ISSN 2949-5598

# ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 31 № 1 2024

Новосибирск
Издательство Института математики

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2024. Т. 31, № 1. С. 19–34

УДК 512.534.1 DOI: 10.33048/daio.2024.31.783

# ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ ОТНОШЕНИЙ ПОЛУГРУППАМИ ИЗОТОННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

*А. А. Клюшин*[1,a], *И. Б. Кожухов*[2,3,b], *Д. Ю. Манилов*[4,c], *А. В. Решетников*[2,d]

[1] Cadence Design Systems,
Bld. 1, Penrose Dock, Penrose Quay, Cork, T23 KW81, Ireland
[2] Московский институт электронной техники,
пл. Шокина, 1, 124498 Москва, Россия
[3] Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, 119991 Москва, Россия
[4] НПЦ «Электронные вычислительно-информационные системы»,
ул. Конструктора Лукина, 14, с. 14, 124460 Зеленоград, Москва, Россия
E-mail: [a] `xkreed@gmail.com`, [b] `kozhuhov_i_b@mail.ru`, [c] `thdi@ro.ru`,
[d] `a_reshetnikov@hush.com`

**Аннотация.** В 1961 г. Л. М. Глускин доказал, что множество $X$ с заданным на нём нетривиальным квазипорядком $\rho$ с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма определяется полугруппой $T_\rho(X)$ изотонных преобразований множества $X$ (т. е. преобразований, сохраняющих $\rho$). Позже Л. М. Попова доказала аналогичное утверждение для полугруппы $P_\rho(X)$ частичных изотонных преобразований, причём $\rho$ — необязательно квазипорядок, а любое нетривиальное рефлексивное или антирефлексивное бинарное отношение на $X$. В настоящей работе доказано, что полугруппа $B_\rho(X)$ изотонных бинарных отношений (многозначных отображений) при тех же самых ограничениях на отношение $\rho$ также определяет данное отношение $\rho$ с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма. Кроме того, для каждого из условий $T_\rho(X) = T(X)$, $P_\rho(X) = P(X)$, $B_\rho(X) = B(X)$ авторами охарактеризованы $n$-арные отношения $\rho$, удовлетворяющие данному условию. Библиогр. 8.

**Ключевые слова:** полугруппа бинарных отношений, изотонное преобразование.

## Введение

Пусть $\rho$ — бинарное отношение, заданное на множестве $X$. Отображение $\alpha\colon X \to X$ *сохраняет* отношение $\rho$, если $(x, y) \in \rho \to (x\alpha, y\alpha) \in \rho$ для всех $x, y \in X$. Обозначим через $T_\rho(X)$ множество всех преобразований множества $X$, сохраняющих отношение $\rho \subseteq X^2$:

$$T_\rho(X) = \{\alpha \in T(X) \mid \alpha \text{ сохраняет } \rho\}.$$

Здесь через $T(X)$ обозначена *симметрическая полугруппа* на множестве $X$, т. е. множество всех преобразований $X \to X$.

Пусть заданы бинарные отношения $\rho \subseteq X^2$ и $\rho' \subseteq X'^2$. Предположим, что их полугруппы $T_\rho(X)$ и $T_{\rho'}(X')$ изоморфны друг другу. Как в таком случае могут быть связаны между собой $\rho$ и $\rho'$? Данный вопрос, а также ряд похожих вопросов, изучались в ряде работ разных авторов.

Л. М. Глускин рассмотрел в [1] обозначенную проблему в случае, когда $\rho$ — отношение квазипорядка, а $\rho'$ — произвольное рефлексивное отношение. Им было доказано, что при определённых ограничениях на квазипорядок $\rho$ его полугруппа $T_\rho(X)$ определяет $\rho$ с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма [1, лемма 4]. Эти ограничения очень простые: $\rho \neq \Delta_X$ и $\rho \neq \nabla_X$, где $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ — отношение равенства элементов множества $X$, а $\nabla_X = X \times X = \{(x, y) \mid x, y \in X\}$ — универсальное отношение на $X$.

