ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2022. Т. 29, № 4. С. 124–135

УДК 519.7 DOI 10.33048/daio.2022.29.731

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ КОНЕЧНО ПОРОЖДАЮЩИХ СИСТЕМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ p-ИЧНЫХ ДРОБЕЙ

Е. Е. Трифонова

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша,
Миусская пл., 4, 125047 Москва, Россия
E-mail: `etrifonova@keldysh.ru`

Аннотация. Работа посвящена изучению выразимости рациональных вероятностей при преобразовании булевыми функциями случайных величин с распределениями из некоторого начального множества. Исследуется конечная порождённость вероятностей, выражаемых p-ичными дробями для простых p, не меньших 5. Доказаны некоторые свойства, которыми должны обладать булевы функции из конечно порождающего множества. Библиогр. 11.

Ключевые слова: бернуллиевская случайная величина, конечная порождённость, преобразование случайных величин.

Введение

Задача исследования различных преобразователей вероятностей возникла достаточно давно и не потеряла своей актуальности в настоящее время [1]. Особенно часто исследуются преобразователи вероятностей, оперирующие бернуллиевскими случайными величинами. В качестве преобразующих операций над бернуллиевскими случайными величинами рассматриваются булевы функции. Распределение бернуллиевской случайной величины полностью определяется её вероятностью обращения в единицу, поэтому далее, говоря о бернуллиевских распределениях, будем отождествлять их с числами из отрезка $[0; 1]$.

Результаты исследований, проводившихся для преобразований бернуллиевских случайных величин с рациональными вероятностями, представлены в работах Р. Л. Схиртладзе, Ф. И. Салимова и Р. М. Колпакова. В работах Р. Л. Схиртладзе [2, 3] было показано, что преобразования с помощью конъюнкций и дизъюнкций ($\&$ и $\vee$) позволяют из единственного начального распределения $\frac{1}{2}$ породить всё множество двоично-рациональных чисел. Им же было доказано, что это будет верно и для троично-рациональных распределений для множества начальных распределений $\left\{\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right\}$. При этом для простого числа $p > 3$ доказано, что невозможно порождение всего множества p-ично-рациональных распределений с помощью системы функций $\{\&, \vee\}$ при использовании в качестве множества начальных распределений $\left\{\frac{1}{p}; \ldots; \frac{p-1}{p}\right\}$. В работе [2] была также высказана гипотеза, что для простых $p > 3$ не существует конечного множества рациональных бернуллиевских распределений, порождающего всё множество p-ично-рациональных распределений. Эта гипотеза до настоящего момента не подтверждена и не опровергнута.

Дальнейшие результаты в этой области были получены Ф. И. Салимовым [4–6]. Он показал, что множества p-ично-рациональных распределений являются конечно порождёнными при использовании в качестве системы преобразующих операций набора функций $\{x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3, 0, 1\}$, при этом в качестве множества начальных распределений можно взять $\left\{\frac{1}{p}; \ldots; \frac{p-1}{p}\right\}$.

В работах Р. М. Колпакова [7, 8] показано, что для множеств рациональных бернуллиевских распределений $\Gamma[p_1, \ldots, p_s]$, у которых в разложении знаменателя на простые множители могут встречаться числа $p_1, \ldots, p_s$, относительно преобразований системой $\{\&, \vee\}$ при $s \geqslant 2$ всегда существуют конечные множества начальных распределений, порождающие всю совокупность $\Gamma[p_1, \ldots, p_s]$. Более того, если среди $p_1, \ldots, p_s$ встречается 2 или 3, то в качестве множества начальных распределений можно взять все правильные дроби со знаменателем $p_1 \cdots p_s$. Также в [9] предложены усиления системы $\&, \vee$ в классе функций, реализуемых бесповторными контактными схемами, относительно которых множества распределений $\Gamma[5]$ и $\Gamma[7]$ оказываются конечно порождёнными. Наконец, в [10] предложена система монотонных функций, относительно которой множество $\Gamma[p]$ при любом простом p порождается множеством всех правильных дробей со знаменателем p.

