ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 31 № 1 2024

Новосибирск
Издательство Института математики

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2024. Т. 31, № 1. С. 109–128

УДК 519.17 DOI: 10.33048/daio.2024.31.770

О КОЛИЧЕСТВЕ k-ДОМИНИРУЮЩИХ НЕЗАВИСИМЫХ МНОЖЕСТВ В ПЛАНАРНЫХ ГРАФАХ

Д. С. Талецкий[1, 2]

[1] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», ул. Большая Печёрская, 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия

[2] Санкт-Петербургский гос. университет, Университетская наб., 7/9, 199034 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: dmitalmail@gmail.com

Аннотация. Множество J_k вершин графа называется k-доминирующим независимым ($k \geqslant 1$), если его вершины попарно не смежны и каждая вершина не из J_k смежна хотя бы с k вершинами из J_k. В этой статье получены новые оценки количества k-доминирующих независимых множеств при различных значениях $k \geqslant 2$ в некоторых классах планарных графов. Ил. 7, библиогр. 15.

Ключевые слова: независимое множество, доминирующее множество, k-доминирующее независимое множество, планарный граф.

Введение

Граф называется *планарным*, если он может быть уложен на плоскости без пересечений рёбер не по вершинам, и *внешнепланарным*, если существует его плоская укладка такая, что все вершины графа принадлежат внешней грани. Планарный (внешнепланарный) граф называется *максимальным*, если в него нельзя добавить ребро, не нарушая свойства планарности (внешнепланарности). Обозначим через $\mathcal{P}$, $\mathcal{MP}$, $\mathcal{OP}$ и $\mathcal{MOP}$ классы всех планарных, максимальных планарных, внешнепланарных и максимальных внешнепланарных графов соответственно.

Независимым множеством графа называется произвольное подмножество попарно не смежных его вершин. Множество вершин D_k называется *k-доминирующим* ($k \geqslant 1$), если каждая вершина не из D_k смежна хотя бы с k вершинами из D_k. В настоящей работе рассматриваются k-доминирующие независимые множества (сокращённо k-ДНМ). Следуя [1, 2], будем обозначать через $\mathrm{mi}_k(n, \mathcal{F})$ максимально возможное количество k-ДНМ, которое может содержать n-вершинный граф из класса $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F}$ совпадает с классом всех графов, то будем использовать обозначение $\mathrm{mi}_k(n)$.

Как известно, каждое 1-ДНМ графа является его максимальным по включению независимым множеством (и наоборот). В [3] получено точное значение величины $\mathrm{mi}_1(n)$ при всех $n \geqslant 1$. Позднее в [4] было предложено значительно более простое доказательство этого результата. На сегодняшний день существует большое число работ, посвящённых перечислению 1-ДНМ в графах из тех или иных классов. Так, известны точные значения величины $\mathrm{mi}_1(n, \mathcal{F})$ в случае, когда $\mathcal{F}$ является классом связных графов [5], деревьев [6], двудольных графов [7], графов без треугольников [8], унициклических [9] и r-циклических [10] графов, унициклических связных графов [11].

Известно несколько работ, в которых исследуются свойства 2-ДНМ. В статье [12] описаны некоторые классы графов, содержащих хотя бы одно 2-ДНМ. В [13, 14] сформулированы достаточные условия существования 2-ДНМ в декартовых и тензорных произведениях графов соответственно. В [15] исследуются обобщения графа Петерсена, содержащие хотя бы одно 2-ДНМ.

Автору известны лишь две работы [1, 2], связанные с перечислением k-ДНМ при $k \geqslant 3$. В [1] доказано существование констант $c, c', c_k, c'_k > 0$ таких, что $1{,}22^n c \leqslant \mathrm{mi}_2(n) \leqslant 1{,}246^n c'$ и при любом $k \geqslant 3$ верно неравенство $(\sqrt[2k]{2})^n c_k \leqslant \mathrm{mi}_k(n) \leqslant (\sqrt[k+1]{2})^n c'_k$. Кроме того, в [1] получен ряд других результатов: например, для всех $n, k \geqslant 2$ и класса деревьев $\mathcal{T}$ доказано неравенство $\mathrm{mi}_k(n, \mathcal{T}) \leqslant 1$. Позднее, в [2] были получены новые верхние и нижние оценки величины $\mathrm{mi}_k(n)$, в частности, доказано неравенство $\mathrm{mi}_k(n) < (\sqrt[k]{1{,}98})^n$ для всех $k \geqslant 3$.

В настоящей работе получены новые оценки величины $\mathrm{mi}_k(n, \mathcal{F})$, где $\mathcal{F} \in \{\mathcal{P}, \mathcal{MP}, \mathcal{OP}, \mathcal{MOP}\}$ и $k \geqslant 2$. Показано, что при $k \geqslant 3$ каждый внешнепланарный граф содержит не более одного k-ДНМ. При этом каждый максимальный внешнепланарный граф содержит не более одного 2-ДНМ. С другой стороны, при $k \geqslant 4$ каждый планарный граф содержит не более одного k-ДНМ, но при всех $n \geqslant 12$ существуют максимальные планарные графы, содержащие не менее чем $2^{[n/50]-1}$ 3-ДНМ.

1. Терминология и обозначения

Грань плоского графа называется *внутренней*, если она имеет конечную площадь, и *внешней* в противном случае. Назовём ребро плоского графа *внешним*, если оно лежит на его внешней грани. Всюду в работе будем использовать термин «грань» вместо термина «внутренняя грань». Кроме того, будем предполагать, что все рассматриваемые планарные графы уложены на плоскости. Будем говорить, что грани f_1 и f_2 *смежны*, если они имеют общее ребро. *Треугольником* называется грань, содержащая три вершины.

Назовём грань максимального внешнепланарного графа *крайней* или 1-*крайней*, если она содержит вершину степени 2. При $s \geqslant 2$ назовём грань s-*крайней*, если она не $(s-1)$-крайняя и все смежные с ней грани, кроме, быть может, одной, s'-крайние для некоторого $1 \leqslant s' < s$. Будем говорить, что грань $\{1,2,3\}$-*крайняя*, если она s-крайняя для некоторого $s \in \{1,2,3\}$.

Под *добавлением вершины v в грань f* планарного графа G будем понимать добавление в G вершины v и соединение её со всеми вершинами f. Отметим, что если G является максимальным планарным графом, то он останется таковым при добавлении вершины в любую его грань. Как известно, каждая внутренняя грань максимального (внешне)планарного графа является треугольником.

Обозначим через $T(G)$ *слабо двойственный граф* графа $G \in \mathcal{P}$, вершинами которого являются внутренние грани G. Две вершины $T(G)$ соединены ребром, если и только если соответствующие им грани G смежны. Как известно, если $G \in \mathcal{OP}$, то $T(G)$ является лесом, если при этом G двусвязен, то $T(G)$ является деревом, если же $G \in \mathcal{MOP}$, то $T(G)$ является субкубическим деревом.

При $k \geqslant 1$ вершину графа G назовём k-*универсальной* (соответственно k-*пустой*), если она содержится в каждом k-ДНМ графа G (соответственно не содержится ни в одном k-ДНМ графа G).

