ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель–июнь 2022. Т. 29, № 2. С. 38–61

УДК 519.17 DOI 10.33048/daio.2022.29.721

# О СЛУЧАЯХ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ О РЁБЕРНОЙ РАСКРАСКЕ, ПОРОЖДАЕМЫХ ЗАПРЕЩЁННЫМИ 8-РЁБЕРНЫМИ СУБКУБИЧЕСКИМИ ЛЕСАМИ

*Д. С. Малышев*[1, a], *О. И. Дугинов*[2, b]

[1] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печёрская, 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия

[2] Белорусский гос. университет,
пр. Независимости, 4, 220030 Минск, Беларусь

E-mail: [a] `dsmalyshev@rambler.ru`, [b] `oduginov@gmail.com`

**Аннотация.** Задача о рёберной раскраске для заданного графа состоит в том, чтобы минимизировать количество цветов, достаточное для окрашивания его рёбер так, чтобы смежные рёбра были окрашены в разные цвета. Для всех классов графов, определяемых множествами запрещённых подграфов с 7 рёбрами каждый, известен сложностной статус данной задачи. В настоящей работе рассматривается случай запретов с 8 рёбрами. Нетрудно заметить, что задача о рёберной раскраске будет NP-трудной для такого класса, если среди его 8-рёберных запретов нет субкубического леса. В данной работе доказывается, что запрещение любого субкубического 8-рёберного леса порождает класс с полиномиальной разрешимостью задачи о рёберной раскраске, кроме случаев, образованных дизъюнктной суммой одного из четырёх лесов и пустого графа. Для всех оставшихся случаев доказывается аналогичный результат для пересечения с множеством графов максимальной степени не менее чем 4. Ил. 2, библиогр. 14.

**Ключевые слова:** монотонный класс, задача о рёберной раскраске, вычислительная сложность.

## Введение

В работе рассматриваются только *обыкновенные графы*, т. е. неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Класс графов называется

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № 20–51–04001 (Ф21РМ–001)).

*наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Любой наследственный класс $\mathcal{X}$ (и только наследственный класс) графов может быть задан множеством своих *запрещённых порождённых подграфов* $\mathcal{Y}$, при этом принята запись $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{Y})$. *Сильно наследственный* (или *монотонный*) класс графов — наследственный класс, замкнутый ещё и относительно удаления рёбер. Любой монотонный класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством своих *запрещённых подграфов* $\mathcal{Y}$, при этом пишем $\mathcal{X} = \mathrm{Free}_s(\mathcal{Y})$.

*Рёберной $k$-раскраской* графа $G = (V, E)$ называется любое отображение $c\colon E \to \{1, 2, \ldots, k\}$ такое, что $c(e_1) \neq c(e_2)$ для любых смежных рёбер $e_1$ и $e_2$. Минимальное $k$, для которого существует рёберная $k$-раскраска графа $G$, называется *хроматическим индексом* $G$ и обозначается через $\chi'(G)$.

*Задача о рёберной $k$-раскраске* (кратко, *задача* $k$-РР) состоит для заданного графа $G$ в том, чтобы распознать, выполняется неравенство $\chi'(G) \leqslant k$ или нет. *Задача о рёберной раскраске* (кратко, *задача* РР) для заданных графа $G$ и числа $k$ состоит в том, чтобы распознать, выполняется неравенство $\chi'(G) \leqslant k$ или нет. Задачи 3-РР и РР NP-полны [1].

Согласно известной теореме В. Г. Визинга [2] для любого графа $G$ справедливо неравенство $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$, где $\Delta(G)$ — максимальная из степеней вершин $G$. Тем самым задача РР для графа $G$ эквивалентна распознаванию того, верно равенство $\chi'(G) = \Delta(G)$ или нет.

В работе [3] при любом $k$ была получена полная сложностная дихотомия (т. е. полная классификация сложности) для задачи $k$-РР и всех классов вида $\mathrm{Free}(\{H\})$. В [4] получена полная классификация сложности задачи 3-РР для множеств запрещённых порождённых подграфов, каждый не более чем с 6 вершинами, среди которых не более двух подграфов имеют ровно 6 вершин. В [5] рассматривались задача РР и семейство монотонных классов, задаваемых запрещением подграфов, каждый из которых имеет не более чем 6 рёбер или не более чем 7 вершин, и получена полная классификация сложности задачи РР для классов графов из данного семейства. В [6] получена полная классификация сложности задачи РР для монотонных классов, задаваемых запрещением подграфов, каждый из которых имеет не более чем 7 рёбер.

В настоящей работе рассматривается случай запретов с 8 рёбрами. В [7] доказано, что для любого $g$ задача РР NP-трудна в множестве субкубических графов с обхватом не менее чем $g$, поэтому задача РР будет NP-трудной для любого монотонного класса с 8-рёберными запретами, если среди данных запретов нет субкубического леса. В настоящей работе доказывается, что запрещение любого субкубического 8-рёберного леса порождает класс с полиномиальной разрешимостью задачи о рёберной раскраске, кроме случаев, образованных дизъюнктной суммой одного из четырёх лесов и пустого графа. Для всех оставшихся случаев доказывается аналогичный результат для пересечения с множеством графов максимальной степени не менее чем 4.

## 1. Используемые обозначения

Пусть $G$ — некоторый граф, а $x$ — вершина $G$. *Открытая окрестность вершины* $x$, т. е. множество её соседей, обозначается через $N(x)$. *Замкнутая окрестность вершины* $x$, т. е. множество $N(x) \cup \{x\}$, обозначается через $N[x]$. Через $\deg(x)$ обозначается степень $x$, а максимальная из степеней вершин $G$ обозначается через $\Delta(G)$. Если $\Delta(G) \leqslant 3$, то $G$ называется *субкубическим*. Если степени всех вершин графа равны 3, то он называется *кубическим*.

Пусть $G$ — граф и $V' \subseteq V(G)$. Тогда $G[V']$ — подграф графа $G$, порождённый $V'$, а $G \setminus V'$ — результат удаления из $G$ всех элементов $V'$.

Пусть $G_1$ и $G_2$ — графы. Через $G_1 \cong G_2$ обозначается изоморфизм $G_1$ и $G_2$. Если $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$, то граф $(V(G_1) \cup V(G_2), E(G_1) \cup E(G_2))$ переобозначим через $G_1 + G_2$. Для графа $G$ и числа $k$ обозначение $kG$ означает граф $\underbrace{G + G + \cdots + G}_{k \text{ раз}}$.

Пусть $G, H_1, H_2, \ldots, H_k$ — графы. Тогда $\langle G; H_1, H_2, \ldots, H_k \rangle$ — сокращение для утверждения о том, что $G$ содержит каждый из графов $H_1, H_2, \ldots, H_k$ в качестве подграфа.

Как обычно, через $P_n, O_n, K_{p,q}$ обозначаются простой путь и пустой граф на $n$ вершинах и полный двудольный граф с $p$ вершинами в одной доле и с $q$ вершинами в другой доле соответственно. Через $K_4 - e$ обозначается результат удаления ребра из полного графа с 4 вершинами.

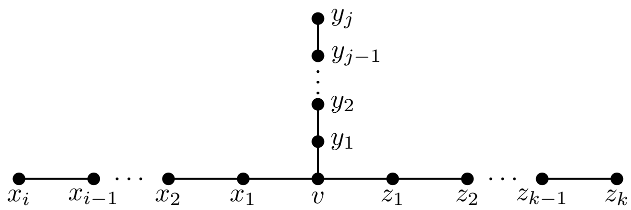


*Рис. 1.* Граф $T_{i,j,k}$

Через $T_{i,j,k}$, где $i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$, $k \geqslant 0$, обозначается дерево, называемое *триодом*, получаемое одновременным отождествлением по вершине $v$ концов трёх простых путей (рис. 1)

$$(v = x_0, x_1, \ldots, x_i), \quad (v = y_0, y_1, \ldots, y_j), \quad (v = z_0, z_1, \ldots, z_k).$$

Далее в доказательствах для вершин графа $T_{i,j,k}$ будут использоваться обозначения, введённые при его определении.

Через $\mathcal{T}$ обозначается класс всех лесов, каждая компонента связности которых является триодом. На рис. 2 перечислены всевозможные субкубические деревья, не принадлежащие $\mathcal{T}$ и имеющие не более чем 8 рёбер.

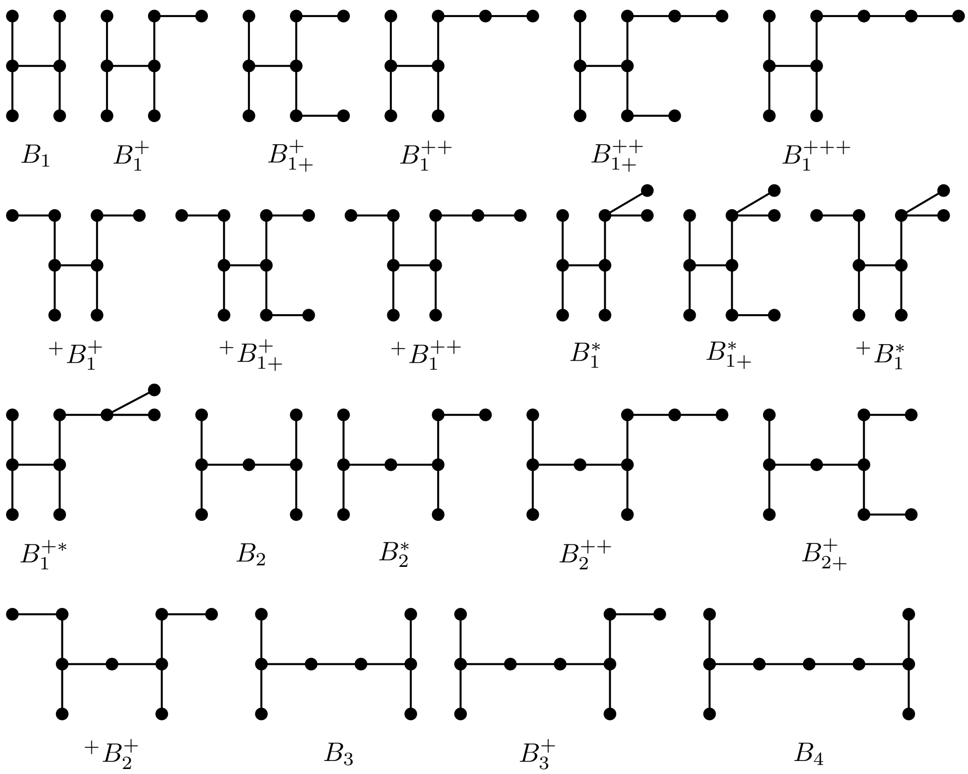


*Рис. 2*

Множество

$$\{B_1 + 3P_2, B_1 + P_2 + P_3, B_1 + P_4, B_1 + K_{1,3}, B_1^+ + 2P_2, B_1^+ + P_3, B_{1+}^+ + P_2, B_1^{++} + P_2, B_{1+}^{++}, B_1^{+++}, {}^+B_1^+ + P_2, {}^+B_{1+}^+, {}^+B_1^{++}, B_1^* + P_2, B_{1+}^*, {}^+B_1^*, B_1^{+*}, B_2 + 2P_2, B_2 + P_3, B_2^+ + P_2, B_2^{++}, B_{2+}^+, {}^+B_2^+, B_3 + P_2, B_3^+, B_4\}$$

обозначим через $\mathcal{S}$. Отметим, что $\mathcal{S}$ совпадает с множеством всевозможных субкубических лесов без изолированных вершин, каждый из которых имеет ровно 8 рёбер и не принадлежит классу $\mathcal{T}$.