Ранее автором было получено, что преобразования случайных величин с распределениями из конечного множества с помощью функции голосования не позволяют выразить все вероятности, записываемые пятеричными дробями [11]. В действительности этот результат можно распространить на все p-ичные дроби для произвольного простого $p \geqslant 5$. Данная работа продолжает исследование того, какими свойствами должны обладать системы булевых функций, чтобы можно было определить, позволяют ли они породить всё множество p-ичных дробей.

1. Основные определения

Объектом нашего изучения являются случайные величины с распределением Бернулли. Пусть x — такая случайная величина, принимающая значение 1 и 0 с вероятностью $\widehat{x}$ и $1-\widehat{x}$ соответственно. Тогда распределение этой случайной величины однозначно определяется значением $\widehat{x}$. Далее будем считать, что каждой случайной величине x, принимающей значения 0 и 1, сопоставлено число $\widehat{x} \in [0;1]$.

Будем рассматривать преобразования, осуществляемые в результате подстановки независимых в совокупности случайных величин со значениями 0 и 1 вместо переменных булевых функций. Если $f(x_1,\ldots,x_n)$ — некоторая булева функция, $f(x_1,\ldots,x_n)\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, то *вероятностная функция* $\widehat{f}(\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_n)\colon [0;1]^n \to [0;1]$, *индуцированная булевой функцией* $f(x_1,\ldots,x_n)$, определяется соотношением

$$\widehat{f}(\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_n) = \sum_{\substack{(x_1,\ldots,x_n):\\ f(x_1,\ldots,x_n)=1}} \prod_{i=1}^{n}(x_i\widehat{x}_i + (1-x_i)(1-\widehat{x}_i)).$$

Содержательно $\widehat{f}(\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_n)$ выражает вероятность того, что случайная величина $f(x_1,\ldots,x_n)$ принимает значение 1, если вероятности обращения в единицу величин $x_1,\ldots,x_n$ равны $\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_n$ соответственно.

Также введём следующие обозначения: $\omega_1(f)$ — число единиц в таблице истинности функции f, $\omega_0(f)$ — число нулей в таблице истинности функции f. Очевидно, что $\omega_1(f)+\omega_0(f) = 2^n$, где n — число переменных функции f.

Множество правильных дробей со знаменателем r обозначим через $A(r) = \left\{\frac{1}{r}, \frac{2}{r}\ldots, \frac{r-1}{r}\right\}, r \in \mathbb{N}$. Введём следующее обозначение для множества чисел, выразимых правильными p-ичными дробями, где p — простое число: $\Gamma[p] = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathbb{N}} A(p^\alpha)$. Будем обозначать через $H(p^k)$ всевозможные правильные несократимые дроби со знаменателем p^k. Очевидно, что $H(p^k) = A(p^k) \setminus A(p^{k-1})$.

Определение 1. Пусть $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_2$, $\widehat{f}(\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_n)$ — индуцированная f вероятностная функция, p — простое, $p \geqslant 5$. Тогда если $\widehat{x}_i \in H(p^{k_i})$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, то значение функции $\widehat{f}$ можно представить как $\widehat{f}(\widehat{x}_1,\ldots,\widehat{x}_n) = \frac{D}{p^m}$, $D \bmod p \neq 0$. При этом если $m = k_1 + \cdots + k_n$ для заданного p, любых $\widehat{x}_i \in H(p^{k_i})$, а также любых $k_i \in \mathbb{N}, i \in \{1,\ldots,n\}$, то $\widehat{f}$ будем называть *p-несократимой функцией.*

Заметим, что, по-видимому, p-несократимых функций среди вероятностных функций, индуцированных булевыми функциями, существенно зависящими от всех своих переменных, будет достаточно много. Примером класса булевых функций, которые индуцируют только p-несократимые функции для простого $p \geqslant 5$, может служить множество булевых функций, у которых число единиц в таблице истинности равно 3.

