_{a,b,c,d'}) > 2^{a+c-1} \cdot 3^{b+d'-2}(3c + 2d' - 3a - 2b - 2) - 2^{c+1} \cdot 3^{d'-1}.$$

Предполагаем, что  $2a + 3b + 2c + 3d' \geq 118$  и  $3c + 2d' \geq 3a + 2b + 3$ . Тогда, как нетрудно проверить, выполнено хотя бы одно из неравенств  $2^{a-2} \cdot 3^{b-1} \geq 1$  и  $3c + 2d' \geq 3a + 2b + 14$ , откуда  $i_2(M_{a,b+1,c,d'-1}) > i_2(M_{a,b,c,d'})$ , что противоречит экстремальности  $M_{a,b,c,d'}$ . Лемма 6 доказана.

**Теорема 4.** Для всех  $n \geq 120$  максимальное дерево  $\widehat{T}_{2,5,n}$  единственно, при этом

$$\widehat{T}_{2,5,n} = \begin{cases} M_{1,p-1,1,p-1}, & \text{если } n = 6p, \\ M_{1,p-1,0,p}, & \text{если } n = 6p + 1, \\ M_{0,p,0,p}, & \text{если } n = 6p + 2, \\ M_{2,p-2,0,p+1}, & \text{если } n = 6p + 3, \\ M_{1,p-1,0,p+1}, & \text{если } n = 6p + 4, \\ M_{0,p+1,0,p}, & \text{если } n = 6p + 5. \end{cases}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Назовём дерево вида  $M_{a,b,c,d'}$  подходящим, если выполнены условия  $|(3a + 2b) - (3c + 2d')| \leq 2$  и  $\max(a, c) \leq 2$ . Покажем, что при  $n \geq 120$  искомое дерево  $\widehat{T}_{2,5,n}$  подходящее. Достаточно проверить условие  $\max(a, c) \leq 2$ . Если  $3a + 2b \leq 39$ , то  $3c + 2d' \leq 41$  по лемме 6. Тогда  $2a + 3b + 2c + 3d' \leq 117$ , что противоречит предположению. Случай  $3c + 2d' \leq 39$  рассматривается аналогично. Если же  $\min(3a + 2b, 3c + 2d') \geq 40$ , то  $\max(a, c) \leq 2$  по лемме 5, что и требовалось. Считаем, что  $c \leq a \leq 2$  и, если  $a = c$ , то  $b \geq d'$  (так как деревья  $M_{a,b,c,d'}$  и  $M_{a,d',c,b}$  в этом случае совпадают).

**СЛУЧАЙ  $n = 6p$ .** Здесь сумма  $2a + 3b + 2c + 3d' + 2$  кратна 3, откуда  $a + c = 2$ . Найдутся три подходящих дерева:  $M_{1,p-1,1,p-1}$ ,  $M_{2,p-2,0,p}$  и  $M_{2,p-3,0,p+1}$ . Тогда

$$\begin{aligned} i_2(M_{1,p-1,1,p-1}) &= 4 \cdot 3^{p-1} + (3^p + 2 \cdot (p-1) \cdot 3^{p-2})^2, \\ i_2(M_{2,p-2,0,p}) &= 13 \cdot 3^{p-2} + (8 \cdot 3^{p-2} + 4 \cdot (p-2) \cdot 3^{p-3}) \cdot (3^p + p \cdot 3^{p-1}), \\ i_2(M_{2,p-3,0,p+1}) &= 85 \cdot 3^{p-3} + (8 \cdot 3^{p-3} + 4 \cdot (p-3) \cdot 3^{p-4}) \cdot (4 \cdot 3^p + p \cdot 3^p). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что при всех  $p \geq 20$  дерево  $M_{1,p-1,1,p-1}$  будет единственным  $(i_2, 5, 6p)$ -максимальным.

**СЛУЧАЙ  $n = 6p + 1$ .** Здесь  $a + c \in \{1, 4\}$ . Найдутся два подходящих дерева:  $M_{1,p-1,0,p}$  и  $M_{2,p-1,2,p-2}$ . Нетрудно проверить, что  $i_2(M_{1,p-1,0,p}) > i_2(M_{2,p-1,2,p-2})$  при  $p \geq 20$ .

СЛУЧАЙ  $n = 6p + 2$ . В этом случае  $a + c \in \{0, 3\}$ . Найдутся два подходящих дерева:  $M_{0,p,0,p}$  и  $M_{2,p-2,1,p}$ . Нетрудно проверить, что  $i_2(M_{0,p,0,p}) > i_2(M_{2,p-2,1,p})$  при  $p \geq 20$ .

