ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2023. Т. 30, № 1. С. 67–84

УДК 519.833.2 DOI 10.33048/daio.2023.30.754

О ПОИСКЕ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ В КВАЗИВОГНУТЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ИГРАХ

И. М. Минарченко

Институт систем энергетики им Л. А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, 664033 Иркутск, Россия
E-mail: minar@isem.irk.ru

Аннотация. Рассматривается задача поиска равновесия по Нэшу в играх с невогнутыми квадратичными функциями выигрыша. Анализируются условия, при которых функции выигрыша квазивогнуты по собственным переменным на соответствующих множествах стратегий, что гарантирует существование равновесной точки. Одним из таких условий, принимаемым в качестве основного предположения в данной работе, является наличие ровно одного положительного собственного числа у матриц целевых функций игроков. Предложен алгоритм поиска равновесия, который либо сходится к равновесной точке, либо показывает, что игра не имеет таковых. Показано, что для квазивогнутых игр часть этапов алгоритма значительно упрощается. Работа алгоритма продемонстрирована на примерах небольшой размерности. Ил. 1, библиогр. 30.

Ключевые слова: равновесие по Нэшу, квазивогнутые функции, глобальная оптимизация.

Введение

В настоящей работе рассматривается задача поиска равновесия по Нэшу в играх с квадратичными функциями выигрыша игроков. Такие игры будем называть квадратичными [1]. Квадратичные игры ранее исследовались в [2] как частный случай задач билинейного равновесного программирования. Также рассматривались обобщённые постановки, при которых не только функции выигрыша, но и множества стратегий зависят от значений переменных других игроков. При этом наиболее широко в литературе освещён специальный случай, при котором зависимость

Исследование выполнено в рамках государственного задания по программе фундаментальных исследований РФ на 2021–2030 гг. (проект № FWEU–2021–0006 [АААА–А21–121012090034–3]).

множеств стратегий от чужих переменных задаётся общими для всех игроков ограничениями [2–4], в том числе линейными. Квадратичные игры с общими линейными ограничениями имеют ряд практических приложений [3], таких как модели регулирования уровня вредных выбросов в окружающую среду [5], задачи управления потоками в сетях связи [6] и модели электроэнергетических рынков [7].

Для поиска равновесия как в стандартных квадратичных играх, где допустимый набор стратегий не зависит от решений остальных участников, так и в обобщённых, были разработаны различные методы, учитывающие специфику задачи. В частности, предложены модификация метода Лемке [3], алгоритм для отыскания всех равновесий в квадратичных играх со скалярными стратегиями и общими линейными ограничениями [4], а также экстраградиентный метод [2]. Помимо этого целый ряд методов предназначен для игр с функциями выигрыша общего вида, например, релаксационные методы [8], метод Ньютона [9], методы градиентного типа [10, 11] и др.

Общим для упомянутых работ является то, что они рассматривают задачи только с вогнутыми по собственным переменным функциями выигрыша. Это стандартное предположение, которое, с одной стороны, при дополнительных естественных условиях гарантирует существование равновесия, с другой — необходимо для сходимости предлагаемых алгоритмов. Другим условием, которое, как правило, используется в литературе для обоснования сходимости методов, является монотонность соответствующего градиентного отображения или его аналоги (см., например, [9, 10, 12]).

В этой работе мы отказываемся от данных предположений и исследуем невогнутые квадратичные игры, в которых может не выполняться условие монотонности. Ранее автором анализировалась такая постановка в общем виде [13], однако в настоящем исследовании мы дополнительно предполагаем, что матрицы, определяющие функции выигрыша, имеют ровно одно положительное собственное число. Данное предположение преследует две цели. Во-первых, оно является необходимым условием квазивогнутости невогнутых функций выигрыша на собственных множествах стратегий. В свою очередь, в силу теоремы Какутани [14] это гарантирует существование равновесия в игре, если множества стратегий выпуклы и компактны, а функции выигрыша непрерывны. Более того, квазивогнутость функций выигрыша значительно упрощает нахождение равновесия по сравнению с невогнутыми функциями общего вида. Во-вторых, ровно одно положительное собственное число у матриц функций выигрыша даже при отсутствии квазивогнутости позволяет осуществлять поиск равновесия за меньшее время по сравнению со знаконеопределёнными матрицами общего вида.

Тем самым основная цель данной статьи — проанализировать условия, при которых в невогнутых квадратичных играх гарантируется существование равновесия классическими теоремами существования, использующими квазивогнутость, а также предложить метод поиска равновесия. В литературе представлены различные обобщения теорем существования, в которых условие квазивогнутости может нарушаться [15], однако мы оставляем данные результаты за рамками настоящего исследования, поскольку они не обеспечивают существенного упрощения алгоритмов поиска равновесия. Проблеме отыскания равновесных точек в квазивогнутых играх посвящено немного работ, в отличие от таковых для вогнутых игр. Например, к квазивогнутым играм были применены субградиентный [16] и проксимальный [17] методы.

1. Квадратичные квазивогнутые функции

Напомним, функция $f\colon D \to \mathbb{R}$, где $D \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}$ обозначает множество действительных чисел, называется *квазивогнутой*, если D выпукло и верхнее множество уровня $\{x \in D \mid f(x) \geqslant \alpha\}$ выпукло для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ [18]. Дифференцируемая функция f, определённая на открытом множестве $C \subseteq \mathbb{R}^n$, называется *псевдовогнутой* на множестве $D \subseteq C$, если выполнено соотношение

$$\nabla f(x)^\top (y - x) \leqslant 0 \Rightarrow f(y) \leqslant f(x), \quad x, y \in D.$$

Как известно, для задачи максимизации псевдовогнутой функции необходимые условия оптимальности являются достаточными [19], и этот факт будет использован ниже при разработке метода поиска равновесия.