Как обычно, через $V(G)$ и $E(G)$ обозначаются множества вершин и рёбер графа G соответственно. Пусть $A \subset V(G)$. Через $G \setminus A$ обозначается порождённый подграф G с множеством вершин $V(G) \setminus A$. Граф, полученный в результате стягивания ребра $uv \in E(G)$ графа G, обозначается через G/uv. *Объединением* $G \cup H$ графов G и H называется граф с множеством вершин $V(G) \cup V(H)$ и множеством рёбер $E(G) \cup E(H)$. Через kG обозначается объединение $k \geqslant 2$ копий графа G. Через $\deg(v), N(v)$ и $N[v]$ обозначаются степень вершины v, открытая окрестность v и замкнутая окрестность v соответственно. Через $\delta(G)$ обозначается наименьшая степень вершины в G.

Деревом называется граф без циклов, а *листом* дерева — его вершина степени 1. *Диаметром* связного графа называется наибольшее попарное расстояние между его вершинами, а *диаметральным путём* графа — некоторый простой путь, длина которого равна его диаметру. Отметим, что в любом дереве, содержащем не менее двух вершин, концы каждого его диаметрального пути являются листьями.

Через K_n, C_n и P_n обозначаются n-вершинный полный граф, простой цикл и простой путь соответственно. Обозначим через W_n n-вершинный граф, полученный путём добавления в цикл C_{n-1} новой вершины, смежной со всеми вершинами цикла.

Точкой сочленения связного графа называется вершина, при удалении которой граф перестаёт быть связным. *Блоком* B графа G называется его максимальный по включению двусвязный подграф. Блок B называется *крайним* в графе G, если он содержит не более одной точки сочленения G.

2. Предварительные результаты

В этом разделе приводятся некоторые простые факты, которые будут использованы при доказательстве основных результатов работы.

Лемма 1. *Для любого графа G, содержащего хотя бы 4 вершины, имеют место следующие утверждения.*

1. *Если $G \in \mathcal{P}$, то $\delta(G) \leqslant 5$. Если же $G \in \mathcal{MP}$, то $\delta(G) \in \{3, 4, 5\}$.*
2. *Если $G \in \mathcal{OP}$, то $\delta(G) \leqslant 2$. Если же $G \in \mathcal{MOP}$, то $\delta(G) = 2$.*

Доказательство. П. 1 следует из формулы Эйлера. Докажем п. 2. Если $|V(G)| \leqslant 3$, то доказывать нечего; предположим, что $|V(G)| \geqslant 4$. Если $G \in \mathcal{MOP}$, то граф $T(G)$ является деревом и содержит лист, который соответствует грани G, содержащей вершину степени 2, откуда $\delta(G) \leqslant 2$. Поскольку каждая внутренняя грань G является треугольником, то $\delta(G) = 2$. Если же $G \notin \mathcal{MOP}$, то существует граф $G^* \in \mathcal{MOP}$ такой, что G является остовным подграфом G^*, откуда $\delta(G) \leqslant \delta(G^*) = 2$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любого графа $G \in \mathcal{MOP}$, вершины $w \in V(G)$ и ребра $uv \in E(G)$ имеют место следующие утверждения.*

1. *Если $\deg(w) = 2$, то $G \setminus \{w\} \in \mathcal{MOP}$.*
2. *Если uv — внешнее ребро G, то $G/uv \in \mathcal{MOP}$.*

Доказательство. Поскольку каждая внутренняя грань максимального внешнепланарного графа является треугольником, п. 1 очевиден. Докажем п. 2. Обозначим через uvw единственную внутреннюю грань G, содержащую ребро uv. Очевидно, что все внутренние грани G, кроме uvw, являются внутренними гранями графа G/uv, следовательно, каждая внутренняя грань G/uv является треугольником. Кроме того, поскольку G не содержит точек сочленения и $G \setminus \{u, v\}$ связен, граф G/uv также не содержит точек сочленения, следовательно, $G/uv \in \mathcal{MOP}$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Для любого $k \geqslant 1$, графа $G \in \mathcal{P}$ и его вершин $u, v \in V(G)$ имеют место следующие утверждения.*

1. *Если u k-пустая в G, то $\mathrm{mi}_k(G \setminus u) \geqslant \mathrm{mi}_k(G)$.*
2. *Если v k-универсальная в G, то $\mathrm{mi}_k(G \setminus N[v]) \geqslant \mathrm{mi}_k(G)$.*

Доказательство. Покажем, что любое k-ДНМ J графа G будет являться k-ДНМ и для графа $G \setminus u$. Пусть $w \in V(G) \setminus u$ и $w \notin J$. Тогда w имеет хотя бы k соседей в G, принадлежащих J. Поскольку все эти соседи не k-пусты в G, они отличны от u и принадлежат графу $G \setminus u$. Таким образом, каждая вершина графа $G \setminus u$ либо принадлежит независимому множеству J, либо имеет в нём не менее k соседей, что и требовалось.

Докажем п. 2. Из определения k-универсальной вершины следует, что все вершины окрестности $N(v)$ k-пусты. Тогда для каждого k-ДНМ J графа G множество $J \setminus v$ является k-ДНМ графа $G \setminus N[v]$. Лемма 3 доказана.

3. Внешнепланарные графы

3.1. Класс $\mathcal{OP}$. В упомянутой ранее работе [3] доказана

Теорема 1. *Для всех $n \geqslant 2$ имеет место равенство*

$$\mathrm{mi}_1(n) = \begin{cases} 3^m, & \text{если } n = 3m, \\ 4 \cdot 3^{m-1}, & \text{если } n = 3m+1, \\ 2 \cdot 3^m, & \text{если } n = 3m+2. \end{cases}$$

Как показано в [3], если $n = 3m$, то единственным экстремальным графом является mK_3; если $n = 3m+1$, то существуют два экстремальных графа: $(m-1)K_3 \cup 2K_2$ и $(m-1)K_3 \cup K_4$; если же $n = 3s+2$, то единственным экстремальным графом является $mK_3 \cup K_2$. Поскольку при любом n хотя бы один из экстремальных графов внешнепланарный, то $\mathrm{mi}_1(n, \mathcal{OP}) = \mathrm{mi}_1(n, \mathcal{P}) = \mathrm{mi}_1(n)$.

В этом пункте установлены точные значения величины $\mathrm{mi}_k(n, \mathcal{OP})$ при $n \geqslant 1$ и $k \geqslant 2$.

Теорема 2. *Для всех $n \geqslant 1$ верно равенство $\mathrm{mi}_2(n, \mathcal{OP}) = 2^{[n/4]}$. При этом если $n = 4m$, то экстремальный граф единствен и изоморфен mC_4.*

Доказательство. Отметим, что $\mathrm{mi}_2(mC_4 \cup rK_1) = 2^m$ при любом $n = 4m+r \geqslant 1$. Предположим, что найдётся n-вершинный граф G такой, что либо $\mathrm{mi}_2(G) > 2^{[n/4]}$, либо $\mathrm{mi}_2(G) = 2^{[n/4]}$, $n = 4m$ и G не изоморфен mC_4; при этом будем полагать, что при всех $n' < n$ графов с таким свойством не существует. Тогда в G найдётся некоторая компонента связности H, не изоморфная C_4. Если H содержит хотя бы одну 2-пустую вершину u, то удалим её из графа, тогда $\mathrm{mi}_2(G) \leqslant \mathrm{mi}_2(G \setminus u)$ по лемме 3. При этом если $n = 4m$, то $\mathrm{mi}_2(G) < 2^{[n/4]}$, если же $n = 4m + r$, то $\mathrm{mi}_2(G) \leqslant 2^{[(n-1)/4]}$, что противоречит предположению. Если H содержит хотя бы одну 2-универсальную вершину v, то проведём аналогичные рассуждения для графа $G \setminus N[v]$.

