ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2022. Т. 29, № 1. С. 74–93

УДК 519.71 DOI 10.33048/daio.2022.29.725

О СВОЙСТВАХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ПРОСТЫХ ИМПЛИКАНТ

И. П. Чухров

Институт автоматизации проектирования РАН,
ул. 2-я Брестская, 19/18, 123056, Москва, Россия
E-mail: chip@icad.org.ru

Аннотация. Известная нижняя оценка максимального числа простых импликант (максимальных граней) булевой функции отличается от верхней оценки в $O(\sqrt{n})$ раз и асимптотически достигается на симметричной поясковой функции. Для изучения свойств экстремальных функций определены подмножества функций, которые имеют минимальные и максимальные вершины максимальных граней в поясах $n/3 \pm r_n$ и $2n/3 \pm r_n$ соответственно. При этом доля числа вершин в каждом слое не меньше ε_n и для любой такой вершины доля числа максимальных граней от максимального возможного числа не меньше ε_n. Для параметров ε_n и r_n получены условия, при которых число простых импликант функции из такого подмножества равно асимптотически или по порядку роста максимальному значению. Библиогр. 10.

Ключевые слова: булева функция, простая импликанта, максимальная грань, число простых импликант, асимптотика, порядок роста.

Введение

Задача минимизации булевых функций в геометрической интерпретации является задачей о покрытии подмножества вершин единичного куба, в которых значение функции равно 1, максимальными гранями, содержащимися в этом подмножестве вершин. Вычислительная сложность задачи определяется числом единичных вершин и числом максимальных граней, т. е. числом простых импликант или длиной сокращённой ДНФ булевой функции.

При изложении будем использовать следующие понятия и обозначения для граней и множества вершин единичного n-мерного куба

$$B^n = \{\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1\},\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Вершины связаны соотношением $\widetilde{x} \leqslant \widetilde{y}$, если $x_i \leqslant y_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. *Расстоянием* $\rho(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ между вершинами $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in B^n$ называется число координат, в которых вершины имеют различные значения. *Гранью* куба B^n ранга k и размерности $n-k$ называется множество

$$B^{n,\sigma_1,\ldots,\sigma_k}_{i_1,\ldots,i_k} = \{\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in B^n \mid x_{i_1} = \sigma_1, \ldots, x_{i_k} = \sigma_k\},$$

где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$ и $\sigma_s \in \{0,1\}$ для $s = 1, \ldots, k$. Любая грань имеет единственные минимальную и максимальную вершины.

Обозначим через $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}}$ грань с минимальной и максимальной вершинами $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$, где $\widetilde{x} \leqslant \widetilde{y}$.

Слоем B^n_k куба B^n называется множество вершин $\widetilde{x} \in B^n$, для которых число единичных координат равно k, где $0 \leqslant k \leqslant n$. *Поясом* $S^n_{k,k+h}$ куба B^n называется множество вершин $\widetilde{x} \in B^n_i$, где $0 \leqslant k \leqslant i \leqslant k+h \leqslant n$. Пояс $S^n_{k-r,k+r}$ обозначим через $S^n_{k\pm r}$, где $0 \leqslant k-r \leqslant k+r \leqslant n$ и $r \geqslant 0$.

Множество булевых функций n переменных обозначим через P_n. Множество $\{\widetilde{x} \in B^n \mid f(\widetilde{x}) = 1\}$, которое содержит единичные вершины функции $f \in P_n$, обозначим через N_f. Функция $f \in P_n$, для которой $N_f = S^n_{k,k+h}$, называется *поясковой*. Грань $g \subseteq N_f$ называется *гранью функции* f; она называется *максимальной гранью функции* f, если любая грань $g' \supset g$ не содержится в множестве N_f.

Число различных координат вершин $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ называется *расстоянием* и обозначается через $\rho(\widetilde{x}, \widetilde{y})$. *Связной* называется функция, если для различных вершин $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in N_f$ и $\rho(\widetilde{x}, \widetilde{y}) > 1$ есть вершины $\{x_1, \ldots, \widetilde{x}_p\} \subset N_f$ такие, что $\rho(\widetilde{x}, \widetilde{x}_1) = \rho(\widetilde{x}_1, \widetilde{y}) = 1$, если $p = 1$, или $\rho(\widetilde{x}, \widetilde{x}_1) = \rho(\widetilde{x}_i, \widetilde{x}_{i+1}) = \rho(\widetilde{x}_p, \widetilde{y}) = 1$ для $i = 1, \ldots, p-1$, если $p > 1$.

Множество и число максимальных граней функции f обозначаются через G_f и $|G_f|$ соответственно. Наибольшее число максимальных граней функций n переменных обозначается через $G_n = \max\limits_{f \in P_n} |G_f|$.

Обозначим через P_{n,G_n} последовательность подмножеств функций из P_n, если для $f \in P_{n,G_n}$ выполняется $G_f \sim G_n$ при $n \to \infty$.

Используемые понятия и обозначения можно найти в [1, 2].

Для множества всех функций доказаны оценки [3, 4]:

$$\binom{n}{n - \lfloor n/3 \rfloor} \binom{n - \lfloor n/3 \rfloor}{\lfloor n/3 \rfloor} < G_n \leqslant 2^{n - \lfloor n/3 \rfloor} \binom{n}{\lfloor n/3 \rfloor},$$

$$c_n \frac{3^n}{n} \lesssim G_n \lesssim C_n \frac{3^n}{\sqrt{n}}, \tag{1}$$

где $c_n \sim \frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$ и $C_n \sim \frac{3}{2\sqrt{\pi}}$ при $n \to \infty$.

Нижняя оценка асимптотически достигается на поясковой функции, для которой множество единичных вершин есть пояс $S^n_{\lfloor n/3 \rfloor, n - \lfloor n/3 \rfloor}$. Более высокая нижняя оценка получается на симметрической функции при добавлении к такой функции связных компонент, которые содержатся в поясах $S^n_{0,\lfloor n/3\rfloor}$ и $S^n_{\lfloor 2n/3\rfloor,n}$ и являются поясковыми функциями [3]. Однако асимптотика числа максимальных граней такой функции не изменяется.

Верхняя оценка получается из следующих соображений [3]. Для функции $f \in P_n$ и вершины $\widetilde{\alpha} \in N_f$ обозначим

$$p_{f,\widetilde{\alpha}} = \sum_{g \in G_{f,\widetilde{\alpha}}} 2^{-\dim g},$$

где $G_{f,\widetilde{\alpha}} = \{g \in G_f \mid \widetilde{\alpha} \in g\}$ и $\dim g$ — размерность грани g.

Множество монотонных булевых функций P_n, для которых все максимальные грани имеют максимальную вершину $\widetilde{1}$, обозначим M_n. Тогда выполняются соотношения

$$|G_f| = \sum_{g \in G_f} \sum_{\widetilde{\alpha} \in g} 2^{-\dim g} = \sum_{\widetilde{\alpha} \in N_f} \sum_{g \in G_{f,\widetilde{\alpha}}} 2^{-\dim g} = \sum_{\widetilde{\alpha} \in N_f} p_{f,\widetilde{\alpha}} \leqslant |N_f| \max_{\widetilde{\alpha} \in N_f} p_{f,\widetilde{\alpha}},$$

$$G_n \leqslant \max_{f \in P_n} \bigl\{ |N_f| \max_{\widetilde{\alpha} \in N_f} p_{f,\widetilde{\alpha}} \bigr\} \leqslant 2^n \max_{f \in P_n} \max_{\widetilde{\alpha} \in N_f} p_{f,\widetilde{\alpha}} = 2^n p_{\max}(M_n),$$

где $p_{\max}(M_n) = \max\limits_{f \in M_n} p_{f,\widetilde{1}}$ и $\widetilde{1} = (1, \ldots, 1) \in B^n$.

Для экстремальной монотонной функции f доказывается, что функционал не уменьшается, если последовательно использовать нелокальные изменения функции для увеличения граней с минимальной размерностью или соответственно уменьшения граней с максимальной размерностью, которые отличаются от $\lfloor n/3\rfloor$. Тогда значение $p_{\max}(M_n)$ достигается на функции f, для которой $N_f = S^n_{n-\lfloor n/3\rfloor,n}$. Следовательно,

$$|G_f| = \binom{n}{\lfloor n/3\rfloor}, \quad p_{\max}(M_n) = 2^{-\lfloor n/3\rfloor}\binom{n}{\lfloor n/3\rfloor}.$$

Для связных булевых функций в [5] введено понятие локально экстремальной в d-окрестности функции по числу простых импликант и получены оценки изменения числа простых импликант при изменении значений поясковой функции в некоторой d-окрестности. Доказано, что функция f локально экстремальна для $d \leqslant O(n)$ и не является таковой для $d \geqslant 2^{O(n)}$, если она поясковая $N_f = S^n_{k,k+h}$, причём $k \sim h \sim n/3$, или имеет простые импликанты разного ранга и отличается от такой поясковой функции наличием единичных вершин в слоях $k-1$ и $k+h+1$.