Рассмотрим квадратичную функцию

$$q(x) = \frac{1}{2} x^\top A x + b^\top x,$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — симметричная матрица, $b \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ обозначает вектор собственных чисел матрицы A, при этом $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, и $w^1, w^2, \ldots, w^n$ — ортонормированный базис системы собственных векторов матрицы A, соответствующих $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. В дальнейшем нам потребуется

Теорема 1 [20]**.** *Невогнутая функция q квазивогнута (псевдовогнута) на некотором множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- $\operatorname{rk}(A, b) = \operatorname{rk} A$,
- *A имеет ровно одно положительное собственное число,*

- $D \subseteq D_1$ *или* $D \subseteq D_2$ ($D \subseteq D_1^0$ *или* $D \subseteq D_2^0$), *где*
$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geqslant \delta,\ (w^1)^\top x \geqslant -b^\top w^1/\lambda_1\},$$
$$D_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geqslant \delta,\ (w^1)^\top x \leqslant -b^\top w^1/\lambda_1\},$$
$$D_1^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geqslant \delta,\ (w^1)^\top x > -b^\top w^1/\lambda_1\},$$
$$D_2^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geqslant \delta,\ (w^1)^\top x < -b^\top w^1/\lambda_1\},$$
$$\delta = -\frac{1}{2}\sum_{i \in J} \frac{(b^\top w^i)^2}{\lambda_i}, \quad J = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \lambda_i \neq 0\}.$$

Множества D_1 и D_2 могут быть представлены посредством стационарной точки функции q. Пусть для $s \in \mathbb{R}^n$ выполнено равенство $\nabla q(s) = As + b = 0$. Тогда
$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geqslant q(s),\ (w^1)^\top x \geqslant (w^1)^\top s\}, \tag{1}$$
$$D_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geqslant q(s),\ (w^1)^\top x \leqslant (w^1)^\top s\}. \tag{2}$$
Отсюда следуют эквивалентная форма записи
$$D_1 = s + \{z \in \mathbb{R}^n \mid z^\top Az \geqslant 0,\ (w^1)^\top z \geqslant 0\}, \tag{3}$$
$$D_2 = s + \{z \in \mathbb{R}^n \mid z^\top Az \geqslant 0,\ (w^1)^\top z \leqslant 0\} \tag{4}$$
и равенство $\delta = q(s)$. Из (3) и (4) видно, что D_1 и D_2 являются конусами с вершиной в точке s. При этом в случае неединственности стационарной точки s множества D_1 и D_2 не зависят от выбора s [20].

Для случая неотрицательных переменных имеет место следующий результат. Обозначим $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, n\}$.

Теорема 2 [20]**.** *Невогнутая квадратичная функция q квазивогнута на $\mathbb{R}^n_+$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*
- $A \geqslant 0$, $b \geqslant 0$;
- A *имеет ровно одно положительное собственное число;*
- *существует точка $s \in \mathbb{R}^n$ такая, что $As + b = 0$, $b^\top s \leqslant 0$.*

Известно, что любой локальный максимум квадратичной квазивогнутой функции глобален [20]. Однако могут существовать стационарные точки, не являющиеся глобальным максимумом, что подтверждает

Пример 1. Рассмотрим квадратичную форму
$$q(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$
Собственные числа матрицы A равны $\lambda = (7, -3)$. В силу теоремы 2 функция q квазивогнута на $\mathbb{R}^2_+$, поскольку $s = (0, 0)$. Выпишем для задачи
$$q(x) \to \max, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1, \tag{5}$$

необходимые условия оптимальности Каруша — Куна — Таккера:

$$\begin{pmatrix}2x_1+5x_2\\5x_1+2x_2\end{pmatrix}-\mu_1\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}-\mu_2\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}-\mu_3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-\mu_4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=0,$$

$$-\mu_1x_1=0,\quad -\mu_2x_2=0,\quad \mu_3(x_1-1)=0,\quad \mu_4(x_2-1)=0,\quad \mu\geqslant 0.$$

Данная система условий выполнена при $x'=s=(0,0)$, $\mu=0$ и $x''=(1,1)$, $\mu=(0,0,7,7)$. Следовательно, x' и x'' являются стационарными точками в задаче (5), при этом $q(x')=0<q(x'')=7$. График функции q изображён на рис. 1.

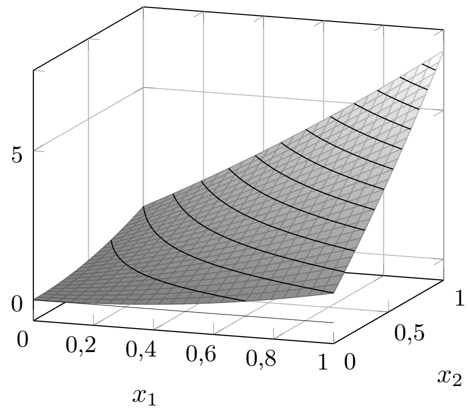

Рис. 1. Квазивогнутая на $\mathbb{R}^2_+$ квадратичная функция

В данном примере стационарная неоптимальная точка в задаче (5) будет стационарной для q на всём пространстве $\mathbb{R}^2$. Покажем, что это верно и для более общего случая.

Теорема 3. *Пусть невогнутая квадратичная функция q квазивогнута на некотором подмножестве пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда любая точка $x\in\mathbb{R}^n$ такая, что*

$$x\in D_1\setminus D_1^0=D_2\setminus D_2^0, \tag{6}$$

является точкой глобального минимума функции q на D_1 и на D_2, причём $\nabla q(x)=0$.

Доказательство. Пусть для $s\in\mathbb{R}^n$ выполняется $\nabla q(s)=0$. Из (3), (4) и (6) следует, что $(w^1)^\top z=0$, где $x=s+z$. Значит, z является линейной комбинацией собственных векторов $w^2,w^3,\dots,w^n$:

$$z=t_2w^2+t_3w^3+\dots+t_nw^n,\quad t_i\in\mathbb{R},\ i=2,\dots,n.$$

Поскольку $\lambda_i\leqslant 0$, $i=2,\dots,n$, имеем

$$z^\top Az=\lambda_2t_2^2\|w^2\|^2+\dots+\lambda_nt_n^2\|w^n\|^2\leqslant 0.$$

Из (6) следует, что $z^\top Az \geqslant 0$, откуда с учётом предыдущего неравенства вытекает, что $z^\top Az = 0$. Тогда нетрудно показать, что $q(x) = q(s+z) = q(s)$, откуда с учётом (1) и (2) следует, что x доставляет глобальный минимум q на D_1 и на D_2.