Таким образом, предполагаем, что H не содержит 2-универсальных и 2-пустых вершин. Тогда $|V(H)| \geqslant 4$ и $\delta(H) = 2$, при этом ни одна вершина степени 2 графа H не принадлежит треугольнику (иначе эта вершина была бы 2-пустой). Пусть в H найдётся пара смежных вершин u и v степени 2. Обозначим через u' и v' вторых соседей вершин u и v соответственно. Каждое 2-ДНМ графа G либо содержит вершины u и v' и не содержит ни одного соседа v', либо содержит вершины v и u' и не содержит ни одного соседа u'. Поскольку H не совпадает с C_4, множество $N[u'] \cup N[v']$ содержит не менее 5 вершин. Тогда имеет место неравенство $\mathrm{mi}_2(G) \leqslant 2^{[(n-4)/2]} + 2^{[(n-5)/2]}$, причём если $n = 4m$, то неравенство строгое, что и требовалось.

Осталось рассмотреть случай, когда в H не найдётся двух смежных вершин степени 2. Обозначим через B один из крайних блоков H (если H двусвязен, то считаем, что $B \cong H$). Поскольку блок B крайний, он содержит не более одной точки сочленения H. Кроме того, так как $\delta(H) = 2$, блок B содержит хотя бы 3 вершины и, следовательно, является двусвязным внешнепланарным графом. Тогда слабо двойственный граф $T(B)$ является деревом. Если при этом $T(B)$ состоит из одной вершины, то $B \cong C_s$ для некоторого $s \geqslant 4$, при этом хотя бы $s-1$ вершин цикла не являются точками сочленения G и, следовательно, имеют степень 2 в H; противоречие. Если же дерево $T(B)$ содержит не менее двух вершин, то оно содержит не менее двух листьев x и x', которым соответствуют некоторые грани f и f' графа H. Поскольку эти грани не являются треугольниками, обе они содержат хотя бы одну пару смежных вершин, имеющих степень 2 в B, причём хотя бы в одной из этих пар обе вершины не являются точками сочленения H и, следовательно, имеют степень 2 в H; противоречие. Теорема 2 доказана.

При $k \geqslant 3$ каждая вершина степени 2 внешнепланарного графа k-универсальна. Кроме того, любой подграф внешнепланарного графа также будет внешнепланарным. Отсюда вытекает следующий простой факт.

Теорема 3. *Для всех $k \geqslant 3$ и $n \geqslant 1$ верно* $\mathrm{mi}_k(n, \mathcal{OP}) = 1$.

Доказательство. Ясно, что при любых $n, k \geqslant 1$ пустой граф nK_1 содержит единственное k-ДНМ, откуда $\mathrm{mi}_k(n, \mathcal{OP}) \geqslant 1$. Предположим, что для некоторых $k \geqslant 3$ и $n \geqslant 1$ найдётся внешнепланарный граф G такой, что $\mathrm{mi}_k(G) > 1$, а для всех графов G', содержащих менее $|V(G)|$ вершин, верно $\mathrm{mi}_k(G') \leqslant 1$. По лемме 1 существует вершина $v \in V(G)$ степени 2, которая будет k-универсальной. Обозначим через J_1 и J_2 два различных k-ДНМ G. Тогда множества $J_1 \setminus \{v\}$ и $J_2 \setminus \{v\}$ являются различными k-ДНМ графа $G \setminus N[v] \in \mathcal{OP}$, откуда $\mathrm{mi}_2(G \setminus N[v]) \geqslant 2$; противоречие. Теорема 3 доказана.

3.2. Класс $\mathcal{MOP}$. Назовём граф $G \in \mathcal{MOP}$ *критическим*, если $\mathrm{mi}_2(G) > 1$ и при этом для любого графа $G' \in \mathcal{MOP}$, содержащего менее $|V(G)|$ вершин, верно $\mathrm{mi}_2(G') \leqslant 1$. Цель рассуждений этого пункта — доказать, что критических графов не существует.

Будем говорить, что граф $G' \in \mathcal{MOP}$ *соответствует* графу $G \in \mathcal{MOP}$, если $\varnothing \subsetneq V(G') \subsetneq V(G)$ и найдётся множество $\varnothing \subseteq A \subsetneq V(G)$ такое, что для любого 2-ДНМ J графа G множество $J \setminus A$ является 2-ДНМ графа G'. Очевидно, что имеет место неравенство $\mathrm{mi}_2(G') \geqslant \mathrm{mi}_2(G)$. Таким образом, для того чтобы показать, что граф G не критический, достаточно привести пример соответствующего ему графа G'.

Напомним, что если $G \in \mathcal{MOP}$, то его слабо двойственный граф $T(G)$ является субкубическим деревом. Рассмотрим некоторый диаметральный путь $X = x_1 x_2 \ldots x_p$ в $T(G)$. Всюду в этом пункте будем обозначать через x_i вершины $T(G)$, лежащие на X, а через x'_j — вершины $T(G)$, не лежащие на X. Кроме того, через f_i и f'_j будем обозначать грани G, соответствующие вершинам x_i и x'_j соответственно. При $p \leqslant 4$ граф G содержит не более 6 внутренних граней и не более 8 вершин. Легко проверить, что в этом случае $\mathrm{mi}_2(G) \leqslant 1$ и G не критический. Таким образом, предполагаем, что $p \geqslant 5$.

Лемма 4. *Если в графе $G \in \mathcal{MOP}$ найдётся грань f, смежная с 1-крайними гранями f' и f'', то G не критический.*

Доказательство. Обозначим грани f, f', f'' через uvw, $uu'w$, $vv'w$ соответственно. Тогда вершины u', v' 2-универсальны, а смежные с ними вершины u, v, w 2-пусты в G. Рассмотрим граф $G_2 = G \setminus \{u', v'\}$. Очевидно, что вершина w 2-универсальна, а вершины u, v 2-пусты в G_2. Тогда для каждого 2-ДНМ J графа G множество $(J \setminus \{u', v'\}) \cup \{w\}$ является 2-ДНМ графа G_2, откуда $\mathrm{mi}_2(G) \leqslant \mathrm{mi}_2(G_2)$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть граф $G \in \mathcal{MOP}$ критический. Тогда любая вершина $v \in V(G)$, принадлежащая некоторой $\{1, 2, 3\}$-крайней грани G, будет либо 2-универсальной, либо 2-пустой.*

Доказательство. Покажем, что $\{1, 2, 3\}$-крайняя грань графа G содержит 2-универсальную вершину, тогда две другие вершины этой грани 2-пусты. Поскольку все 1-крайние грани G содержат 2-универсальную вершину степени 2, условие леммы для них выполнено.

Рассмотрим некоторую 2-крайнюю грань abc графа G. Из определения 2-крайней грани следует, что abc смежна с некоторой 1-крайней гранью (например abd). Поскольку вершина d 2-универсальна, вершины a и b 2-пусты. Если $\min(\deg(a), \deg(b)) = 3$, то вершина c 2-универсальна. Если же $\min(\deg(a), \deg(b)) \geqslant 4$, то грань abc смежна с тремя другими гранями, хотя бы две из которых 1-крайние, тогда G не является критическим графом по лемме 4; противоречие.