Актуальным представляется изучение свойств, при которых функция имеет асимптотически или по порядку роста максимальное число простых импликант.

Необходимость ограничения определённых свойств множества экстремальных функций объясняется возможностью изменения функций с использованием преобразований, при которых сохраняются отношения и количественные характеристики для граней любой размерности. Только взаимно однозначное отображение $\omega\colon B^n \to B^n$, которое сохраняет расстояние между вершинами куба, обладает таким свойством. Любое такое отображение однозначно представляется в виде $\omega(\widetilde{x}) = \pi(\widetilde{x}) \oplus \widetilde{\alpha}$, где $\widetilde{\alpha} = \omega(\widetilde{0})$ и $\pi(\widetilde{x}) = (x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)})$ для перестановки π чисел $1, \dots, n$ [5, лемма 1].

Применение к булевой функции таких преобразований позволяет получить разные функции. При этом для функции сохраняется асимптотика или порядок роста числа простых импликант функции, но единичные вершины функции могут быть в любых слоя куба.

Соответственно возникают вопросы о наличии и значимости следующих свойств функции для достижения асимптотически максимального значения числа максимальных граней:

• ограничения на параметры поясов куба, в которых содержатся множества минимальных и максимальных вершин максимальных граней функции,

• определённые размерности максимальных граней функции,

• сравнимые максимальные вершины или сравнимые минимальные вершины максимальных граней функции.

1. Описание конструкции

Используем следующие соотношения (2)–(6) при $a > 0$ и $n \to \infty$:

$$\binom{n}{m} a^m \sim \frac{(1+a)^{n+1}}{\sqrt{2\pi n a}} \exp\Big(-\frac{\delta^2_{n,m,a}}{2an}\Big)\Big(1 + O\Big(\frac{1}{n} + \frac{\delta^3_{n,m,a}}{n^2}\Big)\Big) \tag{2}$$

для $\delta_{n,m,a} = m(a+1) - an$ и $m - \frac{an}{a+1} = o(n^{2/3})$ [6, с. 279, п. 5.7.2];

$$\binom{n}{k} \sim \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}} e^{-(2k-n)^2/(2n)} \tag{3}$$

для $\left|k - \frac{n}{2}\right| = o(n^{3/4})$ [6, с. 279, п. 5.7.1];

$$\sum_{k \leqslant j \leqslant m} \binom{n}{j} a^j \sim \frac{(1+a)^{n+1}}{\sqrt{2\pi}} \Big(\frac{e^{-x_k^2/2}}{x_k} - \frac{e^{-x_m^2/2}}{x_m}\Big), \tag{4}$$

где $a > 0$, $k < m$, $h = \frac{a+1}{\sqrt{an}}$, $k = \frac{na}{a+1} + \frac{x_k}{h}$, $m = \frac{na}{a+1} + \frac{x_m}{h}$ и $x_k \to \infty$, $x_m^3 h \to 0$, $\frac{1}{h}(x_m - x_k) = m - k \to \infty$ [6, с. 279, п. 5.7.3];

$$\sum_{j > m = \frac{na}{a+1} + x_m \frac{\sqrt{na}}{a+1}} \binom{n}{j} a^j = o\Big(\frac{e^{-x_k^2/2}(1+a)^n}{x_k\sqrt{2\pi}}\Big), \tag{5}$$

где $x_k \to \infty$, $x_k = o(x_m)$ и $x_m = o(n^{1/6})$;

$$\sum_{j > \frac{na}{a+1} + x_k \frac{\sqrt{na}}{a+1}} \binom{n}{j} a^j \sim \frac{1}{x_k\sqrt{2\pi}} e^{-x_k^2/2}(1+a)^n, \tag{6}$$

где $x_k \to \infty$ и $x_k = o(n^{1/6})$ [6, с. 280, п. 5.7.4].

Соотношения (2)–(3) и (4) являются следствием из локальной и интегральной теорем Муавра — Лапласа соответственно для последовательности независимых случайных величин [7], которые имеют распределение Бернулли и принимают значения 1 и 0 с вероятностями $p = \frac{a}{a+1}$ и $1 - p = \frac{1}{a+1}$. При доказательстве локальной теоремы Муавра — Лапласа используется формула Стирлинга для асимптотики $n!$.

Для $q = a\left(\frac{n}{m+1} - 1\right)$ и $\varepsilon_m = \frac{x_m\sqrt{na}+a+1}{an}$ выполняется

$$q = \frac{an}{\frac{na}{a+1} + x_m\frac{\sqrt{na}}{a+1} + 1} - a = \frac{a+1}{1 + \frac{x_m\sqrt{na}+a+1}{an}} - a = \frac{a+1}{1+\varepsilon_m} - a = \frac{1 - a\varepsilon_m}{1+\varepsilon_m}.$$

Так как $m = \frac{na}{a+1} + x_m\frac{\sqrt{na}}{a+1}$, $x_k = o(x_m)$, $x_m = o(n^{1/6})$, то $\varepsilon_m = o(n^{-1/3})$ при $n \to \infty$ и $q = \frac{1-a\varepsilon_m}{1+\varepsilon_m} < 1$. Следовательно, при $m \leqslant j \leqslant n$ имеем

$$\frac{\binom{n}{j+1}a^{j+1}}{\binom{n}{j}a^j} = a\left(\frac{n}{j+1} - 1\right) \leqslant a\left(\frac{n}{m+1} - 1\right) = q, \quad \frac{\binom{n}{j}a^j}{\binom{n}{m}a^m} \leqslant q^{m-j},$$

$$\frac{q}{1-q} = \frac{1 - a\varepsilon_m}{(1+a)\varepsilon_m} \sim \frac{1}{(1+a)\varepsilon_m} \sim \frac{\sqrt{an}}{(1+a)x_m},$$

а значит,

$$\sum_{j > m = \frac{na}{a+1} + x_m\frac{\sqrt{na}}{a+1}} \binom{n}{j} a^j < \binom{n}{m} a^m \frac{q}{1-q} \sim \binom{n}{m} a^m \frac{\sqrt{na}}{(1+a)x_m}. \tag{7}$$

Для $x_m^3 h \to 0$ и $h = \frac{a+1}{\sqrt{an}}$ при $n \to \infty$ выполняется $x_m = o(n^{1/6})$, $m - \frac{na}{a+1} = \frac{x_m}{h} = o(n^{1/6})O(n^{1/2}) = o(n^{2/3})$, тогда из (2) следует, что

$$\binom{n}{m} a^m \sim \frac{(1+a)^{n+1}}{\sqrt{2\pi na}} \exp\left(-\frac{(m(a+1) - an)^2}{2an}\right) = \frac{(1+a)^{n+1}}{\sqrt{2\pi na}} e^{-x_m^2/2}. \tag{8}$$

Для $x_k \to \infty$, $x_k = o(x_m)$ и $x_m = o(n^{1/6})$ при $n \to \infty$ имеем

$$\frac{x_k}{x_m} e^{-(x_m^2 - x_k^2)/2} = o(1) \quad \text{или} \quad \frac{e^{-x_m^2/2}}{x_m} = o\left(\frac{e^{-x_k^2/2}}{x_k}\right).$$

Тогда из (7), (8) следует (5), так как

$$\sum_{j>m=\frac{na}{a+1}+x_m\frac{\sqrt{na}}{a+1}} \binom{n}{j} a^j \lesssim \frac{\sqrt{an}}{(1+a)x_m} \frac{(1+a)^{n+1} e^{-x_m^2/2}}{\sqrt{2\pi na}}$$

$$= \frac{e^{-x_m^2/2}(1+a)^{n+1}}{x_m\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1+a} = o\left(\frac{e^{-x_k^2/2}(1+a)^n}{x_k\sqrt{2\pi}}\right).$$

Соотношение (6) следует из (4), (5).

Далее везде в ограничениях индексы i и j изменяются от 0 до n и принято обозначение $\triangle_n = \frac{2\sqrt{n}}{3}\sqrt{\ln n - o(\ln\ln n)}$ при $n \to \infty$.

В лемме 1 получены асимптотические оценки количественных характеристик, используемые для подмножеств максимальных граней.