Равенство $z^\top Az = 0$ выполнено при $z = 0$, что сразу означает $\nabla q(x) = 0$. Пусть $z \neq 0$. Тогда для $i \in K \subseteq \{2, \ldots, n\}$ имеем $t_i \neq 0$. В этом случае из $z^\top Az = 0$ следует, что $\lambda_i = 0$, $i \in K$, откуда

$$Az = A \sum_{i \in K} t_i w^i = \sum_{i \in K} \lambda_i t_i w^i = 0.$$

В этом случае $\nabla q(x) = A(s+z) + b = 0$. Теорема 3 доказана.

Поскольку квазивогнутая функция q псевдовогнута на множествах D_1^0 и D_2^0, теорема 3 позволяет максимизировать q стандартными градиентными методами на подмножестве множества D_1 или D_2. Так, для проверки полученной стационарной точки достаточно вычислить в ней значение градиента целевой функции.

2. Квадратичные игры с функциями выигрыша, имеющими ровно одно положительное собственное число

В дальнейшем мы сосредоточимся на квадратичных играх, в которых функция выигрыша каждого игрока имеет ровно одно положительное собственное число. Поскольку данное условие может быть проверено для каждого игрока независимо, будем считать его выполненным на протяжении оставшейся части статьи. Заметим, что это не гарантирует квазивогнутости функций выигрыша. Также полагаем, что собственные векторы и собственные значения соответствующих матриц известны или же могут быть вычислены за приемлемое время.

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество игроков, $X_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$ — выпуклое компактное множество стратегий i-го игрока, $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ — множество ситуаций игры, $f_i \colon X \to \mathbb{R}$ — функция выигрыша i-го игрока, при этом

$$f_i(x) = \frac{1}{2} x_i^\top B_i x_i + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_i^\top C_{ij} x_j + x_i^\top d_i, \tag{7}$$

где $B_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$, $C_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i \times m_j}$ для всех $j \in N$ и $j \neq i$, $d_i \in \mathbb{R}^{m_i}$. Будем считать, что матрица B_i, $i \in N$, имеет ровно одно положительное собственное число. Введём обозначения: $x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $X_{-i} = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$. Задача заключается в том, чтобы найти равновесие по Нэшу в заданной игре, т. е. вектор $x^* \in X$ такой, что

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geqslant f_i(x_i, x_{-i}^*), \quad x_i \in X_i,\ i \in N.$$

Пусть $\lambda^i = \left(\lambda_1^i, \lambda_2^i, \ldots, \lambda_{m_i}^i\right)$ — вектор собственных чисел матрицы B_i. Не умаляя общности, положим $\lambda_1^i > 0$, $\lambda_s^i \leqslant 0$, $s = 2, 3, \ldots, m_i$, для всех $i \in N$. Обозначим через $w^{i1}, w^{i2}, \ldots, w^{im_i}$ ортонормированный базис системы собственных векторов матрицы B_i, соответствующих λ^i, $i \in N$. Обозначим

$$l_i(x_{-i}) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} C_{ij} x_j + d_i, \quad i \in N.$$

По теореме 1 функция выигрыша i-го игрока f_i квазивогнута по собственной переменной x_i на множестве стратегий X_i при фиксированном $x_{-i} \in X_{-i}$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

$$\operatorname{rk}(B_i, l_i(x_{-i})) = \operatorname{rk} B_i, \tag{8}$$

$$X_i \subset D_{i1}(x_{-i}) \text{ или } X_i \subset D_{i2}(x_{-i}), \tag{9}$$

где

$$D_{i1}(x_{-i}) = \left\{ x_i \in \mathbb{R}^{m_i} \mid f_i(x) \geqslant \delta_i(x_{-i}),\, (w^{i1})^\top x_i \geqslant \frac{-l_i(x_{-i})^\top w^{i1}}{\lambda_1^i} \right\}, \tag{10}$$

$$D_{i2}(x_{-i}) = \left\{ x_i \in \mathbb{R}^{m_i} \mid f_i(x) \geqslant \delta_i(x_{-i}),\, (w^{i1})^\top x_i \leqslant \frac{-l_i(x_{-i})^\top w^{i1}}{\lambda_1^i} \right\}, \tag{11}$$

$$\delta_i(x_{-i}) = -\frac{1}{2} \sum_{j \in J_i} \frac{(l_i(x_{-i})^\top w^{ij})^2}{\lambda_j^i}, \quad J_i = \left\{ j \in \{1, 2, \ldots, m_i\} \mid \lambda_j^i \neq 0 \right\}.$$

Тем самым конусы квазивогнутости $D_{i1}(x_{-i})$ и $D_{i2}(x_{-i})$ зависят от стратегий остальных участников, при этом в зависимости от x_{-i} меняется только сдвиг данных конусов относительно начала координат, поскольку матрица B_i не зависит от x. Данный факт можно продемонстрировать с помощью представления (3), (4):

$$D_{i1}(x_{-i}) = s_i(x_{-i}) + \{z \in \mathbb{R}^{m_i} \mid z^\top B_i z \geqslant 0,\, (w^{i1})^\top z \geqslant 0\},$$
$$D_{i2}(x_{-i}) = s_i(x_{-i}) + \{z \in \mathbb{R}^{m_i} \mid z^\top B_i z \geqslant 0,\, (w^{i1})^\top z \leqslant 0\},$$