СЛУЧАЙ  $n = 6p + 3$ . Здесь  $a + c = 2$ , деревья  $M_{1,p,1,p-1}$  и  $M_{2,p-2,0,p+1}$  подходящие и нетрудно проверить, что  $i_2(M_{2,p-2,0,p+1}) > i_2(M_{1,p,1,p-1})$  при  $p \geq 20$ .

СЛУЧАЙ  $n = 6p + 4$ . В этом случае  $a + c \in \{1, 4\}$ . Найдутся два подходящих дерева:  $M_{1,p-1,0,p+1}$  и  $M_{2,p-1,2,p-1}$ . Нетрудно проверить, что  $i_2(M_{1,p-1,0,p+1}) > i_2(M_{2,p-1,2,p-1})$  при  $p \geq 20$ .

СЛУЧАЙ  $n = 6p + 5$ . Здесь  $a + c \in \{0, 3\}$ , деревья  $M_{0,p+1,0,p}$  и  $M_{2,p-1,1,p}$  подходящие и нетрудно проверить, что  $i_2(M_{0,p+1,0,p}) > i_2(M_{2,p-1,1,p})$  при  $p \geq 20$ . Теорема 4 доказана.

**4.2. Вариант  $d = 5, k = 3$ .** Объектом нашего изучения по-прежнему является дерево  $T$  диаметра 5 с центральными вершинами  $u$  и  $v$ , которые смежны с вершинами  $u_1, \dots, u_p$  и  $v_1, \dots, v_q$  соответственно. Введём обозначения  $\mathcal{L}_u = \prod_{i=1}^p \deg(u_i)$  и  $\mathcal{L}_v = \prod_{i=1}^q \deg(v_i)$ .

**Лемма 7.** *Имеет место равенство*

$$i_3(T) = 2 + (\deg(u) - 1) \cdot \mathcal{L}_v + (\deg(v) - 1) \cdot \mathcal{L}_u + \mathcal{L}_u \cdot \mathcal{L}_v.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что существует ровно два 3-ДНМ, содержащих хотя бы одну из центральных вершин  $T$ . Кроме того, существует  $(\deg(u) - 1) \cdot \mathcal{L}_v$  3-ДНМ, содержащих хотя бы одну из вершин  $u_1, \dots, u_p$  и  $(\deg(v) - 1) \cdot \mathcal{L}_u$  3-ДНМ, содержащих хотя бы одну из вершин  $v_1, \dots, v_q$ . Наконец, найдётся  $\mathcal{L}_u \cdot \mathcal{L}_v$  3-ДНМ, все элементы которых являются диаметральными листьями  $T$ . Лемма 7 доказана.

Заметим, что для дерева  $M_{a,b,c,d'}$  выполнено соотношение

$$i_3(M_{a,b,c,d'}) = 2 + (a + b) \cdot 2^c \cdot 3^{d'} + (c + d') \cdot 2^a \cdot 3^b + 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'}.$$

**Лемма 8.** *Каждое  $(i_3, 5, n)$ -максимальное дерево  $T$  имеет вид  $M_{a,b,c,d'}$ , при этом  $\max(a, c) \leq 2$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО снова проведём по шагам.

ШАГ 1. Покажем, что  $T$  имеет вид  $M_{a,b,c,d'}^{p',q'}$ . Пусть это не так. Тогда найдётся хотя бы одна предлистовая вершина  $u_0$  степени  $q_0 \geq 4$ , смежная с одной из центральных вершин (считаем, что с вершиной  $u$ ). Обозначим соседей  $u$ , отличных от  $v$  и  $u_0$ , через  $u_1, \dots, u_p$ , а соседей  $v$ , отличных от  $u$ , через  $v_1, \dots, v_q$ . Положим  $\mathcal{L}'_u = \prod_{i=1}^p \deg(u_i)$ , если  $p \geq 1$ , и  $\mathcal{L}'_u = 1$ , если  $p = 0$ . Обозначим через  $w_1$  и  $w_2$  два произвольных листа, смежных с  $u_0$ .

Заменяем в дереве  $T$  рёбра  $u_0w_1$  и  $u_0w_2$  рёбрами  $uw_1$  и  $w_1w_2$ , обозначим через  $T'$  получившееся дерево. Тогда

$$i_3(T) = 2 + (\deg(u) - 1) \cdot \mathcal{L}_v + (\deg(v) - 1) \cdot q_0 \cdot \mathcal{L}'_u + q_0 \cdot \mathcal{L}'_u \cdot \mathcal{L}_v,$$

$$i_3(T') = 2 + \deg(u) \cdot \mathcal{L}_v + (\deg(v) - 1) \cdot 2 \cdot (q_0 - 2) \cdot \mathcal{L}'_u + 2 \cdot (q_0 - 2) \cdot \mathcal{L}'_u \cdot \mathcal{L}_v.$$

Поскольку  $q_0 \geq 4$ , то  $i_3(T') > i_3(T)$  и  $T$  не максимальное; противоречие.

