ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2023. Т. 30, № 1. С. 5–27

УДК 519.83 DOI 10.33048/daio.2023.30.744

ЧИСТОЕ РАВНОВЕСИЕ НЭША В ДВУХШАГОВОЙ ИГРЕ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ: ПОКРЫТИЕ ТОРГОВЫХ ТОЧЕК В ТУРИСТИЧЕСКОМ ГОРОДЕ

В. В. Гусев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», ул. Кантемировская, 3, 194100 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: `vgusev@hse.ru`

Аннотация. Малый бизнес в небольших туристических городах направлен на удовлетворение потребностей приезжих туристов, поэтому между предпринимателями из одной области предоставления услуг образуется конкуренция, что делает актуальной задачу ценообразования. Некоторым предпринимателям требуется определиться со стоимостью своего товара и местом его продажи. Если из-за конкуренции индивидуальный предприниматель будет часто менять место продажи своего товара, то можно пропустить сезон и не получить желаемой прибыли. Интерес представляет случай, когда выбор места продажи осуществляется в чистых стратегиях. С использованием концепции игр заполнения со специальными функциями выигрышей (congestion games with player-specific payoff functions) и теории порядковых потенциальных функций в работе показано существование равновесия в игре ценообразования. В качестве примера найдено равновесное распределение индивидуальных предпринимателей по торговым точкам в городе Геленджик. Табл. 3, ил. 2, библиогр. 22.

Ключевые слова: теория игр, чистое равновесие Нэша, игра ценообразования, потенциальные игры.

Исследование выполнено за счёт Российского научного фонда (проект № 22–21–20070), а также поддержано грантом Санкт-Петербургского научного фонда в соответствии с соглашением № 65/2022 от 15 апреля 2022 г.

Рис. 1. Город Геленджик

Введение

Описание проблемы. Геленджик (рис. 1) является туристическим городом, причём больший приток туристов наблюдается в летний период. Лучшими идеями для бизнеса в городе являются пляжные развлечения, экскурсионные компании, ресторанный и гостиничный бизнес. Местные жители пользуются популярностью своего города, и многие из них становятся индивидуальными предпринимателями. Ярким примером такого предпринимательства является продажа уличной еды.

Каждый год в Геленджике происходит следующая ситуация. Предприниматели уличной еды арендуют муниципальные участки для установки своих ларьков. Наиболее предпочтительным местом для ларька является Центральный пляж. Известно, что количество кафе и ресторанов на Центральном пляже меньше по сравнению с другими местами города. Это связано с тем, что число клиентов резко уменьшается после окончания туристического сезона, а владелец ресторана вынужден платить арендную плату в течение всего года. Продавцы уличной еды, зная это, арендуют участок только на период туристического сезона.

В дневное и околовечернее время на пляже находится большее число туристов по сравнению с другими местами отдыха, поэтому многие предприниматели арендуют муниципальный участок вблизи купальной зоны. Однако из-за конкуренции друг с другом у некоторых предпринимателей расходы на реализацию товара и арендная стоимость превышают доход. Также стоит отметить, что в туристическом городе цены на продукцию часто завышены, что влияет на спрос. Поэтому некоторые предприниматели обращаются в администрацию города с заявлением о том, чтобы разместить свой ларёк в другом месте. На подготовку всех документов и перемещение ларька уходит время. Туристический сезон обычно длится с апреля по сентябрь, но лучшее время для отдыха на море — это летние месяцы. Если установить свой ларёк не в выгодном месте, то можно пропустить сезон и не получить желаемой прибыли.

Для каждого предпринимателя уличной еды требуется определить оптимальное размещение его ларька и найти цены на его продукцию при некоторых заданных параметрах. Под параметрами понимаются значение спроса на уличную еду, среднее число клиентов, затраты на реализацию продукции и др. В работе предложена теоретико-игровая модель для решения описанной проблемы.

Литература. Существует множество подходов к решению задачи ценообразования. Классической моделью ценообразования является олигополия, в которой существует фиксированный набор фирм и каждая фирма максимизирует свою прибыль в условиях конкуренции. В [1] учитывается сетевая структура конкурирующих предприятий и доказывается существование единственного равновесия. В [2] исследуются отношения поставщика товара и упаковочной компании и показано, что упаковочная компания оказывает влияние на прибыль поставщика товара. Поведение игроков в модели с многопродуктовыми фирмами изучено в [3].

В работе [4] проведено исследование по изучению различий цен между супермаркетами и ближайшими малыми продовольственными магазинами. Развитие продовольственной системы и супермаркетов изучено в [5, 6]. В исследовании [7] вводятся новые индексы потребительских цен Китая и проводится сравнение с классическими индексами.

Если потребитель находится в торговой точке и несколько игроков предлагают свою продукцию, то нужно определить, чьим клиентом станет потребитель. В [8] предполагается, что число клиентов является случайной величиной. Если известна частичная информация о продаваемом продукте, то клиенты решают специальную задачу поиска [9]. В работе [10] описывается поведение клиентов в зависимости от стратегии управляющей компании. В [11] выделяются внимательные и невнимательные клиенты. Предполагается, что потребитель равновероятно становится клиентом тех игроков, которых он предпочитает. Такое предположение также используется в текущей работе.

Задача ценообразования актуальна в течение нескольких сезонов, поэтому для нахождения стратегий игроков используется подход повторяющихся игр [12–14]. Математическая модель текущей работы построена для одного периода в связи с тем, что число продавцов уличной еды и значения параметров известны для последнего туристического сезона.

Результат. Каждому предпринимателю необходимо определить цену на товар и установить ларёк в некоторой торговой точке. Чтобы решить такую проблему, определение равновесия по Нэшу модифицировано для конкретной задачи и названо двухшаговым равновесием. На первом и втором шагах находятся цены игроков и оптимальное распределение ларьков по торговым точкам соответственно. Функции выигрыша имеют специальный вид. Показано, что двухшаговое равновесие существует при некоторых естественных ограничениях (теорема 1). Важен тот факт, что выбор торговых точек осуществляется в чистых стратегиях. С помощью теоремы 1 получено числовое решение при некоторых заданных параметрах.

1. Основные обозначения и потенциальные игры

Игра в нормальной форме — это тройка $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N}\rangle$, где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество игроков, S_i — множество стратегий игрока $i \in N$, $H_i\colon S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ — выигрыш игрока i. Элемент x_i из множества S_i называется *стратегией* (или *чистой стратегией*) игрока $i \in N$. *Профиль стратегий* — это вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in S_i$ для любого $i \in N$. Игра Γ называется *конечной*, если для любого $i \in N$ множество S_i состоит из конечного числа элементов. *Смешанной стратегией* игрока i называется вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{|S_i|})$, $\sum\limits_{j=1}^{|S_i|} y_j = 1$, $y_j \geqslant 0$, $j \in \{1, 2, \ldots, |S_i|\}$. Число y_j, $j \in \{1, 2, \ldots, |S_i|\}$, — это вероятность, с которой игрок i выбирает стратегию $x_j \in S_i$.

Для профиля стратегий $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $a \in S_i$ положим

$$x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$
$$(a, x_{-i}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

Обозначим $S_{-i} = S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$.