Наконец, рассмотрим некоторую 3-крайнюю грань uvw графа G. По определению 3-крайней грани найдётся некоторая 2-крайняя грань (например uva), смежная с uvw. Если $\deg(a) \geqslant 4$, то uva смежна с двумя 1-крайними гранями, что невозможно по лемме 4. Если же $\deg(a) = 3$, то найдётся 1-крайняя грань, содержащая вершину a и одну из вершин u и v (например u), а также некоторую 2-универсальную вершину. Тогда вершины u и a 2-пусты, а вершина v 2-универсальна, что и требовалось. Лемма 5 доказана.

Назовём граф $G \in \mathcal{MOP}$ *особым*, если в нём найдутся вершины $a_1, a_2, \ldots, a_5, b_1, b_2$ и подграф $G_0 = G \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_5\} \in \mathcal{MOP}$ с внешним ребром b_1b_2, расположенные таким образом, что грани $a_1a_2b_1$ и $a_4a_5b_2$ 1-крайние, а грани $a_2a_3b_1$ и $a_3a_4b_2$ 2-крайние в G. Кроме того, грань $a_1a_2b_1$ соответствует концу некоторого диаметрального пути X дерева $T(G)$ (рис. 1). При этом предполагаем, что второй конец X можно выбрать таким образом, чтобы соответствующая ему грань G была отлична от $a_4a_5b_2$ (в противном случае G содержит не более 8 вершин и, как легко проверить, не будет критическим).

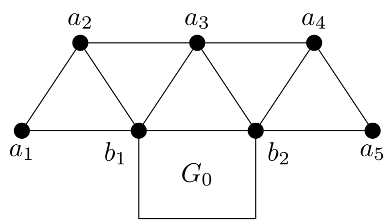

Рис. 1. Структура особого графа

Лемма 6. *Если граф G особый, то он не критический.*

Доказательство. Обозначим грани f_1, f_2, f_3, f_4 графа G через $a_1a_2b_1$, $a_2a_3b_1$, $b_1b_2a_3$, $b_1b_2c_1$ соответственно. В зависимости от значения величин $\deg(x_4)$ и $\deg(x_5)$ возможны три случая.

Случай 1: $\deg(x_4) = 3$. Обозначим через f_3' грань, смежную с f_4 и отличную от f_3 и f_5. В силу симметрии можем считать, что f_3' содержит ребро b_2c_1. Обозначим через v вершину, отличную от a_5 и такую, что b_2v является внешним ребром в G. Поскольку в G существует два внешних ребра, инцидентных b_2, вершина v единственна. Нетрудно видеть, что она принадлежит некоторой $\{1, 2, 3\}$-крайней грани G, а значит, будет либо 2-универсальной, либо 2-пустой по лемме 5. Если v 2-универсальна в G, то граф $G \setminus \{a_4, a_5\}$ соответствует G, при этом $A = \{a_5\}$. Если вершина v 2-пуста в G, то удалим вершину b_2 и соединим с v все вершины, смежные с b_2 в G. Ясно, что $G' \cong G/b_2v$, а значит, $G' \in \mathcal{MOP}$ по лемме 2. Кроме того, G' соответствует G (здесь $A = \varnothing$), что и требовалось.

При рассмотрении случаев 2 и 3 будем предполагать, что $\deg(x_4) = 2$ и грань f_5 содержит ребро c_1b_2. Обозначим через c_2 третью вершину f_5. Считаем, что вершина c_1 ни 2-универсальна, ни 2-пуста, поскольку если она 2-универсальна, то граф $G \backslash \{a_4, a_5\}$ соответствует G (здесь $A = \{a_5\}$), а если эта вершина 2-пуста, то граф G', полученный из графа $G \setminus \{b_1\}$ добавлением рёбер c_1a_1, c_1a_2, c_1a_3 соответствует G (здесь $A = \varnothing$).

Случай 2: $\deg(x_5) \leqslant 2$.

Вариант 2а: $\deg(x_5) = 1$. Вершина c_2 2-универсальна, тогда смежная с ней вершина c_1 2-пуста; противоречие.

Вариант 2в: $\deg(x_5) = 2$ и $\deg(c_1) = 3$. Вершина c_1 2-универсальна, так как она смежна с двумя 2-пустыми вершинами b_1 и b_2; противоречие.

Вариант 2с: $\deg(x_5) = 2$ и $\deg(c_1) \geqslant 4$. Граф $G \setminus \{a_1, \ldots, a_5, b_1, b_2\} \in \mathcal{MOP}$ соответствует G (здесь $A = \{a_1, a_3, a_5\}$).

Случай 3: $\deg(x_5) = 3$. Обозначим через f_4' грань, смежную с f_5 и отличную от f_4 и f_6.

Вариант 3а: грань f_4' содержит ребро c_1c_2. Обозначим через d_1 третью вершину f_4'. Если $\deg(x_4') = 1$, то вершина d_1 2-универсальна и вершина c_1 2-пуста; противоречие. Если $\deg(x_4') \geqslant 2$, то все грани, смежные с f_4' и отличные от f_5, будут $\{1, 2, 3\}$-крайними. По предположению вершина c_1 не принадлежит ни одной такой грани. Тогда $\deg(c_1) = 4$, причём вершины b_1 и b_2, смежные с c_1, 2-пусты, а оставшиеся два соседа c_1 смежны, а тогда c_1 2-универсальна; противоречие.

Вариант 3в: грань f_4' содержит ребро b_2c_2. Обозначим через v вершину, отличную от a_5 и такую, что b_2v является внешним ребром в G. Аналогично случаю 1 вершина v единственна, принадлежит некоторой $\{1, 2, 3\}$-внешней грани и, следовательно, либо 2-универсальна, либо 2-пуста по лемме 5. Если v 2-универсальна, то граф $G \setminus \{a_4, a_5\}$ соответствует G (здесь $A = \{a_5\}$). Если же v 2-пуста, то удалим вершину b_2 и соединим с вершиной v все вершины, смежные с b_2 в G. Тогда для полученного графа G' верно $G' \cong G/b_2v \in \mathcal{MOP}$. Кроме того, G' соответствует G (здесь $A = \varnothing$), что и требовалось. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Если* $\deg(x_3) = 3$, *то граф* G *не критический.*

Доказательство. Обозначим через $a_1a_2b_1$ грань f_1, через $a_2b_1b_2$ грань f_2, через $b_1b_2c_2$ грань f_3. Поскольку $\deg(x_3) = 3$, у вершин b_1 и c_2 найдётся единственный сосед c_1, отличный от b_2, а у вершин b_2 и c_2 найдётся единственный сосед c_3, отличный от b_1 (поскольку $G \in \mathcal{OP}$, вершины c_1 и c_3 не совпадают). Отметим, что вершины a_1 и b_2 2-универсальны, а тогда смежные с ними вершины a_2, b_1, c_2 и c_3 2-пусты.

Обозначим через f_2' грань, смежную с f_3 и отличную от f_2 и f_4. По лемме 4 грань f_2' либо 1-крайняя, либо смежна с единственной 1-крайней гранью f_1'. В зависимости от расположения грани f_2' возможны два случая.

Случай 1: грань f_2' является треугольником $b_2c_2c_3$. Если $\deg(x_2') = 1$, то вершина c_3 2-универсальна и смежна с b_2, что невозможно. Если же $\deg(x_2') = 2$, то либо b_2 принадлежит грани f_1' и смежна с 2-универсальной вершиной степени 2, либо G особый, что также невозможно.