где $s_i(x_{-i})$ — стационарная точка функции $f_i(\cdot, x_{-i})$ на $\mathbb{R}^{m_i}$, т. е. точка, которая удовлетворяет соотношению

$$\nabla_{x_i} f_i(x_i, x_{-i})|_{x_i = s(x_{-i})} = B_i s_i(x_{-i}) + l_i(x_{-i}) = 0. \tag{12}$$

Если условия (8), (9) выполнены для любых $x_{-i} \in X_{-i}$ и для всех $i \in N$, т. е. функция выигрыша каждого игрока квазивогнута по собственной переменной при любых допустимых значениях чужих переменных, то по теореме Какутани в игре существует равновесие по Нэшу. Более того, в этом случае игра принадлежит классу сложности PPAD [21], поскольку равновесие существует и может быть проверено эффективно одним из методов квазивыпуклой оптимизации [22, 23]. Необходимо отметить, что в общем случае невогнутая квадратичная игра NP-трудна, может не иметь равновесных точек, а для их проверки требуется привлечение методов глобальной оптимизации [13].

3. Проверка условий квазивогнутости

В общем случае условия (8), (9) сложны для проверки. Заметим, что соотношение (8) эквивалентно совместности системы линейных уравнений (12) относительно s_i. Далее для всех $i \in N$ будем считать, что B_i является матрицей полного ранга, т. е. $\operatorname{rk} B_i = m_i$. В этом случае условие (8) выполняется для любых $x_{-i} \in X_{-i}$.

Проверка условия (9) может быть сведена к решению задач оптимизации следующим образом. С учётом (10), (11) для каждого $i \in N$ введём функции

$$\psi_{i1}(x) = f_i(x) - \delta_i(x_{-i}), \quad \psi_{i2}(x) = (w^{i1})^\top \big(\lambda_1^i x_i + l_i(x_{-i})\big).$$

Если $\psi_{i1}(x) \geqslant 0$ и $\psi_{i2}(x) \geqslant 0$ ($\psi_{i2}(x) \leqslant 0$) для всех $x \in X$, то $X_i \subset D_{i1}(x_{-i})$ ($X_i \subset D_{i2}(x_{-i})$) для любых $x_{-i} \in X_{-i}$. Таким образом, для того чтобы проверить (9), достаточно для всех $i \in N$ решить следующие задачи:

$$\psi_{i1}(x) \to \min, \quad x \in X, \tag{13}$$

$$\psi_{i2}(x) \to \min, \quad x \in X, \tag{14}$$

$$\psi_{i2}(x) \to \max, \quad x \in X. \tag{15}$$

Очевидно, что в паре задач (14), (15) достаточно решить только одну, если оптимальное значение целевой функции ψ_{i2} после решения первой задачи имеет соответствующий знак.

Задача (13) имеет квадратичную невыпуклую целевую функцию, в то время как в (14) и (15) целевая функция линейна. Хотя в общем случае задача (13) сложна, на практике для её решения в качестве первого шага можно использовать метод локального поиска и, получив $\psi_{i1}(x) < 0$ для какого-либо $x \in X$, следует остановить проверку, поскольку функция f_i не будет квазивогнутой на X_i в данном случае. Если же локальным поиском не удаётся доказать отсутствие квазивогнутости, то задачу (13) необходимо решать методом глобальной оптимизации.

4. Метод поиска равновесия

Предлагаемый метод поиска равновесия основан на использовании функции Никайдо — Исоды [24] и предназначен как для квазивогнутых игр, так и для игр, в которых квазивогнутость нарушена. Схема метода, разработанная для невыпуклых квадратичных игр общего вида, приведена в [13]. Как будет показано ниже, при применении данного метода к играм, рассматриваемым в настоящей работе, часть вычислительных этапов алгоритма упрощается. Данный метод либо сходится к одной из равновесных точек, либо показывает, что игра не имеет таковых.

Функция Никайдо — Исоды $\varphi\colon X \times X \to \mathbb{R}$ для рассматриваемой игры имеет следующий вид:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i \in N} [f_i(y_i, x_{-i}) - f_i(x_i, x_{-i})].$$

Введём функцию оптимального значения

$$V(x) = \max_{y \in X} \varphi(x, y).$$

Нетрудно убедиться, что $V(x) \geqslant 0$ для всех $x \in X$. Для того чтобы вектор $x^* \in X$ являлся равновесием по Нэшу, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $V(x^*) = 0$. Таким образом, если множество равновесий непусто, то оно совпадает с множеством решений задачи

$$V(x) \to \min, \quad x \in X. \tag{16}$$

Рассмотрим следующие блочные матрицы:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_n \end{pmatrix}.$$

Тогда функция V для функций выигрыша (7) примет следующий вид:

$$V(x) = \max_{y \in X} \left(\frac{1}{2} y^\top B y + y^\top (Cx + d) \right) - x^\top \left(\frac{1}{2} B + C \right) x - x^\top d.$$

Введём обозначение

$$g(x, y) = \sum_{i \in N} f_i(y_i, x_{-i}) = \frac{1}{2} y^\top B y + y^\top (Cx + d). \tag{17}$$

Идея алгоритма решения задачи (16) заключается в том, чтобы на каждой итерации k в текущей точке x^k строить опорную к V миноранту $\widetilde{V}_k\colon X \to \mathbb{R}$ [25] вида

$$\widetilde{V}_k(x) = \max_{0 \leqslant j \leqslant k} \{g(x, y^j)\} - x^\top \left(\frac{1}{2} B + C \right) x - x^\top d,$$