Пусть задано множество булевых функций F и множество правильных дробей G. Определим множество *выразимых вероятностей* $V_F(G)$ итерационно. Положим $V_F^1(G) = G$. Для $i \geqslant 1$ положим

$$V_F^{i+1}(G) = V_F^i(G) \cup \left\{\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n) \mid f \in F,\ \widehat{x}_j \in V_F^i(G)\right\}.$$

Тогда $V_F(G) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} V_F^i(G)$.

Определение 2. Будем говорить, что для простого $p \geqslant 5$ множество булевых функций F *конечно порождающее в* $\Gamma[p]$, если найдётся такое конечное множество $G \subset \Gamma[p]$, что $V_F(G) = \Gamma[p]$.

Очевидно, что если такое конечное множество G существует, то существует такое k, что $G \subset A(p^k)$. Таким образом, при проверке того, является ли множество булевых функций конечно порождающим в $\Gamma[p]$, достаточно проверить, найдётся ли такое k, что $V_F(A(p^k)) = \Gamma[p]$.

Заметим, что если есть система булевых функций F', содержащая одну или две константы из множества $\{0; 1\}$, то всегда можем построить такую систему булевых функций F, не содержащую константы, что $V_{F'}(G) \setminus \{0; 1\} = V_F(G)$. Такую систему F будем называть *эквивалентной.* Система F может быть построена по следующему правилу: для любой функции $f(x_1, \dots, x_n)$, входящей в F', добавим в F саму функцию, а также все функции, которые получаются при подстановке вместо переменных констант, содержащихся в F', при этом число заменяемых переменных будет изменяться от 1 до $n - 1$. Очевидно, что $V_{F'}(G) \setminus \{0; 1\} = V_F(G)$. Таким образом, без ограничения общности при изучении конечно порождающих возможностей систем булевых функций можно рассматривать системы булевых функций, не включающие константы 0 и 1.

В рамках данной работы будем изучать свойства, которыми должны обладать булевы функции, содержащиеся в множестве булевых функций F, чтобы оно было конечно порождающим в $\Gamma[p]$. При этом без ограничения общности будем рассматривать только булевы функции, существенно зависящие от одной и более переменной.

2. Основные результаты

Утверждение 1. *Пусть $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n)$ — вероятностная функция, индуцированная булевой функцией $f(x_1, \dots, x_n)$, содержащей ровно одну единицу в таблице истинности и существенно зависящей от всех своих переменных. Тогда для простого $p \geqslant 5$ минимальное значение $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_n)$ при $\widehat{x}_i \in H(p^{k_i})$ равно $\frac{1}{p^{k_1 + \dots + k_n}}$.*

Доказательство. Можем представить булеву функцию f в виде $x_1^{\sigma_1}\& \ldots \& x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma_i \in \{0,1\}$, $x_i^1 = x_i$, $x_i^0 = \bar{x}_i$. Запишем индуцированную функцию в виде $\delta_1 \cdot \cdots \cdot \delta_n$, где δ_i равно $\widehat{x}_i$ для литерала x_i, δ_i равно $1-\widehat{x}_i$ для литерала $\bar{x}_i$. Получаем

$$\min \widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = \min \prod_{i=1}^{n} \delta_i = \prod_{i=1}^{n} \min \delta_i.$$

Для каждого δ_i минимум будет равен $\frac{1}{p^{k_i}}$. Для $\delta_i = \widehat{x}_i$ он будет достигаться при $\widehat{x}_i = \frac{1}{p^{k_i}}$, для $\delta_i = 1-\widehat{x}_i$ — при $\widehat{x}_i = 1 - \frac{1}{p^{k_i}}$. Таким образом, $\min \widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} \min \delta_i = \frac{1}{p^{k_1+\cdots+k_n}}$. Утверждение 1 доказано.