Лемма 1. *Если* $z \to \infty$ *и* $z = o(n^{1/6})$ *при* $n \to \infty$, *то*

$$\binom{j}{\lfloor j/2\rfloor} \sim 2^j\sqrt{\frac{3}{n\pi}}, \quad \binom{n-i}{\lfloor (n-i)/2\rfloor} \sim 2^{n-i}\sqrt{\frac{3}{n\pi}}, \tag{9}$$

где $\left|\frac{2n}{3} - j\right| \leqslant \frac{z}{3}\sqrt{2n}$ *и* $\left|\frac{n}{3} - i\right| \leqslant \frac{z}{3}\sqrt{2n}$;

$$\sum_{i:\ \left|i-\frac{n}{3}\right|>\frac{z}{3}\sqrt{2n}} \binom{n}{i} 2^{n-i} = \sum_{j:\ \left|j-\frac{2n}{3}\right|>\frac{z}{3}\sqrt{2n}} \binom{n}{j} 2^j \sim \frac{2\cdot 3^n}{z\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \tag{10}$$

$$\frac{1}{z}e^{-z^2/2} = o(n^{-1}), \quad \text{если } z \geqslant \sqrt{2\ln n - o(\ln\ln n)}, \tag{11}$$

$$\binom{j-p}{\lfloor j/2\rfloor} \Big/ \binom{j}{\lfloor j/2\rfloor} = o(n^{-1/2}) \tag{12}$$

для $j = O(n)$ *и* $p \geqslant \ln n + \varphi_n$, *если* $\varphi_n \to \infty$ *и* $\varphi_n = o(\ln n)$.

Для множеств вершин и граней функции $f \in P_n$ используем следующие обозначения:

$X_f = \{\widetilde{x} \in N_f \mid \exists g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f\}$, $Y_f = \{\widetilde{y} \in N_f \mid \exists g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f\}$— множества минимальных и максимальных вершин максимальных граней функции соответственно;

$G^{\widetilde{x}}_{f,\min} = \{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f\}$, $G^{\widetilde{y}}_{f,\max} = \{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f\}$— множества максимальных граней, для которых вершина $\widetilde{x}$ является минимальной или вершина $\widetilde{y}$ — максимальной.

Для множеств максимальных граней функции, которые зависят от параметра $r_n = o(n^{2/3})$ при $n \to \infty$ введём обозначения:

$\overline{G}_{f,r_n,X} = \bigcup\limits_{\widetilde{x}\notin S^n_{\lfloor n/3\rfloor\pm r_n}} G^{\widetilde{x}}_{f,\min}$, т. е. минимальные вершины граней не содержатся в $S^n_{\lfloor n/3\rfloor\pm r_n}$,

$\overline{G}_{f,r_n,Y} = \bigcup\limits_{\widetilde{y} \notin S^n_{\lfloor 2n/3 \rfloor \pm r_n}} G^{\widetilde{y}}_{f,\max}$, т. е. максимальные вершины граней не содержатся в $S^n_{\lfloor 2n/3 \rfloor \pm r_n}$,

$\overline{\mathbb{G}}_{f,r_n} = \{ g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f \mid \widetilde{x} \notin S^n_{\lfloor n/3 \rfloor \pm r_n}$ или $\widetilde{y} \notin S^n_{\lfloor 2n/3 \rfloor \pm r_n} \}$, т. е. минимальные вершины граней не содержатся в $S^n_{\lfloor n/3 \rfloor \pm r_n}$ или максимальные вершины граней — в $S^n_{\lfloor 2n/3 \rfloor \pm r_n}$;

$\mathbb{G}_{f,r_n} = \{ g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f \mid \widetilde{x} \in S^n_{\lfloor n/3 \rfloor \pm r_n}$ и $\widetilde{y} \in S^n_{\lfloor 2n/3 \rfloor \pm r_n} \} = G_f \setminus \overline{\mathbb{G}}_{f,r_n}$, т. е. минимальные вершины граней содержатся в $S^n_{\lfloor n/3 \rfloor \pm r_n}$ и максимальные вершины граней — в $S^n_{\lfloor 2n/3 \rfloor \pm r_n}$.

Очевидно, что выполняются соотношения

$$G_f = \bigcup_{\widetilde{x} \in N_f} G^{\widetilde{x}}_{f,\min} = \bigcup_{\widetilde{y} \in N_f} G^{\widetilde{y}}_{f,\max}, \tag{13}$$

$$\overline{\mathbb{G}}_{f,r_n} = \overline{G}_{f,r_n,X} \cup \overline{G}_{f,r_n,Y}, \quad |\overline{\mathbb{G}}_{f,r_n}| \leqslant |\overline{G}_{f,r_n,X}| \cup |\overline{G}_{f,r_n,Y}|, \tag{14}$$

так как возможно $\overline{G}_{f,r_n,X} \cap \overline{G}_{f,r_n,Y} \neq \varnothing$.

Лемма 2. *При $n \to \infty$ выполняются следующие оценки.*

(i) *Если $r_n = \frac{1}{3} z \sqrt{2n}$, где $z \geqslant \sqrt{2 \ln n - o(\ln \ln n)}$ и $z = o(n^{1/6})$, то $r_n = o(n^{2/3})$ и*

$$\left|\overline{G}_{f,r_n,X}\right| < O(n^{-1/2}) \sum_{i\colon |i - \frac{n}{3}| > r_n} \binom{n}{i} 2^{n-i}, \tag{15}$$

$$\left|\overline{G}_{f,r_n,Y}\right| < O(n^{-1/2}) \sum_{j\colon |j - \frac{2n}{3}| > r_n} \binom{n}{j} 2^{j}. \tag{16}$$

(ii) *Если $f \in P_{n,G_n}$ и $R_n > r_n \geqslant \triangle_n$, то*

$$|\mathbb{G}_{f,R_n}| \sim |\mathbb{G}_{f,r_n}| \sim G_n. \tag{17}$$

Лемма 2 означает, что асимптотика значения G_n достигается на функциях, для которых максимальные грани имеют минимальные вершины в поясе $S^n_{\lfloor n/3 \rfloor \pm r_n}$ и максимальные вершины в поясе $S^n_{\lfloor 2n/3 \rfloor \pm r_n}$, если $r_n \geqslant \triangle_n$.

Для функции $f \in P_n$, параметров $r_n \to \infty$ и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$ определим подмножества вершин и максимальных граней.

(a) Подмножества вершин X_f из пояса $S^n_{\lfloor n/3 \rfloor \pm r_n}$:

$$X_{f,r_n} = X_f \cap S^n_{\lfloor n/3 \rfloor \pm r_n},$$

если минимальные вершины граней содержатся в поясе $S^n_{\lfloor n/3 \rfloor \pm r_n}$;

$$X^{\leqslant\varepsilon_n}_{f,r_n,i} = \Big\{\widetilde{x} \in X_{f,r_n} \cap B^n_i \mid B^n_i \subset S^n_{\lfloor n/3\rfloor \pm r_n},\ \big|X_f \cap B^n_i\big| \leqslant \varepsilon_n \big|B^n_i\big| \text{ или } \big|G^{\widetilde{x}}_{f,\min}\big| \leqslant \varepsilon_n \binom{n-i}{\lfloor (n-i)/2\rfloor}\Big\},$$

$$X^{\leqslant\varepsilon_n}_{f,r_n} = \bigcup_{i\colon |i-\frac{n}{3}|\leqslant r_n} X^{\leqslant\varepsilon_n}_{f,r_n,i},$$

если доля в слое B^n_i минимальных вершин максимальных граней не больше ε_n или число максимальных граней с минимальной вершиной из слоя B^n_i не больше $\varepsilon_n C^{\lfloor (n-i)/2\rfloor}_{n-i}$;

$$X^{>\varepsilon_n}_{f,r_n,i} = \big(X_{f,r_n} \cap B^n_i\big) \setminus X^{\leqslant\varepsilon_n}_{f,r_n,i}, \quad X^{>\varepsilon_n}_{f,r_n} = \bigcup_{i\colon |i-\frac{n}{3}|\leqslant r_n} X^{>\varepsilon_n}_{f,r_n,i},$$

если доля в слое B^n_i минимальных вершин максимальных граней больше ε_n и число максимальных граней с минимальной вершиной из слоя B^n_i больше $\varepsilon_n \binom{n-i}{\lfloor (n-i)/2\rfloor}$.

