ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2023. Т. 30, № 1. С. 28–39

УДК 519.17 DOI 10.33048/daio.2023.30.742

О СЧЁТНОМ СЕМЕЙСТВЕ ГРАНИЧНЫХ КЛАССОВ ГРАФОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ О ДОМИНИРУЮЩЕМ МНОЖЕСТВЕ

Г. С. Дахно[1, a], *Д. С. Малышев*[1, 2, b]

[1] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», ул. Большая Печёрская, 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия
[2] Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского, пр. Гагарина, 23, 603950 Нижний Новгород, Россия
E-mail: [a] `dahnogrigory@yandex.ru`, [b] `dsmalyshev@rambler.ru`

Аннотация. Наследственный класс — это множество обыкновенных графов, замкнутое относительно удаления вершин, каждый такой класс задаётся множеством своих минимальных запрещённых порождённых подграфов. Если это множество конечно, то класс называется конечно определённым. Понятие граничного класса является полезным инструментом анализа вычислительной сложности задач на графах в семействе конечно определённых классов. Задача о доминирующем множестве для заданного графа состоит в том, чтобы определить, имеется ли в нём такое подмножество вершин заданной мощности, что каждая вершина вне подмножества имеет хотя бы одного соседа в подмножестве. Ранее для данной задачи было известно ровно 4 граничных класса (если $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$). В этой работе рассматривается некоторое счётное множество конкретных классов графов и доказывается, что каждый его элемент является граничным классом для задачи о доминирующем множестве (если $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$). Также доказывается $\mathbb{NP}$-полнота данной задачи для графов, не содержащих порождённого 6-пути и 4-клики. Это означает, что множество известных граничных классов для задачи о доминирующем множестве не полное (если $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$). Библиогр. 11.

Ключевые слова: наследственный класс графов, вычислительная сложность, доминирующее множество.

Введение

В настоящей работе рассматриваются только *обыкновенные* графы, т. е. неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Она является

Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

продолжением работ [1, 2], в которых исследовались так называемые граничные классы графов для задачи о доминирующем множестве.

Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Хорошо известно, что каждый наследственный и только наследственный класс $\mathcal{X}$ определяется множеством $\mathcal{Y}$ своих *минимальных запрещённых порождённых подграфов* (т. е. минимальных относительно удаления вершин графов, не принадлежащих $\mathcal{X}$), это принято записывать так: $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{Y})$. Графы из $\mathcal{X}$ называются $\mathcal{Y}$*-свободными.* Если наследственный класс задаётся конечным множеством своих минимальных запрещённых порождённых подграфов, то он называется *конечно определённым.*

Пусть Π — какая-нибудь $\mathbb{NP}$-полная задача на графах. Наследственный класс с полиномиально разрешимой задачей Π называется Π-*простым.* Наследственный класс, для которого задача Π $\mathbb{NP}$-полна, называется Π-*сложным.* На протяжении всей работы предполагается, что $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$, и это условие не включается явно в формулировки соответствующих утверждений.

Наследственный класс $\mathcal{X}$ называется Π-*предельным*, если существует бесконечная последовательность $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \ldots$ из Π-сложных классов графов такая, что $\mathcal{X} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i$. Минимальный по включению Π-предельный класс называется Π-*граничным.* Понятие граничного класса графов введено В. Е. Алексеевым в работе [3]. Значение этого понятия раскрывает следующая теорема (см. [3, 4]).

Теорема 1. *Конечно определённый класс графов* Π*-сложный тогда и только тогда, когда он содержит какой-нибудь* Π*-граничный класс.*

Доминирующим множеством графа $G = (V, E)$ называется подмножество $D \subseteq V$ такое, что каждая вершина из $V \setminus D$ имеет соседа в D. Мощность наименьшего доминирующего множества графа G называется его *числом доминирования* и обозначается через $\gamma(G)$. *Задача о доминирующем множестве* (задача ДМ) для заданных графа G и числа k состоит в том, чтобы проверить, выполняется ли неравенство $\gamma(G) \leqslant k$.

На данный момент для задачи ДМ известно ровно четыре граничных класса (см. [1, 2]). Первый из них — класс $\mathcal{T}$, состоящий из всевозможных лесов, каждая компонента связности которых является деревом с не более чем тремя листьями. Второй — класс $\mathcal{D}$, состоящий из графов рёберных к графам из класса $\mathcal{T}$. Для определения третьего и четвёртого граничных классов понадобятся операторы Q и Q^* над графами, а также понятие наследственного замыкания класса графов.