Случай 2: грань f_2' является треугольником $b_1c_1c_2$. Если $\deg(x_2') = 1$, то вершина c_1 универсальна и смежна с b_1, тогда граф $G \setminus \{a_1, a_2\}$ соответствует G (здесь $A = \{a_1\}$). Если же $\deg(x_2') = 2$, то вне зависимости от расположения грани f_1' вершина c_1 имеет степень 3 и смежна с 2-пустыми вершинами b_1 и c_2, а также с 2-универсальной вершиной степени 2 грани f_1', что невозможно. Лемма 7 доказана.

При доказательстве лемм 8 и 9 предполагаем, что $\deg(x_3) = 2$ и по-прежнему обозначаем грани f_1, f_2 и f_3 через $a_1a_2b_1$, $a_2b_1b_2$ и $b_1b_2c_2$ соответственно.

Лемма 8. *Если* $\deg(x_4) = 3$, *то граф* G *не критический.*

Доказательство. Если грань f_4 не содержит b_1, то $\deg(b_1) = 4$ и, как нетрудно проверить, граф $G_3 = G \setminus \{a_1, a_2, b_1\}$ соответствует G (здесь $A = \{a_1\}$), поэтому предполагаем, что $\deg(b_1) \geqslant 5$.

Обозначим через f_4 грань $b_1c_1c_2$, а через f_3' — грань, смежную с f_4 и отличную от граней f_3 и f_5. Если $\deg(x_3') = 3$, то грань f_3' либо смежна с двумя 1-крайними гранями, что невозможно по лемме 4, либо смежна хотя бы с одной 2-крайней гранью, что невозможно по лемме 7. Таким образом, предполагаем, что $\deg(x_3') \in \{1, 2\}$. Если $\deg(x_3') = 2$, то обозначим через f_2' грань, смежную с f_3' и отличную от f_4. Если при этом $\deg(x_2') = 2$, то обозначим через f_1' грань, смежную с f_2' и отличную от f_3' (случай $\deg(x_2') = 3$ невозможен по лемме 4).

Если хотя бы одна вершина, смежная с b_1 и отличная от вершин a_1, b_2, 2-универсальна, то граф $G_2 = G \setminus \{a_1, a_2\}$ соответствует G, поэтому предполагаем, что все такие вершины, включая c_1, не 2-универсальны. При этом c_1 принадлежит $\{1, 2, 3\}$-крайней грани f_3', а тогда по лемме 5 она 2-пуста. Далее возможны два случая в зависимости от расположения грани f_3'.

Случай 1. Грань f_3' содержит ребро b_1c_1. Обозначим через b_0 третью вершину f_3'.

Вариант 1а: $\deg(x_3') = 1$. Поскольку $\deg(b_0) = 2$, вершина b_0 универсальна и смежна с b_1, что противоречит предположению.

Вариант 1в: $\deg(x_3') = 2$ и $\deg(x_2') = 1$. В этом случае вершина b_0 степени 3 смежна с двумя 2-пустыми вершинами b_1 и c_1, а также с 2-универсальной вершиной степени 2 грани f_2', что невозможно.

Вариант 1с: $\deg(x_3') = \deg(x_2') = 2$. Предполагаем, что вершина b_0 не 2-универсальна, тогда по лемме 5 она 2-пуста. Легко проверить, что при любом из четырёх вариантов расположения граней f_2' и f_1' хотя бы $\deg(b_0) - 1$ соседей b_0 также 2-пусты, что невозможно.

Случай 2. Грань f_3' содержит ребро c_1c_2. Обозначим через d_1 третью вершину f_3'.

Вариант 2а: $\deg(x_3') = 1$. Рассмотрим граф $G_2' \in \mathcal{MOP}$, полученный из графа $G \setminus \{c_2, d_1\}$ добавлением ребра b_2c_1. Поскольку c_1 2-пуста в G, полученный граф G_2' соответствует G (здесь $A = \{d_1\}$).

Вариант 2в: $\deg(x_3') = 2$ и $\deg(x_2') = 1$. Обозначим через d_2 вершину грани f_2', отличную от c_1, c_2 и d_1. Если d_2 смежна с c_2, то вершина d_1 степени 3 смежна с двумя 2-пустыми вершинами и одной 2-универсальной вершиной d_2, что невозможно. Если же d_2 смежна с c_1, то вершина c_2 степени 4 смежна с тремя 2-пустыми вершинами b_1, c_1, d_1 и одной 2-универсальной вершиной b_2, что невозможно.

Вариант 2с: $\deg(x_3') = \deg(x_2') = 2$. Обозначим через d_3 вершину степени 2 грани f_1'. Возможны четыре варианта расположения граней f_2' и f_1', изображённые на рис. 2. Если d_1 принадлежит f_1', то она 2-пуста и все смежные с ней вершины, кроме одной, 2-пусты, что невозможно. Если же d_1 не принадлежит f_1', то подграф G_2', полученный из графа $G \setminus \{d_2, d_3\}$ заменой ребра b_1c_2 ребром c_1b_2, соответствует G (здесь $A = \{d_3\}$). Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Если* $\deg(x_4) = 2$, *то граф* G *не критический.*

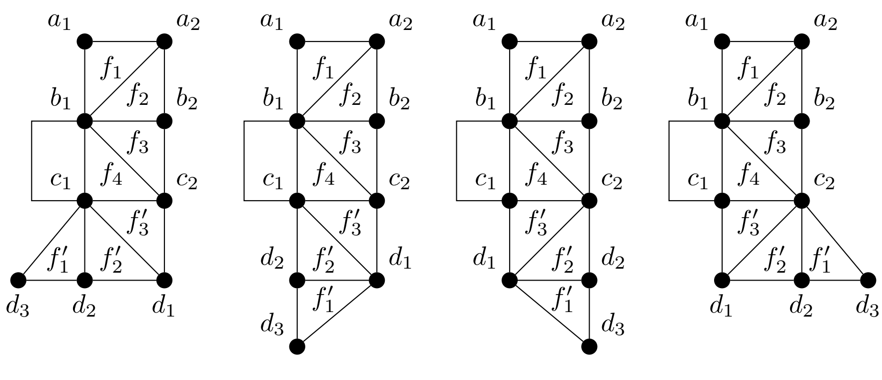

Рис. 2. Возможные конфигурации в варианте 2с леммы 8

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 8, предполагаем, что $\deg(b_1) \geqslant 5$, иначе граф $G \setminus \{a_1, a_2, b_1\}$ соответствует G. Обозначим грань f_4 через $b_1c_1c_2$.

Случай 1: $\deg(b_1) \geqslant 6$. В этом случае $\deg(b_2) = \deg(c_2) = 3$. Вершина c_2 2-пуста и смежна с 2-пустой вершиной b_1, а также с 2-универсальной вершиной b_2. Значит, смежная с ней вершина c_1 2-универсальна и граф $G \setminus \{a_1, a_2\}$ соответствует G.

При рассмотрении случаев 2–4 предполагаем, что грань f_5 содержит ребро c_1c_2, тогда $\deg(b_1) = 5$ и $\deg(b_2) = 3$. Обозначим через d_2 третью вершину f_5.