Игра Γ называется *потенциальной* [15], если существует функция $P\colon S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ такая, что для любых $i \in N$, $a, b \in S_i$, $x_{-i} \in S_{-i}$ выполняется

$$H_i(a, x_{-i}) - H_i(b, x_{-i}) = P(a, x_{-i}) - P(b, x_{-i}).$$

Игра Γ называется *порядковой потенциальной*, если существует функция $P\colon S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ такая, что для любых $i \in N$, $a, b \in S_i$, $x_{-i} \in S_{-i}$ выполняется

$$H_i(a, x_{-i}) - H_i(b, x_{-i}) > 0 \Leftrightarrow P(a, x_{-i}) - P(b, x_{-i}) > 0.$$

Функция P называется *потенциальной* или *порядковой потенциальной* в зависимости от типа игры. Пусть существует профиль стратегий, который максимизирует функцию P. Тогда такой профиль является равновесием по Нэшу в игре Γ. В конечных потенциальных играх всегда существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях. Некоторые результаты о потенциальных играх коалиционного разбиения получены в [16].

Игра заполнения — это кортеж $\Gamma = \langle N, V, \{S_i\}_{i \in N}, \{f_w\}_{w \in V} \rangle$, где N — множество игроков, V — множество ресурсов, $S_i \subseteq 2^V$ — множество стратегий игрока $i \in N$ и $f_w \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — функция выплат, ассоциированная с ресурсом $w \in V$ [17].

В игре заполнения выигрыш игрока равен

$$H_i(x) = \sum_{w \in x_i} f_w(k_w(x)),$$

где $k_w(x)$ — это количество игроков, которые в профиле стратегий x выбрали ресурс w. В играх заполнения предполагается, что f_w является монотонно убывающей функцией. Игра заполнения — это потенциальная игра, в которой потенциальная функция имеет вид

$$P(x) = P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{w \in \bigcup\limits_{i \in N} x_i} \sum_{k=1}^{k_w(x)} f_w(k).$$

В игре заполнения существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.

Игрой заполнения со специфичными функциями выигрышей (congestion game with player-specific payoff functions) называется игра в нормальной форме, в которой выигрыш игрока определяется по формуле

$$H_i(x) = f_{i,x_i}(k_{x_i}(x)),$$

где $k_{x_i}(x)$ — это количество игроков, которые в профиле стратегий x используют стратегию x_i, $f_{i,x_i} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $i \in N$, $x_i \in S_i$. В игре заполнения со специфичными функциями выигрышей выигрыш игрока $i \in N$ зависит от его стратегии x_i и числа игроков, которые используют стратегию x_i. Если для любых $i \in N$ и $x_i \in S_i$ функция f_{i,x_i} монотонно убывает, то существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях [18].

2. Модель

2.1. Игра ценообразования. Обозначим через $N = \{1, 2, \dots, n\}$ множество игроков, а через $V = \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$ — множество торговых точек. Каждый игрок из множества N выбирает единственную торговую точку из множества V, чтобы продавать там свой товар. Одна и та же торговая точка может быть выбрана несколькими игроками. Могут существовать торговые точки, которые не выбраны ни одним игроком.

Каждый игрок устанавливает цену на свой товар в выбранной торговой точке. Игроки продают товар одного наименования. Кооперация между игроками отсутствует.

Пусть $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, где v_i — торговая точка, которую выбрал игрок $i \in N$, $v_i \in V$, $v \in V^n$. Множество $D_i(v_i)$ — область определения стоимости одной единицы продукции, по которой игрок i продаёт свой товар в торговой точке v_i. Пусть $D = D(v) = D_1(v_1) \times D_2(v_2) \times \cdots \times D_n(v_n)$. Число $p_i(v_i)$ — цена, по которой игрок i продаёт единицу товара в торговой точке v_i, $p_i(v_i) \in D_i(v_i)$.

Стратегия игрока i представляет собой пару $\langle v_i, p_i(v_i)\rangle$. Игрок i выбирает торговую точку v_i и устанавливает в выбранной торговой точке цену $p_i(v_i)$. Цена, по которой игрок i продаёт свой товар, зависит от торговой точки. Профиль стратегий игроков — пара $(v, p) \in V^n \times D$, где

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n), \quad p = p(v) = (p_1(v_1), p_2(v_2), \ldots, p_n(v_n)).$$

Обозначим $v^* = (v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*)$, $p^* = p^*(v^*) = (p_1^*(v_1^*), p_2^*(v_2^*), \ldots, p_n^*(v_n^*))$, где $v_i^* \in V$, $p_i^*(v_i^*) \in D_i(v_i^*)$ для любого $i \in N$.

Определение 1. *Игрой ценообразования* будем называть игру в нормальной форме $\langle N, \{S_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N}\rangle$, где N — множество игроков, $S_i = \{\langle w, p_i(w)\rangle \mid w \in V,\ p_i(w) \in D_i(w)\}$ — множество стратегий игрока $i \in N$, $H_i\colon S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ — функция выигрыша игрока $i \in N$.

Запишем определение равновесия и поясним его физический смысл для задачи ценообразования.

Определение 2. Пара (v^*, p^*) — это *двухшаговое равновесие* в игре ценообразования, если для любого $i \in N$ выполняются неравенства

$$\max_{p_i(v_i)} H_i((v_i, v_{-i}^*), (p_i(v_i), p_{-i}^*)) \leqslant H_i(v^*, p^*), \quad v_i \in V. \tag{1}$$

Двухшаговое равновесие представляет собой модернизированное равновесие по Нэшу. Пусть в (1) $v_i = v_i^*$. Тогда

$$H_i(v^*, (p_i(v_i^*), p_{-i}^*)) \leqslant H_i(v^*, p^*), \quad p_i(v_i^*) \in D_i(v_i^*). \tag{2}$$

В условии (2) торговые точки фиксированы. Если игрок i в торговой точке v_i^* будет продавать свой товар не по цене $p_i^*(v_i^*)$, а по цене $p_i(v_i^*)$, то его выигрыш не увеличится при условии, что любой другой игрок $j \in N \setminus \{i\}$ продаёт свой товар по цене $p_j^*(v_j^*)$. Выполнение условия (2) гарантирует, что существует ценовое равновесие внутри выбранной торговой точки v_i^*. Пусть игрок i изменил торговую точку v_i^* на $v_i \in V$. Тогда в новой торговой точке игрок i установит цену $p_i(v_i)$, которая максимизирует его выигрыш, предполагая, что торговые точки и цены других игроков фиксированы. Условие (1) говорит о том, что игроку i невыгодно менять торговую точку v_i^* на v_i, даже если он максимизирует свой выигрыш по цене $p_i(v_i) \in D_i(v_i)$. Если (v^*, p^*) — двухшаговое равновесие, то игрокам невыгодно изменять стоимость своей продукции и место его продажи.

Двухшаговое равновесие может существовать в чистых или смешанных стратегиях. Если в задаче ценообразования игроки будут придерживаться смешанных стратегий и менять свои торговые точки, то это может привести к негативным последствиям. Выбрав некоторую торговую точку в качестве места продажи своего товара, игрок арендует муниципальный участок, формирует базу клиентов и т. д. Частое изменение торговой точки будет приводить к материальным убыткам в течение сезона, потере постоянных клиентов. Если игрок выбрал некоторую торговую точку в качестве места продажи своей продукции, то, как правило, у него нет соблазна продавать свою продукцию в другом месте. Более того, индивидуальный предприниматель должен торговать в той торговой точке, где арендовал муниципальный участок: администрация города не всегда разрешает поменять один участок на другой. Поэтому нас будет интересовать равновесие в чистых стратегиях.

Запишем конкретные функции выигрыша игроков в игре ценообразования, исходя из вероятностных и экономических соображений.