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф. Через $Q(G)$ обозначим граф на множестве вершин $V \cup E$, в котором

$$E(Q(G)) = \{xy \mid x, y \in V,\, x \neq y\} \\ \cup \{xe \mid x \in V,\, e \in E\colon x \text{ инцидентна } e \text{ в } G\}.$$

Пусть $G = (V, E)$ — *субкубический* граф, т. е. граф со степенями всех вершин не более чем 3. Через V' обозначим множество всех его вершин степени 3. Положим $V'' = V \setminus V'$. Граф $Q^*(G)$ имеет множество вершин $V'' \cup E$ и множество рёбер

$$E(Q^*(G)) = \{xy \mid x, y \in V'',\, x \neq y\} \cup \{xe \mid x \in V'',\, e \in E\colon \\ x \text{ инцидентна } e \text{ в } G\} \cup \bigcup_{x \in V'} \{e_1(x)e_2(x),\, e_1(x)e_3(x),\, e_2(x)e_3(x)\},$$

где $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$ — рёбра, инцидентные вершине x.

Пусть $\mathcal{X}$ — произвольный класс графов, а F — какой-нибудь оператор над графами. Через $F(\mathcal{X})$ обозначим множество $\{F(G) \mid G \in \mathcal{X}\}$. Через $[\mathcal{X}]$ обозначим *наследственное замыкание* $\mathcal{X}$, т. е. множество всех графов, порождённых в графах из $\mathcal{X}$. Через $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}^*$ обозначим множества $[\{Q(G) \mid G \in \mathcal{T}\}]$ и $[\{Q^*(G) \mid G \in \mathcal{T}\}]$.

Классы $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}^*$ ДМ-граничные. Этот результат обобщается в настоящей работе. Для ребра xy произвольного графа его *l-подразбиение*, где l — целое неотрицательное число, состоит в удалении этого ребра, добавлении вершин $z_1, \ldots, z_l$ и рёбер $xz_1, z_1z_2, \ldots, z_{l-1}z_l, z_ly$. Операция 1-подразбиения ребра называется просто *подразбиением ребра*. Операция, обратная к l-подразбиению, называется *l-стягиванием*. Через $Q_k(G)$ обозначим результат $3k$-подразбиения всех рёбер вида xe, ye графа $Q(G)$, где $e = xy \in E(G)$. Через $\mathcal{Q}_k$ обозначим множество $[Q_k(\mathcal{T})]$. Отметим, что $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}$. В этой работе доказывается, что при любом k класс $\mathcal{Q}_k$ ДМ-граничный.

В работе [5] была получена полная классификация сложности задачи ДМ для *моногенных классов*, т. е. наследственных классов, определяемых ровно одним запрещённым порождённым подграфом. Она в ней сформулирована в терминах явного описания соответствующих подграфов. В терминах ДМ-граничных классов это можно переформулировать так: моногенный класс ДМ-простой, если он не включает ни один из классов $\mathcal{T}, \mathcal{D}, \mathcal{Q}$, в противном случае он ДМ-сложный. В [6] получен аналогичный результат (и с той же формулировкой) для семейства наследственных классов, определяемых минимальными запрещёнными порождёнными подграфами с не более чем 5 вершинами каждый.

По сведениям авторов этой работы на данный момент для задачи ДМ не получено полных дихотомий её сложности в семействах наследственных классов, определяемых двумя минимальными запрещёнными порождёнными подграфами или минимальными запрещёнными порождёнными подграфами с не более чем 6 вершинами каждый. В данной работе делается новый шаг в обоих этих направлениях. А именно, доказывается, что класс графов, определяемый запрещением порождённого пути с 6 вершинами и полного подграфа с 4 вершинами, ДМ-сложный. Отсюда и из теоремы 1 следует, что существуют ДМ-граничные классы, отличные от $\mathcal{T}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{Q}_k$ $(k \geqslant 0)$, $\mathcal{Q}^*$.

Интересующийся читатель может обратиться к обзорным работам [4, 7], в которых просуммированы последние на тот момент достижения в области граничных классов графов. В частности, возможны континуальность множества граничных классов (см. [8]) и достижение полного описания граничных классов для неискусственных задач на графах (см. [9]).