Напомним, что *двойственной* для булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется функция $f^*(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$.

Следующее утверждение приведено, в частности, в работе Ф. И. Салимова [6].

Утверждение 2 (принцип двойственности)**.** *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ — двойственные функции. Для вероятностных функций, индуцированных f и f^*, справедливо соотношение*

$$\widehat{f^*}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = 1 - \widehat{f}(1-\widehat{x}_1, \ldots, 1-\widehat{x}_n).$$

Заметим, что если $\widehat{x} \in H(p^k)$, то очевидно, что $1 - \widehat{x} \in H(p^k)$.

Утверждение 3. *Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ — двойственные функции. Тогда для индуцированных ими функций $\widehat{f}$ и $\widehat{f^*}$ справедливо следующее: $\widehat{f^*}$ является p-несократимой функцией тогда и только тогда, когда $\widehat{f}$ является p-несократимой.*

Доказательство. Пусть $\widehat{f}$ — p-несократимая функция. Тогда для любого $\widehat{y}_i \in H(p^{k_i})$ выполняется $\widehat{f}(\widehat{y}_1, \ldots, \widehat{y}_n) = \frac{D}{p^{k_1+\cdots+k_n}}$, $D \bmod p \neq 0$, тем самым для $\widehat{x}_i = 1 - \widehat{y}_i$ имеем

$$\widehat{f^*}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = 1 - \widehat{f}(\widehat{y}_1, \ldots, \widehat{y}_n) = 1 - \frac{D}{p^{k_1+\cdots+k_n}} = \frac{p^{k_1+\cdots+k_n} - D}{p^{k_1+\cdots+k_n}}.$$

Очевидно, что $(p^{k_1+\cdots+k_n} - D) \bmod p \neq 0$, поскольку $D \bmod p \neq 0$. Следовательно, функция $\widehat{f^*}$ в этом случае p-несократима.

Заметим, что f является двойственной функцией к f^*. Тогда по только что доказанному если $\widehat{f^*}$ — p-несократимая функция, то функция $\widehat{f}$ также p-несократима. Утверждение 3 доказано.

Очевидно, что в силу определения выразимых вероятностей справедливо

Утверждение 4. *Для любого множества вероятностей G и системы булевых функций F имеет место равенство $V_F(G) = V_{F\cup\{x\}}(G)$.*

Заметим, что ввиду утверждения 4 добавление и удаление тождественной булевой функции к множеству других булевых функций не изменяет множество выразимых вероятностей.

Утверждение 5. *Для значений, которые может при $\widehat{x}_i \in H(p^{k_i})$ принимать вероятностная функция $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$, индуцированная булевой функцией $f(x_1, \ldots, x_n)$, существенно зависящей от всех своих переменных, выполнено*

$$\frac{\omega_1(f)}{p^{k_1+\cdots+k_n}} \leqslant \widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) \leqslant 1 - \frac{\omega_0(f)}{p^{k_1+\cdots+k_n}}.$$

Доказательство. Любую индуцированную функцию можно представить в виде $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = \sum\limits_{j=1}^{\omega_1(f)} \widehat{g}_j(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n)$, где каждая функция $\widehat{g}_j$ соответствует одной единице в таблице истинности булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$. Согласно утверждению 1 для любого j выполняется $\widehat{g}_j(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) \geqslant \frac{1}{p^{k_1+\cdots+k_n}}$, отсюда $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) \geqslant \frac{\omega_1(f)}{p^{k_1+\cdots+k_n}}$. Рассмотрим функцию $f^*(y_1, \ldots, y_n)$, двойственную к $f(x_1, \ldots, x_n)$. Справедливо равенство $\omega_0(f) = \omega_1(f^*)$. По только что доказанному имеем

$$\widehat{f}^*(\widehat{y}_1, \ldots, \widehat{y}_n) \geqslant \frac{\omega_1(f^*)}{p^{k_1+\cdots+k_n}} = \frac{\omega_0(f)}{p^{k_1+\cdots+k_n}}.$$