*Независимым множеством* графа называется любое подмножество попарно не смежных его вершин.

## 2. Несжимаемые графы

Известно (см. [8, с. 465]), что граф $G$, содержащий вершину $x$, для которой $|\{y \in N(x) \mid \deg(y) = \Delta(G)\}| \leqslant 1$, имеет раскраску рёбер в $\Delta(G)$ цветов тогда и только тогда, когда таковым является граф $G \setminus \{x\}$.

Напомним, что *шарниром* называется вершина графа, удаление которой увеличивает количество его компонент связности. Очевидно, что для любого графа $G$ и его шарнира $x$ верно следующее: $\chi'(G) = \Delta(G)$ тогда и только тогда, когда для каждой компоненты связности $H$ графа $G \setminus \{x\}$ выполнено

$$\chi'(G[V(H) \cup \{x\}]) \leqslant \Delta(G).$$

Связный граф $G$ без шарниров назовём *несжимаемым*, если любая вершина $G$ имеет не менее двух соседей степени $\Delta(G)$. Задача РР для графов из произвольного монотонного класса полиномиально сводится к той же задаче для несжимаемых графов из этого монотонного класса.

## 3. Кликовая ширина графов и следствия из её ограниченности

Кликовая ширина — важный параметр графов. Для графа $G$ она обозначается через $cw(G)$ и определяется как наименьшее количество меток, необходимых для построения $G$ с помощью следующих четырёх операций:

(1) создание новой вершины с заданной меткой $i$,

(2) дизъюнктное объединение двух размеченных графов $H_1$ и $H_2$ с непересекающимися множествами вершин,

(3) соединение ребром каждой вершины с меткой $i$ с каждой вершиной с меткой $j$,

(4) переименование метки $i$ в $j$.

Для любого числа $C$ многие задачи на графах (включая задачу РР) полиномиально разрешимы для графов, у которых кликовая ширина не превосходит $C$ (см., например, [9]). Из результатов [10,11] следует (см. доказательство леммы 4 в [5]) справедливость следующего утверждения.

**Лемма 1.** *Для любого $C > 0$ задача* РР *полиномиально разрешима в классе графов $\{G \mid cw(G) \leqslant C\}$.*

Следующее утверждение доказано в [12].

**Лемма 2.** *Для любого монотонного класса $\mathcal{X}$, не содержащего $\mathcal{T}$ целиком, существует число $C(\mathcal{X})$ такое, что для любого $G \in \mathcal{X}$ выполнено $cw(G) < C(\mathcal{X})$.*

**Лемма 3.** *Пусть $H' \in \mathcal{T}$ и $\mathcal{X}$ — класс графов, причём для некоторого графа $H$ выполнено $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Free}_s(\{H + H'\})$. Тогда задача* РР *в классе $\mathcal{X}$ полиномиально сводится к той же задаче в классе $\mathcal{X} \cap \mathrm{Free}_s(\{H\})$.*

Доказательство. Нам понадобится понятие древесной ширины графа. *Древесное разложение* графа $G = (V, E)$ — это дерево $T$, вершинами $X_1, \ldots, X_n$ которого являются подмножества $V$, удовлетворяющие следующим свойствам:

(1) объединение всех множеств $X_i$ равно $V$;

(2) для любой вершины $v \in V$ вершины дерева, содержащие $v$, образуют поддерево дерева $T$;

(3) для любого ребра $(v, u)$ графа $G$ существует подмножество $X_i$, содержащее и $v$, и $u$.

*Шириной разложения* $T$ называется величина $\max_i |X_i| - 1$. *Древесная ширина* $tw(G)$ графа $G$ — это минимальная ширина всех возможных разложений графа $G$. Нетрудно видеть, что для любого графа $G$ и любой его вершины $v$ выполнено $tw(G) \leqslant tw(G \setminus \{v\}) + 1$, для чего достаточно включить $v$ во все $X_i$ оптимального древесного разложения графа $G \setminus \{v\}$.

Между кликовой шириной и древесной шириной графа имеется связь. Так, для любого графа $G$ выполнено неравенство $cw(G) \leqslant 3 \cdot 2^{tw(G)-1}$ (см. [13]), а для любого графа $G$ со свойством $\neg\langle G; K_{t,t}\rangle$ выполнено $tw(G) \leqslant 3cw(G) \cdot (t-1) - 1$ (см. [14]).

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф из $\mathcal{X}$. Если $G$ содержит подграф $H = (V_H, E_H)$, то $G \setminus V_H \in \mathrm{Free}_s(\{H'\})$ и существует $t^* = t^*(H, H')$ такое, что $\neg\langle G; K_{t^*,t^*}\rangle$, так как $H' \in \mathcal{T}$ и $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Free}_s(\{H + H'\})$. Отсюда, из леммы 2 и замечаний двух последних абзацев следует, что существует $C^* = C^*(H, H')$ такое, что для любого $G \in \mathcal{X}$ имеет место $\langle G; H\rangle \Rightarrow cw(G) < C^*$. Значит, по лемме 1 задача РР полиномиально разрешима в этом классе. Тем самым имеет место сведение, обозначенное в формулировке леммы. Лемма 3 доказана.

## 4. Монотонные случаи полиномиальной разрешимости задачи РР

**Лемма 4.** *Для любого* $H \in \{B_{1+}^{++}, B_1^{+++}, {}^{+}B_{1+}^{+}, {}^{+}B_1^{++}\}$ *задача* РР *полиномиально разрешима для графов из класса* $\mathrm{Free}_s(\{H\})$.

Доказательство. Покажем, что для графов из $\mathrm{Free}_s(\{H\})$ задача РР полиномиально сводится к той же задаче в классе $\mathrm{Free}_s(\{H, T_{5,5,5}\})$. Отсюда и из леммы 2 следует справедливость утверждения данной леммы. Можно рассматривать только несжимаемые графы из $\mathrm{Free}_s(\{H\})$, содержащие подграф $T_{5,5,5}$. Пусть $G = (V, E)$ — такой граф.

Если $N(x_1) \setminus V(T_{5,5,5}) \neq \varnothing$, то $\langle G; B_{1+}^{++}, B_1^{+++}, {}^{+}B_{1+}^{+}, {}^{+}B_1^{++}\rangle$. То же самое верно, если $(N(x_1) \cap V(T_{5,5,5})) \setminus \{v, x_2, y_1, z_1\} \neq \varnothing$ или если $N(x_1) = \{v, x_2, y_1, z_1\}$. Такие же рассуждения можно провести и относительно вершин $y_1$ и $z_1$, поэтому можно считать, что эти случаи не реализуются. Тем самым для любой вершины $u \in \{x_1, y_1, z_1\}$ либо $\deg(u) = 2$, либо $\deg(u) = 3$ и в $\{x_1, y_1, z_1\} \setminus \{u\}$ существует сосед вершины $u$. Такие же рассуждения показывают, что вершина $v$ не смежна с вершинами из $T_{5,5,5}$, отличными от $x_1, y_1, z_1, x_5, y_5, z_5$. При этом если $v$ смежна, например, с $x_5$, то $x_5$ аналогична $x_1$ (эти вершины взаимозаменяемы) и $\deg(x_5) = \deg(x_1) = 2$.

Предположим, что $\Delta(G) \geqslant 4$. Поскольку $G$ несжимаемый, $N(v)$ содержит не менее двух вершин степени $\Delta(G)$. Пусть $u$ — произвольная такая вершина. Понятно, что $u \notin V(T_{5,5,5})$ и $u$ не смежна ни с одной из вершин $x_1, y_1, z_1$. Ввиду несжимаемости графа $G$ существуют такие различные вершины $u_1, u_2 \in N(u) \setminus \{v\}$, что $\deg(u_1) = \Delta(G)$. Нетрудно видеть, что если хотя бы одна из вершин $u_1$ и $u_2$ принадлежит $V(T_{5,5,5})$, то $\langle G; B_{1+}^{++}, B_1^{+++}, {}^+B_{1+}^{+}, {}^+B_1^{++}\rangle$. Можно считать, что $u_1, u_2 \notin V(T_{5,5,5})$. Тогда $\langle G; B_{1+}^{++}, B_1^{+++}\rangle$. Поскольку $\deg(u_1) = \Delta(G) \geqslant 4$, существует сосед $u'$ вершины $u_1$, отличный от каждой из вершин $v, u, u_2$. Тогда $\langle G; {}^+B_{1+}^{+}, {}^+B_1^{++}\rangle$.

Предположим, что $\Delta(G) = 3$. Ввиду несжимаемости $G$ и симметрии можно считать, что $x_1y_1 \in E$. Пусть $\deg(z_1) = 2$, иначе $\langle G; B_{1+}^{++}, B_1^{+++}, {}^+B_{1+}^{+}, {}^+B_1^{++}\rangle$. Стянем треугольник $(v, x_1, y_1)$ в вершину $v^*$ и получим граф $G^*$. Понятно, что $\chi'(G) = 3 \Leftrightarrow \chi'(G^*) = 3$. Если среди $x_2, y_2$ имеется не более одной вершины степени 3, то

$$\chi'(G^*) \leqslant 3 \Leftrightarrow \chi'(G^* \setminus \{v^*\}) \leqslant 3, \quad \text{причём } G^* \setminus \{v^*\} \cong G \setminus \{v, x_1, y_1\}.$$

Значит, $\deg(x_2) = \deg(y_2) = 3$ и $\langle G; B_{1+}^{++}, B_1^{+++}, {}^+B_{1+}^{+}, {}^+B_1^{++}\rangle$. Лемма 4 доказана.

**Лемма 5.** *Для любого* $H \in \{B_2^{++}, B_{2+}^{+}, {}^+B_2^{+}\}$ *задача* PP *полиномиально разрешима для графов из класса* $\mathrm{Free}_s(\{H\})$.

Доказательство. Покажем, что для графов из $\mathrm{Free}_s(\{H\})$ задача PP полиномиально сводится к той же задаче в классе $\mathrm{Free}_s(\{H, T_{7,7,7}\})$. Отсюда и из леммы 2 следует справедливость утверждения данной леммы. Можно рассматривать только несжимаемые графы из $\mathrm{Free}_s(\{H\})$, содержащие подграф $T_{7,7,7}$. Пусть $G = (V, E)$ — такой граф.