2.2. Доля клиентов игроков. Обозначим через $n(w)$ число потребителей в торговой точке $w \in V$. Пусть $f_i(p_i(v_i))$ — доля потребителей, которые являются клиентами игрока $i \in N$ в торговой точке v_i при условии, что игрок i является единственным продавцом в v_i. Доля потребителей $f_i(p_i(v_i))$ зависит от цены $p_i(v_i)$, которую устанавливает игрок i. Логично предположить, что $f_i(0) = n(v_i)$ для всех $i \in N$. Такое равенство означает, что все потребители являются клиентами игрока i, так как товар бесплатный. Будем предполагать, что

$$f_i(p_i(v_i)) = n(v_i) \cdot e^{-a_i(v_i)p_i(v_i)}.$$

Число $a_i(w)$ — это параметр спроса. О приложении экспоненциального распределения в задачах ценообразования можно узнать в [19].

Пусть торговую точку $w \in V$ выбрало несколько игроков. Обозначим $K_w(v) = \{j \in N \mid v_j = w\}$, где $v \in V^n$. Множество $K_w(v)$ состоит из игроков, которые в векторе $v \in V^n$ выбрали торговую точку w. Пусть $K_w(v) \neq \varnothing$. Произведение

$$n(w) \cdot \prod_{l \in L} e^{-a_l(w)p_l(w)} \prod_{j \in K_w(v) \setminus L} (1 - e^{-a_j(w)p_j(w)})$$

— это доля потребителей в торговой точке w, которые предпочитают продукцию игроков из множества $L \subseteq K_w(v)$, $L \neq \varnothing$, и не предпочитают продукцию игроков из множества $K_w(v) \setminus L$. Если $K_w(v) \setminus L = \varnothing$, то определим произведение $\prod\limits_{j \in K_w(v) \setminus L} (1 - e^{-a_j(w)p_j(w)})$ тождественно равным единице.

Обозначим через $d_i(v, p)$ долю клиентов игрока $i \in N$, где

$$d_i(v,p) = n(v_i) \sum_{i \in L \subseteq K_{v_i}(v)} \frac{1}{|L|} \prod_{l \in L} e^{-a_l(v_i)p_l(v_i)} \prod_{j \in K_{v_i}(v) \setminus L} (1 - e^{-a_j(v_i)p_j(v_i)}).$$

Так как потребители в торговой точке v_i, $i \in N$, предпочитают продукцию всех игроков из множества $L \subseteq K_{v_i}(v)$, потребители распределяются между игроками из L равномерно. По этой причине в формуле доли клиентов появляется множитель $\frac{1}{|L|}$. Если $N = \{i\}$, то

$$d_i(v,p) = f_i(p_i(v_i)) = n(v_i) \cdot e^{-a_i(v_i)p_i(v_i)}.$$

Заметим, что доля клиентов игрока i уменьшается при увеличении цены $p_i(v_i)$. С другой стороны, если игрок i увеличит цену товара, то доля клиентов игрока $j \neq i$ не уменьшится. Это следует из того, что выполняются неравенства

$$\frac{\partial d_i(v,p)}{\partial p_i(v_i)} < 0, \quad \frac{\partial d_j(v,p)}{\partial p_i(v_i)} \geqslant 0, \quad i, j \in N, \ i \neq j.$$

2.3. Функции выигрыша в игре ценообразования. Обозначим через $c_i(w)$ затраты игрока $i \in N$ на реализацию товара в точке $w \in V$, $c_i(w) > 0$. Пусть $r(w)$ — затраты, которые зависят от торговой точки w и не зависят от игрока. Например, в $r(w)$ входит стоимость аренды муниципального участка, $r(w) > 0$ для любого $w \in V$. Функции выигрыша игроков в игре ценообразования для любого $i \in N$ имеют вид

$$H_i(v,p) = (p_i(v_i) - c_i(v_i)) \cdot d_i(v,p) - r(v_i) = (p_i(v_i) - c_i(v_i)) \cdot n(v_i) \\ \times \sum_{i \in L \subseteq K_{v_i}(v)} \frac{1}{|L|} \prod_{l \in L} e^{-a_l(v_i)p_l(v_i)} \prod_{j \in K_{v_i}(v) \setminus L} (1 - e^{-a_j(v_i)p_j(v_i)}) - r(v_i). \quad (3)$$

Величины $p_i(v_i) \cdot d_i(v,p)$ и $c_i(v_i)d_i(v,p) + r(v_i)$ — ожидаемый доход и ожидаемые расходы игрока $i \in N$ соответственно. Функция выигрыша игрока i представляет собой чистую прибыль. Областью определения цены $p_i(v_i)$, $i \in N$, является $D_i(v_i) = (c_i(v_i); +\infty)$. Будем предполагать, что

$$a_i(w) \cdot c_i(w) = b(w), \quad i \in N, \ w \in V. \quad (4)$$

Равенство (4) означает, что произведение $a_i(w)$ и $c_i(w)$ не зависит от игрока $i \in N$, а зависит только от торговой точки $w \in V$. Пусть (4) выполняется. Тогда чем ближе значение $a_i(w)$ к нулю, тем выше спрос и тем больше $c_i(w)$. Это означает, что требуются большие затраты на производство товара с высоким спросом.

Далее нас будет интересовать существование двухшагового равновесия в игре ценообразования с функциями выигрыша (3).

3. Теоретические результаты

В данном разделе получены основные теоретические результаты. Доказательства всех утверждений даны в разделе приложение.

Обозначим через w некоторую торговую точку из V. Пусть выбор торговых точек фиксирован и существует игрок $i \in N$, для которого выполняется $v_i = w$. Рассмотрим игру в нормальной форме

$$\Gamma_w = \langle K_w(v),\, \{D_i(v_i)\}_{i\in K_w(v)},\, \{H_i(v,p)\}_{i\in K_w(v)}\rangle,$$

где $K_w(v)$ — множество игроков, которые выбрали торговую точку w, а функция выигрыша $H_i(v,p)$, $i \in N$, определяется по формуле (3). Так как w и v фиксированы в Γ_w, нас будут интересовать существование равновесных цен.

Лемма 1. *Игра Γ_w является порядковой потенциальной игрой с потенциальной функцией*

$$P(v,p) = \prod_{k\in K_w(v)} (p_k(w) - c_k(w)) \cdot e^{-a_k(w)p_k(w)}.$$

Существует единственное значение равновесной цены $p^*_k(w)$, а именно

$$p^*_k(w) = c_k(w) + \frac{1}{a_k(w)}, \quad k \in K_w(v).$$

Значение равновесной цены $p^*_k(w)$, $k \in K_w(v)$, из леммы 1 не зависит от игроков, которые выбрали торговую точку w. Цена включает в себя стоимость затрат на реализацию продукта и слагаемое, отвечающее за спрос на товар игрока k в торговой точке w. Чем ближе значение $a_k(w)$ к нулю, тем выше спрос на товар игрока k и тем больше значение $p^*_k(w)$.

В лемме 2 упрощается значение функции выигрыша $H_i(v,p^*)$, где p^* — вектор равновесных цен из леммы 1.