По принципу двойственности $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = 1 - \widehat{f}^*(\widehat{y}_1, \ldots, \widehat{y}_n)$, где $\widehat{y}_i = 1 - \widehat{x}_i$. Тогда $\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) \leqslant 1 - \frac{\omega_0(f)}{p^{k_1+\cdots+k_n}}$. Утверждение 5 доказано.

Заметим, что оценки значений, которые может принимать вероятностная индуцированная функция, можно усилить, однако в рамках данной работы достаточно вышеприведённой оценки.

Если F — какое-то множество булевых функций, то будем обозначать через $\widehat{F}$ множество, состоящее из вероятностных функций, индуцированных функциями из множества F.

Теорема 1. *Если в множестве булевых функций F содержатся только функции f, существенно зависящие от всех своих переменных, такие, что $\omega_1(f) \geqslant 2$, а индуцированные функции $\widehat{f}$ p-несократимы, то множество F не будет конечно порождающим в $\Gamma[p]$ при простом $p \geqslant 5$.*

Доказательство. Докажем, что для любого фиксированного k выполнено $\frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F(A(p^k))$. Для этого покажем индукцией по i, что $\frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^i(A(p^k))$ для любого фиксированного k.

Базис индукции: $i = 1$. Представим дроби, содержащиеся в $A(p^k)$, в виде несократимых дробей. Из определения множества выразимых вероятностей получаем, что $V_F^1(A(p^k)) = A(p^k)$. Очевидно, что $\frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^1(A(p^k))$. Кроме того, в $V_F^1(A(p^k))$ содержатся только правильные несократимые p-ичные дроби со знаменателем, не превышающим p^k.

Шаг индукции. Предположим, что для некоторого i выполнено $\frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^i(A(p^k))$ и в $V_F^i(A(p^k))$ содержатся только правильные несократимые p-ичные дроби. Тогда по определению p-несократимой функции для любых $\widehat{f} \in \widehat{F}$ и $\widehat{x}_i \in V_F^i(A(p^k))$, $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\widehat{f}(\widehat{x}_1, \ldots, \widehat{x}_n) = \frac{D}{p^{k_1+\cdots+k_n}},$$

где $\frac{D}{p^{k_1+\cdots+k_n}}$ — несократимая дробь. По определению множества выразимых вероятностей все такие дроби $\frac{D}{p^{k_1+\cdots+k_n}}$ включены в множество $V_F^{i+1}(A(p^k))$. При этом поскольку $\omega_1(f) \geqslant 2$, согласно утверждению 1 $\frac{D}{p^{k_1+\cdots+k_n}} \geqslant \frac{2}{p^{k_1+\cdots+k_n}}$. Следовательно, $\frac{1}{p^{k_1+\cdots+k_n}} \notin V_F^{i+1}(A(p^k))$, а в $V_F^{i+1}(A(p^k))$ содержатся только правильные несократимые дроби.

Таким образом, по индукции $\frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^i(A(p^k))$ для любого сколь угодно большого i и для любого фиксированного k. Это означает, что множество F не конечно порождающее в $\Gamma[p]$. Теорема 1 доказана.

Следствие 1. *Если в множестве булевых функций F содержатся только функции f, существенно зависящие от всех своих переменных, такие, что $\omega_0(f) \geqslant 2$, а $\widehat{f}$ — p-несократимая функция, то для простого $p \geqslant 5$ множество F не будет конечно порождающим.*

Доказательство. Рассмотрим множество F^*, состоящее из функций f^*, двойственных функциям f, содержащимся в множестве F. Очевидно, что $\omega_1(f^*) \geqslant 2$ для всех $f^* \in F^*$, и по утверждению 3 функции из множества F^* p-несократимы. Тогда для множества F^* справедлива теорема 1, т. е. F^* не будет конечно порождающим в $\Gamma[p]$. Тогда и F не будет конечно порождающим в $\Gamma[p]$. Следствие 1 доказано.