1. Некоторые определения, обозначения и факты

1.1. Графы, подграфы и операции над ними. Как обычно, через P_n, C_n, K_n обозначаются простой путь, простой цикл и полный граф на n вершинах соответственно. Графы P_n и C_n называются *n-путём* и *n-циклом* соответственно. Через $K_{p,q}$ обозначается полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и с q вершинами в другой доле. Граф diamond получается удалением ребра из K_4, а граф butterfly получается отождествлением двух треугольников по общей вершине.

Графы P'_k и C'_k получаются добавлением 3-пути (x, y, z) к P_k и C_k соответственно, где $x, y, z \notin V(P_k)$ и $x, y, z \notin V(C_k)$, и ребра yv, где v — конец P_k или $v \in V(C_k)$. Графы P''_k и C''_k получаются добавлением ребра xz к P'_k и C'_k соответственно. Граф $C^e_{k,l}$ получается отождествлением C_k и C_l по одному ребру.

Граф A_1 изоморфен C'_3, граф A_2 изоморфен C''_3, граф A_3 получается из A_1 подразбиением yv, граф A_4 получается из A_3 удалением ребра, инцидентного его вершинам степени 2, граф A_5 получается из A_4 подразбиением его ребра, инцидентного вершинам степени 2 и 3.

Пусть $G = (V, E)$ — граф, а $V' \subseteq V$ — некоторое подмножество его вершин. Через $G \backslash V'$ обозначается результат удаления из G всех вершин, принадлежащих множеству V'.

Через $\overline{G}$ обозначается граф, дополнительный к графу G. Операция дизъюнктного объединения графов применяется только к графам с непересекающимися множествами вершин. Для графов G_1 и G_2 через $G_1 + G_2$ обозначим их дизъюнктное объединение. Через kG обозначим дизъюнктное объединение k графов, каждый из которых изоморфен графу G.

1.2. Классы графов. *Монотонным классом* графов называется наследственный класс, замкнутый ещё и относительно удаления рёбер. Каждый такой класс задаётся множеством своих *минимальных запрещённых подграфов* (т. е. графов, минимальных относительно удаления вершин и рёбер, не принадлежащих классу). Если оно конечно, то он также называется *конечно определённым.* Если $\mathcal{X}$ — монотонный класс графов, а $\mathcal{Y}$ — множество его запрещённых подграфов, то $\mathcal{X} = \mathrm{Free}_m(\mathcal{Y})$. Через $\mathcal{G}$ обозначим множество всех графов, а через $\mathcal{G}_3$ — множество субкубических графов.

1.3. Специальные подмножества вершин. *Независимым множеством* графа называется произвольное его подмножество попарно не смежных вершин. Мощность наибольшего независимого множества графа G обозначается через $\alpha(G)$. *Вершинным покрытием* графа называется такое подмножество его вершин, что каждое ребро графа инцидентно хотя бы одной вершине из подмножества. *Кликой* графа называется любое подмножество его попарно смежных вершин. Нетрудно видеть, что для любого графа $G = (V, E)$ его подмножество вершин V' будет независимым множеством G тогда и только тогда, когда $V \setminus V'$ будет вершинным покрытием G или когда V' будет кликой в $\overline{G}$.

Задача о независимом множестве (задача НМ) для заданных графа G и числа k состоит в том, чтобы определить, выполняется ли неравенство $\alpha(G) \geqslant k$. Класс $\mathcal{T}$ НМ-граничный, более того, он единственный НМ-граничный в семействе монотонных классов графов (см. теоремы 4 и 5 из [3]). Единственность $\mathcal{T}$ как НМ-граничного в семействе монотонных классов и связь между независимыми множествами/вершинными покрытиями в графе G и доминирующими множествами в графе $Q(G)$ использовалась в [1] для доказательства ДМ-граничности $\mathcal{Q}$. Подобная идея будет использоваться и в данной работе.

2. О ДМ-граничности классов $\mathcal{Q}_k$

Следующее утверждение показывает, что при любом k класс $[Q_k(\mathcal{G}_3)]$ конечно определённый.