В случае $\rho = \Delta_X$ или $\rho = \nabla_X$ полугруппа $T_\rho(X)$, вообще говоря, не определяет отношение $\rho$, поскольку в обоих этих случаях $T_\rho(X) = T(X)$.

Л. М. Попова получила в [2] результаты, аналогичные результатам Глускина, для полугрупп $P_\rho(X)$ и $P_{\rho'}(X')$, состоящих из всех частичных преобразований множеств $X$ и $X'$, сохраняющих бинарные отношения $\rho$ и $\rho'$ соответственно. Из леммы 2 в [2] следует, что если $\rho$ — рефлексивное или антирефлексивное бинарное отношение, а $\rho'$ — произвольное отношение и выполнено условие

$$\rho \notin \{\varnothing, \Delta_X, \nabla_X\}, \tag{1}$$

то полугруппа $P_\rho(X)$ определяет данное отношение $\rho$ с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма.

Бинарные отношения, удовлетворяющие условию (1), будем далее называть *нетривиальными*.

Поскольку множество $X$ с заданным на нём бинарным отношением $\rho$ — это то же самое, что ориентированный граф $G = (X, \rho)$ (возможно, содержащий петли) с множеством вершин $X$ и множеством рёбер $\rho$, вопрос о выявлении связей между отношением $\rho$ и полугруппами преобразований, сохраняющих $\rho$, сводится к вопросу о связи между графом $G$ и его производными полугруппами: полугруппой его полных эндоморфизмов $\operatorname{End} G$, частичных эндоморфизмов $\operatorname{PEnd} G$ и т. д. Результаты, описывающие связи такого рода, приведены в обзорной работе В. А. Молчанова [4].

Одним из основных результатов настоящей работы является доказательство того, что множество $X$ с заданным на нём нетривиальным рефлексивным или антирефлексивным бинарным отношением $\rho$ с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма определяется полугруппой $B_\rho(X)$ бинарных отношений, сохраняющих $\rho$. Соответствующую теорему можно считать продолжением исследований, представленных теоремой 1 в [1] и теоремами 1 и 2 в [2].

Для заданного на множестве $X$ $n$-арного отношения $\rho$ также можно ввести полугруппы $T_\rho(X)$, $P_\rho(X)$ и $B_\rho(X)$. Их можно рассматривать как полугруппы *изотонных* преобразований — преобразований, сохраняющих информацию о структуре ориентированного гиперграфа $(X, \rho)$. В данной работе мы находим условия выполнения каждого из равенств $T_\rho(X) = T(X)$, $P_\rho(X) = P(X)$ и $B_\rho(X) = B(X)$, интересных тем, что удовлетворяющие им $n$-арные отношения представляют тривиальный случай решения проблемы, о которой было сказано выше: найти условия на гиперграф $(X, \rho)$, при которых он определяется какой-либо из своих полугрупп изотонных преобразований.

Авторы придерживаются определений и обозначений из теории полугрупп, содержащихся в монографии [5]. В доказательстве теоремы 1 используются соображения, связанные с тем, что многие значимые подмножества полугрупп $T(X)$, $T_\rho(X)$, $P_\rho(X)$ и других полугрупп преобразований могут быть заданы формулами узкого исчисления предикатов [1]. Сведения по математической логике, связанные с проблематикой данной статьи, можно почерпнуть, например, из книги [7].