Предположим, что среди $x_2, y_2, z_2$ есть хотя бы две вершины степени не менее чем 3, скажем, $x_2$ и $y_2$. Если неверно, что

$$(x_2v \in E \vee x_2y_1 \in E \vee x_2z_1 \in E) \wedge (y_2v \in E \vee y_2x_1 \in E \vee y_2z_1 \in E),$$

то $\langle G; B_2^{++}, B_{2+}^{+}, {}^+B_2^{+}\rangle$. Если данное условие верно, то ввиду симметрии порождаются только шесть случаев:

$$x_2z_1 \in E,\ y_2z_1 \in E; \quad x_2v \in E,\ y_2x_1 \in E; \quad x_2v \in E,\ y_2z_1 \in E;$$

$$x_2y_1 \in E,\ y_2z_1 \in E; \quad x_2v \in E,\ y_2v \in E; \quad x_2y_1 \in E,\ y_2x_1 \in E.$$

В первых четырёх случаях выполнено $\langle G; B_2^{++}, B_{2+}^{+}, {}^+B_2^{+}\rangle$.

В пятом случае имеем $\langle G; B_2^{++}, {}^+B_2^+\rangle$. Можно считать, что $\deg(x_2) = \deg(y_2) = 3$. Ввиду несжимаемости $G$ выполнено $(\deg(x_1) = \Delta(G)) \vee (\deg(x_3) = \Delta(G))$, где $\Delta(G) \geqslant 5$. Если $\deg(x_1) \geqslant 5$, то существует сосед $x_1$, не принадлежащий $\{v, x_2, x_3, y_1\}$, и $\langle G; B_{2+}^+\rangle$. Если $\deg(x_3) \geqslant 5$, то существует сосед $x_3$, не принадлежащий $\{v, x_1, x_2, x_4\}$, и $\langle G; B_{2+}^+\rangle$.

В шестом случае можно считать, что $\deg(x_2) = \deg(y_2) = 3$. Тогда либо $\deg(x_3) \geqslant 3$, либо $\deg(x_4) \geqslant 3$ ввиду несжимаемости $G$, в каждом из этих случаев $\langle G; B_2^{++}, B_{2+}^+, {}^+B_2^+\rangle$.

Предположим, что среди $x_2, y_2, z_2$ имеется не более одной вершины степени не менее чем 3. Тогда ввиду несжимаемости $G$ можно предполагать, что $\deg(x_2) = \deg(y_2) = 2$ и

$$\deg(x_1) = \deg(y_1) = \deg(x_3) = \deg(y_3) = \Delta(G).$$

Можно считать, что никакая из вершин $x_1, y_1$ не смежна ни с какой из вершин $V(T_{7,7,7}) \setminus \{v, x_1, y_1, z_1, z_2, x_3, y_3, z_3, x_7, y_7, z_7\}$, иначе $\langle G; B_2^{++}, B_{2+}^+, {}^+B_2^+\rangle$. Если $x_1x_3 \in E$ или $y_1y_3 \in E$, то $\langle G; B_2^{++}, B_{2+}^+, {}^+B_2^+\rangle$. Если $x_1y_3 \in E$ или $x_1z_3 \in E$, то $\langle G; B_2^{++}, {}^+B_2^+\rangle$. Вместе с тем, в этих случаях выполнено $\langle G; B_{2+}^+\rangle$, для чего достаточно вспомнить, что $\deg(x_3) \geqslant 3$. Тем самым можно считать, что никакая из вершин $x_1, y_1$ не смежна ни с какой из вершин $x_3, y_3, z_3$.

Если $x_1y_1 \in E$ или $x_1z_1 \in E$, то $\langle G; B_2^{++}, B_{2+}^+, {}^+B_2^+\rangle$, а если $vx_3 \in E$, то $\deg(x_3) \geqslant 4$. Далее считаем, что $x_1y_1 \notin E, x_1z_1 \notin E$. Аналогично, используя вершину $y_3$, можно показать, что $y_1z_1 \notin E$. Ввиду несжимаемости $G$ выполнено

$$\exists\, x_1' \in N(x_1) \setminus \{v, x_2\}\ \exists\, y_1' \in N(y_1) \setminus \{v, y_2\}\colon\ \deg(x_1') = \deg(y_1') = \Delta(G).$$

Дополнительно предположим, что $x_1' \neq y_1'$. Тогда $\langle G; B_2^{++}, {}^+B_2^+\rangle$. Если $x_1'z_1 \in E$ или $y_1'z_1 \in E$, то $\langle G; B_{2+}^+\rangle$. Кроме того, пусть ни одна из вершин $x_1'$ и $y_1'$ не смежна с $z_1$. Если $x_1'z_2 \in E$, то $\langle G; B_{2+}^+\rangle$. Случай $x_1'y_2 \in E$ невозможен, так как $y_2$ смежна только с $y_1$ и $y_3$, которые не могут совпадать с $x_1'$. Если же $x_1'z_2 \notin E$, то $\langle G; B_{2+}^+\rangle$, для чего достаточно использовать $N[x_1'] \cup \{v, y_1, y_2, z_1, z_2\}$, а также заметить, что $\Delta(G) \geqslant 4$, если $x_1'v \in E$.

Дополнительно предположим, что $x_1' = y_1'$. Напомним, что $\deg(x_3) = \Delta(G) \geqslant 3$. Тогда $\langle G; B_2^{++}, B_{2+}^+, {}^+B_2^+\rangle$, в чём легко убедиться, рассматривая по отдельности три случая, когда $x_3$ смежна хотя бы с одной из вершин $v, x_1'$ и когда она не смежна ни с одной из них. Лемма 5 доказана.

**Лемма 6.** *Задача* РР *полиномиально разрешима для графов из класса* $\mathrm{Free}_s(\{B_3^+\})$.

Доказательство. Покажем, что для графов из $\mathrm{Free}_s(\{B_3^+\})$ задача РР полиномиально сводится к той же задаче в классе $\mathrm{Free}_s(\{B_3^+, T_{7,7,7}\})$.

Отсюда и из леммы 2 следует справедливость утверждения данной леммы. Можно рассматривать только несжимаемые графы из $\mathrm{Free}_s(\{B_3^+\})$, содержащие подграф $T_{7,7,7}$. Пусть $G=(V,E)$ — такой граф.

Предположим, что среди $x_3, y_3, z_3$ есть хотя бы две вершины степени не менее чем 3, скажем, $x_3$ и $y_3$. Если неверно, что

$$(x_3v \in E \vee x_3x_1 \in E \vee x_3y_1 \in E \vee x_3z_1 \in E)$$
$$\wedge\, (y_3v \in E \vee y_3y_1 \in E \vee y_3x_1 \in E \vee y_3z_1 \in E),$$

то $\langle G; B_3^+\rangle$. Если данное условие верно, то ввиду симметрии порождаются ровно 10 попарно неэквивалентных случаев. Нетрудно видеть, что во всех этих случаях, кроме $x_3v \in E$, $y_3v \in E$; $x_3x_1 \in E$, $y_3x_1 \in E$; $x_3z_1 \in E$, $y_3z_1 \in E$, выполнено $\langle G; B_3^+\rangle$.

Рассмотрим случай, когда $x_3v \in E$, $y_3v \in E$. Можно считать, что $\deg(x_3) = \deg(y_3) = 3$, иначе $\langle G; B_3^+\rangle$. Ввиду несжимаемости $G$ выполнено $\deg(x_2) = \Delta(G) \vee \deg(x_4) = \Delta(G)$, где $\Delta(G) \geqslant 5$. Если $\deg(x_2) \geqslant 5$, то существует сосед $x_2$, не принадлежащий $\{v, x_1, x_3, y_2, y_4\}$, и $\langle G; B_3^+\rangle$. Если $\deg(x_4) \geqslant 5$, то существует сосед $x_4$, не принадлежащий $\{v, x_3, x_5, y_2, y_4\}$, и $\langle G; B_3^+\rangle$.

Рассмотрим случай, когда $x_3x_1 \in E, y_3x_1 \in E$. Ясно, что

$$y_2v \notin E, \quad y_2y_4 \notin E, \quad y_4x_2 \notin E, \quad y_4x_4 \notin E,$$

иначе $\langle G; B_3^+\rangle$. Можно считать, что $\deg(x_3) = \deg(y_3) = 3$, иначе $\langle G; B_3^+\rangle$. Ввиду несжимаемости $G$ выполнено $(\deg(y_2) = \Delta(G)) \vee (\deg(y_4) = \Delta(G))$, где $\Delta(G) \geqslant 4$. Если $\deg(y_2) = \Delta(G)$, то существует сосед $y_2$, не принадлежащий $\{y_1, y_3, x_1, x_2\}$, и $x_4y_2 \notin E, \langle G; B_3^+\rangle$. Если $\deg(y_4) = \Delta(G)$, то существует сосед $y_4$, не принадлежащий $\{y_3, y_5, x_1\}$, и $\langle G; B_3^+\rangle$.

Рассмотрим случай, когда $x_3z_1 \in E, y_3z_1 \in E$. Ясно, что

$$y_2v \notin E, \quad y_2x_i \notin E,\, i = \overline{1,5}, \quad y_2y_4 \notin E, \quad y_2y_5 \notin E,$$

$$y_2z_j,\, j = \overline{2,5}, \quad y_4x_i \notin E,\, i = \overline{1,5}, \quad y_4y_1 \notin E, \quad y_4z_j,\, j = \overline{2,5},$$

иначе $\langle G; B_3^+\rangle$. Ввиду несжимаемости $G$ выполнено $(\deg(y_2) = \Delta(G)) \vee (\deg(y_4) = \Delta(G))$, где $\Delta(G) \geqslant 4$. Если $\deg(y_2) = \Delta(G)$, то существует сосед $y_2$, не принадлежащий $V(T_{5,5,5})$, и $\langle G; B_3^+\rangle$. Если $\deg(y_4) = \Delta(G)$, то существует сосед $y_4$, не принадлежащий $V(T_{5,5,5})$, и $\langle G; B_3^+\rangle$.

Предположим, что среди $x_3, y_3, z_3$ имеется не более одной вершины степени не менее чем 3. Тогда ввиду несжимаемости $G$ можно предполагать, что $\deg(x_3) = \deg(y_3) = 2$, $\deg(x_2') = \deg(y_2') = \Delta(G)$,

$$\deg(x_2) = \deg(y_2) = \deg(x_4) = \deg(y_4) = \Delta(G),$$

$$N(x_2) \supseteq \{x_2', x_1, x_3\}, \quad N(y_2) \supseteq \{y_2', y_1, y_3\}.$$

Ясно, что никакая из вершин $x_2, y_2, z_2$ не смежна ни с одной вершиной из $\{x_4, x_5, x_6, y_4, y_5, y_6, z_3, z_4, z_5, z_6\}$, иначе $\langle G; B_3^+\rangle$. По той же причине $x_4z_3 \notin E$, $y_4z_3 \notin E$.

Дополнительно предположим, что $x_2y_2 \in E$. Тогда $x_4y_1 \in E$, $y_4x_1 \in E$, $\Delta(G) = 3$, иначе $\langle G; B_3^+\rangle$, но тогда $\langle G; B_3^+\rangle$.