**Шаг 2.** Покажем, что  $T$  имеет вид  $M_{a,b,c,d'}$ . Предположим, что это не так и хотя бы одна из центральных вершин (например, вершина  $u$ ) смежна с листом  $u'$ . Рассмотрим в дереве  $T$  некоторый диаметральный путь  $u_2u_1uvv_1v_2$ . Удалим ребро  $uu'$  и добавим ребро  $u_1u'$ , обозначим через  $T'$  получившееся дерево. Ясно, что  $i_3^-(T, u') = i_3^-(T', u')$ . Поскольку каждое 3-ДНМ дерева  $T$ , содержащее  $u'$ , не содержит других вершин поддерева  $T_u$  и вершин из окрестности  $N[v]$ , оно является 3-ДНМ дерева  $T'$ . С другой стороны, множество  $\{u', v_1\}$  не является 3-ДНМ дерева  $T$ , но является 3-ДНМ дерева  $T'$ , откуда  $i_3(T) < i_3(T')$ ; противоречие.

**Шаг 3.** Покажем, что  $\max(a, c) \leq 2$ . Предположим, что  $a \geq 3$ . Тогда

$$i_3(M_{a,b,c,d'}) = 2 + (a + b) \cdot 2^c \cdot 3^{d'} + (c + d') \cdot 2^a \cdot 3^b + 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'},$$

$$i_3(M_{a-3,b+2,c,d'}) = 2 + (a + b - 1) \cdot 2^c \cdot 3^{d'} + (c + d') \cdot 2^{a-3} \cdot 3^{b+2} + 2^{a+c-3} \cdot 3^{b+d'+2}.$$

Ясно, что  $i_3(M_{a-3,b+2,c,d'}) > i_3(M_{a,b,c,d'})$  при  $a \geq 3$  и  $\min(c, d') > 0$ , что противоречит максимальной  $T$ . Случай  $c \geq 3$  рассматривается аналогично. Лемма 8 доказана.

**Лемма 9.** Для всех  $n \geq 13$  каждое  $(i_3, 5, n)$ -максимальное дерево имеет вид  $M_{a,b,c,d'}$ , при этом либо  $\min(a, c) = 0$  и  $\min(b, d') = 1$ , либо  $\min(b, d') = 0$ .

**Доказательство.** Предположим, что некоторое максимальное дерево  $T$  имеет вид  $M_{a,b,c,d'}$  и при этом либо  $\min(a, c) = 0$  и  $\min(b, d') \geq 2$ , либо  $\min(a, b, c, d') \geq 1$  и  $\max(a, b, c, d') \geq 2$ . Введём обозначение

$$j_3(M_{a,b,c,d'}) = i_3(M_{a,b,c,d'}) - 2 - 2^{a+c} \cdot 3^{b+d'} = (a + b) \cdot 2^c \cdot 3^{d'} + (c + d') \cdot 2^a \cdot 3^b.$$

По предположению деревья  $M_{a,b-1,c,d'+1}$  и  $M_{a,b+1,c,d'-1}$  существуют и имеют диаметр 5. При этом, так как дерево  $M_{a,b,c,d'}$  максимально, имеем

$$i_3(M_{a,b,c,d'}) \geq \max(i_3(M_{a,b-1,c,d'+1}), i_3(M_{a,b+1,c,d'-1})).$$

Тем самым  $j_3(M_{a,b,c,d'}) \geq \max(j_3(M_{a,b-1,c,d'+1}), j_3(M_{a,b+1,c,d'-1}))$  и выполняется система неравенств

$$\begin{cases} 2^c 3^{d'}(a + b) + 2^a 3^b(c + d') \geq 2^c 3^{d'+1}(a + b - 1) + 2^a 3^{b-1}(c + d' + 1), \\ 2^c 3^{d'}(a + b) + 2^a 3^b(c + d') \geq 2^c 3^{d'-1}(a + b + 1) + 2^a 3^{b+1}(c + d' - 1). \end{cases}$$

Преобразуя эту систему, получаем

$$\begin{cases} (2c + 2d' - 1) \cdot 2^a \cdot 3^{b-1} \geq (2a + 2b - 3) \cdot 2^c \cdot 3^{d'}, \\ (2a + 2b - 1) \cdot 2^c \cdot 3^{d'-1} \geq (2c + 2d' - 3) \cdot 2^a \cdot 3^b, \end{cases}$$

откуда следует неравенство

$$\frac{2a + 2b - 1}{2c + 2d' - 3} \geq 9 \cdot \frac{2a + 2b - 3}{2c + 2d' - 1}.$$

Поскольку  $\min(a + b, c + d') \geq 2$ , данное неравенство имеет решения лишь в случае  $a + b = c + d' = 2$ . По предположению это возможно только при  $a = c = 0$  и  $b = d' = 2$ . В этом случае  $i_3(M_{0,2,0,2}) < i_3(M_{2,0,1,2})$ . Таким образом, каждое дерево  $M_{a,b,c,d'}$ , не удовлетворяющее условию леммы, не максимальное, что и требовалось. Лемма 9 доказана.