## 1. Основные определения и обозначения

Пусть $X$ — множество. *Квазипорядком* на множестве $X$ называется рефлексивное и транзитивное бинарное отношение на $X$. Пусть $T(X)$ обозначает полугруппу всех преобразований множества $X$, т. е. отображений $X \to X$ с умножением, осуществляемым слева направо: $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ для всех $x \in X$, $\alpha, \beta \in T(X)$. Если на $X$ задано бинарное отношение $\rho$, то будем называть отображение $\alpha\colon X \to X$ *изотонным* (или *сохраняющим отношение* $\rho$), если для любых $x, y \in X$

$$(x, y) \in \rho \to (x\alpha, y\alpha) \in \rho.$$

Множество $T_\rho(X)$ всех изотонных отображений $X \to X$ является подполугруппой полугруппы $T(X)$.

Обозначим через $\Delta_X$ отношение равенства на множестве $X$, а через $\nabla_X$ — универсальное отношение, т. е. $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$, $\nabla_X =$

[1] В другой терминологии — формулами логики первого порядка; формулами заданной сигнатуры.

$X \times X$. Будем часто опускать индекс $X$ и писать $\Delta$, $\nabla$ вместо $\Delta_X$, $\nabla_X$. Бинарное отношение $\sigma$ на множестве $X$ называется *тривиальным,* если $\sigma \in \{\varnothing, \Delta, \nabla\}$, в противном случае $\sigma$ называется *нетривиальным.* Бинарное отношение $\sigma$ называется *антирефлексивным*, если $\sigma \cap \Delta = \varnothing$. Для отношения $\sigma$ полагаем $\sigma^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in \sigma\}$.

*Частичным преобразованием* множества $X$ называется отображение $\alpha\colon X_1 \to X$, где $X_1 \subseteq X$. Множество $X_1$ — это *область определения* отображения $\alpha$: $X_1 = \operatorname{dom}\alpha$. *Образом* частичного преобразования $\alpha$ называется множество $\operatorname{im}\alpha = \{x\alpha \mid x \in \operatorname{dom}\alpha\}$. Обозначим через $P(X)$ множество всех частичных преобразований множества $X$ с умножением, определённым правилом

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta, \quad \text{если } x \in \operatorname{dom}\alpha \text{ и } x\alpha \in \operatorname{dom}\beta.$$

Очевидно, что $P(X)$ — полугруппа с нулём, причём нулём является пустое отображение — отображение, у которого область определения — пустое множество.

Полугруппу бинарных отношений на $X$ обозначим через $B(X)$. Умножение бинарных отношений обычное: $(x, y) \in \rho\sigma$ в том и только том случае, если $(x, z) \in \rho$, $(z, y) \in \sigma$ для некоторого $z \in X$. Бинарное отношение можно рассматривать как многозначное отображение: $x \mapsto y$, если $(x, y) \in \sigma$. Для $\sigma \in B(X)$ обозначим

$$\operatorname{dom}\sigma = \{x \in X \mid \exists\, y \in X\colon (x, y) \in \sigma\},$$
$$\operatorname{im}\sigma = \{y \in X \mid \exists\, x \in X\colon (x, y) \in \sigma\}.$$

Нетрудно проверить, что $T(X) \subseteq P(X) \subseteq B(X)$, причём каждая предыдущая из этих полугрупп является подполугруппой следующей.

Для частичных отображений $\alpha \in P(X)$ понятие сохранения бинарного отношения $\rho$ может быть определено различными не эквивалентными способами (см. [3]). Мы примем следующее определение, согласующееся с определением из [2]. Будем говорить, что частичное преобразование $\alpha \in P(X)$ *сохраняет заданное на $X$ бинарное отношение* $\rho$, если для любых $x, y \in \operatorname{dom}\alpha$

$$(x, y) \in \rho \to (x\alpha, y\alpha) \in \rho.$$

Легко проверяется, что множество $P_\rho(X)$ всех сохраняющих $\rho$ частичных преобразований $\alpha$ образует подполугруппу полугруппы $P(X)$. Аналогично будем говорить, что бинарное отношение $\alpha \in B(X)$ *сохраняет* бинарное отношение $\rho$, если для любых $x, y, x', y' \in X$ имеем

$$(x, y) \in \rho \wedge (x, x'), (y, y') \in \alpha \to (x', y') \in \rho.$$

Пусть $B_\rho(X)$ — множество всех бинарных отношений, сохраняющих $\rho$. Непосредственно проверяется, что $B_\rho(X)$ — подполугруппа полугруппы $B(X)$, кроме того, $B_\rho(X) \cap P(X) = P_\rho(X)$ и $B_\rho(X) \cap T(X) = T_\rho(X)$.