Теорема 2. *Пусть для простого $p \geqslant 5$ в множестве булевых функций F содержатся только функции, существенно зависящие от всех своих переменных, и индуцированные ими функции p-несократимы. Тогда если множество функций F конечно порождающее в $\Gamma[p]$, то в нём найдутся хотя бы две такие функции $f_1, f_2 \in F$, что*

(1) $\omega_1(f_1) = 1$;

(2) $\omega_0(f_2) = 1$;

(3) *либо f_1, либо f_2 существенно зависит от не менее чем двух переменных.*

Доказательство. Предположим, что наше утверждение неверно. Тогда множество F конечно порождающее в $\Gamma[p]$, но в нём нет требуемых функций. Возможны следующие варианты:

1) в F нет ни одной булевой функции с одной единицей в таблице истинности;

2) в F нет ни одной булевой функции с одним нулём в таблице истинности;

3) в F есть булева функция с одним нулём в таблице истинности и есть булева функция с одной единицей в таблице истинности, но среди них нет ни одной, которая зависит существенно от двух и более переменных.

В первом случае выполнено условие теоремы 1, что противоречит нашему предположению, а во втором — условие следствия 1, что также противоречит нашему предположению.

Рассмотрим третий случай подробнее. Подобных функций среди всех булевых функций всего две: тождественная функция x и отрицание $\bar{x}$. Из утверждения 3 следует, что добавление или удаление тождественной функции x никак не изменяет множество выразимых вероятностей. Таким образом, её можно не рассматривать. Тогда в качестве функции с одним нулём и одновременно функции с одной единицей может быть использовано только отрицание, т. е. $f_1 = f_2 = \bar{x}$.

Представим множество F следующим образом: $F = \{\bar{x}\} \cup F_1$, где в F_1 содержатся все функции из F, у которых более чем одна единица и более чем один нуль в таблице истинности.

По аналогии с доказательством теоремы 1 рассмотрим процесс формирования множества $V_F(A(p^k))$ в итерационной форме и покажем методом индукции по i, что дробь $\frac{1}{p^{k+1}}$ не будет принадлежать $V_F^i(A(p^k))$ ни для какого фиксированного k.

Базис индукции: $i = 1$. Запишем дроби, содержащиеся в $A(p^k)$, в виде несократимых дробей. Очевидно, что $\frac{1}{p^{k+1}}, \frac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}} = 1 - \frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^1(A(p^k)))$. Кроме того, в $V_F^1(A(p^k)))$ содержатся только правильные несократимые p-ичные дроби со знаменателем, не превышающим p^k.

Шаг индукции. Предположим, что для произвольного i выполнено $\frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^i(A(p^k))$, $\frac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}} \notin V_F^i(A(p^k))$ и в $V_F^i(A(p^k))$ содержатся только правильные несократимые p-ичные дроби. Покажем, что $\frac{1}{p^{k+1}}, \frac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}} \notin V_F^{i+1}(A(p^k))$. Рассмотрим, какие дроби войдут в $V_F^{i+1}(A(p^k))$. Во-первых, все дроби, которые содержались в $V_F^i(A(p^k))$. Во-вторых, туда войдут несократимые дроби вида $\frac{D}{p^{k_1+\cdots+k_n}}$, которые можем построить из дробей, содержащихся в $V_F^i(A(p^k))$, используя функции из $\widehat{F_1}$. При этом согласно утверждению 5 выполняется

$$\frac{2}{p^{k_1+\cdots+k_n}} \leqslant \frac{D}{p^{k_1+\cdots+k_n}} \leqslant 1 - \frac{2}{p^{k_1+\cdots+k_n}},$$