**Теорема 5.** Для всех  $n \geq 11$  максимальное дерево  $\widehat{T}_{3,5,n}$  единственно, при этом

$$\widehat{T}_{3,5,n} = \begin{cases} M_{2,0,0,q-2}, & \text{если } n = 3q, \\ M_{1,0,0,q-1}, & \text{если } n = 3q + 1, \\ M_{2,0,1,q-2}, & \text{если } n = 3q + 2. \end{cases}$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Назовём максимальное дерево *подходящим*, если оно имеет вид  $M_{a,b,c,d'}$ , где  $c \leq a \leq 2$  и либо  $\min(a, c) = 0$  и  $\min(b, d') = 1$ , либо  $\min(b, d') = 0$ . По леммам 8 и 9 при  $n \geq 13$  искомое дерево  $\widehat{T}_{3,5,n}$  подходящее. Считаем, что если  $a = c$ , то  $b \leq d'$  (так как деревья  $M_{a,b,c,d'}$  и  $M_{a,d',c,b}$  в этом случае совпадают).

**СЛУЧАЙ**  $n = 3q$ .

**ВАРИАНТ**  $q = 4$ . По лемме 4 каждое  $(i_3, 5, 12)$ -максимальное дерево имеет вид  $M_{a,b,c,d'}$ , где  $\max(a, c) \leq 2$ . Поскольку число вершин дерева чётно, то  $b + d' \in \{0, 2\}$ , откуда  $b + d' = a + c = 2$ . Так как

$$i_3(M_{2,0,0,2}) > \max(i_3(M_{1,1,1,1}), i_3(M_{1,0,1,2}), i_3(M_{2,1,0,1})),$$

дерево  $M_{2,0,0,2}$  единственное  $(i_3, 5, 12)$ -максимальное.

**ВАРИАНТ**  $q \geq 5$ . Если  $a = c = 1$ , то единственным подходящим деревом является  $M_{1,0,1,q-2}$ , при этом  $i_3(M_{1,0,1,q-2}) = 2 \cdot 3^{q-1} + 2q$ . Если же  $a = 2$  и  $c = 0$ , то найдутся три подходящих дерева:  $M_{2,0,0,q-2}$ ,  $M_{2,q-3,0,1}$  и  $M_{2,1,0,q-3}$ . При этом  $i_3(M_{2,0,0,q-2}) = 2 \cdot 3^{q-1} + 4q - 6$ ,  $i_3(M_{2,q-3,0,1}) = 16 \cdot 3^{q-3} + 2q$  и  $i_3(M_{2,1,0,q-3}) = 5 \cdot 3^{q-2} + 12q - 34$ . Поскольку при всех  $q \geq 5$  верно неравенство

$$i_3(M_{2,0,0,q-2}) > \max(i_3(M_{1,0,1,q-2}), i_3(M_{2,q-3,0,1}), i_3(M_{2,1,0,q-3})),$$

дерево  $M_{2,0,0,q-2}$  единственное  $(i_3, 5, 3q)$ -максимальное.

**СЛУЧАЙ**  $n = 3q + 1$ . Если  $a = 1$  и  $c = 0$ , то найдутся три подходящих дерева:  $M_{1,0,0,q-1}$ ,  $M_{1,q-2,0,1}$  и  $M_{1,1,0,q-2}$ , при этом  $i_3(M_{1,0,0,q-1}) = 3^q + 2q$ ,

$i_3(M_{1,q-2,0,1}) = 8 \cdot 3^{q-2} + 2q$  и  $i_3(M_{1,1,0,q-2}) = 8 \cdot 3^{q-2} + 6q - 10$ . Если же  $a = c = 2$ , то единственным подходящим деревом является дерево  $M_{2,0,2,q-3}$ , при этом  $i_3(M_{2,0,2,q-3}) = 8 \cdot 3^{q-2} + 4q - 2$ . Поскольку при  $q \geq 4$  верно

$$i_3(M_{1,0,0,q-1}) > \max(i_3(M_{1,q-2,0,1}), i_3(M_{1,1,0,q-2}), i_3(M_{2,0,2,q-3})),$$

дерево  $M_{1,0,0,q-1}$  единственное  $(i_3, 5, 3q + 1)$ -максимальное.

СЛУЧАЙ  $n = 3q + 2$ .

