ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2022. Т. 29, № 4. С. 5–14

УДК 519.175.3 DOI 10.33048/daio.2022.29.732

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПЕРЕЧИСЛЕНИИ ПОМЕЧЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО-ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ k-ЦИКЛИЧЕСКИХ ГРАФОВ

В. А. Воблый

Всероссийский институт научной и технической информации,
ул. Усиевича, 20, 125190 Москва, Россия
E-mail: vitvobl@yandex.ru

Аннотация. Получена асимптотика для числа помеченных связных последовательно-параллельных k-циклических n-вершинных графов при большом числе вершин и фиксированном числе k. Найдена вероятность того, что при равномерном вероятностном распределении случайный помеченный связный n-вершинный k-циклический граф при фиксированном k и $n \to \infty$ является последовательно-параллельным графом. Кроме того, определена вероятность того, что случайный помеченный связный последовательно-параллельный n-вершинный k-циклический граф при фиксированном k и $n \to \infty$ является кактусом. Библиогр. 16.

Ключевые слова: перечисление, помеченный граф, блок, последовательно-параллельный граф, k-циклический граф, асимптотика, случайный граф.

Определение 1. *Цикломатическим числом* (*циклическим рангом*) связного графа называется увеличенная на единицу разность между числом рёбер графа и числом его вершин [1, с. 55], *k-циклический граф* — это граф с цикломатическим числом, равным k.

Определение 2. Для связного графа *точкой сочленения* называется его вершина, после удаления которой граф становится несвязным. *Блок* — связный граф без точек сочленения, а также максимальный связный нетривиальный подграф, не имеющий точек сочленения [1, с. 41].

Определение 3. *Последовательно-параллельным* графом называется граф, не содержащий подразбиения полного графа K_4 [2].

Определение 4. Класс графов называется *блочно-устойчивым*, если граф принадлежит этому классу тогда и только тогда, когда каждый блок графа принадлежит этому классу [3].

Последовательно-параллельные графы используются при построении надёжных коммуникационных сетей [4]. Многие задачи алгоритмической теории графов, являющиеся в общем случае NP-полными задачами, могут быть решены алгоритмами с полиномиальными временем для последовательно-параллельных графов [5].

В [2] найдена асимптотика для чисел помеченных связных и 2-связных последовательно-параллельных графов с большим количеством вершин. В [6, 7] перечислены асимптотически помеченные последовательно-параллельные трициклические и тетрациклические связные графы с заданным числом вершин соответственно.

В статье получена асимптотика для числа помеченных связных последовательно-параллельных k-циклических графов с большим числом вершин при фиксированном k. Найдена вероятность того, что при равномерном вероятностном распределении случайный помеченный связный n-вершинный k-циклический граф при фиксированном k и $n \to \infty$ является последовательно-параллельным графом. Кроме того, определена вероятность того, что при равномерном вероятностном распределении случайный помеченный связный последовательно-параллельный n-вершинный k-циклический граф при фиксированном k и $n \to \infty$ является кактусом.

Лемма 1. *Если $U(a,b,z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Трикоми, то при фиксированных числах a и l, где $l \geqslant 0$ — целое число, и $b \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$U(a,b+l,b) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{a/2}\Gamma(\frac{a+1}{2})}.$$

Доказательство. Для $U(a,b,z)$ при фиксированном числе a и $b \to \infty$ известна асимптотическая формула [8, с. 330, 13.8.7].

$$U(a,b,b) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{a/2}\Gamma(\frac{a+1}{2})}.$$

Будем следовать доказательству леммы 2 в [9]. В силу рекуррентного соотношения из [8, с. 325, 13.3.10] имеем

$$U(a,b+1,b) = \frac{b-a}{b}U(a,b,b) + \frac{1}{b}U(a-1,b,b),$$

Следовательно,

$$U(a,b+1,b) \sim \left(1-\frac{a}{b}\right)\frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{a/2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)} + \frac{1}{b}\frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{(a-1)/2}\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}$$
$$\sim \frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{a/2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}\left(1+\frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\sqrt{b}\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}\right) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{a/2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}.$$

Тем самым лемма верна при $l = 1$. Используем индукцию по l. Допустим, что лемма верна для $U(a, b+l, b)$, $l > 1$, и докажем, что она верна для $U(a, b+l+1, b)$.