Лемма 1. *Для любого $k \geqslant 1$ выполнено равенство*

$$[Q_k(\mathcal{G}_3)] = \mathrm{Free}(\mathcal{X}_k),$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_k = \bigl\{&K_{1,5}, C_4, \ldots, C_{6k+2}, C_{6k+4}, \ldots, C_{12k+5}, \mathrm{diamond}, \mathrm{butterfly},\\ &K_{1,3} + C_3, K_{1,3} + P_{6k+2}, C_3 + P_{6k+2}, 2K_{1,3}, 2C_3, 2P_{6k+2},\\ &P'_{6k+3}, C'_{6k+3}, P''_{6k+2}, C^e_{6k+3,6k+3}, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\bigr\}.\end{aligned}$$

Доказательство. Можно доказать, что каждый элемент множества $\mathcal{X}_k$ является минимальным запрещённым порождённым подграфом класса $[Q_k(\mathcal{G}_3)]$, поэтому $[Q_k(\mathcal{G}_3)] \subseteq \mathrm{Free}(\mathcal{X}_k)$. Покажем, что это включение является равенством. Рассмотрим произвольный граф $G \in \mathrm{Free}(\mathcal{X}_k)$.

Поскольку

$$2P_{6k+2}, C_4, \ldots, C_{6k+2}, C_{6k+4}, \ldots, C_{12k+5} \in \mathcal{X}_k,$$

все порождённые циклы G являются 3- или $(6k+3)$-циклами и каждый его порождённый путь имеет не более чем $12k+4$ вершин. Так как

$$C_4, C_5, C_6, K_{1,3}+C_3, 2K_{1,3}, 2C_3, \mathrm{diamond}, \mathrm{butterfly}, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{X}_k,$$

любые две вершины графа G степени не менее чем три смежны.

Пусть G не содержит треугольников. Если $G \in \mathrm{Free}(\{C_{6k+3}\})$, то поскольку $2K_{1,3} \in \mathcal{X}_k$, граф G — лес, все компоненты которого, кроме, быть может, одной, являются простыми путями. Каждый такой $\{K_{1,5}, 2P_{6k+2}, K_{1,3}+P_{6k+2}, P'_{6k+3}\}$-свободный граф принадлежит $[Q_k(\mathcal{G}_3)]$. Если G содержит порождённый $(6k+3)$-цикл, то он единственный, так как

$$2P_{6k+2}, C'_{6k+3}, C^e_{6k+3,6k+3} \in \mathcal{X}_k.$$

Каждый такой $\{K_{1,5}, 2P_{6k+2}, K_{1,3}+P_{6k+2}, P'_{6k+3}\}$-свободный граф принадлежит $[Q_k(\mathcal{G}_3)]$.

Предположим, что G содержит треугольники. Рассмотрим V' — наибольшую клику G, она содержит не менее трёх вершин. Нетрудно видеть, что каждая компонента связности $G \setminus V'$ является путём с не более чем $6k+1$ вершинами, причём каждая внутренняя их вершина не смежна ни с одной вершиной V', а каждая концевая их вершина имеет не более одного соседа в V'. Каждый такой $\{K_{1,5}, \mathrm{butterfly}, C^e_{6k+3,6k+3}\}$-свободный граф принадлежит $[Q_k(\mathcal{G}_3)]$. Лемма 1 доказана.

Следующая лемма является обобщением леммы 11 из [3] (отметим, что в формулировке той леммы речь на самом деле идёт о монотонных классах, а не о просто наследственных).

Лемма 2. *Для любых числа k и монотонного класса $\mathcal{X}$ задача* НМ *в классе $\mathcal{X}$ полиномиально эквивалентна задаче* ДМ *в классе $[Q_k(\mathcal{X})]$.*

Доказательство. Тройное подразбиение (т. е. 3-подразбиение) любого ребра произвольного графа увеличивает его число доминирования ровно на единицу (см., например, лемму 3 из [5]), поэтому $\gamma(Q_k(G)) = \gamma(Q_0(G)) + 2k|E(G)|$ для любого графа G. При доказательстве леммы 11 из [3] было доказано (см. п. (a) и (b)), что для любого непустого графа G число доминирования графа $Q_0(G)$ равно мощности наименьшего вершинного покрытия G, что совпадает с $|V(G)| - \alpha(G)$. Тем самым соотношение

$$\gamma(Q_k(G)) = |V(G)| + 2k|E(G)| - \alpha(G)$$

верно для любого непустого графа G.