где y^j, $j = 0, 1, \dots, k,$ — решение задачи

$$g(x^j, y) \to \max, \quad y \in X. \tag{18}$$

Затем очередное приближение x^{k+1} выбирается как решение задачи

$$\widetilde{V}_k(x) \to \min, \quad x \in X. \tag{19}$$

Поскольку g линейна по первой переменной, функция

$$v(x) = \max_{y \in X} g(x, y)$$

выпукла. В силу этого $g(x, y^j) \leqslant v(x)$ и $g(x^j, y^j) = v(x^j)$ для любых $x \in X$, $j = 0, 1, \ldots$. Таким образом, для функции $\widetilde{V}_k$ выполняются соотношения $\widetilde{V}_k(x) \leqslant V(x)$ и $\widetilde{V}_k(x^k) = V(x^k)$ для всех $x \in X$ и $k = 0, 1, \ldots$. С увеличением k улучшается аппроксимация функции V функцией $\widetilde{V}_k$. На практике задачу (19) удобнее записать в виде

$$\alpha - x^\top \left(\frac{1}{2}B + C\right)x - x^\top d \to \min_{(\alpha, x)}, \quad x \in X, \tag{20}$$

$$\alpha \geqslant g(x, y^j), \quad 0 \leqslant j \leqslant k. \tag{21}$$

Если вектор (α^*, x^*) — решение задачи (20), (21), то x^* — решение (19). Более того, оптимальные значения целевых функций обеих задач совпадают.

При заданном $\varepsilon \geqslant 0$ вектор $x^* \in X$ называют *ε-равновесием по Нэшу* [26], если

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geqslant f_i(x_i, x_{-i}^*) - \varepsilon, \quad x_i \in X_i, \ i \in N.$$

Для заданного $\varepsilon \geqslant 0$ будем называть вектор $x^* \in X$ *нормализованным ε-равновесием* [12], если $V(x^*) \leqslant \varepsilon$. Нетрудно убедиться, что любое нормализованное ε-равновесие является ε-равновесием, однако обратное неверно. Алгоритм решения задачи (16) следующий:

1) выбрать $x^0 \in X$, $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2 > 0$, положить $V^* := +\infty$, $k := 0$;
2) определить y^k как решение задачи (18) при $j = k$;
3) обновить рекорд: если $\varphi(x^k, y^k) < V^*$, то $V^* := \varphi(x^k, y^k)$, $x^* := x^k$;
4) если $V^* \leqslant \varepsilon_1$, то СТОП: x^* является нормализованным ε_1-равновесием;
5) определить $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{x})$ как решение задачи (20), (21); $x^{k+1} := \widetilde{x}$;
6) если $V^* - \widetilde{V}_k(x^{k+1}) \leqslant \varepsilon_2$, то СТОП: нормализованных $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$-равновесий нет; иначе $k := k + 1$, перейти на шаг 2.

Замечание 1. Переход к шагу 6 алгоритма возможен только при $V^* > \varepsilon_1$. Если критерий останова на шаге 6 выполнен, то

$$\varepsilon_1 < V^* \leqslant \widetilde{V}_k(x^{k+1}) + \varepsilon_2,$$

откуда немедленно следует, что $V(x) > \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \geqslant 0$ для всех $x \in X$.

Как показано в [27], если семейство опорных функций $\{\widetilde{V}_k\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то любая предельная точка последовательности x^k, $k = 0, 1, \ldots$, генерируемой предложенным алгоритмом, является точкой глобального минимума в задаче (16).

На каждой итерации алгоритма требуется решать две невыпуклые задачи квадратичного программирования: (18) и (20), (21). Заметим, что целевая функция g в задаче (18) при фиксированном значении переменной x представляет собой сумму функций выигрыша относительно собственных переменных и с фиксированными переменными остальных участников (см. (17)). Таким образом, $g(x, y)$ сепарабельна по y при фиксированном x. Если условия квазивогнутости (8), (9) выполнены для всех $x_{-i} \in X_{-i}$, $i \in N$, то задача (18) с учётом сепарабельности g распадается на n задач квазивыпуклой оптимизации, для решения которых могут быть использованы стандартные методы локального поиска в соответствии с теоремой 3. В этом случае необходимо проверять значение градиента целевой функции в получившейся точке.

Если условия квазивогнутости нарушены, то при решении задачи (18) может быть использован тот факт, что функция выигрыша каждого игрока относительно собственной переменной представляет собой квадратичную функцию, матрица которой имеет ровно одно положительное собственное число. В [28] показано, что максимизация квадратичной функции с ровно одним положительным собственным числом может быть осуществлена за приемлемое время, если входные данные задачи, такие как границы переменных и собственные числа матрицы, не зависят от размерности задачи. Важно помнить, что при нарушении условий квазивогнутости условия теоремы Какутани не выполняются и игра может не иметь равновесных ситуаций. При отсутствии равновесий результатом работы алгоритма является точка $x^* \in X$ такая, что $V(x^*) > 0$.

Наконец, отметим, что задача (20), (21) невыпуклая и требует привлечения методов глобальной оптимизации независимо от квазивогнутости функций выигрыша.

5. Вычислительный эксперимент

Для демонстрации работы алгоритма сгенерирован ряд примеров малой размерности. В каждом примере матрица B_i, $i \in N$, полного ранга и имеет ровно одно положительное собственное число. Множество стратегий каждого игрока задано в виде $X_i = \{x_i \in \mathbb{R}^{m_i} \mid l_i \leqslant x_i \leqslant u_i\}$, $i \in N$. Задачи генерировались случайно, и среди них отбирались те, для которых условие квазивогнутости (9) было выполнено для всех $x_{-i} \in X_{-i}$, $i \in N$. Таким образом, каждая выбранная игра имеет равновесную точку.

Программирование осуществлялось в системе моделирования AIMMS 4.85 [29]. Для решения задач (13)–(15), (18) и (20), (21) использовался пакет прикладных программ IBM ILOG CPLEX 22.1 [30]. Для поиска глобального решения невыпуклых квадратичных задач (13) и (20), (21) параметру «Solution_target» пакета CPLEX было присвоено значение «Search for global optimum». Для решения (18), а также для быстрого поиска локального оптимума в (13) было использовано значение «Search for local optimum». Для задач линейного программирования (14), (15) параметр «Solution_target» не используется. Для всех остальных параметров CPLEX были установлены значения по умолчанию. Вычисления проводились на компьютере с 16-поточным процессором AMD Ryzen 7 1700X 3,4 ГГц, 16 ГБ RAM. При поиске глобального решения невыпуклых задач CPLEX использовал собственные средства распараллеливания, задействуя максимум 16 вычислительных потоков.