(b) Подмножества вершин Y_f из пояса $S^n_{\lfloor 2n/3\rfloor \pm r_n}$:

$$Y_{f,r_n} = Y_f \cap S^n_{\lfloor 2n/3\rfloor \pm r_n},$$

если максимальные вершины граней содержатся в поясе $S^n_{\lfloor 2n/3\rfloor \pm r_n}$;

$$Y^{\leqslant\varepsilon_n}_{f,r_n,j} = \Big\{\widetilde{y} \in Y_{f,r_n} \cap B^n_j \mid B^n_j \subset S^n_{\lfloor 2n/3\rfloor \pm r_n},\ \big|Y_f \cap B^n_j\big| \leqslant \varepsilon_n \big|B^n_j\big| \text{ или} \big|G^{\widetilde{y}}_{f,\max}\big| \leqslant \varepsilon_n \binom{j}{\lfloor j/2\rfloor}\Big\},$$

$$Y^{\leqslant\varepsilon_n}_{f,r_n} = \bigcup_{j\colon |j-\frac{2n}{3}|\leqslant r_n} Y^{\leqslant\varepsilon_n}_{f,r_n,j},$$

если доля в слое B^n_j максимальных вершин максимальных граней не больше ε_n или число максимальных граней с максимальной вершиной из слоя B^n_j не больше $\varepsilon_n \binom{j}{\lfloor j/2\rfloor}$;

$$Y^{>\varepsilon_n}_{f,r_n,j} = \big(Y_{f,r_n} \cap B^n_j\big) \setminus Y^{\leqslant\varepsilon_n}_{f,r_n,j}, \quad X^{>\varepsilon_n}_{f,r_n} = \bigcup_{j\colon |j-\frac{n}{3}|\leqslant r_n} X^{>\varepsilon_n}_{f,r_n,i},$$

если доля в слое B^n_j максимальных вершин максимальных граней больше ε_n и число максимальных граней с максимальной вершиной в слое B^n_j больше $\varepsilon_n \binom{j}{\lfloor j/2\rfloor}$.

(c) Подмножества максимальных граней с минимальной вершиной из пояса $S^n_{\lfloor n/3\rfloor \pm r_n}$ и максимальной вершиной из пояса $S^n_{\lfloor 2n/3\rfloor \pm r_n}$:

$$\mathbb{G}^{\leqslant \varepsilon_n}_{f,r_n} = \left\{ g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f \mid \widetilde{x} \in X^{\leqslant \varepsilon}_{f,r_n} \text{ или } \widetilde{y} \in Y^{\leqslant \varepsilon}_{f,r_n} \right\},$$

если минимальная или максимальная вершина грани содержится соответственно в подмножествах $Y^{\leqslant \varepsilon_n}_{X,f,r_n}$ или $Y^{\leqslant \varepsilon_n}_{Y,f,r_n}$;

$$\mathbb{G}^{> \varepsilon_n}_{f,r_n} = \left\{ g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f \mid \widetilde{x} \in X^{> \varepsilon}_{X,f,r_n} \text{ и } \widetilde{y} \in Y^{> \varepsilon}_{Y,f,r_n} \right\},$$

если минимальная и максимальная вершина грани содержатся в подмножествах $X^{> \varepsilon_n}_{f,r_n}$ и $Y^{> \varepsilon_n}_{f,r_n}$ соответственно.

Очевидно, что

$$\mathbb{G}^{\leqslant \varepsilon_n}_{f,r_n} \cap \mathbb{G}^{> \varepsilon_n}_{f,r_n} = \varnothing, \quad \mathbb{G}^{\leqslant \varepsilon_n}_{f,r_n} \cup \mathbb{G}^{> \varepsilon_n}_{f,r_n} = G_f. \tag{18}$$

2. Основные результаты

В теореме 1 для функции $f \in P_{n,G_n}$ получена оценка числа максимальных граней множества $\mathbb{G}^{\leqslant \varepsilon_n}_{f,r_n}$ при $r_n \geqslant \triangle_n$.

Теорема 1. *Если $f \in P_{n,G_n}$, $0 < \varepsilon_n < 1$ и $r_n \geqslant \triangle_n$, то*

$$\left|\mathbb{G}^{\leqslant \varepsilon_n}_{f,r_n}\right| \lesssim 2\varepsilon_n \sqrt{\frac{3}{\pi n}} 3^n \quad \text{при } n \to \infty. \tag{19}$$

В следующей теореме для функции $f \in P_{n,G_n}$ утверждается, что при выполнении определённых условий для ε_n число максимальных граней множества $\mathbb{G}^{\leqslant \varepsilon_n}_{f,r_n}$ не влияет на асимптотику или порядок роста числа максимальных граней функции.

Теорема 2. *Для функции $f \in P_{n,G_n}$ и $r_n \geqslant \triangle_n$ при $n \to \infty$ выполняются соотношения*

$$\left|\mathbb{G}^{> \varepsilon_n}_{f,r_n}\right| \sim G_n, \quad \text{если } \varepsilon_n = o(n^{-1/2}), \tag{20}$$

$$\left|\mathbb{G}^{> \varepsilon_n}_{f,r_n}\right| \asymp G_n, \quad \text{если } \varepsilon_n \sim c n^{-1/2} \text{ и } 0 < c < \frac{3}{4\sqrt{\pi}}. \tag{21}$$

Теорема 2 позволяет определить подмножества функций $\mathbb{P}^{\sim}_{n,r_n,\varepsilon_n}$ и $\mathbb{P}^{\asymp}_{n,r_n,\varepsilon_n}$, для которых максимальные грани обладают определёнными свойствами и на которых достигаются асимптотика и порядок роста максимума числа максимальных граней функций из P_n.

Функцию $\varphi \in P_n$ обозначим $\varphi^{> \varepsilon_n}_{f,r_n}$, если $N_\varphi = \bigcup\limits_{g \in G^{> \varepsilon_n}_{f,r_n}} g$ для $f \in P_n$, где $0 < \varepsilon_n < 1$ и $r_n \geqslant \triangle_n$. Тогда для $\varphi = \varphi^{> \varepsilon_n}_{f,r_n}$ любая грань $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G^{> \varepsilon_n}_{f,r_n}$ является максимальной и $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G^{> \varepsilon_n}_{\varphi,r_n}$.

Множество $\mathbb{P}^{\sim}_{n,r_n,\varepsilon_n}$ содержит различные функции $\varphi^{>\varepsilon_n}_{f,r_n}$ для всех $f \in P_{n,G_n}$. Множество $\mathbb{P}^{\asymp}_{n,r_n,\varepsilon_n}$ определяется аналогично и содержит различные функции $\varphi^{>\varepsilon_n}_{f,r_n}$ для всех $f \in P_n$ таких, что $\left|G_f\right| = O(G_n)$.

Замечание 1. Для вершины $\widetilde{y} \in Y^{>\varepsilon_n}_{f,r_n,j}$, где $\widetilde{y} \in B^n_j \subset S^n_{\lfloor 2n/3 \rfloor \pm r_n}$, $\left|G^{\widetilde{y}}_{f,\max}\right| > \varepsilon_n \binom{j}{\lfloor j/2 \rfloor}$ и $\varepsilon_n = o\bigl(n^{-1/2}\bigr)$, из оценки (12) следует справедливость такого утверждения: грань $g_{\widetilde{\alpha},\widetilde{y}}$ для вершины $\widetilde{\alpha} \in B^n_p$ и размерности $j-p$ не может содержать все грани $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G^{\widetilde{y}}_{f,\max}$, если $p \geqslant \ln n + \varphi_n$, $\varphi_n = \ln n - 2\ln\frac{1}{\varepsilon_n} = o(\ln n)$ и $\varphi_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, для $\widetilde{y} \in Y^{>\varepsilon_n}_{f,r_n,j}$ не менее $j-p$ вершин в слое B^n_{j-1} содержатся в гранях $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G^{\widetilde{y}}_{f,\max}$. Тогда множество $\bigl\{\widetilde{\alpha} \in B^n_{j-1} \mid \widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{y},\ \widetilde{\alpha} \notin N_f\bigr\}$, т. е. множество нулевых вершин функции f, которые в слое B^n_{j-1} являются соседними с вершиной $\widetilde{y} \in Y^{>\varepsilon_n}_{f,r_n,j}$, содержит асимптотически не более $\ln n$ вершин.

Замечание 2. Если $\left|\frac{2n}{3} - j\right| \leqslant r_n$ и $r_n \geqslant \triangle_n$, то из оценок (9), (16) и (17) следует, что $\binom{j}{\lfloor j/2 \rfloor} \sim \sqrt{\frac{3}{n\pi}}2^j$ при $n \to \infty$. Тогда

$$\begin{aligned}G_n \sim \left|\mathbb{G}_{f,r_n}\right| &= \left|\bigl\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f \mid \widetilde{x} \in S^n_{\lfloor n/3 \rfloor \pm r_n},\ \widetilde{y} \in S^n_{\lfloor 2n/3 \rfloor \pm r_n}\bigr\}\right| \\ &\leqslant \left|\bigl\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f \mid \widetilde{y} \in S^n_{\lfloor 2n/3 \rfloor \pm r_n}\bigr\}\right| \\ \leqslant \sum_{j\colon |j-\frac{2n}{3}| \leqslant r_n} \binom{n}{j}\binom{j}{\lfloor j/2 \rfloor} &\sim \sqrt{\frac{3}{n\pi}} \sum_{j\colon |j-\frac{2n}{3}| \leqslant r_n} \binom{n}{j} 2^j < \sqrt{\frac{3}{n\pi}} 3^n.\end{aligned}$$

Отметим, что такая оценка в $\frac{2}{\sqrt{3}} \leqslant 1{,}154$ хуже оценки (1).