Заметим, что для любого графа H, изоморфного $Q_k(G)$, можно вычислить G за полиномиальное от $|V(H)|$ время. Для этого достаточно найти максимальную по включению клику в графе H (она будет наибольшей и соответствует множеству $V(G)$), удалить её из H и найти компоненты связности результата, которые будут путями на $6k+1$ вершинах. Соседи концов этих путей в клике соответствуют рёбрам G. Ясно, что для любого графа G граф $Q_k(G)$ вычисляется за полиномиальное от $|V(G)|$ время. Тем самым задача НМ в любом классе $\mathcal{Y}$ (не обязательно даже наследственном) полиномиально эквивалентна задаче ДМ в классе $Q_k(\mathcal{Y})$.

Рассмотрим произвольный граф $G \in [Q_k(\mathcal{X})] \setminus Q_k(\mathcal{X})$. Можно предполагать, что G содержит клику V^* с не менее чем тремя вершинами, иначе G является дизъюнктным объединением только простых путей или $(6k+3)$-цикла и простых путей, а для таких графов задача ДМ решается за линейное время. По тем же причинам можно предполагать, что G отличен от полного графа, поэтому G состоит из V^*, нескольких порождённых $(6k+3)$-циклов, каждый из которых имеет ровно одно общее ребро с V^*, а также нескольких простых путей, каждый из которых имеет не более чем $6k+2$ вершин, а также общую с V^* вершину.

В графе G будем выполнять 3-стягивания до тех пор, пока это возможно. Получим некоторый граф G', он определяется единственным образом. Ясно, что $\gamma(G) - \gamma(G') = k'$, где k' — количество выполненных 3-стягиваний в G. Граф G' состоит из V^*, нескольких треугольников, каждый из которых имеет ровно одно общее с V^* ребро, порождённых 2-, 3-, 4-путей, каждый из которых имеет с V^* ровно одну общую вершину. Если таких путей в G' нет, то $G' = Q_0(H')$ для некоторого графа $H' \in \mathcal{X}$ (напомним, что $\mathcal{X}$ монотонный).

Предположим, что множество упомянутых путей в G' непусто. Ясно, что существует наименьшее доминирующее множество G', содержащее для каждого i-пути, где $1 \leqslant i \leqslant 4$, i-ю вершину от конца i-пути, принадлежащего V^*. Рассмотрим множество $\widetilde{V}$ тех вершин G', которые не доминируются этими вершинами i-путей, а также подграф G'' графа G', порождённый $\widetilde{V}$ и всеми их соседями в V^*. Если G'' полный, то $\gamma(G) = 1$. Иначе существует такой граф $H'' \in \mathcal{X}$, что $G'' = Q_0(H'')$ и $\gamma(G'') = |V(H'')| - \alpha(H'')$. Тем самым задача ДМ в классе $[Q_k(\mathcal{X})] \setminus Q_k(\mathcal{X})$ полиномиально сводится к задаче НМ в классе $\mathcal{X}$. Лемма 2 доказана.

Теорема 2. *При любом k класс $\mathcal{Q}_k$ ДМ-граничный.*

Доказательство. Множество субкубических графов, не содержащих циклов длины до i включительно, обозначим через $\mathcal{X}_i$. При любом i класс $\mathcal{X}_i$ монотонный и НМ-сложный (см. [10]), причём $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \ldots$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i = \mathcal{T}$, поэтому по лемме 2 при любых k и i класс $[Q_k(\mathcal{X}_i)]$ ДМ-сложный. Нетрудно видеть, что

$$[Q_k(\mathcal{X}_1)] \supseteq [Q_k(\mathcal{X}_2)] \supseteq \ldots \quad \text{и} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty}[Q_k(\mathcal{X}_i)] = \mathcal{Q}_k,$$

поэтому при любом k класс $\mathcal{Q}_k$ ДМ-предельный.