Случай 2: $\deg(x_5) \leqslant 2$. Если $\deg(x_5) = 1$, то вершина c_1 смежна с одной 2-универсальной и двумя 2-пустыми вершинами, что невозможно. Если $\deg(x_5) = 2$ и грань f_6 не содержит c_2, то поскольку вершины b_1 и c_2 пусты, граф $G \setminus \{a_1, a_2, b_1, b_2, c_2\} \in \mathcal{MOP}$ соответствует G (здесь $A = \{a_1, b_2\}$). Если же $\deg(x_5) = 2$ и грань f_6 не содержит c_1, то вершина c_1 имеет степень 3 и смежна с 2-пустыми вершинами b_1 и c_2, тогда она 2-универсальна и граф $G \setminus \{a_1, a_2\}$ соответствует G.

Случай 3: $\deg(x_5) = 3$, грань f'_4 содержит ребро c_1d_2. Обозначим через d_1 третью вершину f'_4. Если вершина c_1 2-универсальна, то граф $G \setminus \{a_1, a_2\}$ соответствует G. Если вершина c_1 2-пуста, то граф $G'_3 \in \mathcal{MOP}$, полученный добавлением в граф $G \setminus \{a_1, a_2, b_1\}$ ребра c_1b_2, соответствует G (здесь $A = \{a_1\}$). Если вершина c_1 не универсальна и не пуста, то она смежна хотя бы с двумя вершинами, которые не смежны между собой и не 2-пусты. Поскольку вершины b_1 и c_2 пусты, то $\deg(c_1) \geqslant 5$. Значит, c_1 принадлежит некоторой грани f'_3, которая является $\{1, 2, 3\}$-крайней; по лемме 5 получили противоречие.

Случай 4: $\deg(x_5) = 3$, грань f'_4 содержит ребро c_2d_2. Обозначим через d_3 третью вершину f'_4. Обозначим через v вершину, смежную с c_2, отличную от b_2 и такую, что ребро c_2v принадлежит внешней грани G (поскольку вершина c_2 инцидентна двум внешним рёбрам G, вершина v единственна). Из рассуждений случая 1 леммы 6 следует, что v принадлежит некоторой $\{1, 2, 3\}$-крайней грани G и либо 2-универсальна, либо 2-пуста. Если v 2-универсальна, то граф $G'_2 \in \mathcal{MOP}$, полученный из графа $G \setminus \{a_1, a_2\}$ заменой ребра b_1c_1 ребром b_1v, соответствует G (здесь $A = \{a_1\}$). Если же v 2-пуста, то граф $G'_3 \in \mathcal{MOP}$, полученный из графа $G \setminus \{a_1, a_2, b_1\}$ добавлением ребра b_2v, соответствует G (здесь также $A = \{a_1\}$). Лемма 9 доказана.

Теорема 4. *Для всех $n \geqslant 6$ верно* $\mathrm{mi}_2(n, \mathcal{MOP}) = 1$.

Доказательство. Из лемм 4–9 следует, что критических графов не существует, тем самым $\mathrm{mi}_2(n, \mathcal{MOP}) \leqslant 1$. Докажем, что при всех

$n \geqslant 6$ найдётся максимальный внешнепланарный граф с единственным 2-ДНМ.

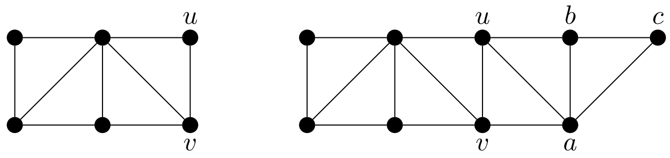

Рис. 3. Граф W_6' и полученный из него граф G_9

Обозначим через W_{2k}' $2k$-вершинный внешнепланарный граф, полученный из пути P_{2k-1} добавлением новой вершины степени $2k-1$. При всех $2k \geqslant 4$ верно $\mathrm{mi}_2(W_{2k}') = \mathrm{mi}_2(P_{2k-1}) = 1$. Теперь для всех $n \geqslant 4$ и графа $G_n \in \mathcal{MOP}$ с единственным 2-ДНМ построим граф $G_{n+3} \in \mathcal{MOP}$ с единственным 2-ДНМ. Выберем в G_n некоторую 2-универсальную вершину u и смежную с ней вершину v. Обозначим через G_{n+3} результат добавления в G вершин a, b, c и рёбер ab, bc, ac, au, bu, av (рис. 3). Ясно, что $G_{n+3} \in \mathcal{MOP}$ и для 2-ДНМ J графа G множество $J \cup \{c\}$ является 2-ДНМ графа G_{n+3}, что и требовалось. Теорема 4 доказана.

4. Планарные графы

Теорема 5. *Для всех $n \geqslant 1$ и $k \geqslant 4$ верно* $\mathrm{mi}_k(n, \mathcal{P}) = 1$.

Доказательство. При любом $n \geqslant 1$ пустой граф nK_1 содержит единственное k-ДНМ, откуда $\mathrm{mi}_k(n, \mathcal{P}) \geqslant 1$. Предположим, что при некотором $k \geqslant 4$ неравенство $\mathrm{mi}_k(n, \mathcal{P}) \leqslant 1$ не выполнено, и рассмотрим минимальный по числу вершин граф $G \in \mathcal{P}$, содержащий хотя бы два различных k-ДНМ J_1 и J_2. Покажем, что имеют место следующие свойства.

Свойство 1: $J_1 \cup J_2 = V(G)$. Если это не так, то в подграфе G, порождённом множеством $J_1 \cup J_2$ и содержащем менее $|V(G)|$ вершин, как J_1, так и J_2 являются k-ДНМ, что противоречит предположению о минимальности G.

Свойство 2: $J_1 \cap J_2 = \varnothing$. Если это не так, то для некоторой вершины $v \in V(G)$ верно $v \in J_1 \cap J_2$. Тогда вершина v изолированная в графе G, поскольку она не смежна ни с одной из вершин множества $J_1 \cup J_2$, а множество $V(G) \setminus (J_1 \cup J_2)$ пусто по предыдущему свойству. Следовательно, граф $G \setminus \{v\}$ содержит два различных k-ДНМ $J_1 \setminus v$ и $J_2 \setminus v$; снова получили противоречие с минимальностью G.

Таким образом, G является двудольным графом с долями J_1 и J_2. При этом $\delta(G) \geqslant k \geqslant 4$, поскольку G не содержит k-универсальных вершин, но тогда $G \notin \mathcal{P}$ по формуле Эйлера; противоречие. Теорема 5 доказана.

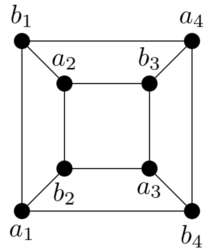

Рис. 4. Граф Q_3 и его 3-ДНМ $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ и $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$

На рис. 4 изображён граф трёхмерного куба Q_3. Легко проверить, что $\mathrm{mi}_3(Q_3) = 2$. Поскольку при любых $m, r \geqslant 0$ для $n = 8m + r$ верно $\mathrm{mi}_3(mQ_3 \cup rK_1) = 2^m$, то $\mathrm{mi}_3(n, \mathcal{PL}) \geqslant 2^{[n/8]}$. Из теоремы 2 следует неравенство $\mathrm{mi}_2(n, \mathcal{PL}) \geqslant 2^{[n/4]}$. Вопрос о том, точны ли данные оценки, остаётся открытым.

Цель оставшейся части раздела — для каждого $m \geqslant 1$ построить максимальный планарный граф, содержащий подграф mQ_3 и 2^m 3-ДНМ. Сначала покажем, что в каждый максимальный планарный граф можно добавить 5 вершин, не уменьшая числа 3-ДНМ в нём.