Лемма 2. *Пусть $v \in V^n$, $p^* = p^*(v) = \big(p^*_i(v_i) = c_i(v_i) + \frac{1}{a_i(v_i)}\big)_{i\in N}$, $A(w) = e^{-b(w)-1}$, $w \in V$, и выполняется* (4). *Тогда*

$$H_i(v,p^*) = \frac{n(v_i)}{a_i(v_i)} \cdot \frac{1-(1-A(v_i))^{|K_{v_i}(v)|}}{|K_{v_i}(v)|} - r(w). \tag{5}$$

Поясним равенство (5). Пусть $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — вектор из торговых точек. Каждый игрок $i \in N$ в торговой точке v_i устанавливает цену

$c_i(v_i) + \frac{1}{a_i(v_i)}$. Так как в лемме 2 выполняется (4), игроки в некотором смысле симметричны. В таком случае выигрыш игрока i зависит от параметров $n(v_i)$, $a_i(v_i)$, $b(v_i)$ и числа игроков, которые выбрали торговую точку v_i. Из утверждения 1 следует, что чем больше значение $|K_{v_i}(v)|$, тем меньше $H_i(v, p^*)$. Такое свойство естественно, потому что чем больше конкурентов у игрока, тем меньше его выигрыш.

Утверждение 1. *Для любых* $a \in (0;1)$ *и* $k \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство* $\frac{1-a^k}{k} > \frac{1-a^{k+1}}{k+1}$.

В лемме 3 показано, как можно упростить левую часть неравенства (1) в рассматриваемой игре ценообразования.

Лемма 3. *Пусть* $v \in V^n$, $p^* = p^*(v) = \left(p_i^*(v_i) = c_i(v_i) + \frac{1}{a_i(v_i)}\right)_{i \in N}$. *Тогда для любого* $i \in N$

$$\max_{p_i(v_i)} H_i((v_i, v_{-i}), (p_i(v_i), p_{-i}^*)) = H_i(v, p^*).$$

Поясним лемму 3. Предположим, что каждый игрок $i \in N$ в торговой точке устанавливает цену $c_i(v_i) + \frac{1}{a_i(v_i)}$. Теперь игрок i хочет изменить торговую точку v_i на $v_i' \neq v_i$, а любой другой игрок $j \neq i$ не меняет торговой точки и не меняет цены. В новой торговой точке игрок i установит такую цену на свой товар, которая максимизирует его выигрыш. Из леммы 3 следует, что такая цена равна $c_i(v_i') + \frac{1}{a_i(v_i')}$.

Неравенства (1) можно упростить с помощью леммы 3 следующим образом:

$$H_i((v_i, v_{-i}^*), p^*) \leqslant H_i(v^*, p^*), \quad v_i \in V.$$

Следовательно, v^* — равновесие по Нэшу в некоторой специальной игре. Обозначим эту игру следующим образом:

$$G = \langle N, \{V\}_{i \in N}, \{H_i(v, p^*)\}_{i \in N} \rangle,$$

где стратегия игрока — выбор торговой точки из множества V, а функции выигрыша определяются по формуле (5). Вектор p^* в игре G является фиксированным параметром. С помощью утверждения 1 получается

Лемма 4. *В игре* G *существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.*

Игра G принадлежит классу congestion games with player-specific payoff functions [18], поэтому в такой игре существует равновесие в чистых стратегиях.

Используя леммы 1–4, можно показать, что справедлива

Теорема 1. *Пусть в игре ценообразования функции выигрыша имеют вид* (3) *и выполняется* (4). *Тогда в такой игре существует двухшаговое равновесие.*

В доказательстве теоремы 1 показано, что (v^*, p^*) — двухшаговое равновесие в игре ценообразования, где v^* — равновесие в игре G и $p^* = p^*(v^*) = (p_1^*(v_1^*), p_2^*(v_2^*), \ldots, p_n^*(v_n^*))$, $p_i^*(v_i^*) = c_i(v_i^*) + \frac{1}{a_i(v_i^*)}$, $i \in N$. Из теоремы 1 следует, что при выполнении ограничения (4) выбор торговых точек в игре ценообразования с функциями выигрыша (3) осуществляется в чистых стратегиях.

В разд. 4 рассматривается туристический город Геленджик. Требуется распределить 20 предпринимателей уличной еды по торговым точкам равновесным образом.

4. Выбор торговых точек на примере курорта Геленджик

4.1. Аппроксимация функций выигрыша. Для того чтобы рассчитать средний выигрыш предпринимателя уличной еды, воспользуемся теоретическими результатами данной работы. Так как в формуле (5) выполняется $0 < 1 - A(v_i) < 1$, $i \in N$, при большом значении $|K_{v_i}(v)|$ выражение $(1 - A(v_i))^{|K_{v_i}(v)|}$ близко к нулю. Тогда $H_i(v, p^*)$ можно аппроксимировать так:

$$\overline{H}_i(v, p^*) = n(v_i) \cdot \frac{1}{a_i(v_i)} \cdot \frac{1}{|K_{v_i}(v)|} - r(v_i). \tag{6}$$

Рекомендации по установлению цены можно получить из леммы 1.

Далее зададим значения параметров, вычислим значения равновесных цен и найдём равновесное распределение игроков по торговым точкам.

4.2. Расположение торговых точек и равновесное значение цены. Рассмотрим рис. 2, на котором изображён берег бухты Геленджика. Точками отмечены рестораны и кафе, которые существуют в данный момент. Рестораны и кафе являются конкурентами предпринимателей уличной еды. Выделим шесть торговых точек, которые отмечены на рисунке большими латинскими буквами.

Участок в овале — местность для расположения торговой точки. Множество V имеет вид $V = \{A, B, C, D, E, F\}$, где A — набережная Толстый мыс, B — пляж Сады морей, C — Центральный пляж, D — океанариум, E — парк аттракционов, F — Центральная набережная.

Внутри торговой точки арендная плата одинаковая, поэтому границы торговых точек именно такие, как изображено на рис. 2. Заметим, что число кафе и ресторанов на Центральном пляже невелико по сравнению с другими торговыми точками. Большее число кафе и ресторанов находится с левой и правой стороны от Центрального пляжа.

Значения параметров даны в табл. 1. Далее будем предполагать, что игроки в торговой точке симметричны, т. е. $c_i(w) = c_j(w)$, $a_i(w) = a_j(w)$

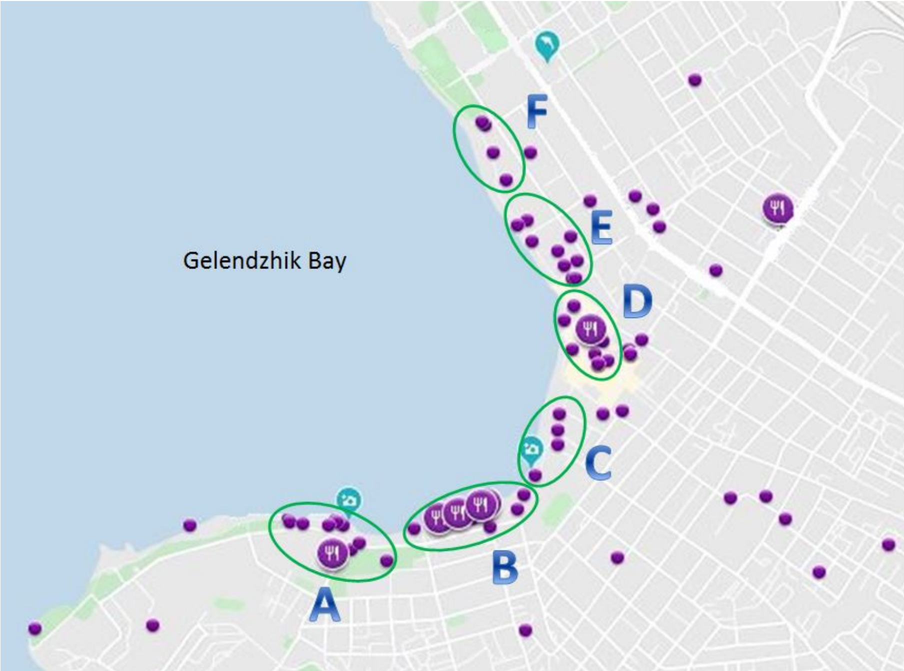

Рис. 2. Расположение кафе и ресторанов в окрестностях Центрального пляжа г. Геленджик

для любых $i, j \in N$, $w \in V$. Отличие между игроками проявляется в выборе торговых точек.