Докажем ДМ-граничность класса $\mathcal{Q}_k$ при любом k. Предположим, напротив, что существует последовательность $\mathcal{Y}_{1,k} \supseteq \mathcal{Y}_{2,k} \supseteq \ldots$ из ДМ-сложных классов, для которой $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{Y}_{i,k} = \mathcal{Q}'_k \subset \mathcal{Q}_k = [Q_k(\mathcal{T})]$. Тогда для некоторого $G \in \mathcal{T}$ выполнено

$$\mathcal{Q}'{}_k \subseteq [Q_k(\mathcal{G}_3)] \cap \mathrm{Free}(\{Q_k(G)\}) \subseteq [Q_k(\mathrm{Free}_m(\{G\}))].$$

По лемме 1 класс $[Q_k(\mathcal{G}_3)] \cap \mathrm{Free}(\{Q_k(G)\})$ конечно определённый. Следовательно, существует такое i', что выполнено включение

$$\mathcal{Y}_{i',k} \subseteq [Q_k(\mathrm{Free}_m(\{G\}))].$$

Класс $\mathrm{Free}_m(\{G\})$ монотонный и не включает класс $\mathcal{T}$. По теореме 2 из [3] класс $\mathrm{Free}_m(\{G\})$ НМ-простой. Следовательно, класс $\mathcal{Y}_{i',k}$ ДМ-простой по лемме 2. Получаем противоречие с предположением о том, что $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$. Теорема 2 доказана.

3. $\mathbb{NP}$-полнота задачи ДМ в классе $\mathrm{Free}(\{P_6, K_4\})$

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф, где $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Через $R(G)$ обозначим граф, который получается из G с помощью описанных ниже преобразований. Предлагаемая нами конструкция похожа на конструкцию из [11], в которой доказана $\mathbb{NP}$-полнота задачи ДМ в классе *хордальных двудольных графов*, т. е. графов из класса $\mathrm{Free}(\{C_3, C_5, C_6, \ldots\})$.

Каждая вершина $v_i \in V$ преобразуется в граф (V_i, E_i), где

$$V_i = \{x_i, y_i, z_i, a_i, b_i\}, \quad E_i = \{a_i x_i, x_i y_i, y_i b_i, a_i z_i, x_i z_i, y_i z_i, b_i z_i\}.$$

Каждое ребро $v_i v_j \in E$ преобразуется в пару вершин p_{ij}, q_{ij}. Имеем

$$V(R(G)) = \bigcup_{i=1}^{n} V_i \ \cup \bigcup_{v_i v_j \in E} \{p_{ij}, q_{ij}\},$$

$$E(R(G)) = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \cup \bigcup_{v_i v_j \in E} \{p_{ij}x_i,\, p_{ij}y_j,\, q_{ij}y_i,\, q_{ij}x_j\} \cup \bigcup_{\substack{i,j \in \overline{1,n},\\ i \neq j}} \{x_i y_j, x_i z_j, y_i z_j\}.$$

Лемма 3. *Для любого графа G выполнено соотношение*

$$\gamma(R(G)) = 2|V(G)| - \alpha(G).$$

Доказательство. Сначала докажем, что $\gamma(R(G)) \leqslant n + k$, где $k = n - \alpha(G)$ — мощность наименьшего вершинного покрытия графа G. Действительно, если $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$ — наименьшее вершинное покрытие графа G, то

$$\{x_{i_1}, y_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, y_{i_k}\} \cup \{z_i \mid i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}\}$$

является доминирующим множеством графа $R(G)$.

Теперь докажем, что $\gamma(R(G)) \geqslant n + k$. Покажем, что существует такое наименьшее доминирующее множество графа $R(G)$, что для любого $i \in \overline{1,n}$ вершины x_i и y_i либо одновременно ему принадлежат, либо одновременно ему не принадлежат. Действительно, если для некоторого наименьшего доминирующего множества D графа $R(G)$ выполнено $x_i \in D$, $y_i \notin D$, то либо $b_i \in D$, либо $z_i \in D$, так как b_i доминируется множеством D. Если $v \in D$, где $v \in \{b_i, z_i\}$, то $(D \setminus \{v\}) \cup \{y_i\}$ — доминирующее множество графа $R(G)$.

Пусть D — такое наименьшее доминирующее множество графа $R(G)$, что для любого $i \in \overline{1,n}$ либо $x_i, y_i \notin D$, либо $x_i, y_i \in D$. Положим $I = \{i \mid x_i, y_i \in D\}$. Из минимальности D следует, что если $p_{ij} \in D$, то $x_i, x_j, y_i, y_j \notin D$ и $q_{ij} \in D$. Тогда $(D \setminus \{p_{ij}, q_{ij}\}) \cup \{x_i, y_i\}$ — тоже доминирующее множество $R(G)$, поэтому можно считать, что ни одна из вершин p_{ij} и q_{ij} не принадлежит D. Следовательно, множество $\{v_i \mid i \in I\}$ является вершинным покрытием графа G, а значит, $|I| \geqslant k$. Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus I$ множество D одновременно доминирует вершины a_i и b_i, поэтому $a_i, b_i \in D$ либо $z_i \in D$ для любого такого i. Ввиду минимальности D выполнено $z_i \in D$ для любого такого i. Тем самым

$$\gamma(R(G)) = |D| = 2|I| + n - |I| \geqslant n + k.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Выполнено включение* $R(\mathcal{G}) \subseteq \mathrm{Free}(\{P_6, K_4\})$.