Лемма 10. *Для любого n-вершинного графа $G \in \mathcal{MP}$ существует $(n + 5)$-вершинный граф $G' \in \mathcal{MP}$ такой, что* $\mathrm{mi}_3(G) \leqslant \mathrm{mi}_3(G')$.

Доказательство. Если $\mathrm{mi}_3(G) = 0$, то доказывать нечего. Предположим, что $\mathrm{mi}_3(G) \geqslant 1$. Выберем вершину $w \in V(G)$ степени $\delta(G) \leqslant 5$. Поскольку $G \in \mathcal{MP}$ и все грани G являются треугольниками, в нём найдётся простой цикл, на котором лежат все вершины открытой окрестности $N(w)$. Значит, не более двух вершин $N(w)$ могут одновременно входить в 3-ДНМ G, тем самым w 3-универсальна в G.

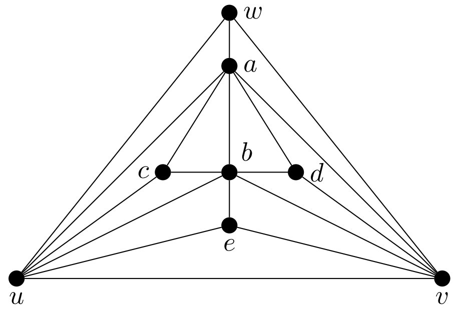

Рис. 5. Добавление 5 вершин в граф G

Рассмотрим одну из треугольных граней, содержащих w, и обозначим через u и v две другие вершины этой грани, они 3-пусты. Добавим вершину a в грань uvw, после этого добавим вершину b в грань uav и вершины c, d, e в грани uab, abv, uvb соответственно (рис. 5). Полученный граф обозначим через G'. Поскольку для любого 3-ДНМ J графа G множество $J \cup \{c, d, e\}$ является 3-ДНМ графа G', то $\mathrm{mi}_3(G) \leqslant \mathrm{mi}_3(G')$, что и требовалось. Лемма 10 доказана.

Теорема 6. *Для всех* $n \geqslant 12$ *верно* $\mathrm{mi}_3(n, \mathcal{MP}) \geqslant 2^{[n/50]-1}$. *При этом* $\mathrm{mi}_3(n, \mathcal{MP}) \geqslant 2^{[n/50]}$, *если* $n = 50m + r$, *где* $m \geqslant 0$ *и* $r \in \{0, 2\} \cup \{4, 5, 6, \dots, 49\}$.

Доказательство. Сначала покажем, что при всех $n \geqslant 12$ существует n-вершинный граф $G_n \in \mathcal{MP}$, содержащий хотя бы одно 3-ДНМ. Напомним, что через W_n обозначается n-вершинный граф, полученный путём добавления в цикл C_{n-1} новой вершины, смежной со всеми вершинами цикла. Для всех $s \geqslant 4$ построим граф G_{2s}, полученный из графа W_s добавлением вершины степени 3 в каждую из его $s - 1$ треугольных граней и добавлением вершины степени $s - 1$ во внешнюю грань. Ясно, что граф $G_{2s} \in \mathcal{MP}$ определён однозначно и его единственное 3-ДНМ содержит в точности те вершины, которые были добавлены в W_s (поскольку вершины степени 3 3-универсальны в G_{2s}). Таким образом, искомый граф G_n построен для всех чётных $n \geqslant 8$. По лемме 10 граф G_n существует для всех нечётных $n \geqslant 13$, что и требовалось.

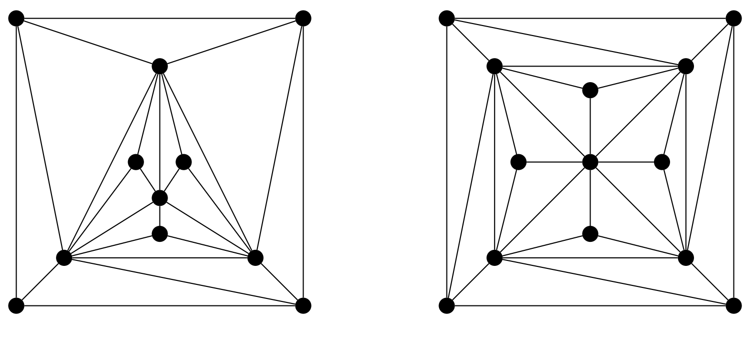

Рис. 6. Графы H и H'

Для всех $m \geqslant 1$ и $0 \leqslant s \leqslant 4$ построим непустой класс $\mathcal{G}_{m,s}$ максимальных планарных графов, содержащих $50m + 2s$ вершин и 2^m 3-ДНМ. Класс $\mathcal{G}_{1,s}$ состоит в точности из тех $(50 + 2s)$-вершинных графов, которые могут быть получены из графа Q_3 в результате замены $6 - s$ его граней 11-вершинным графом H и s оставшихся граней — 13-вершинным графом H' (рис. 6). Здесь под заменой грани подграфом понимаем замену вершин грани вершинами внешней грани подграфа и добавление в граф внутренних вершин подграфа вместе со всеми инцидентными им рёбрами. Несмотря на то, что результат такой замены не определён однозначно, все добавленные вершины, не принадлежавшие внешним граням, являются либо 3-универсальными степени 3, либо смежными с ними 3-пустыми. Таким образом, для любого графа $G_{1,s} \in \mathcal{G}_{1,s}$ верно $\mathrm{mi}_3(G_{1,s}) = \mathrm{mi}_3(Q_3) = 2$.

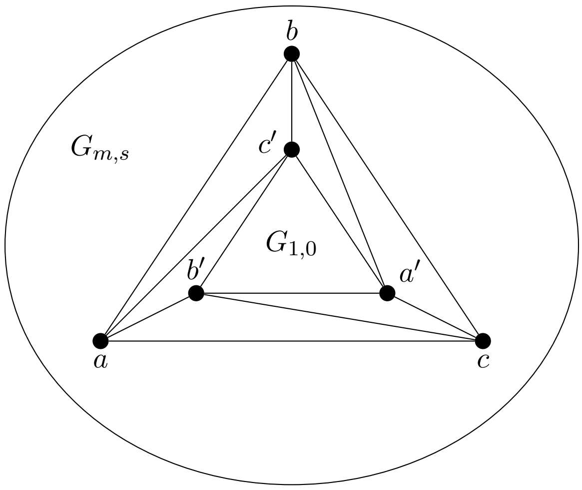

Рис. 7. Структура графа $G_{m+1,s}$

Рассмотрим граф $G'_{m+1,s} = G_{m,s} \cup G_{1,0}$, где $G_{m,s} \in \mathcal{G}_{m,s}$ и $G_{1,0} \in \mathcal{G}_{1,0}$. Можно считать, что в подграфе $G_{m,s}$ найдётся треугольник abc с 3-универсальной вершиной a и пустой внутренностью, а внешней гранью подграфа $G_{1,0}$ является треугольник $a'b'c'$ с 3-универсальной вершиной a'. Добавим в граф $G'_{m+1,s}$ рёбра ab', ac', ba', bc', ca', cb' и обозначим получившийся граф через $G_{m+1,s}$ (рис. 7). По построению $G_{m+1,s} \in \mathcal{MP}$. Поскольку $G_{m+1,s}$ получен из $G'_{m+1,s}$ соединением рёбрами нескольких пар 3-пустых вершин, $\mathrm{mi}_3(G_{m+1,s}) = \mathrm{mi}_3(G'_{m+1,s}) = 2^{m+1}$. Для всех $m \geqslant 1$ определим класс $\mathcal{G}_{m+1,s}$ как совокупность графов $G_{m+1,s}$, которые могут быть получены применением описанной процедуры.