Опять с помощью рекуррентного соотношения и асимптотики для $U(a, b, b)$ найдём

$$U(a, b+l+1, b) = \frac{b+l-a}{b} U(a, b+l, b) + \frac{1}{b} U(a-1, b+l, b)$$
$$\sim \frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{a/2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}\left(1 + \frac{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\sqrt{b}\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}\right) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{(2b)^{a/2}\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}.$$

Лемма 1 доказана.

Теорема 1. *Для числа $SP(n, k)$ помеченных связных последовательно-параллельных k-циклических графов с n вершинами и фиксированным числом $k \geqslant 1$ при $n \to \infty$ верна асимптотическая формула*

$$SP(n, k) \sim c_k n^{n+3k/2-2}, \tag{1}$$

$$c_k = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3k/2}} \sum_{m=1}^{k} \frac{2^m}{\Gamma\left(\frac{3k-2m+1}{2}\right)} \sum_{\pi_m(k)} \frac{1}{m_1! \ldots m_k!} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{(3i-3)!}{(i-1)!(2i-1)!2^i}\right)^{m_i},$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi_m(k)$ числа k, т. е. по всем неотрицательным решениям $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ уравнения $m_1 + 2m_2 + \cdots + km_k = k$, $m_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, k$, таким, что $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = m$.

Доказательство. Для числа помеченных связных k-циклических графов с n-вершинами $S(n, k)$ в [9] получена формула

$$S(n, k) = \frac{(n-1)!}{nk!} [z^{-1}] e^{nz} Y_k(n1!\overline{B}_1'(z), n2!\overline{B}_2'(z), \ldots, nk!\overline{B}_k'(z)) z^{-n}, \tag{2}$$

где $[z^{-1}]$ — оператор формального вычета [10, с. 25], $\overline{B}_k(z)$ — экспоненциальная производящая функция для числа помеченных k-циклических блоков, а $Y_k(x_1, \ldots, x_k)$ — многочлены разбиений (многочлены Белла). Для этих многочленов известно выражение [11, с. 173]

$$Y_k(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\pi(k)} \frac{k!}{m_1! \ldots m_k!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{m_1} \ldots \left(\frac{x_k}{k!}\right)^{m_k},$$

где суммирование проводится по всем разбиениям $\pi(k)$ числа k, т. е. по всем неотрицательным решениям $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ уравнения $m_1 + 2m_2 + \cdots + km_k = k$, $m_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, k$.

Отметим, что формула (2) верна не только для всего класса связных графов, но и для блочно-устойчивого его подкласса [12]. Известно, что класс последовательно-параллельных графов блочно-устойчив [3], поэтому для числа $SP(n,k)$ помеченных связных последовательно-параллельных k-циклических графов с n вершинами получим

$$SP(n,k) = \frac{(n-1)!}{nk!}[z^{-1}]e^{nz} \times \sum_{\pi(k)} \frac{k!}{m_1!\dots m_k!}\left(\frac{n1!B_1'(z)}{1!}\right)^{m_1}\dots\left(\frac{nk!B_k'(z)}{k!}\right)^{m_k} z^{-n}$$
$$= \frac{(n-1)!}{nk!}[z^{-1}]e^{nz}\sum_{m=1}^{k} n^m \sum_{\pi_m(k)} \frac{k!}{m_1!\dots m_k!}(B_1'(z))^{m_1}\dots(B_k'(z))^{m_k} z^{-n},$$

где $\pi_m(k)$: $m_1+2m_2+\dots+km_k = k$, $m_1+m_2+\dots+m_k = m$, $m_i \geqslant 0$, $i=1,\dots,k$, а $B_k(z)$ — экспоненциальная производящая функция для числа помеченных последовательно-параллельных k-циклических блоков.