Пример 2. Пусть $n = 2$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $d = 0$, $l = (0;5;0)$, $u = (5;5{,}5;8)$,

$$B_1 = 2, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для данной игры имеем $\lambda^1 = 2$, $\lambda^2 = (2{,}2361; -2{,}2361)$, $w^{11} = 1$, $w^{21} = (0{,}9732; 0{,}2298)$, $w^{22} = (-0{,}2298; 0{,}9732)$. Равновесие $x^* = (5; 5{,}5; 5{,}2511)$ было найдено за 2 итерации. Общее время проверки квазивогнутости и поиска равновесия составило менее 0,5 с.

Пример 3. Пусть $n = 2$, $m_1 = m_2 = 2$, $d = 0$, $l = 3$, $u = 8$,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для данной игры имеем $\lambda^1 = (3{,}7016; -2{,}7016)$, $\lambda^2 = (2{,}2361; -2{,}2361)$, $w^{11} = (0{,}9436; 0{,}331)$, $w^{12} = (-0{,}331; 0{,}9436)$, $w^{21} = (0{,}9732; 0{,}2298)$, $w^{22} = (-0{,}2298; 0{,}9732)$. Равновесие $x^* = (8; 8; 8; 8)$ было найдено за 1 итерацию. Общее время проверки квазивогнутости и поиска равновесия составило менее 0,5 с.

Пример 4. Пусть $n = 2$, $m_1 = m_2 = 3$, $d_1 = (25{,}4; 27{,}43; 7{,}64)$, $d_2 = (13{,}96; 26{,}79; 21{,}1)$, $l_1 = (4{,}2; 4{,}7; 4{,}7)$, $l_2 = (4{,}8; 4{,}3; 4{,}5)$, $u_1 = (6{,}2; 6{,}3; 6{,}4)$, $u_2 = (6{,}7; 6{,}4; 6{,}6)$,

$$B_1 = \begin{pmatrix} -14{,}9915 & 1{,}4696 & -1{,}0867 \\ 1{,}4696 & -12{,}5337 & 3{,}3904 \\ -1{,}0867 & 3{,}3904 & 7{,}2651 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -9{,}265 & -1{,}6576 & 0{,}7211 \\ -1{,}6576 & -4{,}5165 & -5{,}9453 \\ 0{,}7211 & -5{,}9453 & -3{,}6885 \end{pmatrix},$$

$$C_{12} = \begin{pmatrix} -4{,}53 & 12{,}38 & 2{,}54 \\ 4{,}6 & -10{,}75 & -12{,}88 \\ 11{,}67 & 12{,}55 & 7{,}46 \end{pmatrix}, \quad C_{21} = \begin{pmatrix} 8{,}05 & 2{,}3 & 1{,}48 \\ 8{,}57 & -10{,}78 & 7{,}02 \\ -11{,}7 & -10{,}41 & 2{,}45 \end{pmatrix}.$$

Для данной игры имеем

$$\lambda^1 = (7{,}86; -15{,}95; -12{,}17), \quad \lambda^2 = (2{,}1; -9{,}02; -10{,}55),$$

$$(w^{11} w^{12} w^{13}) = \begin{pmatrix} 0{,}0365 & 0{,}8680 & -0{,}4951 \\ -0{,}1613 & -0{,}4839 & -0{,}8601 \\ -0{,}9862 & 0{,}1113 & 0{,}1224 \end{pmatrix},$$

$$(w^{21} w^{22} w^{23}) = \begin{pmatrix} 0{,}1449 & -0{,}8163 & 0{,}5592 \\ -0{,}6812 & 0{,}3276 & 0{,}6547 \\ 0{,}7177 & 0{,}4758 & 0{,}5086 \end{pmatrix}.$$

Равновесие $x^* = (4{,}6645; 4{,}7; 6{,}4; 6{,}7; 5{,}1325; 4{,}5)$ было найдено за 35 итераций. Общее время проверки квазивогнутости и поиска равновесия составило 2,5 с.

6. Заключение

Рассмотрен специальный вид невогнутых квадратичных игр — игры, в которых функции выигрыша имеют ровно одно положительное собственное число. Представлены условия, при которых такие игры квазивогнуты, что гарантирует существование равновесия по Нэшу. Описан численный способ проверки условия принадлежности множества стратегий конусу квазивогнутости путём решения ряда задач оптимизации. Предложен алгоритм поиска равновесия, который либо сходится к равновесной точке, либо показывает, что игра не имеет таковых. Показано, что для квазивогнутых игр часть этапов алгоритма значительно упрощается. В качестве направлений для дальнейшего исследования следует рассмотреть способы проверки условия квазивогнутости на ранг матрицы, а также провести более представительное численное тестирование алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильев Н. С.** О вычислении равновесия по Нэшу в квадратичных играх // Вопросы кибернетики. Вып. 154. Вычислительные вопросы анализа больших систем. М.: Науч. совет по комплекс. пробл. «Кибернетика» АН СССР, 1989. С. 64–69.
2. **Антипин А. С.** Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном равновесном программировании. М.: Вычисл. центр им. А. А. Дородницына РАН, 2002. 130 с.
3. **Schiro D. A., Pang J.-S., Shanbhag U. V.** On the solution of affine generalized Nash equilibrium problems with shared constraints by Lemke's method // Math. Program. Ser. A. 2013. V. 142. P. 1–46.
4. **Dreves A.** Finding all solutions of affine generalized Nash equilibrium problems with one-dimensional strategy sets // Math. Methods Oper. Res. 2014. V. 80, No. 2. P. 139–159.