Поясним значения из табл. 1. Параметр $n(w)$ — число потребителей в день в торговой точке $w \in V$, которые готовы воспользоваться услугами общественного питания. На Центральном пляже наименьшие значения параметров $n(w)$ и $a_i(w)$. Минимальное значение параметра $n(w)$ связано с тем, что обычно многие отдыхающие берут еду с собой из отеля. Наименьшее значение параметра $a_i(v)$ обуславливается тем, что спрос на уличную еду выше по сравнению с кафе и ресторанами. Чем дальше от Центрального пляжа, тем больше значения $n(w)$ и $a_i(w)$. В таких

Таблица 1

Значения параметров

w	A	B	C	D	E	F
$n(w)$	548	473	345	305	325	380
$r(w)$	1400	1500	1666	1500	1450	1400
$c_i(w)$	57	60	65	60	58	55
$a_i(w)$	0,035	0,03	0,02	0,035	0,035	0,04

местах отдыхающие прогуливаются по набережной Геленджика и в большей степени хотят провести время в кафе или ресторане. Это объясняет снижение спроса на уличную еду. Напомним, что чем ближе $a_i(v_i)$ к нулю, тем больше значение предельной доли клиентов.

Каждый предприниматель уличной еды имеет в своём распоряжении ларёк с примерной площадью 10 квадратных метров. Арендная плата в день за 10 квадратных метров приводится в табл. 1 в строке $r(w)$. Например, аренда одного квадратного метра в месяц в торговой точке A составит $1400 \cdot 30/10 = 4200$ руб.

Так как продаваемый товар одного наименования, у всех игроков примерно одинаковые издержки, связанные с реализацией товара в одной торговой точке. К таким издержкам относятся расходы на покупку сырья, электричество, трудовые ресурсы и др. В среднем предприниматель уличной еды тратит не более 65 руб. на обслуживание одного клиента.

Дадим оценку равновесной цены одной единицы продукции, по которой игрок $i \in N$ может продавать свой товар в торговой точке $w \in V$. Значения равновесных цен представлены в табл. 2 и рассчитаны по формуле $p_i^*(w) = c_i(w) + \frac{1}{a_i(w)}$ из леммы 1.

Таблица 2

Значения равновесных цен

w	A	B	C	D	E	F
$p_i^*(w)$	85,57	93,33	115,00	88,57	86,57	80,00

4.3. Оптимальное размещение игроков по торговым точкам. В среднем около двадцати предпринимателей в Геленджике хотят заниматься деятельностью в сфере уличной еды в текущем туристическом сезоне, т. е. $N = \{1, 2, \dots, 20\}$. Найдём равновесное распределение игроков по торговым точкам. Для этого будем предполагать, что выигрыш игрока $i \in N$ вычисляется по формуле (6). Подставим числовые значения параметров $n(w)$, $a_i(w)$, $r(w)$ из табл. 1 в (6) и упростим выигрыш игрока для каждой торговой точки:

$$\overline{H}_i(v) = \overline{H}_i(v, p^*) = \frac{n(v_i)}{a_i(v_i)} \cdot \frac{1}{|K_{v_i}(v)|} - r(v_i), \quad i \in N,$$

$$\overline{H}_i(A, v_{-i}) = \frac{15657{,}14}{|K_A(v)|} - 1400, \quad \overline{H}_i(B, v_{-i}) = \frac{15766{,}66}{|K_B(v)|} - 1500,$$

$$\overline{H}_i(C, v_{-i}) = \frac{17250}{|K_C(v)|} - 1666, \quad \overline{H}_i(D, v_{-i}) = \frac{8714{,}29}{|K_D(v)|} - 1500,$$

$$\overline{H}_i(E, v_{-i}) = \frac{9285{,}71}{|K_E(v)|} - 1450, \quad \overline{H}_i(F, v_{-i}) = \frac{9500}{|K_F(v)|} - 1400.$$

Обозначим через α_w, $w \in V$, константу, которая стоит в функциях выигрыша игроков, например, $\alpha_A = 15657{,}14$, $\alpha_B = 15766{,}66$.

Игра $\langle N, V, \{u_i\}_{i\in N}\rangle$, $u_i(v) = -r(v_i)$, является потенциальной игрой с потенциальной функцией

$$p(v) = -\sum_{i\in N} r(v_i) = -\sum_{w\in V} |K_w(v)| \cdot r(w).$$

Так как мы предположили, что $a_i(w) = a_j(w)$ для любых $i, j \in N$, $w \in V$, $\langle N, V, \{\overline{H}_i\}_{i\in N}\rangle$ — потенциальная игра с потенциальной функцией

$$P(v) = \sum_{w\in R(v)} \alpha_w \sum_{k=1}^{|K_w(v)|} \frac{1}{k} - \sum_{w\in V} |K_w(v)| \cdot r(w), \quad R(v) = \bigcup_{i\in N} \{v_i\}.$$

Для того чтобы найти равновесие в чистых стратегиях, достаточно максимизировать потенциальную функцию $P(v)$. Чтобы это сделать, например, можно составить последовательность наилучших ответов и найти её предел.

Одно из состояний равновесия имеет вид

$$v^* = (A, A, A, A, B, B, B, B, C, C, C, C, C, D, D, E, E, F, F, F).$$

В табл. 3 в строке $|K_w(v^*)|$ указано количество игроков в торговой точке w в состоянии равновесия v^*. Например, торговую точку C в состоянии равновесия выбрало 5 игроков, торговую точку E выбрало 3 игрока и т. д. В строке $\overline{H}_i(v^*)$ вычислены выигрыши игроков в состоянии равновесия v^*.

Таблица 3

Выигрыши игроков в равновесии v^*

w	A	B	C	D	E	F
$\lvert K_w(v^*)\rvert$	4	4	5	2	2	3
$\overline{H}_i(v^*)$	2514,29	2441,67	1784	2857,15	3192,86	1766,67

Минимальный и максимальный выигрыши игроков равны 1766,66 и 3192,85 руб. в день. Такие выигрыши получают игроки, которые выбрали торговые точки F и E соответственно. Предположим, что игрок i из F перейдёт в E. Тогда в E выигрыш игрока i составит $9285{,}71/3 - 1450 = 1645{,}24$. В знаменателе число 3, поскольку в E находилось 2 игрока и ещё пришёл игрок i. При переходе игрока i из торговой точки F в торговую точку E его выигрыш уменьшится на 121,42 руб. Если любой игрок в состоянии равновесия v^* перейдёт в другую торговую точку, то его выигрыш не увеличится при условии, что остальные игроки неподвижны.

Наибольшее значение параметра α_w составляет 17250 при $w = C$, а выигрыш игрока в торговой точке C в равновесии v^* равен 1784 руб.