Дополнительно предположим, что $x_2y_1 \in E$. Тогда $x_4y_1 \in E$, $x_4v \in E$, $\Delta(G) = 4$, иначе $\langle G; B_3^+\rangle$. Вершина $x_2$ имеет соседа, отличного от каждой из вершин $y_1, v, x_1, x_3, x_4, x_5, x_6$, т. е. $\langle G; B_3^+\rangle$.

Дополнительно предположим, что $x_2v \in E$. Ясно, что $x_4x_1 \notin E$, иначе $\langle G; B_3^+\rangle$. Тогда $x_4y_1 \in E, x_4z_1 \in E$, иначе $\langle G; B_3^+\rangle$. Тем самым $\langle G; B_3^+\rangle$.

Итак, $x_2$ не смежна ни с одной из вершин $V(T_{7,7,7}) \setminus \{x_1, x_3, x_7, y_7, z_1, z_2, z_7\}$. Из соображений симметрии можно считать, что $y_2$ не смежна ни с одной из вершин $V(T_{7,7,7}) \setminus \{y_1, y_3, x_7, y_7, z_1, z_2, z_7\}$. Нетрудно видеть, что каждое из множеств $N(x_2') \setminus \{v, x_2\}$ и $N(y_2') \setminus \{v, y_2\}$ содержит не менее двух элементов.

Дополнительно предположим, что $x_2' \neq y_2'$. Рассмотрим рёбра, исходящие из $x_2'$. В каждом из случаев $x_2'x_1 \in E$, $x_2'y_1 \in E$ и $x_2'z_1 \in E$ сразу получается, что $\langle G; B_3^+\rangle$. То же самое в случае, когда в $G$ нет ни одного из указанных рёбер. При этом мы используем только условие $\deg(x_2') = \Delta(G)$, но не используем $\deg(y_2') = \Delta(G)$.

Дополнительно предположим, что $x_2' = y_2'$. Тогда $\Delta(G) = 3$, поскольку при $\Delta(G) \geqslant 4$ можно выбрать $x_2'$ и $y_2'$ так, что $x_2' \neq y_2'$ и $\deg(x_2') = \Delta(G)$. Ввиду несжимаемости графа $G$ выполнено $\deg(x_1) = \deg(y_1) = 3$. Можно считать, что $x_1x_2' \notin E$. Тогда $x_1y_1 \in E$, иначе $\langle G; B_3^+\rangle$. Поскольку $\deg(x_4) = 3$, то $\langle G; B_3^+\rangle$. Лемма 6 доказана.

**Лемма 7.** *Задача* PP *полиномиально разрешима для графов из класса* $\mathrm{Free}_s(\{B_4\})$.

Доказательство. Покажем, что для графов из $\mathrm{Free}_s(\{B_4\})$ задача PP полиномиально сводится к той же задаче в классе $\mathrm{Free}_s(\{B_4, T_{7,7,7}\})$. Отсюда и из леммы 2 следует справедливость утверждения данной леммы. Можно рассматривать только несжимаемые графы из $\mathrm{Free}_s(\{B_4\})$, содержащие подграф $T_{7,7,7}$. Пусть $G = (V, E)$ — такой граф.

Предположим, что среди $x_4, y_4, z_4$ есть хотя бы две вершины степени не менее чем 3, скажем, $x_4$ и $y_4$. Тогда $\langle G; B_4\rangle$, если неверно, что

$$(x_4v \in E \vee x_4x_1 \in E \vee x_4x_2 \in E \vee x_4y_1 \in E \vee x_4z_1 \in E)$$
$$\wedge\, (y_4v \in E \vee y_4y_1 \in E \vee y_4y_2 \in E \vee y_4x_1 \in E \vee y_4z_1 \in E).$$

Если данное условие верно, то порождаются ровно 15 попарно неэквивалентных случаев и во всех из них, кроме

$$y_4v \in E,\ x_4v \in E; \quad y_4y_1 \in E,\ x_4v \in E; \quad y_4x_1 \in E,\ x_4x_1 \in E;$$

$$y_4x_1 \in E,\ x_4x_2 \in E; \quad x_4z_1 \in E,\ y_4z_1 \in E,$$

выполнено $\langle G; B_4\rangle$.

Дополнительно предположим, что $y_4v \in E$, $x_4v \in E$. Тогда либо $\deg(x_4) = 3$, либо $\deg(x_4) = 4$, $x_4x_1 \in E$, иначе $\langle G; B_4\rangle$. Если $\deg(x_4) = 4$, $x_4x_1 \in E$, то $\deg(x_1) < \Delta(G)$. Действительно, имеем $\Delta(G) \geqslant 5$, и если $\deg(x_1) = \Delta(G)$, то $\langle G; B_4\rangle$, поэтому $(\deg(x_3) = \Delta(G)) \vee (\deg(x_5) = \Delta(G))$ ввиду несжимаемости $G$, независимо от того, чему равна степень вершины $x_4$. В силу симметрии выполнено $(\deg(y_3) = \Delta(G)) \vee (\deg(y_5) = \Delta(G))$.

Дополнительно предположим, что $x_4z_1 \in E$, $y_4z_1 \in E$. Данный случай разбирается полностью аналогично предыдущему.

Дополнительно предположим, что $y_4y_1 \in E$, $x_4v \in E$. Тогда либо $\deg(y_4) = 3$, либо $\deg(y_4) = 4$, $y_4v \in E$, иначе $\langle G; B_4\rangle$. Аналогично рассуждениям из первого случая можно показать, что $(\deg(y_3) = \Delta(G)) \vee (\deg(y_5) = \Delta(G))$. Так как не выполняется $\langle G; B_4\rangle$, то либо $\deg(x_4) = 3$, либо $\deg(x_4) = 4$, $x_4y_1 \in E$. Если $\deg(x_4) = 3$, то ввиду несжимаемости $G$ выполнено $(\deg(x_3) = \Delta(G)) \vee (\deg(x_5) = \Delta(G))$. Если $\deg(x_4) = 4$, $x_4y_1 \in E$, то $\deg(y_4) = 3$, иначе $\langle G; B_4\rangle$. Тогда $\deg(y_3) = \Delta(G) \geqslant 4$ ввиду несжимаемости $G$, поэтому $\langle G; B_4\rangle$.

Дополнительно предположим, что $y_4x_1 \in E$, $x_4x_1 \in E$. Тогда либо $\deg(y_4) = 3$, либо $\deg(y_4) = 4$, $y_4v \in E$, иначе $\langle G; B_4\rangle$. Если $\deg(y_4) = 4$, $y_4v \in E$, то этот вариант разобран в третьем случае. Если $\deg(y_4) = 3$, то ввиду несжимаемости $G$ выполнено $(\deg(y_3) = \Delta(G)) \vee (\deg(y_5) = \Delta(G))$. Так как не выполняется $\langle G; B_4\rangle$, то либо $\deg(x_4) = 3$, либо $\deg(x_4) = 4$, $x_4x_2 \in E$. Если $\deg(x_4) = 4$, $x_4x_2 \in E$, то $\langle G; B_4\rangle$, так как $\deg(y_3) = \Delta(G)$. Если $\deg(x_4) = 3$, то $(\deg(x_3) = \Delta(G)) \vee (\deg(x_5) = \Delta(G))$ ввиду несжимаемости $G$.

Дополнительно предположим, что $y_4x_1 \in E$, $x_4x_2 \in E$. Тогда либо $\deg(x_4) = 3$, либо $\deg(x_4) = 4$, $x_4x_1 \in E$, иначе $\langle G; B_4\rangle$. Вариант $\deg(x_4) = 4$, $x_4x_1 \in E$ разобран в предыдущем случае. Если $\deg(x_4) = 3$, то $(\deg(x_3) = \Delta(G)) \vee (\deg(x_5) = \Delta(G))$ ввиду несжимаемости $G$. Так как не выполняется $\langle G; B_4\rangle$, то $\deg(y_4) = 3$. Ввиду несжимаемости графа $G$ имеем $(\deg(y_3) = \Delta(G)) \vee (\deg(y_5) = \Delta(G))$.

Итак, получаем

$$(\deg(x_3) = \Delta(G) \vee \deg(x_5) = \Delta(G)) \wedge (\deg(y_3) = \Delta(G) \vee \deg(y_5) = \Delta(G)).$$

Тогда нетрудно видеть, что в каждом из четырёх возможных случаев возникает подграф $B_4$.

Предположим, что среди $x_4, y_4, z_4$ имеется не более одной вершины степени не менее чем 3. Тогда ввиду несжимаемости $G$ можно предполагать, что $\deg(x_4) = \deg(y_4) = 2$, $\deg(x_3') = \deg(y_3') = \Delta(G)$,

$$\deg(x_3) = \deg(y_3) = \deg(x_5) = \deg(y_5) = \Delta(G),$$

$$N(x_3) \supseteq \{x'_3, x_2, x_4\}, \quad N(y_3) \supseteq \{y'_3, y_2, y_4\}.$$

Ясно, что $x_3$ не смежна ни с одной из вершин множества $V(T_{7,7,7}) \setminus \{v, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_4, x_7, y_7, z_7\}$, иначе $\langle G; B_4 \rangle$. Аналогично вершина $y_3$ не смежна ни с одной из вершин множества $V(T_{7,7,7}) \setminus \{v, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, y_4, x_7, y_7, z_7\}$.

Дополнительно предположим, что $x_3y_2 \in E$. Тогда либо $x_2y_5 \in E$, $\Delta(G) = 3$, либо $y_5x_2 \in E$, $y_5y_2 \in E$, $\Delta(G) = 4$, иначе $\langle G; B_4 \rangle$. В первом случае обязательно $x_5y_6 \in E$, иначе $\langle G; B_4 \rangle$. Тогда $\langle G; B_4 \rangle$. Во втором случае $x_5x_2 \in E$, $x_5y_6 \in E$, поэтому $\langle G; B_4 \rangle$. Тем самым $x_3y_2 \notin E$. Аналогично можно доказать, что $y_3x_2 \notin E$.

Дополнительно предположим, что $x_3y_1 \in E$. Тогда $y_5v \notin E$, иначе $\langle G; B_4 \rangle$. По той же причине $y_5y_2 \in E$, $\Delta(G) = 3$ или $y_5y_2 \in E$, $y_5y_1 \in E$, $\Delta(G) = 4$. В обоих случаях $x_5x_1 \in E$ или $x_5z_1 \in E$, иначе $\langle G; B_4 \rangle$, но тогда $\langle G; B_4 \rangle$. Аналогично можно доказать, что $y_3x_1 \notin E$.

Дополнительно предположим, что $x_3v \in E$. Существует сосед вершины $y_3$, одновременно отличный от $y_1$ и от $v$. Тогда $\langle G; B_4 \rangle$. Далее всюду считаем, что $x_3v \notin E$, $y_3v \notin E$.