5. **Haurie A., Krawczyk J. B.** Optimal charges on river effluent from lumped and distributed sources // Environ. Model. Assess. 1997. V. 2, No. 3. P. 177–189.
6. **Yin H., Shanbhag U. V., Mehta P. G.** Nash equilibrium problems with scaled congestion costs and shared constraints // IEEE Trans. Autom. Control. 2011. V. 56, No. 7. P. 1702–1708.
7. **Hobbs B. F., Pang J.-S.** Nash–Cournot equilibria in electric power markets with piecewise linear demand functions and joint constraints // Oper. Res. 2007. V. 55, No. 1. P. 113–127.
8. **Von Heusinger A., Kanzow C.** Relaxation methods for generalized Nash equilibrium problems with inexact line search // J. Optim. Theory Appl. 2009. V. 143, No. 1. P. 159–183.
9. **Dreves A., von Heusinger A., Kanzow C., Fukushima M.** A globalized Newton method for the computation of normalized Nash equilibria // J. Glob. Optim. 2013. V. 56, No. 2. P. 327–340.
10. **Rosen J. B.** Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games // Econometrica. 1965. V. 33, No. 3. P. 520–534.
11. **Антипин А. С.** Равновесное программирование: методы градиентного типа // Автоматика и телемеханика. 1997. № 8. С. 125–137.
12. **Зуховицкий С. И., Поляк Р. А., Примак М. Е.** Вогнутые игры многих лиц // Экономика и мат. методы. 1971. Т. 7, № 6. С. 888–900.
13. **Minarchenko I. M.** Search of Nash equilibrium in quadratic n-person game // Discrete optimization and operations research. Proc. 9th Int. Conf. (Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016). Cham: Springer, 2016. P. 509–521. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 9869).
14. **Kakutani S.** A generalization of Brouwer's fixed point theorem // Duke Math. J. 1941. V. 8, No. 3. P. 457–459.
15. **Kim W. K., Lee K. H.** The existence of Nash equilibrium in n-person games with C-concavity // Comput. Math. Appl. 2002. V. 44, No. 8. P. 1219–1228.
16. **Yen L. H., Muu L. D.** A parallel subgradient projection algorithm for quasiconvex equilibrium problems under the intersection of convex sets // Optimization. 2022. V. 71, No. 15. P. 4447–4462.
17. **Cruz Neto J. X., Lopes J. O., Soares P. A.** A minimization algorithm for equilibrium problems with polyhedral constraints // Optimization. 2016. V. 65, No. 5. P. 1061–1068.
18. **Boyd S., Vandenberghe L.** Convex optimization. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2004. 716 p.
19. **Mangasarian O. L.** Pseudo-convex functions // J. SIAM Control. Ser. A. 1965. V. 3, No. 2. P. 281–290.
20. **Avriel M., Diewert W. E., Schaible S., Zang I.** Generalized concavity. Philadelphia: SIAM, 2010. 342 p.
21. **Papadimitriou C. H.** On the complexity of the parity argument and other inefficient proofs of existence // J. Comput. Syst. Sci. 1994. V. 48, No. 3. P. 498–532.

22. **Kiwiel K. C.** Convergence and efficiency of subgradient methods for quasiconvex minimization // Math. Program. 2001. V. 90, No. 1. P. 1–25.
23. **Murray R., Swenson B., Kar S.** Revisiting normalized gradient descent: Fast evasion of saddle points // IEEE Trans. Autom. Control. 2019. V. 64, No. 11. P. 4818–4824.
24. **Nikaidô H., Isoda K.** Note on non-cooperative convex game // Pac. J. Math. 1955. V. 5, No. S1. P. 807–815.
25. **Khamisov O. V.** A global optimization approach to solving equilibrium programming problems // Optimization and optimal control. Singapore: World Scientific, 2003. P. 155–164. (Ser. Comput. Oper. Res.; V. 1).
26. Algorithmic game theory. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2007. 754 p.
27. **Булатов В. П., Белых Т. И.** Численные методы решения многоэкстремальных задач, связанных с обратными задачами математического программирования // Изв. вузов. Математика. 2007. № 6. С. 14–20.
28. **Minarchenko I. M., Khamisov O. V.** On minimization of a quadratic function with one negative eigenvalue // Optim. Lett. 2021. V. 15, No. 4. P. 1447–1455.
29. The advanced interactive multidimensional modeling system. Haarlem: AIMMS, 2022. Available at `aimms.com` (accessed Jan. 13, 2023).
30. IBM ILOG CPLEX optimization studio. Armonk: IBM, 2022. Available at `ibm.com/products/ilog-cplex-optimization-studio` (accessed Jan. 13, 2023).

Минарченко Илья Михайлович

Статья поступила
29 сентября 2022 г.
После доработки —
29 сентября 2022 г.
Принята к публикации
6 октября 2022 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2023. Vol. 30, No. 1. P. 67–84

UDC 519.833.2 DOI 10.33048/daio.2023.30.754

ON SEARCH OF NASH EQUILIBRIUM IN QUASICONCAVE QUADRATIC GAMES

I. M. Minarchenko

Melentiev Energy Systems Institute SB RAS,
130 Lermontov Street, 664033 Irkutsk, Russia
E-mail: minar@isem.irk.ru

Abstract. The Nash equilibrium problem with nonconcave quadratic payoff functions is considered. We analyze conditions which provide quasiconcavity of payoff functions in their own variables on the respective strategy sets and, consequently, guarantee existence of an equilibrium point. One of such conditions is that the matrix of every payoff function has exactly one positive eigenvalue; this condition is viewed as a basic assumption in the paper. We propose an algorithm that either converges to an equilibrium point or declares that the game has no equilibria. It is shown that some stages of the algorithm are noticeably simplified for quasiconcave games. The algorithm is tested on small-scale instances. Illustr. 1, bibliogr. 30.

Keywords: Nash equilibrium, quasiconcave functions, global optimization.

REFERENCES

1. **N. S. Vasil'ev,** Computing Nash equilibrium in quadratic games, in *Problems of Cybernetics,* No. 154. (Computational Problems in Analysis of Large-Scale Systems) (Nauchn. Sovet Kompleks. Probl. «Kibernetika» AN SSSR, Moscow, 1989), pp. 64–69 [Russian].
2. **A. S. Antipin,** *Gradient and Extra-Gradient Approaches in Bilinear Equilibrium Programming* (Vychisl. Tsentr Dorodnitsyn. RAN, Moscow, 2002) [Russian].