Максимальное значение константы α_w, $w \in V$, не гарантирует, что выигрыш игрока в состоянии равновесия в торговой точке w будет наибольшим. Торговая точка C привлекательна для предпринимателей уличной еды тем, что спрос в этой торговой точке выше по сравнению со спросом в других торговых точках. Однако в равновесии v^* торговую точку C выбирает 5 игроков. Ожидания игроков на наибольшую прибыль в C по сравнению с другими торговыми точками ошибочны из-за конкуренции друг с другом.

Заключение

Индивидуальные предприниматели уличной еды собирают доступную информацию о рынке, прежде чем установить свой ларёк в торговой точке. В основном это количественная информация. Главный показатель — количество конкурентов в торговой точке. Чем больше конкурентов, тем меньше вероятность того, что ларёк будет установлен в рассматриваемой торговой точке. Аппроксимированные функции выигрышей учитывают такое наблюдение.

Служащие администрации города Геленджик знают точные значения многих параметров и могут управлять процессом распределения ларьков с помощью изменения стоимости муниципального участка или какимлибо другим способом. Используя предложенную математическую модель, можно рассчитать максимальное количество ларьков в торговой точке в состоянии равновесия, подобрав соответствующие параметры. С помощью рассчитанного значения желательно ввести ограничение на количество мест в торговой точке. Приложения теории механизмов для решения задачи ценообразования представлены в [20–22].

Приложение

Доказательство леммы 1. Преобразуем функции выигрыша игроков:

$$H_i(v,p) = (p_i(w) - c_i(w))d_i(v,p) - r(v_i) = (p_i(w) - c_i(w))e^{-a_i(w)p_i(w)}$$
$$\times \Big[n(w) \sum_{i \in L \subseteq K_w(v)} \frac{1}{|L|} \prod_{l \in L,\, l \neq i} e^{-a_l(w)p_l(w)} \prod_{j \in K_w(v) \setminus L} (1 - e^{-a_j(w)p_j(w)})\Big] - r(v_i).$$

Выражение в квадратных скобках не зависит от $p_i(w)$. Обозначим это выражение через $f(v, p_{-i})$, где

$$p_{-i} = (p_1(v_1), \ldots, p_{i-1}(v_{i-1}), p_{i+1}(v_{i+1}), \ldots, p_n(v_n)).$$

Если игрок i — единственный, кто выбрал торговую точку w, то имеем $f(v, p_{-i}) \equiv 1$. Также заметим, что $f(v, p_{-i}) > 0$ для любых $i \in N$, $v \in V^n$, $p_i(v_i) \in D_i(v_i)$. Тогда

$$H_i(v,p) = (p_i(w) - c_i(w))e^{-a_i(w)p_i(w)} \cdot f(v,p_{-i}) - r(v_i).$$

Пусть $p_i(w), p'_i(w) \in D_i(w)$. Покажем, что $P(v,p)$ — порядковая потенциальная функция:

$$\begin{aligned}
&H_i(v,(p_i(w),p_{-i})) - H_i(v,(p'_i(w),p_{-i}))\\
&= (p_i(w)-c_i(w))e^{-a_i(w)p_i(w)} \cdot f(v,p_{-i}) - (p'_i(w)-c_i(w))e^{-a_i(w)p'_i(w)} \cdot f(v,p_{-i})\\
&\quad = \{(p_i(w)-c_i(w))e^{-a_i(w)p_i(w)} - (p'_i(w)-c_i(w))e^{-a_i(w)p'_i(w)}\} \cdot f(v,p_{-i}),\\
&P(v,(p_i(w),p_{-i})) - P(v,(p'_i(w),p_{-i}))\\
&\qquad = \{(p_i(w)-c_i(w))e^{-a_i(w)p_i(w)} - (p'_i(w)-c_i(w))e^{-a_i(w)p'_i(w)}\}\\
&\qquad\qquad \times \prod_{i \neq k \in K_w(v)} (p_k(w)-c_k(w))e^{-a_k(w)p_k(w)}.
\end{aligned}$$

Так как $f(v,p_{-i}) > 0$ и

$$\prod_{i \neq k \in K_w(v)} (p_k(w)-c_k(w))e^{-a_k(w)p_k(w)} > 0$$

для любых $i \in N$, $v \in V^n$, $p_i(v_i) \in D_i(v_i)$, знак разности функций выигрыша и знак разности значений потенциальной функции зависят только от одного и того же выражения в фигурных скобках. Следовательно,

$$H_i(v,(p_i(w),p_{-i})) - H_i(v,(p'_i(w),p_{-i})) > 0$$

тогда и только тогда, когда

$$P(v,(p_i(w),p_{-i})) - P(v,(p'_i(w),p_{-i})) > 0,$$

значит, $P(v,p)$ — порядковая потенциальная функция для игры Γ_w.

Для нахождения равновесных цен нужно найти максимум потенциальной функции $P(v,p)$, предполагая, что v фиксировано. Потенциальная функция равна произведению независимых множителей $(p_k(w) - c_k(w))e^{-a_k(w)p_k(w)}$, $k \in K_w(v)$. Для нахождения максимума достаточно максимизировать каждый множитель на промежутке $D_i(w) = (c_k^v, +\infty)$. Максимум функции $u(p_k(w)) = (p_k(w)-c_k(w))e^{-a_k(w)p_k(w)}$ на промежутке $(c_k^v, +\infty)$ достигается в точке $p_k^*(w) = c_k(w) + \frac{1}{a_k(w)}$, $k \in K_w(v)$. Так как функция $u(p_k(w))$ унимодальная, значение равновесной цены единственно. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Чтобы показать выполнение равенства из леммы 2, подставляем значения равновесных цен в выигрыши игроков. Далее используется равенство (4), чтобы упростить выигрыши игроков:

$$H_i(v,p^*) + r_i(v_i) = n(v_i)\cdot(p_i^*(v_i) - c_i(v_i))\cdot d_i(v,p^*) = \frac{n(v_i)}{a_i(v_i)}$$
$$\times \sum_{i\in L\subseteq K_{v_i}(v)} \frac{1}{|L|}\prod_{l\in L} e^{-a_l(v_i)(c_l(v_i)+\frac{1}{a_l(v_i)})} \prod_{j\in K_{v_i}(v)\setminus L}(1-e^{-a_j(v_i)(c_j(v_i)+\frac{1}{a_j(v_i)})})$$
$$= \frac{n(v_i)}{a_i(v_i)} \sum_{i\in L\subseteq K_{v_i}(v)} \frac{1}{|L|}\prod_{l\in L} e^{-b(v_i)-1} \prod_{j\in K_{v_i}(v)\setminus L}(1-e^{-b(v_i)-1})$$
$$= \frac{n(v_i)}{a_i(v_i)} \sum_{i\in L\subseteq K_{v_i}(v)} \frac{1}{|L|}\cdot(A(v_i))^{|L|}\cdot(1-A(v_i))^{|K_{v_i}(v)\setminus L|}$$
$$= \frac{n(v_i)\cdot A(v_i)}{a_i(v_i)} \sum_{k=0}^{|K_{v_i}(v)|-1} \frac{C^k_{|K_{v_i}(v)|-1}\cdot(A(v_i))^{|K_{v_i}(v)|-k-1}\cdot(1-A(v_i))^k}{|K_{v_i}(v)|-k}$$
$$= \frac{n(v_i)\cdot A(v_i)}{a_i(v_i)} \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{|K_{v_i}(v)|-1} C^k_{|K_{v_i}(v)|-1}(1-A(v_i))^k(xA(v_i))^{|K_{v_i}(v)|-1-k}\right)dx$$
$$= \frac{n(v_i)\cdot A(v_i)}{a_i(v_i)} \int_0^1 (1-A(v_i)+xA(v_i))^{|K_{v_i}(v)|-1}dx$$
$$= \frac{n(v_i)}{a_i(v_i)}\cdot\frac{1-(1-A(v_i))^{|K_{v_i}(v)|}}{|K_{v_i}(v)|}.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Заметим, что $p_i(w) \in D_i(w)$ для любых $i \in N$, $w \in V$. Пусть

$$f(v,p^*_{-i}) = n(v_i) \sum_{i\in L\subseteq K_{v_i}(v)} \frac{1}{|L|}\prod_{i\neq l\in L} e^{-a_l(v_i)p_l^*(v_i)} \prod_{j\in K_{v_i}(v)\setminus L}(1-e^{-a_j(v_i)p_j^*(v_i)}).$$