Дополнительно предположим, что $x'_3 = y'_3$. Ясно, что $x'_3 \neq z_1$. Тогда $x_3x_1 \notin E$, $y_3y_1 \notin E$, иначе $\langle G; B_4 \rangle$. Каждый элемент множества $N(x'_3) \setminus \{x_3, y_3\}$ должен принадлежать множеству $\{v, x_1, y_1, z_1\}$, иначе $\langle G; B_4 \rangle$. Выполнено $\Delta(G) = 3$, иначе $\deg(x_3) = \deg(y_3) \geqslant 4$ и $\langle G; B_4 \rangle$. Тем самым $N(x'_3) = \{x_3, y_3, t\}$, где $t \in \{x_1, y_1, z_1\}$, и $\langle G; B_4 \rangle$, в чём можно убедиться, использовав одно из множеств $N[x_5]$ или $N[y_5]$.

Дополнительно предположим, что $x'_3 \neq y'_3$. Нетрудно видеть, что каждое из множеств $N(x'_3) \setminus \{v, x_3\}$ и $N(y'_3) \setminus \{v, y_3\}$ содержит не менее двух элементов. Если неверно, что

$$(x'_3x_1 \in E \vee x'_3x_2 \in E \vee x'_3y_1 \in E \vee x'_3z_1 \in E)$$
$$\wedge\, (y'_3y_1 \in E \vee y'_3y_2 \in E \vee y'_3x_1 \in E \vee y'_3z_1 \in E),$$

то $\langle G; B_4 \rangle$. Если данное условие верно, то порождаются ровно 9 неэквивалентных случаев и во всех из них $\langle G; B_4 \rangle$. Лемма 7 доказана.

## 5. Полиномиальная разрешимость задачи РР для некоторых классов графов максимальной степени не менее чем 4

**Лемма 8.** *Для любого* $H \in \{B_1^* + P_2, {}^+B_1^*, B_1^{+*}\}$ задача РР *полиномиально разрешима в множестве графов*

$$\{G \mid G \in \mathrm{Free}_s(\{H\}),\, \Delta(G) \geqslant 4\}.$$

Доказательство. I. Пусть $H = B_1^* + P_2$. В лемме 8 из [6] доказано, что задача РР полиномиально разрешима в множестве графов

$$\{G \mid G \in \mathrm{Free}_s(\{B_1^*\}),\, \Delta(G) \geqslant 4\}.$$

Отсюда и из леммы 3 следует справедливость данной леммы при $H = B_1^* + P_2$.

II. Пусть $H = {}^+B_1^*$. Можно рассматривать только несжимаемые графы из

$$\{G \mid G \in \mathrm{Free}_s(\{H\}),\ \Delta(G) \geqslant 4\},$$

содержащие подграф $B_1^*$. Пусть $G$ — такой граф, в котором имеется подграф $B_1^*$, где $x, y, z$ — вершины степени 3 этого подграфа $B_1^*$, $xy, yz \in E(B_1^*)$, $x', x'', y', z', z''$ — листья $B_1^*$, смежные с $x, y, z$ соответственно. Так как $\neg\langle G; {}^+B_1^*\rangle$, каждый сосед вершин $x', x'', z', z''$ принадлежит $V(B_1^*)$. По той же причине для любого элемента $u \in (N(x) \cup N(z)) \setminus V(B_1^*)$ выполнено $N(u) \subseteq V(B_1^*)$, поэтому не существует путей $(y, y_1, y_2)$ и $(y, y_1', y_2')$, в которых $\{y_1, y_2\} \cap \{y_1', y_2'\} = \varnothing$ и $y_1, y_2, y_1', y_2' \notin V({}^+B_1^*) \setminus \{y, y'\}$, иначе $y$ была бы шарниром графа $G$.

Покажем, что граф $G \setminus V(B_1^*)$ пустой. Предположим, что он содержит ребро $e$. Поскольку $y$ не является шарниром $G$, в $G$ имеется простой путь

$$(v_1 \in \{x, z\}, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}), \quad v_k v_{k+1} = e,$$

не проходящий через $y$. С точностью до переобозначений можно считать, что любой такой путь проходит через $y'$, иначе $\langle G; {}^+B_1^*\rangle$. Если $v_i = y'$, $i \neq 2$, то $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, v_{i+2}$ вместе с $x, x', x'', y, z$ порождают надграф графа ${}^+B_1^*$, поэтому $v_2 = y'$. Тогда $N(y) = \{v_2, x, z\}$ или $N(y) = \{v_2, v_3, x, z\}$, иначе $\langle G; {}^+B_1^*\rangle$. Тем самым либо $v_2$, либо $v_3$ является шарниром $G$.

Итак, $G \setminus V(B_1^*)$ пустой. Очевидно, что кликовая ширина любого пустого графа равна 1 и кликовая ширина любого графа не превосходит количества его вершин. Тогда

$$cw(G) \leqslant cw(G \setminus V(B_1^*)) + |B_1^*| + 1 \leqslant 10.$$

Отсюда и из леммы 1 следует справедливость этой леммы при $H = {}^+B_1^*$.

III. Пусть $H = B_1^{+*}$. По лемме 7 можно рассматривать только несжимаемые графы из

$$\{G \mid G \in \mathrm{Free}_s(\{H\}),\ \Delta(G) \geqslant 4\},$$

содержащие подграф $B_4$. Пусть $G = (V, E)$ — такой граф, в котором имеется подграф $B_4$, где $(x, y_1, y_2, y_3, z)$ — центральный 4-путь этого подграфа $B_4$, а $x_1, x_2$ и $z_1, z_2$ — листья $B_4$, смежные с $x$ и $z$ соответственно. Ясно, что

$$y_1y_3 \notin E, \quad y_1z_1 \notin E, \quad y_1z_2 \notin E,$$
$$y_3x_1 \notin E, \quad y_3x_2 \notin E, \quad y_2x \notin E, \quad y_2z \notin E,$$

иначе $\langle G; B_1^{+*}\rangle$. Ввиду несжимаемости графа $G$ либо $y_2$ имеет соседа $y_2'$ степени $\Delta(G)$, отличного от $y_1$ и от $y_3$, либо $\deg(y_1) = \deg(y_3) = \Delta(G)$.

Рассмотрим первый случай. Ситуация $y_2' \notin \{x_1, x_2, z_1, z_2\}$ невозможна, иначе $\langle G; B_1^{+*}\rangle$, в чём можно убедиться, рассматривая всевозможные значения для $|N(y_2') \cap \{y_1, y_3\}| \in \{0, 1, 2\}$. Если $y_2' \in \{x_1, x_2, z_1, z_2\}$, то ввиду симметрии можно предполагать, что $y_2' = x_1$. Тогда $x_1x_2 \notin E$, $x_1z_1 \notin E$, $x_1z_2 \notin E$, иначе $\langle G; B_1^{+*}\rangle$. По той же причине $x_1$ не имеет соседа вне $V(B_4)$, поэтому $x_1y_1 \in E$, $x_1z \in E$, $\Delta(G) = 4$. Очевидно, что $\deg(y_3) = 2$, иначе $\langle G; B_1^{+*}\rangle$, но тогда $\deg(y_2) = 4$ ввиду несжимаемости $G$. Так как $\neg\langle G; B_1^{+*}\rangle$, то $y_2$ смежна хотя бы с одной из вершин $z_1$ и $z_2$, скажем, с $z_1$. По той же причине и так как $\Delta(G) = 4$, имеем $\deg(y_1) = 3$. Тогда $\deg(z_1) = 4$ ввиду несжимаемости $G$. Так как $\neg\langle G; B_1^{+*}\rangle$, то $z_1z_2 \notin E$, $z_1x_2 \notin E$, т. е. $z_1$ имеет соседа вне $V(B_4)$, но тогда $\langle G; B_1^{+*}\rangle$.

Рассмотрим второй случай. Предположим, что существует вершина $y_1' \notin V(B_4)$, смежная с $y_1$. Тогда $y_2x_1 \notin E$, $y_2x_2 \notin E$, $y_3x \notin E$, иначе $\langle G; B_1^{+*}\rangle$. Так как $\deg(y_3) \geqslant 4$, отсюда следует, что $\langle G; B_1^{+*}\rangle$. Тем самым $N(y_1) \setminus V(B_4) = N(y_3) \setminus V(B_4) = \varnothing$. Следовательно, можно считать, что $y_1x_1 \in E$, $y_3z_1 \in E$. Тогда $y_1z \notin E$, $y_3x \notin E$, иначе $\langle G; B_1^{+*}\rangle$. Тем самым выполнено $y_1x_2 \in E$, $y_3z_2 \in E$, $\Delta(G) = 4$. Так как $\neg\langle G; B_1^{+*}\rangle$, то $\deg(y_2) = 2$. По той же причине ни одна из вершин $x, x_1, x_2, z, z_1, z_2$ не имеет соседа вне $V(B_4)$. Значит, $V = V(B_4)$. Лемма 8 доказана.

**Лемма 9.** *Задача* PP *полиномиально разрешима в множестве графов* $\{G \mid G \in \mathrm{Free}_s(\{B_{1+}^*\}),\ \Delta(G) \geqslant 4\}$.

Доказательство. Покажем, что задача PP для указанного класса графов полиномиально сводится к той же задаче в классе $\mathrm{Free}_s(\{B_{1+}^*, T_{7,7,7}\})$. Отсюда и из леммы 2 следует справедливость утверждения данной леммы. Можно рассматривать только несжимаемые графы из

$$\{G \mid G \in \mathrm{Free}_s(\{B_{1+}^*\}),\ \Delta(G) \geqslant 4\},$$

содержащие подграф $T_{7,7,7}$. Пусть $G = (V, E)$ — такой граф. Вершина $x_1$ не смежна ни с одной из вершин $y_3$–$y_6$ и $z_3$–$z_6$, вершина $y_1$ не смежна ни с одной из вершин $x_3$–$x_6$ и $z_3$–$z_6$, вершина $z_1$ не смежна ни с одной из вершин $x_3$–$x_6$ и $y_3$–$y_6$, иначе $\langle G; B_{1+}^*\rangle$. Далее будут рассмотрены два важных варианта, которые обозначим через I и II. Множество $\{x_1, y_1, z_1\}$ обозначим через $V_1$, множество $\{x_2, y_2, z_2\}$ — через $V_2$, а множество $V(T_{7,7,7}) \setminus \{x_7, y_7, z_7\}$ — через $\widetilde{V}$.