ВАРИАНТ  $q = 3$ . По лемме 8 каждое  $(i_3, 5, 11)$ -максимальное дерево имеет вид  $M_{a,b,c,d'}$ , где  $\max(a, c) \leq 2$ . Поскольку число вершин дерева нечётно, то  $b + d' \in \{1, 3\}$ , тогда  $a + c \in \{0, 3\}$ . Имеем

$$i_3(M_{2,0,1,1}) > \max(i_3(M_{0,1,0,2}), i_3(M_{2,1,1,0})),$$

а значит, дерево  $M_{2,0,1,1}$  единственное  $(i_3, 5, 11)$ -максимальное.

ВАРИАНТ  $q \geq 4$ . Если  $a = c = 0$ , то единственным подходящим деревом является  $M_{0,1,0,q-1}$ , при этом  $i_3(M_{0,1,0,q-1}) = 4 \cdot 3^{q-1} + 3q - 1$ . Если же  $a = 2$  и  $c = 1$ , то найдутся два подходящих дерева:  $M_{2,q-2,1,0}$  и  $M_{2,0,1,q-2}$ , при этом  $i_3(M_{2,q-2,1,0}) = 4 \cdot 3^{q-1} + 2q + 2$  и  $i_3(M_{2,0,1,q-2}) = 4 \cdot 3^{q-1} + 4q - 2$ . Поскольку

$$i_3(M_{2,0,1,q-2}) > \max(i_3(M_{0,1,0,q-1}), i_3(M_{2,q-2,1,0})),$$

дерево  $M_{2,0,1,q-2}$  единственное  $(i_3, 5, 3q + 2)$ -максимальное. Теорема 5 доказана.

Заметим, что при  $n = 10$  условие теоремы не выполнено, поскольку  $i_3(M_{2,0,2,0}) > i_3(M_{1,0,0,2})$ .

### 5. Случай $(i_k, d, n)$ -минимальных деревьев

Напомним, что задача описания  $(i_1, d, n)$ -минимальных деревьев остаётся открытой при  $d \geq 8$ . В этом разделе для всех  $1 < k < d < n$  построено  $(i_k, d, n)$ -минимальное дерево  $T_{k,d,n}$  и указаны все тройки  $(k, d, n)$ , при которых оно единственно. Кроме того, описаны все минимальные деревья в случае  $1 < k < d \leq 5$ .

Из определения  $k$ -ДНМ следует, что при  $n, k \geq 1$  верно равенство

$$i_k(P_n) = i_k(P_{n-1}) + i_k(P_{n-k-1}),$$

где  $i_k(P_{-s}) = 1$  при  $0 \leq s \leq k$ . Заметим, что  $i_k(P_n) = n + 1$  при  $0 \leq n \leq k + 1$ .

**Лемма 10.** Пусть  $k \geq 2$  и  $1 \leq m \leq n - 1$ . Тогда

$$i_k(P_n) < i_k(P_m) \cdot i_k(P_{n-m}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по  $n$  при фиксированном  $k \geq 2$ . База индукции  $n \leq k+1$  очевидна. По предположению индукции имеют место соотношения

$$\frac{i_k(P_{n-1})}{i_k(P_{n-m-1})} \leq i_k(P_m), \quad \frac{i_k(P_{n-k-1})}{i_k(P_{n-m-k-1})} \leq i_k(P_m).$$

Первое неравенство переходит в равенство лишь в случае  $m = n - 1$ , но тогда, очевидно, второе неравенство строгое. Таким образом, верно строгое неравенство

$$\frac{i_k(P_n)}{i_k(P_{n-m})} = \frac{i_k(P_{n-1}) + i_k(P_{n-k-1})}{i_k(P_{n-m-1}) + i_k(P_{n-m-k-1})} < i_k(P_m).$$

Лемма 10 доказана.

Обозначим через  $T_{k,d,n}$  дерево, полученное из пути  $P_{d+1}$  присоединением  $n - d - 1$  листьев либо к его  $k$ -ой от конца вершине, если  $d > 2k - 2$ , либо к его центральной вершине, если  $d \leq 2k - 2$ . Определим дерево  $T'_{k,d,n}$  следующим образом. Если  $d$  чётно, то  $T'_{k,d,n}$  получается из пути  $P_{d+1}$  присоединением  $n - d - 1$  листьев к одной из вершин, смежной с центральной вершиной пути (см. рис. 3). Если же  $d$  нечётно, то  $T'_{k,d,n}$  получается из пути  $P_{d+1}$  присоединением листа к одной из его центральных вершин и  $n - d - 2$  листьев — к другой из его центральных вершин.