Так как $f(v,p^*_{-i}) > 0$ для любого $v \in V^n$, то

$$\underset{p_i(v_i)}{\operatorname{argmax}}\, H_i((v_i,v_{-i}),(p_i(v_i),p^*_{-i}))$$
$$= \underset{p_i(v_i)}{\operatorname{argmax}}\{(p_i(v_i)-c_i(v_i))e^{-a_i(v_i)p_i(v_i)}\cdot f(v,p^*_{-i})\} = c_i(v_i) + \frac{1}{a_i(v_i)}.$$

Значит,

$$\max_{p_i(v_i)} H_i((v_i, v_{-i}), (p_i(v_i), p^*_{-i})) = H_i((v_i, v_{-i}), (p^*_i(v_i), p^*_{-i})) = H_i(v, p^*).$$

Лемма 3 доказана.

Доказательство утверждения 1. Если $k = 1$, то неравенство $1 - a > \frac{1-a^2}{2}$ равносильно неравенству $(a-1)^2 > 0$, которое выполняется для любого $a \in (0;1)$. Пусть $k \neq 1$. Тогда

$$\frac{1-a^k}{k} > \frac{1-a^{k+1}}{k+1} \Leftrightarrow \frac{1+a+\dots+a^{k-1}}{k} > \frac{1+a+\dots+a^k}{k+1}$$
$$\Leftrightarrow (k+1)(1+a+\dots+a^{k-1}) > k(1+a+\dots+a^k)$$
$$\Leftrightarrow 1+a+\dots+a^{k-1} > ka^k \Leftrightarrow 1+a+\dots+a^{k-1} > a^k+\dots+a^k.$$

В последнем неравенстве слева и справа стоит k слагаемых. Так как $a \in (0;1)$, то $a^j > a^k$ для любого $j \in \{0, 1, \dots, k-1\}$, откуда следует истинность доказываемого утверждения. Утверждение 1 доказано.

Доказательство леммы 4. Выигрыш игрока $i \in N$ в игре G зависит от его стратегии $v_i \in V$ и числа игроков $|K_{v_i}(v)|$, которые используют такую же стратегию, что и игрок i. Из утверждения 1 следует, что функция выигрыша игрока i в игре G монотонно убывающая по числу игроков. Следовательно, согласно результату Мильтайха из работы [18] в игре G существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях. Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $v^* = (v^*_1, v^*_2, \dots, v^*_n)$ — равновесие по Нэшу в игре G. Согласно лемме 4 v^* существует. Также пусть $p^* = p^*(v) = (p^*_1(v^*_1), p^*_2(v^*_2), \dots, p^*_n(v^*_n))$, где $p^*_i(v^*_i) = c_i(v^*_i) + \frac{1}{a_i(v^*_i)}$, $i \in N$. Покажем, что (v^*, p^*) — двухшаговое равновесие в рассматриваемой игре ценообразования. Для того чтобы (v^*, p^*) было двухшаговым равновесием, должно выполняться (1).

Покажем, что выполняется (2). В (2) выбор торговых точек фиксирован. Функции выигрыша преобразованы в доказательстве леммы 1 и показано, что p^* — вектор равновесных цен, значит, (2) выполняется. Если игрок в торговой точке v^*_i будет продавать свой товар не по цене $p^*_i(v^*_i)$, то его выигрыш не увеличится при условии, что игрок $j \in N \setminus \{i\}$ продаёт товар по цене $p^*_j(v^*_j)$.

Покажем, что (1) выполняется. Согласно лемме 3 можно упростить левую часть неравенства (1). Тогда (1) примет вид

$$H_i((v_i, v^*_{-i}), p^*) \leqslant H_i(v^*, p^*), \quad v_i \in V. \tag{7}$$

По условию теоремы выполняется (4), значит, можно применить лемму 2. В лемме 2 упрощается вид функций $H_i(v, p^*)$, $i \in N$, $v \in V^n$. Рассмотрим игру G в нормальной форме с функцией выигрыша вида (5). Так как v^* является равновесием в игре G, то выполняется (7). Следовательно, верно (1). Значит, (v^*, p^*) — двухшаговое равновесие в рассматриваемой игре ценообразования. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bimpikis K., Ehsani S., İlkılıç R.** Cournot competition in networked markets // Manage. Sci. 2019. V. 65, No. 6. P. 2467–2481.
2. **Jabarzare N., Rasti-Barzoki M.** A game theoretic approach for pricing and determining quality level through coordination contracts in a dual-channel supply chain including manufacturer and packaging company // Int. J. Prod. Econ. 2020. V. 221, ID 107480. 18 p.
3. **Nocke V., Schutz N.** Multiproduct-firm oligopoly: An aggregative games approach // Econometrica. 2018. V. 86, No. 2. P. 523–557.
4. **Caspi C. E., Pelletier J. E., Harnack L. J., Erickson D. J., Lenk K., Laska M. N.** Pricing of staple foods at supermarkets versus small food stores // Int. J. Environ. Res. Public Health. 2017. V. 14, No. 8, ID 915. 12 p.
5. **Minten B., Reardon T.** Food prices, quality, and quality's pricing in supermarkets versus traditional markets in developing countries // Appl. Econ. Perspect. Policy. 2008. V. 30, No. 3. P. 480–490.
6. **Reardon T., Echeverria R., Berdegue J., Minten B., Liverpool-Tasie S., Tschirley D., Zilberman D.** Rapid transformation of food systems in developing regions: highlighting the role of agricultural research and innovations // Agric. Syst. 2019. V. 172. P. 47–59.
7. **Cook J. A., Gale F.** Using food prices and consumption to examine Chinese cost of living // Pac. Econ. Rev. 2019. V. 24, No. 1. P. 3–26.
8. **Briceno-Arias L., Correa J. R., Perlroth A.** Optimal continuous pricing with strategic consumers // Manage. Sci. 2017. V. 63, No. 8. P. 2741–2755.
9. **Choi M., Dai A. Y., Kim K.** Consumer search and price competition // Econometrica. 2018. V. 86, No. 4. P. 1257–1281.
10. **Cui W., Li L.** A game-theoretic approach to optimize the Time-of-Use pricing considering customer behaviors // Int. J. Prod. Econ. 2018. V. 201. P. 75–88.
11. **Martin D.** Strategic pricing with rational inattention to quality // Games Econ. Behav. 2017. V. 104. P. 131–145.
12. **Babaioff M., Dughmi S., Kleinberg R., Slivkins A.** Dynamic pricing with limited supply // ACM Trans. Econ. Comput. 2015. V. 3, No. 1. P. 1–26.
13. **Chen J., Jian J., Hong S.** Quantum repeated pricing game // Quantum Inf. Process. 2020. V. 19, No. 2, ID 42. 10 p.
14. **Rath K. P.** Stationary and nonstationary strategies in Hotelling's model of spatial competition with repeated pricing decisions // Int. J. Game Theory. 1998. V. 27, No. 4. P. 525–537.