I. Предположим, что

$$\begin{aligned}((x_1y_2 \in E \vee x_1z_2 \in E) \wedge \deg(x_1) \geqslant 4)&\\ \vee ((y_1x_2 \in E \vee y_1z_2 \in E) \wedge \deg(y_1) \geqslant 4)&\\ \vee ((z_1x_2 \in E \vee z_1y_2 \in E) \wedge \deg(z_1) \geqslant 4).&\end{aligned}$$

Не умаляя общности, можно считать, что $x_1y_2 \in E$, $\deg(x_1) \geqslant 4$. Тогда

$$x_1x_i \notin E,\ i = \overline{3,6}, \quad x_1z_1 \notin E, \quad x_1z_2 \notin E,$$

иначе $\langle G; B^*_{1+}\rangle$. По той же причине либо $\deg(v) = 3$, либо $vy_2 \in E$ и

$$\deg(v) = \deg(x_1) = \deg(y_2) = 4,$$

либо $x_1y_1 \in E$, $vx_2 \in E$ и

$$\deg(v) = \deg(x_1) = 4, \quad \deg(y_2) = 3.$$

I.a. Дополнительно предположим, что $\deg(v) = 3$. Так как не выполняется $\langle G; B^*_{1+}\rangle$, то $\deg(y_2) = 3$ или

$$x_1y_1 \in E, \quad x_2y_2 \in E, \quad \deg(x_1) = \deg(y_2) = 4.$$

I.a.1. Пусть $\deg(y_2) = 3$. Ввиду несжимаемости графа $G$ выполнено $\deg(y_1) \geqslant 4$. Поскольку $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, имеем $x_1y_1 \in E$. По тем же причинам (ввиду несжимаемости $G$ и того факта, что $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$) выполнено $\deg(x_1) = \deg(y_1) = 4 = \Delta(G)$. Тем самым $N(y_1) = \{v, x_1, y_2, y'_1\}$, $\deg(y'_1) = 4$ ввиду несжимаемости $G$. Так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, то $y'_1x_2 \notin E$, поэтому $y'_1 = x_2$, иначе $N(y'_1) \setminus \{x_2, y_1, y_3\}$ содержит хотя бы два элемента и $\langle G; B^*_{1+}\rangle$. Ввиду несжимаемости $G$ выполнено $\deg(x_2) = 4$, откуда следует, что $\langle G; B^*_{1+}\rangle$.

I.a.2. Пусть теперь $x_1y_1 \in E$, $x_2y_2 \in E$, $\deg(x_1) = \deg(y_2) = 4$. Так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, то либо $x_2y_1 \in E$, $\deg(x_2) = \deg(y_1) = 4$, либо $\deg(x_2) = 3$. В первом случае по той же причине и ввиду несжимаемости $G$ выполнено $\deg(x_3) = \deg(y_3) = 2$, $\Delta(G) = 4$. Произвольная рёберная 4-раскраска $c$ графа $G \setminus \{v, x_1, x_2, y_1, y_2\}$ продолжается до рёберной 4-раскраски $G$. Для этого независимо от цветов рёбер $x_3x_4$, $y_3y_4$ и рёбер, инцидентных $z_1$, можно с точностью до перестановки цветов положить

$$c(vx_1) = c(x_2x_3) = 1, \quad c(vy_1) = c(y_2y_3) = 2.$$

Пусть

$$c(x_1x_2) = 2, \quad c(y_1y_2) = 1,$$
$$c(x_1y_1) = c(x_2y_2) = 3, \quad c(x_1y_2) = c(x_2y_1) = 4.$$

Тогда получим рёберную 4-раскраску $G$, поэтому

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v, x_1, x_2, y_1, y_2\}) \leqslant 4.$$

Во втором случае ввиду несжимаемости $G$ и того факта, что $\langle G; B^*_{1+}\rangle$, выполнено $\deg(y_1) = 4$, $y_1y_3 \in E$, $\Delta(G) = 4$. Так как $\langle G; B^*_{1+}\rangle$, то

$$\deg(y_3) = 3, \quad \deg(x_3) = \deg(y_4) = 2.$$

Произвольная рёберная 4-раскраска $c$ графа $G \setminus \{v, x_1, x_2, y_1, y_2, y_3\}$ продолжается до рёберной 4-раскраски $G$. Для этого независимо от цветов рёбер $x_3x_4, y_4y_5$ и рёбер, инцидентных $z_1$, можно с точностью до перестановки цветов положить

$$c(vx_1) = 1, \quad c(x_2x_3) = c(vy_1) = c(y_3y_4) = 2.$$

Пусть

$$c(x_2y_2) = c(y_1y_3) = 1, \quad c(x_1y_2) = 2,$$
$$c(x_1x_2) = c(y_1y_2) = 3, \quad c(x_1y_1) = c(y_2y_3) = 4.$$

Тогда получим рёберную 4-раскраску $G$, поэтому

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v, x_1, x_2, y_1, y_2, y_3\}) \leqslant 4.$$

I.b. Дополнительно предположим, что

$$vy_2 \in E, \quad \deg(v) = \deg(x_1) = \deg(y_2) = 4.$$

Так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, то $x_1y_1 \in E$. По той же причине для каждой вершины $u \in \{x_2, y_3, z_1\}$ либо $\deg(u) = 2$, либо $uy_1 \in E$, причём $\deg(y_1) \leqslant 4$. Если $y_1$ смежна с вершиной $u \notin V(T_{7,7,7})$, то $\deg(u) = 2$ ввиду несжимаемости $G$ и того факта, что $\langle G; B^*_{1+}\rangle$. Нетрудно видеть, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v, x_1, y_1, y_2\}) \leqslant 4.$$

I.c. Дополнительно предположим, что

$$x_1y_1 \in E, \quad vx_2 \in E, \quad \deg(v) = \deg(x_1) = 4, \quad \deg(y_2) = 3.$$

Так как $G$ несжимаем и $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, имеем

$$(y_1x_2 \in E,\ \Delta(G) = 4)$$
$$\vee\ (y_1z_1 \in E,\ \deg(y_1) = 4,\ \deg(z_1) = \deg(x_2) = 3,\ \Delta(G) = 4).$$

В первом случае выполнено $\deg(x_3) = \deg(y_3) = \deg(z_2) = 2$, так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$. Нетрудно видеть, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v, x_1, x_2, y_1, y_2\}) \leqslant 4.$$

Во втором случае выполнено $\deg(x_3) = \deg(y_3) = \deg(z_3) = 2$, так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$. Нетрудно видеть, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1\}) \leqslant 4.$$

Рассмотрение варианта I закончено.

II. Предположим, что

$$((x_1y_1 \in E \vee x_1z_1 \in E) \wedge \deg(x_1) \geqslant 4)$$
$$\vee\ ((y_1x_1 \in E \vee y_1z_1 \in E) \wedge \deg(y_1) \geqslant 4)$$
$$\vee\ ((z_1x_1 \in E \vee z_1y_1 \in E) \wedge \deg(z_1) \geqslant 4).$$

Не умаляя общности, можно считать, что $x_1y_1 \in E$, $\deg(x_1) \geqslant 4$ и не реализуется случай I. Так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, вершина $v$ не смежна ни с одной из вершин $\widetilde{V} \setminus (V_1 \cup V_2)$.

Если $z_1y_1 \in E$, то $x_1z_1 \in E$, так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$. Если $z_1x_1 \in E$, то ввиду несжимаемости $G$ хотя бы одна из вершин $v, y_1, z_1$ имеет степень не менее чем 4. Если $\deg(y_1) \geqslant 4$ или $\deg(z_1) \geqslant 4$, то $y_1z_1 \in E$, поскольку $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$. Если $\deg(y_1) = \deg(z_1) = 3$, то по той же причине и ввиду несжимаемости $G$ выполнено $vu \in E$, $\deg(u) = \Delta(G)$. Если $u \notin \widetilde{V}$, то $u$ смежна не более чем с одним элементом из $V_2$, а если $ux_1 \in E$, то $\Delta(G) \geqslant 5$. Тогда $N(u) \setminus \{v\}$ содержит два элемента, одновременно не принадлежащих $\widetilde{V}$, и $\langle G; B^*_{1+}\rangle$. Это верно, если $u \in V_2$, так как $\deg(u) \geqslant 4$.

Предположим, что $z_1x_1 \in E$, $z_1y_1 \in E$. Поскольку $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, выполнено $\Delta(G) = 4$. Так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, для каждой вершины $u \in \{x_2, y_2, z_2\}$ либо $\deg(u) = 2$, либо $uv \in E$, $\deg(u) = 3$. Если $uv \in E$, $u \notin \widetilde{V}$, то $\deg(u) = 2$, так как $G$ несжимаем и $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$. Нетрудно видеть, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus (V_1 \cup \{v\})) \leqslant 4.$$

Далее считаем, что $z_1x_1 \notin E$, $z_1y_1 \notin E$. Так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, отсюда получаем $vy_2 \notin E$, $vz_2 \notin E$.

Через $N$ обозначим множество вершин, не принадлежащих $V_1 \cup V_2 \cup \{v\}$ и смежных хотя бы с одной из вершин $v, y_1, z_1$. Так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, каждый элемент из $N$ смежен с $x_1$. По той же причине $N$ содержит не более одного элемента.

Ввиду несжимаемости графа $G$ и $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$ равенство $N = \varnothing$ возможно, только если

$$\begin{aligned}(&\deg(y_1) = \deg(z_1) = 3,\, \deg(v) = \deg(x_1) = 4,\\ &vx_2 \in E,\, z_1x_2 \in E,\, x_1x_3 \in E) \vee (\deg(y_1) = 3,\, \deg(z_1) = 2,\\ &\deg(v) = \deg(x_1) = \deg(x_2) = 4,\, vx_2 \in E,\, x_2y_2 \in E,\, x_1x_3 \in E).\end{aligned}$$

В первом случае, так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, то $\deg(x_3) = 3$, $\deg(x_4) = 2$, поэтому $G$ не несжимаем. Во втором случае, так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, то $\deg(y_3) = 3$, $\deg(y_4) = 2$, поэтому $G$ не несжимаем.

Дополнительно предположим, что $N = \{u'\}$. Так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, то

$$\deg(z_1) \leqslant 3, \quad \deg(y_1) \leqslant 4.$$

Поскольку $v$ содержит не менее двух вершин степени $\Delta(G)$ (поскольку $G$ несжимаем), по той же причине имеем

$$\begin{aligned}(&\deg(v) = \deg(x_1) = 5,\, vx_2 \in E,\, \exists\, u'' \notin \widetilde{V}\colon u''v \in E,\, u''x_1 \in E)\\ &\vee (\deg(v) \leqslant 4,\, \deg(x_1) = 4 = \Delta(G),\, vx_2 \notin E).\end{aligned}$$

Первый случай невозможен. Действительно, $\deg(x_1) = 4$, так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, поэтому $\deg(x_2) = 5$ ввиду несжимаемости $G$. Тогда $\langle G; B^*_{1+}\rangle$.

Предположим, что $\deg(v) \leqslant 4$, $\deg(x_1) = 4 = \Delta(G)$, $vx_2 \notin E$. Ввиду несжимаемости $G$ каждая из вершин $v, y_1, y_2, z_1$ смежна хотя бы с двумя вершинами степени 4, поэтому $vu' \in E$, $y_1u' \in E$, $x_1u' \in E$, так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$. По той же причине для каждой вершины $u \in \{x_2, y_2, z_1\}$ либо $\deg(u) = 2$, либо $uu' \in E$, $\deg(u) = 3$, причём если $u$ смежна с вершиной $w \notin V_1 \cup \{v, x_2, y_2\}$, то $\deg(w) \leqslant 1$. Нетрудно видеть, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus (V_1 \cup \{v, u'\})) \leqslant 4.$$

Рассмотрим случай, когда $vu' \in E$, $y_1u' \notin E$. Тогда $\deg(y_1) = 3$, так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$. Ввиду несжимаемости $G$ выполнено $\deg(u') = 4$. Тогда $\langle G; B^*_{1+}\rangle$ во всех случаях, кроме $u'z_1 \in E$, $u'x_2 \in E$. Если $u'z_1 \in E$, $u'x_2 \in E$, то $\deg(x_2) = 3$, $\deg(x_3) = 2$, так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, поэтому $G$ не несжимаем.