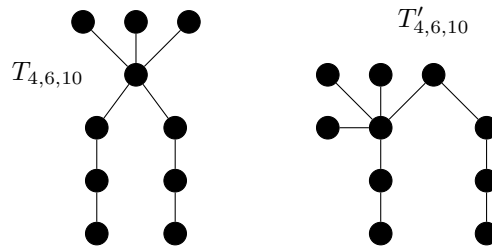


Рис. 3. Деревья  $T_{4,6,10}$  и  $T'_{4,6,10}$

**Теорема 6.** При всех значениях  $1 < k < d < n$  дерево  $T_{k,d,n}$  будет  $(i_k, d, n)$ -минимальным. Кроме того, оно единственное минимальное, если и только если выполнено одно из следующих условий:

- 1)  $n = d + 1$ ;
- 2)  $n = d + 2$  и  $d \geq 2k - 3$ ;
- 3)  $n \geq d + 3$  и либо  $d = 2k - 2$ , либо  $d \geq 3k - 3$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим три случая.



СЛУЧАЙ  $n = d + 1$ . Единственным  $(d + 1)$ -вершинным деревом диаметра  $d$  является путь  $P_{d+1}$ , совпадающий с деревом  $T_{k,d,d+1}$ . Таким образом, это единственное  $(i_k, d, d + 1)$ -минимальное дерево.

СЛУЧАЙ  $n \geq d + 3$ . Рассмотрим два варианта.

ВАРИАНТ  $d \leq 2k - 2$ . По определению дерева  $T_{k,d,n}$  все его листья, не лежащие на диаметральном пути, смежны с одной из центральных вершин. Тогда каждый из этих листьев находится на расстоянии не более  $k$  от всех остальных вершин дерева и

$$i_k(T_{k,d,n}) = i_k(P_{d+1}) + (n - d - 1).$$

Докажем, что  $i_k(T) \geq i_k(T_{k,d,n})$  для любого  $n$ -вершинного дерева  $T$  диаметра  $d$ . Зафиксируем некоторый диаметральный путь  $P$  в дереве  $T$ . Ясно, что  $T$  содержит ровно  $i_k(P_{d+1})$   $k$ -ДНМ, содержащих только вершины  $P$  и не менее чем  $n - d - 1$   $k$ -ДНМ, содержащих хотя бы одну вершину не из  $P$ , откуда сразу же вытекает требуемое неравенство.

Если  $d = 2k - 2$ , то равенство  $i_k(T) = i_k(T_{k,d,n})$  возможно лишь в том случае, когда все вершины  $T$ , не принадлежащие  $P$ , являются листьями, смежными с центральной вершиной  $T$ . Поскольку при чётном значении  $d$  центральная вершина единственна, дерево  $T_{k,d,n}$  единственное минимальное. Если же  $d < 2k - 2$ , то  $i_k(T_{k,d,n}) = i_k(T'_{k,d,n})$ , причём деревья  $T_{k,d,n}$  и  $T'_{k,d,n}$  не совпадают. Значит, дерево  $T_{k,d,n}$  не единственное минимальное.

ВАРИАНТ  $d > 2k - 2$ . Поскольку для каждого листа дерева  $T_{k,d,n}$ , не лежащего на его диаметральном пути, вершины на расстоянии более  $k$  от него образуют путь  $P_{d-2k+2}$ , имеет место равенство

$$i_k(T'_{k,d,n}) = i_k(P_{d+1}) + (n - d - 1) \cdot i_k(P_{d-2k+2}).$$

Докажем, что  $i_k(T) \geq i_k(T_{k,d,n})$  для любого  $n$ -вершинного дерева  $T$  диаметра  $d$ . Зафиксируем в  $T$  некоторый диаметральный путь  $P$ . Для любой вершины  $u$ , не лежащей на  $P$ , найдётся хотя бы  $d - 2k + 2$  вершин  $P$  на расстоянии более  $k$  от  $u$ . При этом такие вершины образуют либо один простой путь, либо два простых пути. Тогда по лемме 10 имеем

$$\begin{aligned} i_k(T) &\geq i_k(P_{d+1}) + (n - d - 1) \cdot \min_{0 \leq m \leq d-2k+2} (i_k(P_m) \cdot i_k(P_{d-2k+2-m})) \\ &= i_k(P_{d+1}) + (n - d - 1) \cdot i_k(P_{d-2k+2}) = i_k(T_{k,d,n}). \end{aligned}$$

Равенство  $i_k(T) = i_k(T_{k,d,n})$  означает, что каждая вершина  $T$ , не лежащая на  $P$ , является листом, находящимся на расстоянии  $k$  от одного из концов  $P$ , и все такие листья находятся на расстоянии не более  $k$

друг от друга. При  $d > 2k - 2$  путь  $P$  содержит две различные вершины, находящиеся на расстоянии  $k - 1$  от одного из его концов, обозначим их через  $v_1$  и  $v_2$ . Тогда каждый лист  $T$ , не лежащий на  $P$ , смежен с одной из этих вершин. При этом если  $T$  не изоморфно  $T_{k,d,n}$ , то  $\min(\deg(v_1), \deg(v_2)) \geq 3$ . Поскольку расстояние между  $v_1$  и  $v_2$  не превосходит  $k - 2$ , путь  $P$  содержит не более  $3k - 3$  вершин и  $T$  имеет диаметр не более  $3k - 4$ . Значит, при  $d \geq 3k - 3$  дерево  $T_{k,d,n}$  единственно, что и требовалось.