Пусть $u(n,n+k)$ — число помеченных блоков с n вершинами и $n+k$ рёбрами, $U_k(z)$ — экспоненциальная производящая функция,

$$U_k(z) = \sum_{n=3}^{\infty} u(n,n+k)\frac{z^n}{n!}.$$

Райт с помощью предложенного им метода редукции [13, 14] доказал, что $U_k(z)$ при фиксированном $k \geqslant 1$ является конечной суммой целых степеней $1-z$:

$$U_k(z) = \sum_{t=-2}^{3k} \frac{u_{k,t}}{(1-z)^t}, \quad u_{k,3k} = \overline{b}_k.$$

Так как цикломатическое число графа с n вершинами и $n+k$ рёбрами равно $k+1$, при $k \geqslant 2$ имеем

$$\overline{B}_k(z) = U_{k-1}(z) = \frac{\overline{b}_{k-1}}{(1-z)^{3k-3}} + \sum_{t=-2}^{3k-4}\frac{u_{k,t}}{(1-z)^t}.$$

Множество последовательно-параллельных блоков является подмножеством множества всех блоков. В методе редукции Райта, выбирая из перечня базисных графов-блоков последовательно-параллельные блоки, для $B_k(z)$ при $k \geqslant 2$ получим также разложение в виде конечной суммы по степеням $1-z$:

$$B_k(z) = \frac{b_k}{(1-z)^{3k-3}} + \sum_{t=-2}^{3k-4}\frac{d_{k,t}}{(1-z)^t}.$$

В [15] при $k \geqslant 1$ и $z \to 1$ найдена асимптотика

$$B_k'(z) \sim \frac{(3k-3)!}{(k-1)!(2k-1)!2^k(1-z)^{3k-2}}.$$

Очевидно, что последовательно-параллельный унициклический блок — простой цикл, поэтому $B_1'(z) = \frac{z^2}{2(1-z)}$. Следовательно, при $k \geqslant 1$ имеем

$$B_k'(z) = \frac{(3k-3)!}{(k-1)!(2k-1)!2^k(1-z)^{3k-2}} + \sum_{t=-2}^{3k-4} \frac{td_{k,t}}{(1-z)^{t+1}}.$$

Обозначим

$$F_{k,m}(z) = e^{nz} \sum_{\pi_m(k)} \frac{k!}{m_1! \dots m_k!} (B_1'(z))^{m_1} \dots (B_k'(z))^{m_k},$$

$$\widetilde{b}_k = \frac{(3k-3)!}{(k-1)!(2k-1)!2^k}, \quad a_k = -2d_{k,-2}.$$

Тогда с помощью мультиномиальной формулы получим

$$F_{k,m}(z) = e^{nz} \sum_{\pi_m(k)} \frac{k!}{m_1! \dots m_k!} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\widetilde{b}_i}{(1-z)^{3i-2}} + \dots + a_i(1-z) \right)^{m_i}$$

$$= e^{nz} \sum_{\pi_m(k)} \frac{k!}{m_1! \dots m_k!} \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{\widetilde{b}_i^{m_i}}{(1-z)^{(3i-2)m_i}} + \dots + a_i^{m_i}(1-z)^{m_i} \right)$$

$$= \sum_{\pi_m(k)} \frac{k!}{m_1! \dots m_k!} \left(\frac{e^{nz}}{(1-z)^{3k-2m}} \prod_{i=1}^{k} \widetilde{b}_i^{m_i} + \dots + e^{nz}(1-z)^m \prod_{i=1}^{k} a_i^{m_i} \right).$$

Обозначим

$$f_{k,m} = \sum_{\pi_m(k)} \frac{k!}{m_1! \dots m_k!} \prod_{i=1}^{k} \widetilde{b}_i^{m_i}, \quad h_{k,m} = \sum_{\pi_m(k)} \frac{k!}{m_1! \dots m_k!} \prod_{i=1}^{k} a_i^{m_i}.$$

Для вырожденной гипергеометрической функции Трикоми $U(a,b,z)$ в [6] найдено разложение

$$\frac{e^{nz}}{(1-z)^s} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{n^{p+s}}{p!} U(s, s+p+1, n) z^p.$$