т. е. ни дробь $\frac{1}{p^{k+1}}$, ни дробь $\frac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}}$ нельзя получить с помощью функций из $\widehat{F_1}$. И наконец, значения дробей, которые добавляются в $V_F^{i+1}(A(p^k))$ с использованием функции $1-\widehat{x}$ представляют собой числа вида $1-b$, где $b \in V_F^i(A(p^k))$. Так что поскольку

$$\frac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}} = 1 - \frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^i(A(p^k)),$$

то $\frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^{i+1}(A(p^k))$. Далее,

$$\frac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}} = 1 - \frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^{i+1}(A(p^k)),$$

так как $\frac{1}{p^{k+1}} \notin V_F^i(A(p^k))$. Также очевидно, что при применении к дробям из $V_F^i(A(p^k))$ функций из множества $\widehat{F}$ могут быть получены только правильные несократимые дроби, а значит, и добавлены в $V_F^{i+1}(A(p^k))$.

Таким образом, по индукции $\frac{1}{p^{k+1}}, \frac{p^{k+1}-1}{p^{k+1}} \notin V_F^i(A(p^k))$ для сколь угодно большого i, а значит, и в третьем случае наша система не конечно порождающая в $\Gamma[p]$. Теорема 2 доказана.

Заключение

Доказанный в теореме 2 результат расширяет существовавшие на настоящий момент представления о том, какими свойствами должны обладать булевы функции, чтобы образовывать конечно порождающую систему в $\Gamma[p]$. Если индуцированные функции p-несократимы, то среди булевых функций конечно порождающей системы обязательно найдутся функции с одной единицей и с одним нулём, при этом они будут различными. В дальнейшем планируется продолжить изучение того, какими свойствами должна обладать система булевых функций, чтобы быть конечно порождающей в $\Gamma[p]$. Кроме того, представляет интерес ответ на вопрос, каким образом наличие в системе булевых функций, индуцирующих не p-несократимые вероятностные функции, связано с конечным порождением. Отметим, что универсальная функция $x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3$, применённая Ф. И. Салимовым в его работах, индуцирует вероятностную функцию, которая не является p-несократимой. Ответы на эти вопросы, возможно, смогут помочь приблизиться к решению задачи о том, какие системы булевых функций будут конечно порождающими в $\Gamma[p]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Яшунский А. Д.** Алгебры вероятностных распределений на конечных множествах // Тр. МИАН. 2018. Т. 301. С. 320–335.
2. **Схиртладзе Р. Л.** О синтезе p-схемы из контактов со случайными дискретными состояниями // Сообщ. АН Груз. ССР. 1961. Т. 26, № 2. С. 181–186.
3. **Схиртладзе Р. Л.** Моделирование случайных величин функциями алгебры логики: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Тбилиси, 1966.
4. **Салимов Ф. И.** К вопросу моделирования булевых случайных величин функциями алгебры логики // Вероятностные методы и кибернетика. Вып. 15. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1979. С. 68–89.
5. **Салимов Ф. И.** Об одной системе образующих для алгебр над случайными величинами // Изв. вузов. Математика. 1981. № 5. С. 78–82.
6. **Салимов Ф. И.** Об одном семействе алгебр распределений // Изв. вузов. Математика. 1988. № 7. С. 64–72.
7. **Колпаков Р. М.** О порождении некоторых классов рациональных чисел вероятностными π-сетями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1991. № 2. С. 27–30.
8. **Колпаков Р. М.** Об оценках сложности порождения рациональных чисел вероятностными контактными π-сетями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1992. № 6. С. 62–65.
9. **Колпаков Р. М.** О порождении рациональных чисел вероятностными контактными сетями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1992. № 5. С. 46–52.
10. **Колпаков Р. М.** О порождении рациональных чисел монотонными функциями // Теоретические и прикладные аспекты математических исследований. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. С. 13–17.
11. **Трифонова Е. Е.** О бесконечной порождённости пятеричных дробей в одном классе преобразователей вероятностей // Изв. вузов. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2021. № 1. С. 39–48.