3. Заключение

Для экстремальных функций из множеств $\mathbb{P}^{\sim}_{n,r_n,\varepsilon_n}$ или $\mathbb{P}^{\asymp}_{n,r_n,\varepsilon_n}$ можно сформулировать следующие задачи.

Для каждой k-мерной максимальной грани функции есть $n-k$ «соседних» нулевых вершин функции, т. е. находящихся на расстоянии 1. Соответственно при большом числе максимальных граней возникают вопросы об оценке числа и распределении по слоям куба «соседних» нулевых вершин функции, наличии нулевых вершины в центральных слоях куба и свойстве связности функции.

Для функции $f \in P_{n,G_n}$ и вершины $\widetilde{y} \in Y^{>\varepsilon_n}_{f,r_n} \subset S^n_{\lfloor 2n/3 \rfloor \pm r_n}$ получение верхних оценок числа максимальных граней, которые содержатся в множестве $\mathbb{G}^{>\varepsilon_n}_{f,r_n}$ и имеют различные подмножества сравнимых с вершиной $\widetilde{y}$ максимальных вершин максимальных граней таковы:

$\{g_{\widetilde{x},\widetilde{\alpha}} \in \mathbb{G}^{>\varepsilon_n}_{f,r_n} \mid \widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{y},\, \widetilde{\alpha} \in S^n_{\lfloor n/3\rfloor \pm r_n}\}$ — для множества всех вершин, сравнимых с вершиной $\widetilde{y}$;

$\{g_{\widetilde{x},\widetilde{\alpha}} \in \mathbb{G}^{>\varepsilon_n}_{f,r_n} \mid \widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{y},\, \widetilde{\alpha} \in \{\widetilde{\alpha}_1,\ldots,\widetilde{\alpha}_p\},\, \widetilde{\alpha}_p < \ldots < \widetilde{\alpha}_1 < \widetilde{y}\}$ — для последовательности сравнимых вершин с вершиной $\widetilde{y}$.

Отметим, что в некоторых задачах для подмножеств вершин хорошие оценки максимальных значений характеристик получаются с использованием вероятностных методов. Например, для задачи о максимальной мощности тени антицепи в B^n. *Антицепью* называется подмножество несравнимых вершин куба B^n. Антицепи однозначно соответствует множество максимальных вершин максимальных граней функции, для которых минимальной является вершина $\widetilde{0}$. *Тенью* подмножества вершин $X \subset B^n$ называется множество

$$T(X) = \{\widetilde{y} \in B^n \setminus X \mid \exists \widetilde{x} \in X,\, \widetilde{y} < \widetilde{x},\, \rho(\widetilde{x},\widetilde{y}) = 1\}.$$

Максимальное значение мощности тени антицепи в B^n обозначим T_n.

Наилучшая нижняя оценка для T_n была получена в [8], где показано, что существует антицепь, для которой тень содержит не менее $0{,}2 \cdot 2^n$ вершин. Для этого использовался вероятностный метод (см. [9]), при котором антицепь строится случайным выбором вершин в слоях куба $S^n_{\lfloor n/2\rfloor \pm r_n}$. В качестве нижней оценки используется нижняя оценка среднего значения мощности тени антицепи по множеству антицепей специального вида. Для построения антицепей определяется вероятностная мера на множестве вершин, которая задаётся функцией распределения специального вида с параметрами некоторой случайной величины. Максимизация нижней оценки получается численным выбором параметров.

В [10] для антицепи с использованием утверждений предельных теорем теории вероятностей доказано, что $T_n \leqslant 0{,}724 \cdot 2^n$ и граница не может быть асимптотически равна 2^n, т. е. получена нетривиальная оценка, которая отличается от асимптотики 2^n. Для доказательства того, что некоторое множество (тень или граница) велико, используется метод изменения вкладов вершин функции. Метод основан на трёх видах передачи вклада для каждой вершины множества из слоя куба сравнимым с ней вершинам.

4. Доказательства

Доказательство леммы 1. Соотношения (9) при $n \to \infty$ следуют из (3), так как

$$\binom{j}{\lfloor j/2\rfloor} \sim \frac{2 \cdot 2^j}{\sqrt{2\pi j}} e^{-(2\lfloor j/2\rfloor - j)^2/(2j)} \sim \frac{\sqrt{3} \cdot 2^j}{\sqrt{\pi n}},$$

$$\binom{n-i}{\lfloor (n-i)/2\rfloor} \sim \frac{2\cdot 2^{n-i}}{\sqrt{2\pi(n-i)}} e^{-(2\lfloor (n-i)/2\rfloor-(n-i))^2/(2(n-i))} \sim \frac{\sqrt{3}\cdot 2^{n-i}}{\sqrt{\pi n}},$$

где $j \sim \frac{2n}{3}$ и $(2\lfloor j/2\rfloor - j)^2/(2j) = o(1)$, если $\left|\frac{2}{3}n - j\right| \leqslant \frac{z}{3}\sqrt{2n}$, $n-i \sim \frac{2n}{3}$ и $(2\lfloor (n-i)/2\rfloor - (n-i))^2/(2(n-i)) = o(1)$, если $\left|\frac{n}{3} - i\right| \leqslant \frac{z}{3}\sqrt{2n}$ для $z = o(n^{1/6})$.

При изменении индекса суммирования j на i, где $j = n - i$, получим

$$\sum_{j\colon j<\frac{2n}{3}-\frac{z}{3}\sqrt{2n}} \binom{n}{j} 2^j = \sum_{i\colon i>\frac{n}{3}+\frac{z}{3}\sqrt{2n}} \binom{n}{i} 2^{n-i}, \tag{22}$$

$$\sum_{i\colon i<\frac{n}{3}-\frac{z}{3}\sqrt{2n}} \binom{n}{i} 2^{n-i} = \sum_{j\colon j>\frac{2n}{3}+\frac{z}{3}\sqrt{2n}} \binom{n}{j} 2^j. \tag{23}$$

Тогда

$$\sum_{j>\frac{2n}{3}+\frac{z}{3}\sqrt{2n}} \binom{n}{j} 2^j + \sum_{j<\frac{2n}{3}-\frac{z}{3}\sqrt{2n}} \binom{n}{j} 2^j = \sum_{|j-\frac{2n}{3}|>\frac{z}{3}\sqrt{2n}} \binom{n}{j} 2^j$$

$$= \sum_{i<\frac{n}{3}-\frac{z}{3}\sqrt{2n}} \binom{n}{i} 2^{n-i} + \sum_{i>\frac{n}{3}+\frac{z}{3}\sqrt{2n}} \binom{n}{i} 2^{n-i} = \sum_{|i-\frac{n}{3}|>\frac{z}{3}\sqrt{2n}} \binom{n}{i} 2^{n-i}. \tag{24}$$

Для индекса j при $a = 2$, индекса i при $a = \frac{1}{2}$ и $n \to \infty$ из (6) следует, что

$$\sum_{j>\frac{2n}{3}+\frac{z}{3}\sqrt{2n}} \binom{n}{j} 2^j \sim \frac{3^n}{z\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \sim \sum_{i>\frac{n}{3}+\frac{z}{3}\sqrt{2n}} \binom{n}{i} 2^{n-i}. \tag{25}$$

Тогда из (22)–(25) следует (10).

Соотношение (11) выполняется, так как

$$\frac{1}{z} e^{-z^2/2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\ln(n-\varphi_n)}} e^{\varphi_n} n^{-1} = o(n^{-1})$$

для $z \geqslant \sqrt{2\ln(n-\varphi_n)}$, если $\varphi_n = o(\ln\sqrt{\ln(n-\varphi_n)}) = o(\ln\ln(n-\varphi_n))$ или $\varphi_n = o(\ln\ln n)$.