Рассмотрим случай, когда $vu' \notin E$, $y_1u' \in E$. Тогда $\deg(v) = 3$. Ввиду несжимаемости $G$ выполнено $\deg(u') = 4$. Тогда $\langle G; B^*_{1+}\rangle$ во всех случаях, кроме $u'x_2 \in E$, $u'y_2 \in E$. Так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, то $\deg(x_2) = 3$, $\deg(x_3) = 2$, поэтому $G$ не несжимаем.

Рассмотрение варианта II закончено.

Далее считаем, что варианты I и II не реализуются. Ввиду несжимаемости графа $G$ множество $N(v)$ содержит хотя бы две вершины $v_1$ и $v_2$ степени $\Delta(G)$. Ясно, что $|\{v_1, v_2\} \cap V_1| \leqslant 1$, иначе $\langle G; B^*_{1+}\rangle$.

Предположим, что существует вершина $v_i \notin \widetilde{V}$, скажем $v_1$, смежная хотя бы с одной из вершин множества $V_1$, скажем с $x_1$. Тогда $v_2 \notin \{y_1, z_1\}$, иначе $\langle G; B^*_{1+}\rangle$.

Рассмотрим сначала случай, когда $v_1x_2 \in E$, $v_1x_3 \in E$. Нетрудно видеть, что $\langle G; B^*_{1+}\rangle$, если $(v_2 \neq x_1) \vee (\Delta(G) \geqslant 5)$. Если $v_2 = x_1$, $\Delta(G) = 4$, то $x_1x_3 \in E$ и либо $\deg(x_2) = 3$, либо $x_2x_4 \in E$. В первом случае

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v_1, x_1, x_2\}) \leqslant 4.$$

Во втором случае, так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, либо $\deg(y_1) = \deg(z_1) = 2$, либо $\deg(y_1) = \deg(z_1) = 3$, $x_1y_1 \in E$. Второй вариант невозможен, так как тогда $\deg(y_2) = 4$ ввиду несжимаемости $G$, поэтому $\langle G; B^*_{1+}\rangle$. Пользуясь несжимаемостью $G$ и тем, что $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, нетрудно убедиться в том, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v_1, x_1, x_2, x_3\}) \leqslant 4,$$

за исключением случая, когда существует копия подграфа $G[\{v, v_1, x_1, x_2, x_3, x_4\}]$, пересекающаяся с ним по вершине $x_4$. Стянем эти два подграфа в вершину, получившийся граф обозначим через $G^*$. Нетрудно видеть, что $G^* \in \mathrm{Free}_s(\{B^*_{1+}\})$ и $\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G^*) = 4$.

Предположим, что хотя бы одно из рёбер $vx_2$, $vx_3$ не принадлежит $E$. Так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, если $\Delta(G) \geqslant 5$, то $v_1$ смежна с каждой вершиной из $V_1$, причём $v_2 \notin \widetilde{V}$. Тогда $v_2$ не имеет соседа в $V_1$, иначе $\langle G; B^*_{1+}\rangle$. Вспомнив, что $\deg(v_2) \geqslant 5$, заключаем, что $\langle G; B^*_{1+}\rangle$.

Дополнительно предположим, что $\Delta(G) = 4$. Поскольку $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, получаем $v_1y_1 \notin E, v_1z_1 \notin E$, $v_1$ имеет соседа в $\{x_2, x_3\}$, поэтому $v_2 = x_1$. Используя несжимаемость $G$ и то, что $\langle G; B^*_{1+}\rangle$, нетрудно выяснить, что

$$(v_1x_2 \in E,\ \exists\, v', v'' \notin \widetilde{V}\colon v_1v' \in E,\ v_2v'' \in E)$$
$$\vee\ (v_1x_2 \in E,\ \exists\, v' \notin \widetilde{V}\colon v_1v' \in E,\ v_2v' \in E).$$

В первом случае в силу $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$ имеем

$$\deg(y_1) = \deg(z_1) = 2, \quad \deg(x_2) = 3, \quad \max(\deg(v'), \deg(v'')) \leqslant 1,$$

поэтому

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v_1, x_1, x_2\}) \leqslant 4.$$

Рассмотрим второй случай. Так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, то $N(v') \subseteq \{v_1, v_2, x_2, x_3\}$. По той же причине выполнено

$$(\deg(v') = 2 \Rightarrow \deg(x_2) = 3) \wedge (v'x_2 \in E,\ v'x_3 \notin E \Rightarrow \deg(v') = 3)$$
$$\wedge\ (v'x_2 \notin E,\ v'x_3 \in E \Rightarrow \deg(x_2) = \deg(v') = 3).$$

Ввиду несжимаемости $G$ и $\langle G; B^*_{1+}\rangle$ получаем $\deg(y_1) = \deg(z_1) = 2$. Нетрудно проверить, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v_1, v_2, v'', x_2\}) \leqslant 4,$$

где $v'' = v'$ или $v'' = x_3$. Итак, можно считать, что если $v_i \notin \widetilde{V}$, то $v_i$ не смежна ни с одним элементом из $V_1$.

Так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, то $|N(v_i) \cap V_2| \leqslant 1$, если $v_i \notin \widetilde{V}$, и если $v_i \in \widetilde{V}$, то $v_i$ не смежна ни с одной вершиной других ветвей $T_{7,7,7}$ кроме листовых. Следовательно, среди $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2)$ существует пара, каждый элемент которой не смежен ни с $v_1$, ни с $v_2$. Если $(N(v_1) \cup N(v_2)) \setminus \{v, v_1, v_2\}$ содержит не менее четырёх вершин, то существуют такие два элемента $v'_1, v'_2 \in N(v_1) \setminus \{v, v_2\}$, что $|N(v_2) \setminus \{v, v_1, v'_1, v'_2\}| \geqslant 2$. Значит, при $\Delta(G) \geqslant 5$ выполнено $\langle G; B^*_{1+}\rangle$, за исключением ситуации, когда

$$\Delta(G) = 5, \quad v_1v_2 \in E, \quad N(v_1) \setminus \{v_2\} = N(v_2) \setminus \{v_1\}.$$

В этом случае, поскольку $\langle G; B^*_{1+}\rangle$, никакая вершина из $N(v_1) \setminus \{v, v_2\}$ не имеет соседа вне $N(v_1)$. Тогда $v$ — шарнир графа $G$.

Предположим, что $\Delta(G) = 4$. Тогда либо ровно одна из вершин $v_1, v_2$ не принадлежит $\widetilde{V}$, а вторая принадлежит $V_1$, либо они одновременно принадлежат $\widetilde{V}$. В первом случае можно считать, что $v_1 \notin \widetilde{V}$, $v_2 = x_1$ и $v_1x_1 \notin E$, $N(v_1) \setminus \{v\} = N(v_2) \setminus \{v\}$. Тогда $N(v_2) \cap \widetilde{V} = \{v, x_2\}$, иначе $\langle G; B^*_{1+}\rangle$. По той же причине множество $N(v_2) \setminus \{v\}$ независимо. Ввиду несжимаемости $G$ либо $\deg(x_2) = 4$, либо степень хотя бы одной из вершин $N(v_2) \setminus \widetilde{V}$ равна 4, но тогда $\langle G; B^*_{1+}\rangle$.

Рассмотрим второй случай. Так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, вершины $v_1, v_2$ одновременно принадлежат ровно одному из множеств $\{x_i\}_{i=1}^6$, $\{y_i\}_{i=1}^6$, $\{z_i\}_{i=1}^6$, скажем, первому из них. Тогда можно считать, что $v_1 = x_1$, так как $\Delta(G) = 4$. Покажем, что $\deg(y_1) = \deg(z_1) = 2$. Рассмотрим только вершину $y_1$. Поскольку $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, то $\deg(y_1) \leqslant 3$, $y_1z_2 \notin E$, $y_1x_2 \notin E$, поэтому $\deg(y_1) = 3$, только если $y_1z_1 \in E$. Тогда $\deg(z_1) = 3$. Следовательно, $\deg(y_2) = 4$ ввиду несжимаемости $G$. Тогда $\langle G; B^*_{1+}\rangle$.

Так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, то $x_1x_5 \notin E$, $x_1x_6 \notin E$. По той же причине, если $v_1v_2 \notin E$, то $N(v_1) \setminus \{v\} = N(v_2) \setminus \{v\}$. Тогда $v_2 \notin \{x_4, x_5, x_6\}$, поэтому $v_2 = x_3$, $\exists\, v' \notin \widetilde{V} \colon v'x_1 \in E$, $v'x_3 \in E$. Поскольку $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, то

$$(\deg(v') = 3,\ v'x_5 \in E,\ x_1x_4 \in E,\ \deg(x_4) = 3) \vee (\deg(v') = 2,\ \deg(x_4) = 3).$$

Ввиду несжимаемости $G$ выполнено $\deg(x_2) = 4$, но тогда $\langle G; B^*_{1+}\rangle$.

Дополнительно предположим, что $v_1v_2 \in E$. Тогда $v_2 = x_i$, где $i \in \{2, 3, 4\}$, $v_1$ и $v_2$ имеют общего соседа кроме $v$. Поскольку $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$, то $i \neq 4$, а при $i = 3$ выполнено $x_1x_4 \in E$. Если $i = 3$, то

$$N(x_2) \subseteq \{x_1, x_3, x_4, x_5\},\ N(x_4) \subseteq \{x_1, x_2, x_3, x_5\},\ x_2x_5 \in E \Rightarrow \deg(x_5) = 3,$$

так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$. Нетрудно видеть, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v, x_1, x_2, x_3, x_4\}) \leqslant 4, \quad \text{если } x_2x_5 \notin E,$$

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}) \leqslant 4 \quad \text{иначе}.$$

Пусть $i = 2$ и $v'$ — произвольный общий сосед вершин $v_1$ и $v_2$, отличный от $v$. Ясно, что $v' \notin \widetilde{V} \setminus \{x_3, x_4\}$. Если $v' \notin \widetilde{V}$, то либо $x_1x_3 \in E$, либо $N(x_1) = \{v, v', v^*, x_2\}$, где $v^* \notin \widetilde{V}$. В первом случае

$$N(v') \subseteq \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \quad N(x_3) \subseteq \{x_1, x_2, v', x_4\},$$

так как $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$. Если хотя бы одно из рёбер $v'x_3$, $v'x_4$ не принадлежит $E$, то

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v, v', x_1, x_2, x_3\}) \leqslant 4.$$

Если же $v'x_3 \in E$, $v'x_4 \in E$, то в силу несжимаемости $G$ и $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$ нетрудно убедиться в том, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v', x_1, x_2, x_3\}) \leqslant 4,$$

за исключением случая, когда существует копия подграфа $G[\{v, v', x_1, x_2, x_3, x_4\}]$, пересекающаяся с ним по вершине $x_4$. Стянем эти два подграфа в вершину, получившийся граф обозначим через $G^{**}$. Нетрудно видеть, что $G^{**} \in \mathrm{Free}_s(\{B^*_{1+}\})$ и

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G^{**}) = 4.$$

Во втором случае имеем $\langle G; B^*_{1+}\rangle$. Далее считаем, что никакой общий сосед $v_1$ и $v_2$ не принадлежит $\widetilde{V}$.