Трифонова Екатерина Евгеньевна

Статья поступила
25 января 2022 г.
После доработки —
25 января 2022 г.
Принята к публикации
25 марта 2022 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2022. Vol. 29, No. 4. P. 124–135

UDC 519.7 DOI 10.33048/daio.2022.29.731

ON SOME PROPERTIES OF FINITELY GENERATING TRANSFORMER SETS FOR p-ARY FRACTIONS

E. E. Trifonova

Keldysh Institute of Applied Mathematics,
4 Miusskaya Square, 125047 Moscow, Russia
E-mail: `etrifonova@keldysh.ru`

Abstract. We study expressibility of rational probabilities under transformations of random variables with distributions from some initial set by Boolean functions. We investigate finite generation of probabilities expressed by p-ary fractions for prime p not less than 5. We prove some properties that Boolean functions from a finitely generating set should have. Bibliogr. 11.

Keywords: Bernoulli random variable, finite generation, random variable transformation.

REFERENCES

1. **A. D. Yashunsky,** Algebras of probability distributions on finite sets, *Tr. MIAN* **301**, 320–335 (2018) [Russian] [*Proc. Steklov Inst. Math.* **301**, 304–318 (2018)].
2. **R. L. Skhirtladze,** On synthesis of p-schemes using switches with random discrete states, *Soobshchen. Akad. Nauk Gruz. SSR* **26** (2), 181–186 (1961) [Russian].
3. **R. L. Skhirtladze,** Modeling of random variables by logic algebra functions, *Cand. Sci. Diss.* (Izd. Tbil. Univ., Tbilisi, 1966) [Russian].
4. **F. I. Salimov,** The question of simulation of Boolean random variables by means of logic algebra functions, in *Probabilistic Methods and Cybernetics,* No. 15 (Izd. Kazan. Univ., Kazan, 1979), pp. 68–89 [Russian].
5. **F. I. Salimov,** On a system of generators for algebras over random variables, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.,* No. 5, 78–82 (1981) [Russian] [*Sov. Math.* **25** (5), 92–97 (1981)].
6. **F. I. Salimov,** A family of distribution algebras, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.,* No. 7, 64–72 (1988) [Russian] [*Sov. Math.* **32** (7), 106–118 (1988)].

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **16** (4) (2022).

7. R. M. Kolpakov, On generation of some classes of rational numbers by probabilistic π-nets, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1. Mat. Mekh.,* No. 2, 27–30 (1991) [Russian] [*Mosc. Univ. Math. Bull.* **46** (2), 27–29 (1991)].

8. R. M. Kolpakov, On the bounds for the complexity of generation of rational numbers by stochastic contact π-networks, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1. Mat. Mekh.,* No. 6, 62–65 (1992) [Russian] [*Mosc. Univ. Math. Bull.* **47** (6), 34–36 (1992)].

9. R. M. Kolpakov, On the generation of rational numbers by probabilistic contact nets, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1. Mat. Mekh.,* No. 5, 46–52 (1992) [Russian] [*Mosc. Univ. Math. Bull* **47** (5), 41–46 (1992)].

10. R. M. Kolpakov, On the generation of rational numbers by monotone functions, in *Theoretical and Applied Aspects of Mathematical Research* (Izd. Mosk. Univ., Moscow, 1994), pp. 13–17 [Russian].

11. E. E. Trifonova, On infinite generativeness of quinary fractions in a class of probability transformers. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Povolzh. Reg., Fiz.-Mat. Nauki,* No. 1, 39–48 (2021) [Russian].

Ekaterina E. Trifonova

Received January 25, 2022
Revised January 25, 2022
Accepted March 25, 2022