Пусть $n = 50m+r$, где $m \geqslant 0$ и $0 \leqslant r \leqslant 49$. Если $r \notin \{1, 3\}$, то найдётся целое число $0 \leqslant s \leqslant 4$ такое, что $r - 2s = 5p \geqslant 0$. По лемме 10 найдётся n-вершинный граф G, содержащий не менее 2^m k-ДНМ (при $p = 0$ подойдёт любой граф из класса $\mathcal{G}_{m,s}$). Если же $r \in \{1, 3\}$, то найдётся целое число $0 \leqslant s \leqslant 4$ такое, что $50 + r - 2s = 5q$, а тогда по лемме 10 найдётся n-вершинный граф G, содержащий не менее 2^{m-1} k-ДНМ. Теорема 6 доказана.

Финансирование работы

Исследование выполнено в Санкт-Петербургском международном математическом институте им. Леонарда Эйлера при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075–15–2022–287).

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. **Nagy Z. L.** On the number of k-dominating independent sets // J. Graph Theory. 2017. V. 84, No. 4. P. 566–580.
2. **Gerbner D., Keszegh B., Methuku A., Patkós B., Vizer M.** An improvement on the maximum number of k-dominating independent sets // J. Graph Theory. 2019. V. 91, No. 1. P. 88–97.
3. **Moon J., Moser L.** On cliques in graphs // Israel J. Math. 1965. V. 3, No. 1. P. 23–28.
4. **Wood D. R.** On the number of maximal independent sets in a graph // Discrete Math. Theor. Comput. Sci. 2011. V. 13, No. 3. P. 17–19.
5. **Griggs J., Grinstead C., Guichard D.** The number of maximal independent sets in a connected graph // Discrete Math. 1988. V. 68. P. 211–220.
6. **Wilf H.** The number of maximal independent sets in a tree // SIAM J. Algebr. Discrete Methods. 1986. V. 7, No. 1. P. 125–130.
7. **Liu J.** Maximal independent sets in bipartite graphs // J. Graph Theory. 1993. V. 17, No. 4. P. 495–507.
8. **Hujter M., Tuza Z.** The number of maximal independent sets in triangle-free graphs // SIAM J. Discrete Math. 1993. V. 6, No. 2. P. 284–288.
9. **Jou M. J., Chang G.** Maximal independent sets in graphs with at most one cycle // Discrete Appl. Math. 1997. V. 79. P. 67–73.
10. **Ying G. C., Meng K. K., Sagan B. E., Vatter V. E.** Maximal independent sets in graphs with at most r cycles // J. Graph Theory. 2006. V. 53, No. 4. P. 270–282.
11. **Koh K. M., Goh C. Y., Dong F. M.** The maximum number of maximal independent sets in unicyclic connected graphs // Discrete Math. 2008. V. 308, No. 17. P. 3761–3769.
12. **Włoch A.** On 2-dominating kernels of graphs // Australas. J. Comb. 2012. V. 52. P. 273–284.
13. **Bednarz P., Włoch I.** On (2-d)-kernels in the Cartesian product of graphs // Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska. Sect. A. 2016. V. 70. P. 1–8.
14. **Bednarz P.** On (2-d)-kernels in the tensor product of graphs // Symmetry. 2021. V. 13. Paper ID 230. 9 p.

15. **Bednarz P.** On (2-d)-kernels in two generalizations of the Petersen graph // Symmetry. 2021. V. 13. Paper ID 1948. 10 p.

Талецкий Дмитрий Сергеевич

Статья поступила
4 мая 2023 г.

После доработки —
3 июля 2023 г.

Принята к публикации
22 сентября 2023 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2024. Vol. 31, No. 1. P. 109–128

UDC 519.17 DOI: 10.33048/daio.2024.31.770

ON THE NUMBER OF k-DOMINATING INDEPENDENT SETS IN PLANAR GRAPHS

D. S. Taletskii[1,2]

[1] National Research University "Higher School of Economics",
25/12 Bolshaya Pechyorskaya Street, 603155 Nizhny Novgorod, Russia
[2] Saint Petersburg State University,
7/9 Universitetskaya Embankment, 199034 Saint Petersburg, Russia
E-mail: `dmitalmail@gmail.com`

Abstract. A set J_k of graph vertices is said to be k-dominating independent ($k \geqslant 1$) if its vertices are pairwise adjacent and every vertex not in J_k is adjacent to at least k vertices in J_k. In the present paper, we obtain new upper bounds for the number of k-dominating independent sets for $k \geqslant 2$ in some planar graph classes. Illustr. 7, bibliogr. 15.

Keywords: independent set, dominating set, k-dominating independent set, planar graph.

References

1. **Z. L. Nagy,** On the number of k-dominating independent sets, *J. Graph Theory* **84** (4), 566–580 (2017).
2. **D. Gerbner, B. Keszegh, A. Methuku, B. Patkós,** and **M. Vizer,** An improvement on the maximum number of k-dominating independent sets, *J. Graph Theory* **91** (1), 88–97 (2019).
3. **J. Moon** and **L. Moser,** On cliques in graphs, *Israel J. Math.* **3** (1), 23–28 (1965).
4. **D. R. Wood,** On the number of maximal independent sets in a graph, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* **13** (3), 17–19 (2011).
5. **J. Griggs, C. Grinstead,** and **D. Guichard,** The number of maximal independent sets in a connected graph, *Discrete Math.* **68**, 211–220 (1988).
6. **H. Wilf,** The number of maximal independent sets in a tree, *SIAM J. Algebr. Discrete Methods* **7** (1), 125–130 (1986).
7. **J. Liu,** Maximal independent sets in bipartite graphs, *J. Graph Theory* **17** (4), 495–507 (1993).

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **18** (1), 167–178 (2024), DOI: 10.1134/S1990478924010149.

8. **M. Hujter** and **Z. Tuza,** The number of maximal independent sets in triangle-free graphs, *SIAM J. Discrete Math.* **6** (2), 284–288 (1993).
9. **M. J. Jou** and **G. Chang,** Maximal independent sets in graphs with at most one cycle, *Discrete Appl. Math.* **79**, 67–73 (1997).
10. **G. C. Ying, K. K. Meng, B. E. Sagan,** and **V. E. Vatter,** Maximal independent sets in graphs with at most r cycles, *J. Graph Theory* **53** (4), 270–282 (2006).
11. **K. M. Koh, C. Y. Goh,** and **F. M. Dong,** The maximum number of maximal independent sets in unicyclic connected graphs, *Discrete Math.* **308** (17), 3761–3769 (2008).
12. **A. Włoch,** On 2-dominating kernels of graphs, *Australas. J. Comb.* **52**, 273–284 (2012).
13. **P. Bednarz** and **I. Włoch,** On (2-d)-kernels in the Cartesian product of graphs, *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sect. A,* **70**, 1–8 (2016).
14. **P. Bednarz,** On (2-d)-kernels in the tensor product of graphs, *Symmetry* **13**, ID 230 (2021).
15. **P. Bednarz,** On (2-d)-kernels in two generalizations of the Petersen graph, *Symmetry* **13**, ID 1948 (2021).

Dmitrii S. Taletskii

Received May 4, 2023
Revised July 3, 2023
Accepted September 22, 2023