Следовательно,

$$SP(n,k) = \frac{(n-1)!}{nk!} [z^{-1}] \sum_{m=1}^{k} n^m F_{k,m}(z) z^{-n}$$

$$= \frac{(n-1)!}{nk!} [z^{-1}] \sum_{m=1}^{k} n^m \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{n^{p+3k-2m}}{p!} U(3k-2m, 3k-2m+p+1, n) f_{k,m} \right.$$

$$
+\dots+\sum_{p=0}^{\infty}\frac{n^{p-1}}{p!}U(-m,p,n)h_{k,m}\Bigg)z^{p-n}
$$

$$
=\frac{(n-1)!}{nk!}\sum_{m=1}^{k}n^m\Bigg(\frac{n^{n+3k-2m-1}}{(n-1)!}U(3k-2m,3k-2m+n,n)f_{k,m}
$$

$$
+\dots+\frac{n^{n-2}}{(n-1)!}U(-m,n-1,n)h_{k,m}\Bigg).
$$

С помощью леммы 1 при $n\to\infty$ найдём

$$
SP(n,k)\sim\frac{\sqrt{\pi}}{nk!}\sum_{m=1}^{k}n^m\Bigg(\frac{n^{n+(3k-2m)/2-1}}{2^{(3k-2m)/2}\Gamma\big(\frac{3k-2m+1}{2}\big)}f_{k,m}
$$

$$
+\dots+\frac{n^{n-m/2-1}}{2^{-m/2}\Gamma\big(\frac{1-m}{2}\big)}h_{k,m}\Bigg)\sim\frac{\sqrt{\pi}}{k!}\sum_{m=1}^{k}\Bigg(\frac{n^{n+3k/2-2}}{2^{(3k-2m)/2}\Gamma\big(\frac{3k-2m+1}{2}\big)}f_{k,m}
$$

$$
+\dots+\frac{n^{n+m/2-3}}{2^{-m/2}\Gamma\big(\frac{1-m}{2}\big)}h_{k,m}\Bigg)\sim\frac{\sqrt{\pi}}{2^{3k/2}}n^{n+3k/2-2}\sum_{m=1}^{k}\Bigg(\frac{2^m f_{k,m}}{\Gamma\big(\frac{3k-2m+1}{2}\big)}
$$

$$
+\dots+\frac{n^{(m-3k)/2-1}}{2^{-m/2}\Gamma\big(\frac{1-m}{2}\big)}h_{k,m}\Bigg).
$$

Отметим, что $\Gamma\big(\frac{1-m}{2}\big)$ имеет полюс при $m=1$, поэтому при $m\to 1$ предел $1/\Gamma\big(\frac{1-m}{2}\big)$ равен 0. Так как $\frac{m-3k}{2}-1\leqslant -k-1<0$ при $m\leqslant k$, при $n\to\infty$ предел второго и следующих слагаемых в скобках равен нулю и при фиксированном числе $k\geqslant 1$ и $n\to\infty$ окончательно получим

$$
SP(n,k)\sim c_k n^{n+3k/2-2},
$$

$$
c_k=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{3k/2}}\sum_{m=1}^{k}\frac{2^m}{\Gamma\big(\frac{3k-2m+1}{2}\big)}\sum_{\pi_m(k)}\frac{1}{m_1!\dots m_k!}\prod_{i=1}^{k}\bigg(\frac{(3i-3)!}{(i-1)!(2i-1)!2^i}\bigg)^{m_i}.
$$

Теорема 1 доказана.

В частности, имеем $c_1=\sqrt{\frac{\pi}{8}}$, $c_2=\frac{5}{24}$, $c_3=\frac{13}{384}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $c_4=\frac{47}{8064}$, что совпадает с результатами, полученными другими методами в [6, 7, 16]. Отметим, что все унициклические и бициклические связные графы являются последовательно-параллельными графами.

Зададим на множестве помеченных k-циклических связных графов с n вершинами равномерное распределение вероятностей.

Следствие 1. *Пусть $P_k(n)$ — вероятность того, что помеченный k-циклический связный граф с n вершинами является последовательно-параллельным графом. Тогда при фиксированном $k\geqslant 2$ и $n\to\infty$ верна* *асимптотическая формула*

$$P_k(n) \sim \frac{c_k 2^{5k/2-3}\Gamma\left(\frac{3k-3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}d_{k-1}(k-2)!3^{k-1}},$$

где c_k — константа из теоремы 1, а d_k — коэффициенты Райта:

$$d_1 = d_2 = \frac{5}{36}, \quad d_{k+1} = d_k + \sum_{s=1}^{k-1} \frac{d_s d_{k-s}}{(k+1)\binom{k}{s}}, \quad k \geqslant 2.$$