Соотношение (12) следует из неравенства в [5, с. 281, п. 5.11.3]

$$\binom{n-s}{k} \Big/ \binom{n}{k} < \exp\Bigl(-\frac{sk}{n}\Bigr) \quad \text{при } n \geqslant k+2s \text{ и } n \to \infty.$$

Тогда для $j = O(n)$ имеем

$$\binom{j-p}{\lfloor j/2\rfloor} \Big/ \binom{j}{\lfloor j/2\rfloor} < \exp\Bigl(-\frac{p\lfloor j/2\rfloor}{j}\Bigr)$$

при $j \geqslant \lfloor j/2 \rfloor + 2p$ или $j \geqslant 4p$. Следовательно, если

$$\exp\Big(-\frac{p\lfloor j/2 \rfloor}{j}\Big) \leqslant \varepsilon_n \text{ или } -\frac{p\lfloor j/2 \rfloor}{j} \leqslant -p\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{j}\Big) = -\frac{p}{2} + \frac{p}{j} < \ln \varepsilon_n,$$

то $\binom{j-p}{\lfloor j/2 \rfloor} / \binom{j}{\lfloor j/2 \rfloor} < \varepsilon_n$ и достаточно выполнения оценки

$$p \geqslant 2 \ln \frac{1}{\varepsilon_n} > 2\Big(\ln \frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{p}{j}\Big).$$

Представим $\varepsilon_n = n^{-1/2} e^{-\varphi_n^2/2} = o(n^{-1/2})$, где $\varphi_n \to \infty$ и $\varphi_n = o(\ln n)$ при $n \to \infty$. Тогда $p \geqslant 2 \ln \frac{1}{\varepsilon_n} = \ln n + \varphi_n$ и

$$\binom{j-p}{\lfloor j/2 \rfloor} \Big/ \binom{j}{\lfloor j/2 \rfloor} = o(n^{-1/2}).$$

Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. (i) Для вершины $\widetilde{x} \in B_i^n$ любая грань $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_{f,\min}^{\widetilde{x}}$ содержится в грани $g_{\widetilde{x},\widetilde{1}}$, максимальные вершины $\widetilde{y}$ граней несравнимы и число граней не превосходит мощности среднего слоя грани $g_{\widetilde{x},\widetilde{1}}$. Тогда $\big|G_{f,\min}^{\widetilde{x}}\big| \leqslant \binom{n-i}{\lfloor (n-i)/2 \rfloor} < 2^{n-i}$ и

$$|\overline{G}_{f,r_n,X}| = \sum_{\frac{z}{3}\sqrt{2n} < |i - \frac{n}{3}|} \sum_{\widetilde{x} \in B_i^n} \big|G_{f,\min}^{\widetilde{x}}\big| \leqslant \sum_{\frac{z}{3}\sqrt{2n} < |i - \frac{n}{3}|} \binom{n}{n-i} \binom{n-i}{\lfloor (n-i)/2 \rfloor}.$$

Для вершины $\widetilde{y} \in B_j^n$ любая грань $g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_{f,\max}^{\widetilde{y}}$ содержится в грани $g_{\widetilde{0},\widetilde{y}}$, минимальные вершины $\widetilde{x}$ граней несравнимы и число граней не превосходит мощности среднего слоя грани $g_{\widetilde{0},\widetilde{y}}$. Тогда $\big|G_{f,\max}^{\widetilde{y}}\big| \leqslant \binom{j}{\lfloor j/2 \rfloor} < 2^j$ и

$$|\overline{G}_{f,r_n,Y}| = \sum_{\frac{z}{3}\sqrt{2n} < |j - \frac{2n}{3}|} \sum_{\widetilde{y} \in B_j^n} \big|G_{f,\max}^{\widetilde{y}}\big| \leqslant \sum_{\frac{z}{3}\sqrt{2n} < |j - \frac{2n}{3}|} \binom{n}{j} C_j^{\lfloor j/2 \rfloor}.$$

Для оценки сверху $\big|\overline{G}_{f,r_n,Y}\big|$ разделим диапазон изменения индекса j на две части: $r_n < \big|j - \frac{2n}{3}\big| \leqslant R_n$ и $\big|j - \frac{2n}{3}\big| > R_n$, где $r_n = \frac{z}{3}\sqrt{2n}$, $R_n = \frac{Z}{3}\sqrt{2n}$ и $z \leqslant Z$. Тогда

$$|\overline{G}_{f,r_n,Y}| = \sum_{\frac{z}{3}\sqrt{2n} < |j - \frac{2n}{3}| \leqslant \frac{Z}{3}\sqrt{2n}} \sum_{\widetilde{y} \in B_j^n} \big|G_{f,\max}^{\widetilde{y}}\big| + \sum_{\frac{Z}{3}\sqrt{2n} < |j - \frac{2n}{3}|} \sum_{\widetilde{y} \in B_j^n} \big|G_{f,\max}^{\widetilde{y}}\big|.$$

Положим $z = \sqrt{2(\ln n - o(\ln \ln n))} = o(n^{1/6})$ и $Z = \sqrt{2n^c} = o(n^{1/6})$ для $c < \frac{1}{3}$, т. е. $r_n < R_n = o(n^{2/3})$.

Если $\left|j-\frac{2}{3}n\right| \leqslant \frac{1}{3}z\sqrt{2n}$, где $z \to \infty$ и $z = o(n^{1/6})$ при $n \to \infty$, то из соотношений (9) и (10) леммы 1 следует, что

$$\binom{j}{\lfloor j/2 \rfloor} \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi n}} 2^j, \qquad \sum_{\frac{z}{3}\sqrt{2n}<|j-\frac{2n}{3}|} \binom{n}{j} 2^j \sim \frac{2\cdot 3^n}{z\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}.$$

Тогда выполняются оценки

$$\sum_{\frac{z}{3}\sqrt{2n}<|j-\frac{2n}{3}|\leqslant\frac{Z}{3}\sqrt{2n}} \sum_{\widetilde{y}\in B_j^n} \left|G_{f,\max}^{\widetilde{y}}\right| \leqslant \sum_{\frac{z}{3}\sqrt{2n}<|j-\frac{2n}{3}|\leqslant\frac{Z}{3}\sqrt{2n}} \binom{n}{j}\binom{j}{\lfloor j/2\rfloor}$$

$$\lesssim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi n}} \sum_{\frac{z}{3}\sqrt{2n}<|j-\frac{2n}{3}|} \binom{n}{j} 2^j \sim \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\pi n}} \frac{3^n}{z\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2},$$

$$\sum_{\frac{Z}{3}\sqrt{2n}<|j-\frac{2n}{3}|} \sum_{\widetilde{y}\in B_j^n} \left|G_{f,\max}^{\widetilde{y}}\right| \leqslant \sum_{\frac{Z}{3}\sqrt{2n}<|j-\frac{2n}{3}|} \binom{n}{j} 2^j$$

$$\sim \frac{2\cdot 3^n}{Z\sqrt{2\pi}} e^{-Z^2/2} \sim \frac{3^n}{\sqrt{n^c\pi}} \exp(-n^c).$$

Следовательно,

$$|\overline{G}_{f,r_n,Y}| \lesssim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi n}} \sum_{\frac{z}{3}\sqrt{2n}<|j-\frac{2n}{3}|} \binom{n}{j} 2^j + \frac{3^n}{\sqrt{n^c\pi}} \exp(-n^c)(1+o(1)).$$

Если $\sqrt{2(\ln n - o(\ln\ln n))} \leqslant z \leqslant \sqrt{2\ln n}$, то

$$\frac{3^n}{n\sqrt{\pi\ln n}} \leqslant \frac{2\cdot 3^n}{z\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \leqslant \frac{2\cdot 3^n}{\sqrt{2\pi}} o(n^{-1}),$$

так как $\frac{1}{n\sqrt{2\ln n}} \leqslant \frac{1}{z} e^{-z^2/2} \leqslant o(n^{-1})$ по лемме 1(iii). Тогда

$$\sum_{\frac{z}{3}\sqrt{2n}<|j-\frac{2n}{3}|} \binom{n}{j} 2^j \sim \frac{2\cdot 3^n}{z\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \geqslant \frac{3^n}{n\sqrt{\pi\ln n}},$$

$$\frac{3^n}{\sqrt{n^c\pi}} \exp(-n^c) = o\left(\frac{3^n}{n\sqrt{\pi\ln n}}\right),$$

$$|\overline{G}_{f,r_n,Y}| \lesssim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi n}} \sum_{\frac{z}{3}\sqrt{2n}<|j-\frac{2n}{3}|} \binom{n}{j} 2^j \leqslant O(n^{-1/2}) \sum_{|j-\frac{2n}{3}|>r_n} \binom{n}{j} 2^j.$$

Для оценки $|\overline{G}_{f,r_n,X}|$ аналогично, т. е. после изменения индекса суммирования i на $j = n - i$, выполняется

$$
\begin{aligned}
|\overline{G}_{f,r_n,X}| &\leqslant \sum_{\frac{z}{3}\sqrt{2n}<|i-\frac{n}{3}|\leqslant\frac{Z}{3}\sqrt{2n}} \binom{n}{i}\binom{n-i}{\lfloor (n-i)/2\rfloor} + \sum_{\frac{Z}{3}\sqrt{2n}<|i-\frac{n}{3}n|} \binom{n}{i} 2^{n-i} \\
&= \sum_{\frac{z}{3}\sqrt{2n}<|j-\frac{2n}{3}|\leqslant\frac{Z}{3}\sqrt{2n}} \binom{n}{j}\binom{j}{\lfloor j/2\rfloor} + \sum_{\frac{Z}{3}\sqrt{2n}<|j-\frac{2n}{3}|} \binom{n}{j} 2^{j} \\
&\leqslant O(n^{-1/2}) \sum_{|j-\frac{2n}{3}|>r_n} \binom{n}{j} 2^{j} = O(n^{-1/2}) \sum_{|i-\frac{n}{3}|>r_n} \binom{n}{i} 2^{n-i}.
\end{aligned}
$$