Доказательство. Рассмотрим множество графов $R(\mathcal{G})$. В каждом из них степени вершин a_i, b_i, p_{ij}, q_{ij} равны 2, поэтому они не могут содержаться в подграфе K_4. В каждом графе из $R(\mathcal{G})$ подмножества

$$X = \{x_i\}_{i=1}^n, \quad Y = \{y_i\}_{i=1}^n, \quad Z = \{z_i\}_{i=1}^n$$

независимы, значит, $R(\mathcal{G}) \subseteq \mathrm{Free}(\{K_4\})$.

Заметим, что в каждом графе из $R(\mathcal{G})$ каждая из вершин a_i, b_i, p_{ij}, q_{ij} имеет ровно два соседа, причём они смежные. Нетрудно видеть, что подграф каждого графа из $R(\mathcal{G})$, порождённый подмножеством $X \cup Y \cup Z$, $\{P_4\}$-свободный, что означает $R(\mathcal{G}) \subseteq \mathrm{Free}(\{P_6\})$. Лемма 4 доказана.

Теорема 3. *Класс* $\mathrm{Free}(\{P_6, K_4\})$ ДМ-*сложный.*

Доказательство. Граф $R(G)$ вычисляется по графу G за полиномиальное от $|V(G)|$ время, поэтому по лемме 3 $\mathbb{NP}$-полная в классе $\mathcal{G}$

задача НМ полиномиально сводится к задаче ДМ в классе $R(\mathcal{G})$. Тем самым задача ДМ $\mathbb{NP}$-полна в классе $R(\mathcal{G})$, который по лемме 4 является подмножеством класса $\mathrm{Free}(\{P_6, K_4\})$. Теорема 3 доказана.

Заметим, что $P_6 \in \mathcal{T}$, $P_6 \in \mathcal{D}$ и $K_4 \in \mathcal{Q}_k$ $(k \geqslant 0)$, $K_4 \in \mathcal{Q}^*$. Отсюда и из теорем 1 и 3 следует, что справедливо

Следствие 1. *Существуют* ДМ-*граничные классы, отличные от* $\mathcal{T}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{Q}_k$ $(k \geqslant 0)$, $\mathcal{Q}^*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Alekseev V. E., Korobitsyn D. V., Lozin V. V.** Boundary classes of graphs for the dominating set problem // Discrete Math. 2004. V. 285, No. 1–3. P. 1–6.
2. **Malyshev D. S.** A complexity dichotomy and a new boundary class for the dominating set problem // J. Comb. Optim. 2016. V. 32. P. 226–243.
3. **Alekseev V. E.** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Appl. Math. 2003. V. 132, No. 1–3. P. 17–26.
4. **Alekseev V. E., Boliac R., Korobitsyn D. V., Lozin V. V.** NP-hard graph problems and boundary classes of graphs // Theor. Comput. Sci. 2007. V. 389, No. 1–2. P. 219–236.
5. **Коробицын Д. В.** О сложности определения числа доминирования в моногенных классах графов // Дискрет. математика. 1990. Т. 2, № 3. С. 90–96.
6. **Malyshev D. S.** A dichotomy for the dominating set problem for classes defined by small forbidden induced subgraphs // Discrete Appl. Math. 2016. V. 203. P. 117–126.
7. **Malyshev D. S., Pardalos P. M.** Critical hereditary graph classes: A survey // Optim. Lett. 2016. V. 10, No. 8. P. 1593–1612.
8. **Малышев Д. С.** Континуальные множества граничных классов графов для задач о раскраске // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 5. С. 41–51.
9. **Малышев Д. С.** Критические классы графов для задачи о рёберном списковом ранжировании // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 6. С. 59–76.
10. **Murphy O. J.** Computing independent sets in graphs with large girth // Discrete Appl. Math. 1992. V. 35, No. 2. P. 167–170.
11. **Müller H., Brandstädt A.** The NP-completeness of Steiner tree and dominating set for chordal bipartite graphs // Theor. Comput. Sci. 1987. V. 53, No. 2–3. P. 257–265.