СЛУЧАЙ  $n = d + 2$ .

ВАРИАНТ  $d > 2k - 2$ . Из рассуждений предыдущего случая следует, что единственное  $(i_k, d, d + 2)$ -минимальное дерево получается из пути  $P_{d+1}$  присоединением листа к его  $k$ -ой от конца вершине. Значит, оно совпадает с деревом  $T_{k,d,d+2}$ .

ВАРИАНТ  $d \in \{2k - 2, 2k - 3\}$ . Ясно, что  $i_k(T_{k,d,d+2}) = i_k(P_{d+1}) + 1$ . Рассмотрим произвольное  $(d + 2)$ -вершинное дерево  $T$  диаметра  $d$ . Оно состоит из диаметрального пути  $P_{d+1}$  и некоторого листа  $u$ , не лежащего на нём. При этом если  $T$  не совпадает с  $T_{k,d,d+2}$ , то лист  $u$  не смежен с центральной вершиной пути, откуда  $i_k^+(T, u) > 1$  и  $i_k(T) > i_k(T_{k,d,d+2})$ , тогда дерево  $T_{k,d,d+2}$  единственное минимальное.

ВАРИАНТ  $d < 2k - 3$ . Обозначим через  $T''_{k,d,d+2}$  дерево, полученное из пути  $P_d$  присоединением листа к его вершине, которая смежна с одной из центральных вершин. Тогда  $i_k(T_{k,d,d+2}) = i_k(T''_{k,d,d+2}) = i_k(P_{d+1}) + 1$  и дерево  $T_{k,d,d+2}$  минимально, но не единственно. Теорема 6 доказана.

Дадим явное описание всех  $(i_k, d, n)$ -минимальных деревьев в случае  $1 < k < d \leq 5$ .

**Следствие 1.** Для всех  $n \geq 4$  единственным  $(i_2, 3, n)$ -минимальным деревом является граф  $S_{3,n}$ , при этом  $i_2(S_{3,n}) = 2n - 2$ .

**Следствие 2.** Для всех  $n \geq 5$  верны следующие утверждения.

1) Единственным  $(i_2, 4, n)$ -минимальным деревом является граф  $S_{4,n}$ , при этом  $i_2(S_{4,n}) = 3n - 6$ .

2) Единственным  $(i_3, 4, n)$ -минимальным деревом является  $M_{2,0}^{n-5}$ , при этом  $i_3(M_{2,0}^{n-5}) = n + 2$ .

**Следствие 3.** Для всех  $n \geq 6$  верны следующие утверждения.

1) Единственным  $(i_2, 5, n)$ -минимальным деревом является граф  $S_{5,n}$ , при этом  $i_2(S_{5,n}) = 4n - 11$ .

2) При  $k \in \{3, 4\}$  каждое  $(i_k, 5, n)$ -максимальное дерево имеет вид  $M_{1,0,1,0}^{p,q}$ , где  $p + q = n - 6$ , при этом  $i_3(M_{1,0,1,0}^{p,q}) = 2n - 2$  и  $i_4(M_{1,0,1,0}^{p,q}) = n + 2$ .

Отметим, что число попарно неизоморфных  $(i_k, 5, n)$ -максимальных деревьев при  $k \in \{3, 4\}$  растёт линейно от  $n$  (см. рис. 4).