(ii) Из определения множества $\mathbb{G}_{f,r_n}$ следует, что $\mathbb{G}_{f,r_n} = G_f \setminus \overline{\mathbb{G}}_{f,r_n}$ и $\overline{\mathbb{G}}_{f,r_n} \subseteq \overline{G}_{f,r_n,X} \cup \overline{G}_{f,r_n,Y}$. Тогда для функции $f \in P_{n,G_n}$ имеем

$$
\begin{gathered}
|G_f| \geqslant |\mathbb{G}_{f,r_n}| \geqslant |G_f| - |\overline{\mathbb{G}}_{f,r_n}|, \\
|G_f| \sim G_n \gtrsim 3^n \frac{3\sqrt{3}}{2\pi n}, \quad |\overline{\mathbb{G}}_{f,r_n}| = 3^n o(n^{-1}) = o(G_n).
\end{gathered}
$$

Следовательно, $|\mathbb{G}_{f,r_n}| \sim G_n$ при $n \to \infty$.

При $R_n > r_n$ выполняется $\mathbb{G}_{f,R_n} \supseteq \mathbb{G}_{f,r_n}$. Тогда

$$
G_n \geqslant |\mathbb{G}_{f,R_n}| \geqslant |\mathbb{G}_{f,r_n}|, \quad |\mathbb{G}_{f,R_n}| \sim |\mathbb{G}_{f,r_n}| \sim G_n.
$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Обозначим для функции f и множества индексов $J = \bigl\{ j \mid r_n \geqslant \bigl| j - \frac{2n}{3} \bigr| \bigr\}$ подмножества индексов

$$
\begin{gathered}
J_1 = \bigl\{ j \in J \mid \bigl| Y_f \cap B_j^n \bigr| \leqslant \varepsilon_n \bigl| B_j^n \bigr| \bigr\}, \\
J_2 = J \setminus J_1 = \bigl\{ j \in J \mid \bigl| Y_f \cap B_j^n \bigr| > \varepsilon_n \bigl| B_j^n \bigr| \bigr\}
\end{gathered}
$$

и подмножества максимальных вершин максимальных граней

$$
\begin{gathered}
\mathbb{Y}_1 = \bigl\{ \widetilde{y} \in Y_{f,r_n,j}^{\leqslant\varepsilon_n} \mid j \in J_1,\ \bigl| Y_f \cap B_j^n \bigr| \leqslant \varepsilon_n \bigl| B_j^n \bigr| \bigr\}, \\
\mathbb{Y}_2 = \left\{ \widetilde{y} \in Y_{f,r_n,j}^{\leqslant\varepsilon_n} \mid j \in J_2,\ \bigl| G_{f,\max}^{\widetilde{y}} \bigr| \leqslant \varepsilon_n \binom{j}{\lfloor j/2 \rfloor} \right\}.
\end{gathered}
$$

Тогда для числа максимальных граней с максимальными вершинами из множеств $\mathbb{Y}_1$ и $\mathbb{Y}_2 \setminus \mathbb{Y}_1$ имеем

$$\sum_{\widetilde{y}\in\mathbb{Y}_1} \left|G^{\widetilde{y}}_{f,\max}\right| \leqslant \sum_{j\in J_1} \varepsilon_n \binom{n}{j}\binom{j}{\lfloor j/2\rfloor},$$

$$\sum_{\widetilde{y}\in\mathbb{Y}_2\setminus\mathbb{Y}_1} \left|G^{\widetilde{y}}_{f,\max}\right| \leqslant \sum_{j\in J_2} \binom{n}{j}\varepsilon_n\binom{j}{\lfloor j/2\rfloor}.$$

Так как $J = J_1 \cup J_2$, $J_1 \cap J_2 = \varnothing$ и $\binom{j}{\lfloor j/2\rfloor} \sim \sqrt{\frac{3}{n\pi}}2^j$ при $j \in J$ по лемме 1(i), то

$$\begin{aligned}\left|\left\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f \mid \widetilde{y} \in Y^{\leqslant\varepsilon_n}_{f,r_n}\right\}\right| &\leqslant \sum_{\widetilde{y}\in\mathbb{Y}_1} |G^{\widetilde{y}}_{f,\max}| + \sum_{\widetilde{y}\in\mathbb{Y}_2\setminus\mathbb{Y}_1} |G^{\widetilde{y}}_{f,\max}| \\ &\leqslant \varepsilon_n \sum_{j\in J_1}\binom{n}{i}\binom{j}{\lfloor j/2\rfloor} + \varepsilon_n \sum_{j\in J_2}\binom{n}{j}\binom{j}{\lfloor j/2\rfloor} \\ &= \varepsilon_n \sum_{j\in J}\binom{n}{j}\binom{j}{\lfloor j/2\rfloor} \sim \varepsilon_n \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi n}} \sum_{r_n \geqslant |j-\frac{2n}{3}|}\binom{n}{j}2^j \lesssim \varepsilon_n \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi n}}3^n.\end{aligned}$$

Обозначим для функции f и множества индексов $I = \left\{i \mid r_n \geqslant \left|i - \frac{n}{3}\right|\right\}$ подмножества индексов

$$I_1 = \left\{i \in I \mid \left|X_f \cap B^n_i\right| \leqslant \varepsilon_n\left|B^n_i\right|\right\},$$

$$I_2 = \left\{i \in I \setminus I_1 \mid \left|X_f \cap B^n_i\right| > \varepsilon_n\left|B^n_i\right|\right\}$$

и подмножества минимальных вершин максимальных граней

$$\mathbb{X}_1 = \left\{\widetilde{x} \in X^{\leqslant\varepsilon_n}_{f,r_n,i} \mid i \in I_1,\ \left|X_f \cap B^n_i\right| \leqslant \varepsilon_n\left|B^n_i\right|\right\},$$

$$\mathbb{X}_2 = \left\{\widetilde{x} \in X^{\leqslant\varepsilon_n}_{f,r_n,i} \mid i \in I_2,\ \left|G^{\widetilde{x}}_{f,\min}\right| \leqslant \varepsilon_n\binom{n-i}{\lfloor (n-i)/2\rfloor}\right\}.$$

Тогда для числа максимальных граней с максимальными вершинами из множеств $\mathbb{X}_1$ и $\mathbb{X}_2 \setminus \mathbb{X}_1$ имеем

$$\sum_{\widetilde{x}\in\mathbb{X}_1} \left|G^{\widetilde{x}}_{f,\max}\right| \leqslant \sum_{i\in I_1} \varepsilon_n \binom{n}{i}\binom{n-i}{\lfloor (n-i)/2\rfloor},$$

$$\sum_{\widetilde{x}\in\mathbb{X}_2\setminus\mathbb{X}_1} \left|G^{\widetilde{x}}_{f,\max}\right| \leqslant \sum_{i\in I_2} \binom{n}{i}\varepsilon_n\binom{n-i}{\lfloor (n-i)/2\rfloor}.$$

Так как $I = I_1 \cup I_2$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$ и $\binom{n-i}{\lfloor (n-i)/2 \rfloor} \sim \sqrt{\frac{3}{\pi n}} 2^{n-i}$ при $i \in I$ по лемме 1(i), то

$$\begin{aligned}\bigl|\bigl\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f \mid \widetilde{x} \in X_{f,r_n}^{\leqslant \varepsilon_n}\bigr\}\bigr| &\leqslant \sum_{\widetilde{x} \in \mathbb{X}_1} \bigl|G_{f,\max}^{\widetilde{x}}\bigr| + \sum_{\widetilde{x} \in \mathbb{X}_2 \setminus \mathbb{X}_1} \bigl|G_{f,\max}^{\widetilde{x}}\bigr| \\ &\leqslant \varepsilon_n \sum_{i \in I_1} \binom{n}{i} \binom{n-i}{\lfloor (n-i)/2 \rfloor} + \varepsilon_n \sum_{i \in I_2} i \binom{n}{i} \binom{n-i}{\lfloor (n-i)/2 \rfloor} \\ = \varepsilon_n \sum_{i \in I} \binom{n}{i} \binom{n-i}{\lfloor (n-i)/2 \rfloor} &\sim \varepsilon_n \sqrt{\frac{3}{\pi n}} \sum_{|i - \frac{n}{3}| \leqslant r_n} \binom{n}{i} 2^{n-i} \lesssim \varepsilon_n \sqrt{\frac{3}{\pi n}} 3^n.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbb{G}_{f,r_n}^{\leqslant \varepsilon_n} &= \bigl\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f \mid \widetilde{x} \in X_{f,r_n}^{\leqslant \varepsilon} \text{ или} \widetilde{y} \in Y_{f,r_n}^{\leqslant \varepsilon}\bigr\} \\ &\subseteq \bigl\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f \mid \widetilde{x} \in X_{f,r_n}^{\leqslant \varepsilon_n}\bigr\} \cup \bigl\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f \mid \widetilde{y} \in Y_{f,r_n}^{\leqslant \varepsilon_n}\bigr\}, \\ \bigl|\mathbb{G}_{f,r_n}^{\leqslant \varepsilon_n}\bigr| &\leqslant \bigl|\bigl\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f \mid \widetilde{x} \in X_{f,r_n}^{\leqslant \varepsilon_n}\bigr\}\bigr| + \bigl|\bigl\{g_{\widetilde{x},\widetilde{y}} \in G_f \mid \widetilde{y} \in Y_{f,r_n}^{\leqslant \varepsilon_n}\bigr\}\bigr|,\end{aligned}$$