This research is carried out within the state assignment under the Program of Fundamental Research in Russia 2021–2030 (Project FWEU–2021–0006 [AAAA–A21–121012090034–3]).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **17** (1) (2023).

3. **D. A. Schiro, J.-S. Pang,** and **U. V. Shanbhag,** On the solution of affine generalized Nash equilibrium problems with shared constraints by Lemke's method, *Math. Program., Ser. A,* **142**, 1–46 (2013).
4. **A. Dreves,** Finding all solutions of affine generalized Nash equilibrium problems with one-dimensional strategy sets, *Math. Methods Oper. Res.* **80** (2), 139–159 (2014).
5. **A. Haurie** and **J. B. Krawczyk,** Optimal charges on river effluent from lumped and distributed sources, *Environ. Model. Assess.* **2** (3), 177–189 (1997).
6. **H. Yin, U. V. Shanbhag,** and **P. G. Mehta,** Nash equilibrium problems with scaled congestion costs and shared constraints, *IEEE Trans. Autom. Control* **56** (7), 1702–1708 (2011).
7. **B. F. Hobbs** and **J.-S. Pang,** Nash–Cournot equilibria in electric power markets with piecewise linear demand functions and joint constraints, *Oper. Res.* **55** (1), 113–127 (2007).
8. **A. von Heusinger** and **C. Kanzow,** Relaxation methods for generalized Nash equilibrium problems with inexact line search, *J. Optim. Theory Appl.* **143** (1), 159–183 (2009).
9. **A. Dreves, A. von Heusinger, C. Kanzow,** and **M. Fukushima,** A globalized Newton method for the computation of normalized Nash equilibria, *J. Glob. Optim.* **56** (2), 327–340 (2013).
10. **J. B. Rosen,** Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games, *Econometrica* **33** (3), 520–534 (1965).
11. **A. S. Antipin,** Equilibrium programming: Gradient methods, *Avtom. Telemekh.,* No. 8, 125–137 (1997) [Russian] [*Autom. Remote Control* **58** (8), Pt. 2, 1337–1347 (1997)].
12. **S. I. Zukhovitskii, R. A. Polyak,** and **M. E. Primak,** Concave many-person games, *Ekon. Mat. Metody* **7** (6), 888–900 (1971) [Russian].
13. **I. M. Minarchenko,** Search of Nash equilibrium in quadratic n-person game, in *Discrete Optimization and Operations Research* (Proc. 9th Int. Conf., Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016) (Springer, Cham, 2016), pp. 509–521. (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9869).
14. **S. Kakutani,** A generalization of Brouwer's fixed point theorem, *Duke Math. J.* **8** (3), 457–459 (1941).
15. **W. K. Kim** and **K. H. Lee,** The existence of Nash equilibrium in n-person games with C-concavity, *Comput. Math. Appl.* **44** (8), 1219–1228 (2002).
16. **L. H. Yen** and **L. D. Muu,** A parallel subgradient projection algorithm for quasiconvex equilibrium problems under the intersection of convex sets, *Optimization* **71** (15), 4447–4462 (2022).
17. **J. X. Cruz Neto, J. O. Lopes,** and **P. A. Soares,** A minimization algorithm for equilibrium problems with polyhedral constraints, *Optimization* **65** (5), 1061–1068 (2016).
18. **S. Boyd** and **L. Vandenberghe,** *Convex Optimization* (Camb. Univ. Press, Cambridge, 2004).
19. **O. L. Mangasarian,** Pseudo-convex functions, *J. SIAM Control, Ser. A,* **3** (2), 281–290 (1965).

20. **M. Avriel, W. E. Diewert, S. Schaible,** and **I. Zang,** *Generalized Concavity* (SIAM, Philadelphia, 2010).

21. **C. H. Papadimitriou,** On the complexity of the parity argument and other inefficient proofs of existence, *J. Comput. Syst. Sci.* **48** (3), 498–532 (1994).

22. **K. C. Kiwiel,** Convergence and efficiency of subgradient methods for quasiconvex minimization, *Math. Program.* **90** (1), 1–25 (2001).

23. **R. Murray, B. Swenson,** and **S. Kar,** Revisiting normalized gradient descent: Fast evasion of saddle points, *IEEE Trans. Autom. Control* **64** (11), 4818–4824 (2019).

24. **H. Nikaidô** and **K. Isoda,** Note on non-cooperative convex game, *Pac. J. Math.* **5** (S1), 807–815 (1955).

25. **O. V. Khamisov,** A global optimization approach to solving equilibrium programming problems, in *Optimization and Optimal Control* (World Scientific, Singapore, 2003), pp. 155–164. (Ser. Comput. Oper. Res., Vol. 1).

26. Algorithmic Game Theory (Camb. Univ. Press, Cambridge, 2007).

27. **V. P. Bulatov** and **T. I. Belykh,** Numerical solution methods for multiextremal problems connected with inverse problems in mathematical programming, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.,* No. 6, 14–20 (2007) [Russian] [*Russ. Math.* **51** (6), 11–17 (2007)].

28. **I. M. Minarchenko** and **O. V. Khamisov,** On minimization of a quadratic function with one negative eigenvalue, *Optim. Lett.* **15** (4), 1447–1455 (2021).

29. The Advanced Interactive Multidimensional Modeling System (AIMMS, Haarlem, 2022). Available at `aimms.com` (accessed Jan. 13, 2023).

30. IBM ILOG CPLEX Optimization Studio (IBM, Armonk, 2022). Available at `ibm.com/products/ilog-cplex-optimization-studio` (accessed Jan. 13, 2023).

Ilya M. Minarchenko

Received September 29, 2022
Revised September 29, 2022
Accepted October 6, 2022