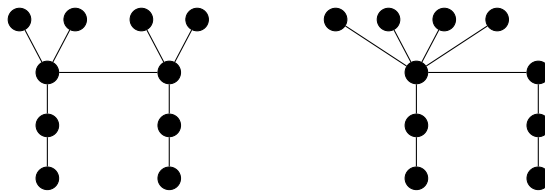


Рис. 4. Два попарно не изоморфных  $(i_3, 5, 10)$ -минимальных дерева

### ЛИТЕРАТУРА

1. Pedersen A. S., Vestergaard P. D. An upper bound on the number of independent sets in a tree // *Ars Comb.* 2007. V. 84. P. 85–96.
2. Frendrup A., Pedersen A. S., Sapozhenko A. A., Vestergaard P. D. Merrifield–Simmons index and minimum number of independent sets in short trees // *Ars Comb.* 2013. V. 111. P. 85–95.
3. Дайняк А. Б. О числе независимых множеств в деревьях фиксированного диаметра // *Дискрет. анализ и исслед. операций.* 2009. Т. 16, № 2. С. 61–73.
4. Талецкий Д. С. Деревья диаметра 6 и 7 с минимальным количеством независимых множеств // *Мат. заметки.* 2021. Т. 109, № 2. С. 276–289.
5. Atkinson G., Frieze A. On the  $b$ -independence number of sparse random graphs // *Comb. Probab. Comput.* 2004. V. 13, No. 3. P. 295–309.
6. Abiad A., Cioabă S. M., Tait M. Spectral bounds for the  $k$ -independence number of a graph // *Linear Algebra Appl.* 2016. V. 510. P. 160–170.
7. Bouchou A., Blidia M. On the  $k$ -independence number in graphs // *Australas. J. Comb.* 2014. V. 59, No. 2. P. 311–322.
8. O S., Shi Y., Taoqiu Z. Sharp upper bounds on the  $k$ -independence number in graphs with given minimum and maximum degree // *Graphs Comb.* 2020. V. 37. P. 393–408.
9. Li Z., Wu B. The  $k$ -independence number of  $t$ -connected graphs // *Appl. Math. Comput.* 2021. V. 409. Paper ID 126412. 4 p.
10. Jou M. J., Lin J. J. Characterization of the distance- $k$  independent dominating sets of the  $n$ -path // *Int. J. Contemp. Math. Sci.* 2018. V. 13, No. 6. P. 231–238.

Талецкий Дмитрий Сергеевич

Статья поступила  
20 октября 2022 г.

После доработки —  
2 мая 2023 г.

Принята к публикации  
11 мая 2023 г.

ON TREES WITH GIVEN DIAMETER AND EXTREMAL  
NUMBER OF DISTANCE- $k$  INDEPENDENT SETSD. S. Taletskii<sup>1,2</sup><sup>1</sup>National Research University “Higher School of Economics”,  
25/12 Bolshaya Pechyorskaya Street, 603155 Nizhny Novgorod, Russia<sup>2</sup>Lobachevsky Nizhny Novgorod State University,  
23 Gagarin Avenue, 603950 Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: dmitailmail@gmail.com

**Abstract.** The set of vertices of a graph is called *distance- $k$  independent* if the distance between any two of its vertices is greater than some integer  $k \geq 1$ . In this paper we describe  $n$ -vertex trees with a given diameter  $d$  which have maximum and minimum possible number of distance- $k$  independent sets among all such trees. The maximum problem is solved for the case  $1 < k < d \leq 5$ . The minimum problem is significantly more simple and is solved for all  $1 < k < d < n$ . Illustr. 4, bibliogr. 10.

**Keywords:** tree, independent set, distance- $k$  independent set, diameter.

## REFERENCES

1. **A. S. Pedersen** and **P. D. Vestergaard**, An upper bound on the number of independent sets in a tree, *Ars Comb.* **84**, 85–96 (2007).
2. **A. Frendrup**, **A. S. Pedersen**, **A. A. Sapozhenko**, and **P. D. Vestergaard**, Merrifield–Simmons index and minimum number of independent sets in short trees, *Ars Comb.* **111**, 85–95 (2013).
3. **A. B. Dainyak**, On the number of independent sets in the trees of a fixed diameter, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **16** (2), 61–73 (2009) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **4** (2), 163–171 (2010)].
4. **D. S. Taletskii**, Trees of diameter 6 and 7 with minimum number of independent sets, *Mat. Zametki* **109** (2), 276–289 (2021) [Russian] [*Math. Notes* **109** (1–2), 280–291 (2021)].

---

This research is supported by the Russian Science Foundation (Project 21–11–00194).

English version: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **17** (3) (2023).

5. **G. Atkinson** and **A. Frieze**, On the  $b$ -independence number of sparse random graphs, *Comb. Probab. Comput.* **13** (3), 295–309 (2004).
6. **A. Abiad**, **S. M. Cioabă**, and **M. Tait**, Spectral bounds for the  $k$ -independence number of a graph, *Linear Algebra Appl.* **510**, 160–170 (2016).
7. **A. Bouchou** and **M. Blidia**, On the  $k$ -independence number in graphs, *Australas. J. Comb.* **59** (2), 311–322 (2014).
8. **S. O**, **Y. Shi**, and **Z. Taoqiu**, Sharp upper bounds on the  $k$ -independence number in graphs with given minimum and maximum degree, *Graphs Comb.* **37**, 393–408 (2020).
9. **Z. Li** and **B. Wu**, The  $k$ -independence number of  $t$ -connected graphs, *Appl. Math. Comput.* **409**, ID 126412, 4 p. (2021).
10. **M. J. Jou** and **J. J. Lin**, Characterization of the distance- $k$  independent dominating sets of the  $n$ -path, *Int. J. Contemp. Math. Sci.* **13** (6), 231–238 (2018).

*Dmitrii S. Taletskii*

Received October 20, 2022

Revised May 2, 2023

Accepted May 11, 2023