Дахно Григорий Сергеевич
Малышев Дмитрий Сергеевич

Статья поступила
29 мая 2022 г.
После доработки —
23 октября 2022 г.
Принята к публикации
24 октября 2022 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2023. Vol. 30, No. 1. P. 28–39

UDC 519.17 DOI 10.33048/daio.2023.30.742

ON A COUNTABLE FAMILY OF BOUNDARY GRAPH CLASSES FOR THE DOMINATING SET PROBLEM

G. S. Dakhno[1, a] and *D. S. Malyshev*[1, 2, b]

[1] National Research University “Higher School of Economics”,
25/12 Bolshaya Pechyorskaya Street, 603155 Nizhny Novgorod, Russia
[2] Lobachevsky Nizhny Novgorod University,
23 Gagarin Avenue, 603950 Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: [a] dahnogrigory@yandex.ru, [b] dsmalyshev@rambler.ru

Abstract. The hereditary class is a set of simple graphs closed under deletion of vertices; every such class is defined by the set of its minimal forbidden induced subgraphs. If this set is finite, then it is called finitely defined. The concept of a boundary class is a useful tool for analysis of the computational complexity of graph problems in the finitely defined classes family. The dominating set problem for a given graph is to determine whether it has a given-size subset of vertices such that every vertex outside the subset has at least one neighbor in the subset. Previously, exactly 4 boundary classes were known for this problem (if $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$). This work considers some countable set of concrete classes of graphs and proves that each its element is a boundary class for the dominating set problem (if $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$). We also prove $\mathbb{NP}$-completeness of this problem for graphs that contain neither induced 6-path nor induced 4-clique, which means that the set of known boundary classes for the dominating set problem is not complete (if $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$). Bibliogr. 11.

Keywords: hereditary graph class, computational complexity, dominating set.

REFERENCES

1. **V. E. Alekseev, D. V. Korobitsyn,** and **V. V. Lozin,** Boundary classes of graphs for the dominating set problem, *Discrete Math.* **285** (1–3) 1–6 (2004).
2. **D. S. Malyshev,** A complexity dichotomy and a new boundary class for the dominating set problem, *J. Comb. Optim.* **32**, 226–243 (2016).

This research is carried out within the framework of the Basic Research Program at the National Research University “Higher School of Economics”.

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **17** (1) (2023).

3. **V. E. Alekseev,** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem, *Discrete Appl. Math.* **132** (1–3), 17–26 (2003).
4. **V. E. Alekseev, R. Boliac, D. V. Korobitsyn,** and **V. V. Lozin,** NP-hard graph problems and boundary classes of graphs, *Theor. Comput. Sci.* **389** (1–2), 219–236 (2007).
5. **D. V. Korobitsyn,** Complexity of some problems on hereditary classes of graphs, *Diskretn. Mat.* **2** (3), 90–96 (1990) [Russian] [*Discrete Math. Appl.* **2** (2), 191–199 (1992)].
6. **D. S. Malyshev,** A dichotomy for the dominating set problem for classes defined by small forbidden induced subgraphs, *Discrete Appl. Math.* **203**, 117–126 (2016).
7. **D. S. Malyshev** and **P. M. Pardalos,** Critical hereditary graph classes: A survey, *Optim. Lett.* **10** (8), 1593–1612 (2016).
8. **D. S. Malyshev,** Continued sets of boundary classes of graphs for colorability problems, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **16** (5), 41–51 (2009) [Russian].
9. **D. S. Malyshev,** Critical graph classes for the edge list-ranking problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **20** (6), 59–76 (2013) [Russian] [*J. Appl. Industr. Math.* **8** (2), 245–255 (2014)].
10. **O. J. Murphy,** Computing independent sets in graphs with large girth, *Discrete Appl. Math.* **35** (2), 167–170 (1992).
11. **H. Müller** and **A. Brandstädt,** The NP-completeness of Steiner tree and dominating set for chordal bipartite graphs, *Theor. Comput. Sci.* **53** (2–3), 257–265 (1987).

Grigory S. Dakhno
Dmitry S. Malyshev

Received May 29, 2022
Revised October 23, 2022
Accepted October 24, 2022