Доказательство. Пусть $f(n, n+k)$ — число помеченных связных графов с n вершинами и $n+k$ рёбрами. Райт [16] нашёл асимптотику при $n \to \infty$ и $0 \leqslant k = o(n^{1/3})$:

$$f(n, n+k) \sim f_k n^{n+(3k-1)/2},$$

$$f_0 = \left(\frac{\pi}{8}\right)^{1/2}, \quad f_k = \frac{\sqrt{\pi}3^k(k-1)!d_k}{2^{(5k-1)/2}\Gamma\left(\frac{3k}{2}\right)}, \quad k \geqslant 1,$$

где d_k — коэффициенты Райта. При фиксированном $k \geqslant 2$ и $n \to \infty$ имеем

$$P_k(n) = \frac{SP(n,k)}{f(n, n+k-1)} \sim \frac{c_k n^{n+3k/2-2}}{f_{k-1}n^{n+3k/2-2}} = \frac{c_k 2^{5k/2-3}\Gamma\left(\frac{3k-3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}d_{k-1}(k-2)!3^{k-1}}.$$

Следствие 1 доказано.

В частности, найдём $P_1(n) \sim 1$, $P_2(n) \sim 1$, $P_3(n) \sim \frac{13}{15}$, $P_4(n) \sim \frac{141}{221}$.

Следствие 2. *При $n \to \infty$ вероятность $\overline{P}_k(n)$ того, что помеченный последовательно-параллельный k-циклический граф с n вершинами является кактусом, при фиксированном $k \geqslant 1$ асимптотически равна*

$$\overline{P}_k(n) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{c_k 2^{3k/2}k!\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)},$$

где c_k — константа из теоремы 1.

Доказательство. Пусть $Ca(n,k)$ — число помеченных k-циклических кактусов с n вершинами. В [9] при фиксированном $k \geqslant 1$ и $n \to \infty$ найдена асимптотика

$$Ca(n,k) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2^{3k/2}k!\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)} n^{n+3k/2-2},$$

поэтому при $n \to \infty$ имеем

$$\overline{P}_k(n) = \frac{Ca(n,k)}{SP(n,k)} \sim \frac{\sqrt{\pi}n^{n+3k/2-2}}{c_k 2^{3k/2}k!\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)n^{n+3k/2-2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{c_k 2^{3k/2}k!\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}.$$

Следствие 2 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973. 299 с.
2. **Bodirsky M., Gimenez O., Kang M., Noy M.** Enumeration and limit laws of series-parallel graphs // Eur. J. Comb. 2007. V. 28, No. 8. P. 2091–2105.
3. **McDiarmid C., Scott A.** Random graphs from a block stable class // Eur. J. Comb. 2016. V. 58. P. 96–106.
4. **Raghavan S.** Low-connectivity network design on series-parallel graphs // Networks. 2004. V. 43, No. 3. P. 163–176.
5. **Takamizawa K., Nishizeki T., Saito N.** Linear-time computability of combinatorial problems on series-parallel graphs // J. ACM. 1982. V. 29, No. 3. P. 623–641.
6. **Воблый В. А.** Перечисление помеченных последовательно-параллельных трициклических графов // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и её прил. Темат. обзор. Т. 177. М.: ВИНИТИ РАН, 2020. С. 132–136.
7. **Воблый В. А.** Асимптотическое перечисление помеченных последовательно-параллельных тетрациклических графов // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. математика и её прил. Темат. обзор. Т. 187. М.: ВИНИТИ РАН, 2020. С. 31–35.
8. NIST handbook of mathematical functions. New York: Camb. Univ. Press, 2010. 951 p.
9. **Воблый В.А.** О перечислении помеченных связных графов с заданными числами вершин и рёбер // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2016. Т. 23, № 2. С. 5–20.
10. **Гульден Я., Джексон Д.** Перечислительная комбинаторика. М.: Наука, 1990. 504 с.
11. **Риордан Дж.** Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982. 256 с.
12. **Воблый В. А.** Второе соотношение Риддела и следствия из него // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2019. Т. 26, № 1. С. 20–32.
13. **Wright E. M.** The number of connected sparsely edged graphs // J. Graph Theory. 1977. V. 1, No. 4. P. 317–330.
14. **Wright E. M.** The number of connected sparsely edged graphs. II // J. Graph Theory. 1978. V. 2, No. 4. P. 299–305.
15. **Воблый В. А.** Асимптотическое перечисление помеченных последовательно-параллельных k-циклических графов без мостов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2021. Т. 28, № 4. С. 61–69.
16. **Wright E. M.** The number of connected sparsely edged graphs. III // J. Graph Theory. 1980. V. 4, No. 4. P. 393–407.