тогда $\bigl|\mathbb{G}_{f,r_n}^{\leqslant \varepsilon_n}\bigr| \lesssim 2\varepsilon_n \sqrt{\frac{3}{\pi n}}\, 3^n$. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Используем оценки (1), (17) из леммы 2(ii) и (19) теоремы 1:

$$G_n \gtrsim \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \frac{1}{n} 3^n, \quad \bigl|\mathbb{G}_{f,r_n}\bigr| \sim G_n, \quad \bigl|\mathbb{G}_{f,r_n}^{\leqslant \varepsilon_n}\bigr| \lesssim 2\varepsilon_n \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi n}} 3^n,$$

где $0 < \varepsilon_n < 1$ при $n \to \infty$.

Если $\varepsilon_n = o(n^{-1/2})$, то выполняется (20):

$$\bigl|\mathbb{G}_{f,r_n}^{> \varepsilon_n}\bigr| = \bigl|\mathbb{G}_{f,r_n}\bigr| - \bigl|\mathbb{G}_{f,r_n}^{\leqslant \varepsilon_n}\bigr| \sim G_n - \bigl|\mathbb{G}_{f,r_n}^{\leqslant \varepsilon_n}\bigr| \sim G_n,$$

так как $\bigl|\mathbb{G}_{f,r_n}^{\leqslant \varepsilon_n}\bigr| \lesssim 2o(n^{-1/2}) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi n}} 3^n = o(n^{-1}) 3^n$.

Если $\varepsilon_n \sim c\, n^{-1/2}$ и $0 < c < \frac{3}{4\sqrt{\pi}}$, то

$$\bigl|\mathbb{G}_{f,r_n}^{\leqslant \varepsilon_n}\bigr| \lesssim 2cn^{-1/2} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\pi n}} 3^n = c \frac{2\sqrt{3}}{n\sqrt{\pi}} 3^n = (1-\delta) \frac{3\sqrt{3}}{2\pi n} 3^n,$$

где $\delta = 1 - c\frac{4\sqrt{\pi}}{3} > 0$ для $c < \frac{3}{4\sqrt{\pi}}$. Тогда выполняется (21):

$$\bigl|\mathbb{G}_{f,r_n}^{> \varepsilon_n}\bigr| = \bigl|\mathbb{G}_{f,r_n}\bigr| - \bigl|\mathbb{G}_{f,r_n}^{\leqslant \varepsilon_n}\bigr| \gtrsim G_n - (1-\delta) \frac{3\sqrt{3}}{2\pi n} 3^n \gtrsim \delta G_n = O(G_n).$$

Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильев Ю. Л., Глаголев В. В.** Метрические свойства дизъюнктивных нормальных форм // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1. М.: Наука, 1974. С. 99–148.
2. **Сапоженко А. А., Чухров И. П.** Минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм // Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика. 1987. Т. 25. С. 68–116.
3. **Викулин А. П.** Оценка числа конъюнкций в сокращённой д. н. ф. // Пробл. кибернетики. 1974. № 29. С. 151–166.
4. **Chandra A. K., Markovsky G.** On the number of prime implicants // Discrete Math. 1978. Vol. 24. P. 7–11.
5. **Чухров И. П.** Связные булевы функции с локально экстремальным числом простых импликант // Дискрет. анализ и исследование операций. 2021. Т. 28, № 1. С. 68–94.
6. **Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.** Задачи и упражнения по дискретной математике. М.: Физматлит, 2005. 416 с.
7. **Боровков А. А.** Теория вероятностей. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 472 с.
8. **Чухров И. П.** О максимальной мощности тени антицепи // Дискрет. математика. 1989. Т. 1, № 4. С. 78–85.
9. **Алон Н., Спенсер Дж.** Вероятностный метод. М.: Бином. Лаборатория знаний, 2007. 320 с.
10. **Косточка А. В.** Верхняя оценка мощности границы антицепи в n-мерном кубе // Дискрет. математика. 1989. Т. 1, № 3. С. 53–61.

Чухров Игорь Петрович

Статья поступила
8 сентября 2021 г.
После доработки —
8 сентября 2021 г.
Принята к публикации
17 ноября 2021 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2022. Vol. 29, No. 1. P. 74–93

UDC 519.71 DOI 10.33048/daio.2022.29.725

PROPERTIES OF BOOLEAN FUNCTIONS WITH THE EXTREMAL NUMBER OF PRIME IMPLICANTS

I. P. Chukhrov

Institute of Computer Aided Design RAS,
19/18, Vtoraya Brestskaya Street, 123056 Moscow, Russia
E-mail: chip@icad.org.ru

Abstract. The known lower bound for the maximum number of prime implicants (of maximal faces) of a Boolean function differs from the upper bound by $O(\sqrt{n})$ times and is asymptotically attained on a symmetric belt function. To study the properties of extremal functions, subsets of functions are defined that have the minimum and maximum vertices of the maximum faces in the belts $n/3 \pm r_n$ and $2n/3 \pm r_n$, respectively. In this case, the fraction of the number of vertices in each layer is not less than ε_n and for any such vertex the fraction of the number of maximum faces of the maximum possible number is not less than ε_n. Conditions are obtained for ε_n and r_n under which a Boolean function from such a subset has the number of prime implicants equal to the maximum value asymptotically or in order of growth of the maximum value. Bibliogr. 10.

Keywords: Boolean function, prime implicant, maximal face, number of prime implicants, asymptotics, order of growth.

REFERENCES

1. **Yu. L. Vasil'ev** and **V. V. Glagolev,** Metric properties of disjunctive normal forms, *Discrete Mathematics and Mathematical Problems of Cybernetics,* (Nauka, Moscow, 1974), pp. 99–148 [Russian].
2. **A. A. Sapozhenko** and **I. P. Chukhrov,** Boolean function minimization in the class of disjunctive normal forms, *Itogi Nauki Tekh., Ser. Teor. Veroyatnost., Mat. Statist., Teor. Kibern.* **25**, 68–116 (1987) [Russian] [*J. Sov. Math.* **46** (4), 2021–2052 (1989)].
3. **A. P. Vikulin,** Estimation of the number of conjunctions in the complete DNF, *Problems of Cybernetics,* No. 29 (Nauka, Moscow, 1974), pp. 151–166 [Russian].

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **16** (1) (2022).

4. **A. K. Chandra** and **G. Markovsky,** On the number of prime implicants, *Discrete Math.* **24**, 7–11 (1978).
5. **I. P. Chukhrov,** Connected boolean functions with a locally extremal number of prime implicants, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **28** (1), 68–94 (2021) [Russian] *J. Appl. Ind. Math.* **15** (1), 17–38 (2021).
6. **G. P. Gavrilov** and **A. A. Sapozhenko,** *Tasks and Exercises in Discrete Mathematics,* (Fizmatlit, Moscow, 2005) [Russian].
7. **A. A. Borovkov,** *Probability Theory,* (Editorial URSS, Moscow, 1999) [Russian].
8. **I. P. Chukhrov,** About the maximum cardinality of the shadow of an antichain, *Diskretn. Mat.* **1** (4), 78–85 (1989) [Russian].
9. **N. Alon** and **J. H. Spencer,** *The Probabilistic Method,* (Wiley, Hoboken, NJ, 2000; BINOM. Lab. Znanii, Moscow, 2007 [Russian]).
10. **A. V. Kostochka,** An upper bound of the cardinality of antichain boundary in the n-cube, *Diskretn. Mat.* **1** (4), 53–61 (1989) [Russian] [*Discrete Math. Appl.,* **1** (3), 279–288 (1991)].

Igor P. Chukhrov

Received September 8, 2021
Revised September 8, 2021
Accepted November 17, 2021