15. **Monderer D., Shapley L. S.** Potential games // Games Econ. Behav. 1996. V. 14, No. 1. P. 124–143.
16. **Gusev V. V.** Nash-stable coalition partition and potential functions in games with coalition structure // Eur. J. Oper. Res. 2021. V. 295, No. 3. P. 1180–1188.
17. **Rosenthal R. W.** A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria // Int. J. Game Theory. 1973. V. 2, No. 1. P. 65–67.
18. **Milchtaich I.** Congestion games with player-specific payoff functions // Games Econ. Behav. 1996. V. 13, No. 1. P. 111–124.
19. **Li L., Lee Y. S.** Pricing and delivery-time performance in a competitive environment // Manage. Sci. 1994. V. 40, No. 5. P. 633–646.
20. **Crawford G. S., Pavanini N., Schivardi F.** Asymmetric information and imperfect competition in lending markets // Am. Econ. Rev. 2018. V. 108, No. 7. P. 1659–1701.
21. **Mitridati L., Kazempour J., Pinson P.** Design and game-theoretic analysis of community-based market mechanisms in heat and electricity systems // Omega. 2021. V. 99, ID 102177. 24 p.
22. **Xu X., Chen R., Jiang L.** The influence of payment mechanisms on pricing: When mental imagery stimulates desire for money // J. Retail. 2020. V. 96, No. 2. P. 178–188.

Гусев Василий Васильевич

Статья поступила
3 июня 2022 г.
После доработки —
23 июня 2022 г.
Принята к публикации
29 июня 2022 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2023. Vol. 30, No. 1. P. 5–27

UDC 519.83 DOI 10.33048/daio.2023.30.744

PURE NASH EQUILIBRIUM IN A TWO-STEP PRICING GAME: COVERING SELL POINTS IN A TOURIST CITY

V. V. Gusev

HSE University,
3 Kantemirovskaya Street, 194100 St. Petersburg, Russia
E-mail: vgusev@hse.ru

Abstract. The economy of small tourist towns has unique characteristics. Basically, small business in such towns is aimed at meeting tourists' needs. The competition between entrepreneurs engaged in service provision makes the pricing problem relevant. Some entrepreneurs need to define their goods value and decide where to sell them. If an entrepreneur often changes the sell point due to the competition, he may lose the profit. An interesting case is when the sell point choice is based on pure strategies. By the concept of congestion games with player-specific payoff functions and ordinal potential functions, the paper demonstrates the pricing game equilibrium under inherent restrictions. An equilibrium distribution of individual entrepreneurs by sell points in Gelendzhik is found. Tab. 3, illustr. 2, bibliogr. 22.

Keywords: game theory, pure Nash equilibrium, pricing game, potential games.

REFERENCES

1. **K. Bimpikis, S. Ehsani,** and **R. İlkılıç,** Cournot competition in networked markets, *Manage. Sci.* **65** (6), 2467–2481 (2019).
2. **N. Jabarzare** and **M. Rasti-Barzoki,** A game theoretic approach for pricing and determining quality level through coordination contracts in a dual-channel supply chain including manufacturer and packaging company, *Int. J. Prod. Econ.* **221**, ID 107480, 18 p. (2020).
3. **V. Nocke** and **N. Schutz,** Multiproduct-firm oligopoly: An aggregative games approach, *Econometrica* **86** (2), 523–557 (2018).

This research is supported by the Russian Science Foundation (Project 22–21–20070), and the St. Petersburg Science Foundation grant in accordance with the Agreement 65/2022 of April 15, 2022.

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **17** (1) (2023).

4. **C. E. Caspi, J. E. Pelletier, L. J. Harnack, D. J. Erickson, K. Lenk,** and **M. N. Laska,** Pricing of staple foods at supermarkets versus small food stores, *Int. J. Environ. Res. Public Health* **14** (8), ID 915, 12 p. (2017).
5. **B. Minten** and **T. Reardon,** Food prices, quality, and quality's pricing in supermarkets versus traditional markets in developing countries, *Appl. Econ. Perspect. Policy* **30** (3), 480–490 (2008).
6. **T. Reardon, R. Echeverria, J. Berdegue, B. Minten, S. Liverpool-Tasie, D. Tschirley,** and **D. Zilberman,** Rapid transformation of food systems in developing regions: Highlighting the role of agricultural research and innovations, *Agric. Syst.* **172**, 47–59 (2019).
7. **J. A. Cook** and **F. Gale,** Using food prices and consumption to examine Chinese cost of living, *Pac. Econ. Rev.* **24** (1), 3–26 (2019).
8. **L. Briceno-Arias, J. R. Correa,** and **A. Perlroth,** Optimal continuous pricing with strategic consumers, *Manage. Sci.* **63** (8), 2741–2755 (2017).
9. **M. Choi, A. Y. Dai,** and **K. Kim,** Consumer search and price competition, *Econometrica* **86** (4), 1257–1281 (2018).
10. **W. Cui** and **L. Li,** A game-theoretic approach to optimize the Time-of-Use pricing considering customer behaviors, *Int. J. Prod. Econ.* **201**, 75–88 (2018).
11. **D. Martin,** Strategic pricing with rational inattention to quality, *Games Econ. Behav.* **104**, 131–145 (2017).
12. **M. Babaioff, S. Dughmi, R. Kleinberg,** and **A. Slivkins,** Dynamic pricing with limited supply, *ACM Trans. Econ. Comput.* **3** (1), 1–26 (2015).
13. **J. Chen, J. Jian,** and **S. Hong,** Quantum repeated pricing game, *Quantum Inf. Process.* **19** (2), ID 42, 10 p. (2020).
14. **K. P. Rath,** Stationary and nonstationary strategies in Hotelling's model of spatial competition with repeated pricing decisions, *Int. J. Game Theory* **27** (4), 525–537 (1998).
15. **D. Monderer** and **L. S. Shapley,** Potential games, *Games Econ. Behav.* **14** (1), 124–143 (1996).
16. **V. V. Gusev,** Nash-stable coalition partition and potential functions in games with coalition structure, *Eur. J. Oper. Res.* **295** (3), 1180–1188 (2021).
17. **R. W. Rosenthal,** A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria, *Int. J. Game Theory* **2** (1), 65–67 (1973).
18. **I. Milchtaich,** Congestion games with player-specific payoff functions, *Games Econ. Behav.* **13** (1), 111–124 (1996).
19. **L. Li** and **Y. S. Lee,** Pricing and delivery-time performance in a competitive environment, *Manage. Sci.* **40** (5), 633–646 (1994).
20. **G. S. Crawford, N. Pavanini,** and **F. Schivardi,** Asymmetric information and imperfect competition in lending markets, *Am. Econ. Rev.* **108** (7), 1659–1701 (2018).
21. **L. Mitridati, J. Kazempour,** and **P. Pinson,** Design and game-theoretic analysis of community-based market mechanisms in heat and electricity systems, *Omega* **99**, ID 102177, 24 p. (2021).

22. X. Xu, R. Chen, and **L. Jiang,** The influence of payment mechanisms on pricing: when mental imagery stimulates desire for money, *J. Retail.* **96** (2), 178–188 (2020).

Vasily V. Gusev

Received June 3, 2022
Revised June 23, 2022
Accepted June 29, 2022