Если $v' = x_4$, то $x_1x_3 \in E$, иначе $\langle G; B^*_{1+}\rangle$. По той же причине выполнено $\deg(x_3) = 3$ или $x_3x_5 \in E$. Нетрудно видеть, что в первом случае имеем

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{v, x_1, x_2, x_3, x_4\}) \leqslant 4.$$

Во втором случае в силу несжимаемости $G$ и $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$ нетрудно убедиться в том, что

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}) \leqslant 4,$$

за исключением случая, когда существует копия подграфа $G[\{v, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}]$, пересекающаяся с ним по вершине $x_5$. Стянем эти два подграфа в вершину, получившийся граф обозначим через $G^{***}$. Нетрудно видеть, что $G^{***} \in \mathrm{Free}_s(\{B^*_{1+}\})$ и

$$\chi'(G) = 4 \Leftrightarrow \chi'(G^{***}) = 4.$$

Если $v' = x_3$, то либо $x_1x_4 \in E$, либо существует вершина $v'_1 \notin \widetilde{V}$, смежная с $v_1$. В первом случае обязательно $v_2x_4 \in E$, иначе $\langle G; B^*_{1+}\rangle$, переходим к предыдущему случаю $v' = x_4$ и получаем те же два подслучая, что и ранее. Во втором случае выполнено $N(v'_1) \subseteq \{x_1, x_4\}$ ввиду несжимаемости $G$ и $\neg\langle G; B^*_{1+}\rangle$. Тогда $\langle G; B^*_{1+}\rangle$, в чём нетрудно убедиться, вспомнив, что $\deg(x_2) = 4$. Лемма 9 доказана.

## 6. Основной результат работы

Основным результатом данной работы является

**Теорема 1.** *Пусть $F$ — произвольный 8-рёберный лес, не принадлежащий множеству*

$$\{B^*_1 + P_2 + O_n \mid n \geqslant 0\} \cup \{^+B^*_1 + O_n \mid n \geqslant 0\} \\ \cup \{B^{+*}_1 + O_n \mid n \geqslant 0\} \cup \{B^*_{1+} + O_n \mid n \geqslant 0\}.$$

*Тогда задача* РР *полиномиально разрешима в классе* $\mathrm{Free}_s(\{F\})$. *Если лес $F$ принадлежит данному множеству, то задача* РР *полиномиально разрешима в классе* $\{G \in \mathrm{Free}_s(\{F\}) \mid \Delta(G) \geqslant 4\}$.

Доказательство. Если $F \in \mathcal{T}$, то задача РР полиномиально разрешима в классе $\mathrm{Free}_s(\{F\})$ по леммам 1 и 2. Если $F \notin \mathcal{T}$, то $F = F' + O_n$ при некоторых $F' \in \mathcal{S}$ и $n$, где множество $\mathcal{S}$ определено в разд. 1. Тогда утверждение теоремы следует из лемм 3–9.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Holyer I.** The NP-completeness of edge-coloring // SIAM J. Comput. 1981. V. 10, No. 4. P. 718–720.
2. **Визинг В. Г.** Об оценке хроматического класса $p$-графа // Дискретный анализ. Вып. 3. Новосибирск: Ин-т математики, 1964. С. 25–30.
3. **Galby E., Lima P. T., Paulusma D., Ries B.** Classifying $k$-edge colouring for $H$-free graphs // Inf. Process. Lett. 2019. V. 146. P. 39–43.
4. **Malyshev D. S.** The complexity of the edge 3-colorability problem for graphs without two induced fragments each on at most six vertices // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 811–822.
5. **Малышев Д. С.** Классификация сложности задачи о рёберной раскраске для некоторого семейства классов графов // Дискрет. математика. 2016. Т. 28, вып. 2. С. 44–50.
6. **Малышев Д. С.** Полная сложностная дихотомия для запрещённых подграфов с 7 рёбрами в задаче о хроматическом индексе // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2020. Т. 27, № 4. С. 104–130.
7. **Kamiński M., Lozin V. V.** Coloring edges and vertices of graphs without short or long cycles // Contrib. Discrete Math. 2007. V. 2, No. 1. P. 61–66.
8. **Schrijver A.** Combinatorial optimization. Polyhedra and efficiency. Heidelberg: Springer, 2003. 1879 p.
9. **Courcelle B., Makowsky J. A., Rotics U.** Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width // Theory Comput. Syst. 2000. V. 33, No. 2. P. 125–150.
10. **Gurski F., Wanke E.** Line graphs of bounded clique-width // Discrete Math. 2007. V. 307, No. 22. P. 2734–2754.
11. **Kobler D., Rotics U.** Edge dominating set and colorings on graphs with fixed clique-width // Discrete Appl. Math. 2003. V. 126, No. 2–3. P. 197–223.
12. **Boliac R., Lozin V. V.** On the clique-width of graphs in hereditary classes // Algorithms and Computation. Proc. 13th Int. Symp. (Vancouver, Canada, Nov. 21–23, 2002). Heidelberg: Springer, 2002. P. 44–54. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 2518).
13. **Corneil D. G., Rotics U.** On the relationship between clique-width and tree-width // SIAM J. Comput. 2005. V. 34, No. 4. P. 825–847.
14. **Gurski F., Wanke E.** The tree-width of clique-width bounded graphs without $K_{n,n}$ // Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. Proc. 26th Int. Workshop (Konstanz, Germany, June 15–17, 2000). Heidelberg: Springer, 2000. P. 196–205. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 1928).


*Малышев Дмитрий Сергеевич*
*Дугинов Олег Иванович*

Статья поступила
7 июля 2021 г.

После доработки —
4 февраля 2022 г.

Принята к публикации
7 февраля 2022 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
April–June 2022. Vol. 29, No. 2. P. 38–61

UDC 519.17 DOI 10.33048/daio.2022.29.721

# SOME CASES OF POLYNOMIAL SOLVABILITY FOR THE EDGE COLORABILITY PROBLEM GENERATED BY FORBIDDEN 8-EDGE SUBCUBIC FORESTS

*D. S. Malyshev*[1, a] and *O. I. Duginov*[2, b]

[1] National Research University "Higher School of Economics",
25/12 Bolshaya Pechyorskaya Street, 603155 Nizhny Novgorod, Russia
[2] Belarusian State University,
4 Nezavisimost Avenue, 220030 Minsk, Belarus
E-mail: [a] `dsmalyshev@rambler.ru`, [b] `oduginov@gmail.com`

**Abstract.** The edge-coloring problem, is to minimize the number of colors sufficient to color all the edges of a given graph so that any adjacent edges receive distinct colors. For all the classes defined by sets of forbidden subgraphs with 7 edges each, the complexity status of this problem is known. In this paper, we consider the case of prohibitions with 8 edges. It is not hard to see that the edge-coloring problem is NP-complete for such a class if there are no subcubic forests among its 8-edge prohibitions. We prove that forbidding any subcubic 8-edge forest generates a class with polynomial-time solvability of the edge-coloring problem, except for the cases formed by the disjunctive sum of one of 4 forests and an empty graph. For all the remaining four cases, we prove a similar result for the intersection with the set of graphs of maximum degree at least four. Illustr. 2, bibliogr. 14.

**Keywords:** monotone class, edge-coloring problem, computational complexity.

## REFERENCES

1. **I. Holyer,** The NP-completeness of edge-coloring, *SIAM J. Comput.* **10** (4), 718–720 (1981).
2. **V. G. Vizing,** On an estimate of the chromatic index of a $p$-graph, *Discrete Analysis,* Vol. 3 (Inst. Mat. SO AN, Novosibirsk, 1964), pp. 25–30 [Russian].

This research is supported by the Russian Foundation for Basic Research and the Belarusian Republic Foundation for Basic Research (Project 20–51–04001 (F21RM–001)).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **16** (2) (2022).

3. **E. Galby, P. T. Lima, D. Paulusma,** and **B. Ries,** Classifying $k$-edge colouring for $H$-free graphs, *Inf. Process. Lett.* **146**, 39–43 (2019).
4. **D. S. Malyshev,** The complexity of the edge 3-colorability problem for graphs without two induced fragments each on at most six vertices, *Sib. Elektron. Mat. Izv.* **11**, 811–822 (2014).
5. **D. S. Malyshev,** Complexity classification of the edge coloring problem for a family of graph classes, *Diskretn. Mat.* **28** (2), 44–50 (2016) [Russian] [*Discrete Math. Appl.* **27** (2), 97–101 (2017)].
6. **D. S. Malyshev,** Complete complexity dichotomy for 7-edge forbidden subgraphs in the edge coloring problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **27** (4), 104–130 (2020) [Russian] [*J. Appl. Ind. Mat.* **14** (4), 706–721 (2020)].
7. **M. Kamiński** and **V. V. Lozin,** Coloring edges and vertices of graphs without short or long cycles, *Contrib. Discrete Math.* **2** (1), 61–66 (2007).
8. **A. Schrijver,** Combinatorial Optimization. Polyhedra and Efficiency (Springer, Heidelberg, 2003).
9. **B. Courcelle, J. A. Makowsky,** and **U. Rotics,** Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width, *Theory Comput. Syst.* **33** (2), 125–150 (2000).
10. **F. Gurski** and **E. Wanke,** Line graphs of bounded clique-width, *Discrete Math.* **307** (22), 2734–2754 (2007).
11. **D. Kobler** and **U. Rotics,** Edge dominating set and colorings on graphs with fixed clique-width, *Discrete Appl. Math.* **126** (2–3), 197–223 (2003).
12. **R. Boliac** and **V. V. Lozin,** On the clique-width of graphs in hereditary classes, in *Algorithms and Computation* (Proc. 13th Int. Symp., Vancouver, Canada, Nov. 21–23, 2002) (Springer, Heidelberg, 2002), pp. 44–54 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 2518).
13. **D. Corneil** and **U. Rotics,** On the relationship between clique-width and treewidth, *SIAM J. Comput.* **34** (4), 825–847 (2005).
14. **F. Gurski** and **E. Wanke,** The tree-width of clique-width bounded graphs without $K_{n,n}$, in *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science* (Proc. 26th Int. Workshop, Konstanz, Germany, June 15–17, 2000) (Springer, Heidelberg, 2000), pp. 196–205 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 1928).

*Dmitry S. Malyshev*
*Oleg I. Duginov*

Received July 7, 2021
Revised February 4, 2022
Accepted February 7, 2022