Воблый Виталий Антониевич

Статья поступила
7 февраля 2022 г.
После доработки —
17 апреля 2022 г.
Принята к публикации
19 апреля 2022 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2022. Vol. 29, No. 4. P. 5–14

UDC 519.175.3 DOI 10.33048/daio.2022.29.732

ON ASYMPTOTICAL ENUMERATION OF LABELED SERIES-PARALLEL k-CYCLIC GRAPHS

V. A. Voblyi

All-Russian Institute for Scientific and Technical Information,
20 Usievich Street, 125190 Moscow, Russia
E-mail: `vitvobl@yandex.ru`

Abstract. We deduce an asymptotic formula for the number of labeled connected series-parallel k-cyclic graphs with given order and fixed number k. Under uniform probability distribution, we find the probability that a random labeled connected n-vertex k-cyclic graph with a fixed k and $n \to \infty$ is a series-parallel graph. In addition, we determine the probability that, under uniform probability distribution, a random labeled connected series-parallel n-vertex k-cyclic graph with a fixed k and $n \to \infty$ is a cactus. Bibliogr. 16.

Keywords: enumeration, labeled graph, block, series-parallel graph, k-cyclic graph, asymptotics, random graph.

REFERENCES

1. **F. Harary,** *Graph Theory* (Addison-Wesley, London, 1969; Mir, Moscow, 1973 [Russian]).
2. **M. Bodirsky, O. Gimenez, M. Kang,** and **M. Noy,** Enumeration and limit laws of series-parallel graphs, *Eur. J. Comb.* **28** (8), 2091–2105 (2007).
3. **C. McDiarmid** and **A. Scott,** Random graphs from a block stable class, *Eur. J. Comb.* **58**, 96–106 (2016).
4. **S. Raghavan**, Low-connectivity network design on series-parallel graphs, *Networks* **43** (3), 163–176 (2004).
5. **K. Takamizawa, T. Nishizeki,** and **N. Saito,** Linear-time computability of combinatorial problems on series-parallel graphs, *J. ACM* **29** (3), 623–641 (1982).
6. **V. A. Voblyi,** Enumeration of labeled series-parallel tricyclic graphs, *Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Mat. Prilozh., Temat. Obz.,* Vol. 177 (VINITI RAN, Moscow, 2020), pp. 132–136 [Russian].

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **16** (4) (2022).

7. **V. A. Voblyi,** Asymptotical enumeration of labeled series-parallel tetracyclic graphs, *Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Mat. Prilozh., Temat. Obz.,* Vol. 187 (VINITI RAN, Moscow, 2020), pp. 31–35 [Russian].
8. *NIST Handbook of Mathematical Functions* (Cambridge Univ. Press, New York, 2010).
9. **V. A. Voblyi,** Enumeration of labeled connected graphs with given order and size, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **23** (2), 5–20 (2016) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **10** (2), 302–310 (2016)].
10. **I. P. Goulden** and **D. M. Jackson,** *Combinatorial Enumeration* (John Wiley Sons, New York, 1983; Nauka, Moscow, 1990 [Russian]).
11. **J. Riordan,** *Combinatorial Identities* (John Wiley Sons, New York, 1968; Nauka, Moscow, 1982 [Russian]).
12. **V. A. Voblyi,** The second Riddell relation and its consequences, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **26** (1), 20–32 (2019) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **13** (1), 168–174 (2019)].
13. **E. M. Wright,** The number of connected sparsely edged graphs, *J. Graph Theory* **1** (4), 317–330 (1977).
14. **E. M. Wright,** The number of connected sparsely edged graphs. II, *J. Graph Theory* **2** (4), 299–305 (1978).
15. **V. A. Voblyi,** Asymptotical enumeration of labeled series-parallel k-cyclic bridgeless graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **28** (4), 61–69 (2021) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **15** (4) (2019)].
16. **E. M. Wright,** The number of connected sparsely edged graphs. III, *J. Graph Theory* **4** (4), 393–407 (1980).

Vitaly A. Voblyi

Received February 7, 2022
Revised April 17, 2022
Accepted April 19, 2022