Пару $(X,\rho)$, где $X$ — множество, а $\rho$ — бинарное отношение на $X$, будем называть *структурой*. Пусть $(X,\rho)$ и $(X',\rho')$ — две структуры. Взаимно однозначное отображение $f\colon X \to X'$ называется *изоморфизмом* структур $(X,\rho)$ и $(X',\rho')$, если для любых $x, y \in X$ верно

$$(x,y) \in \rho \Leftrightarrow (xf, yf) \in \rho'.$$

Отображение $f\colon X \to X'$ — *антиизоморфизм* структур $(X,\rho)$ и $(X',\rho')$, если $f$ — изоморфизм $(X,\rho)$ и $(X',\rho'^{-1})$. Очевидно, что всякий изоморфизм $f\colon (X,\rho) \to (X',\rho')$ индуцирует изоморфизмы полугрупп:

$$T_\rho(X) \cong T_{\rho'}(X), \quad P_\rho(X) \cong P_{\rho'}(X), \quad B_\rho(X) \cong B_{\rho'}(X). \qquad (2)$$

Например, отображение

$$B_\rho(X) \to B_{\rho'}(X)\colon \alpha \mapsto \alpha' = \{(xf, yf) \mid (x,y) \in \alpha\}$$

представляет собой изоморфизм полугрупп, индуцированный изоморфизмом $f$ множеств $X$ и $X'$. Далее, нетрудно видеть, что

$$T_\rho(X) = T_{\rho^{-1}}(X), \quad P_\rho(X) = P_{\rho^{-1}}(X), \quad B_\rho(X) = B_{\rho^{-1}}(X), \qquad (3)$$

поэтому антиизоморфизм $g\colon (X,\rho) \to (X',\rho')$ также индуцирует изоморфизмы (2). Таким образом, отношение $\rho$ на множестве $X$, вообще говоря, не определяется однозначно полугруппой $T_\rho(X)$, или $P_\rho(X)$, или $B_\rho(X)$. Однако, как отмечалось во введении, для многих отношений $\rho$ имеет место определяемость с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма.

## 2. Предварительные рассмотрения

Пусть $S$ — полугруппа. Подмножество $M \subseteq S^n$ назовём L-*подмножеством*, если существует формула $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ логики первого порядка такая, что для всех $a_1,\ldots,a_n \in S$ соотношение $(a_1,\ldots,a_n) \in M$ выполняется тогда и только тогда, когда высказывание $\varphi(a_1,\ldots,a_n)$ истинно. L-подмножество, являющееся подполугруппой, называется L-*подполугруппой*. В настоящей работе доказано, что ряд интересных подмножеств полугрупп преобразований являются L-подмножествами, а значит, сохраняются при изоморфизмах. Если предикат $u(x_1,\ldots,x_n)$ на $S$ эквивалентен формуле логики первого порядка $\xi(x_1,\ldots,x_n)$, то этот факт будем записывать так: $u \equiv \xi$.

Определим некоторые специальные элементы полугруппы $B(X)$: константа $c_x = X \times \{x\}$; частичное тождественное отображение (для $Y \subseteq X$) $i_Y = \{(y,y) \mid y \in Y\}$; локальная единица $i_x = \{(x,x)\}$; атомарное отношение $j_{xy} = \{(x,y)\}$. Множество $C(X)$ всех констант является правым идеалом полугруппы $T(X)$, а если $\rho$ рефлексивно, то $C(X) \subseteq T_\rho(X)$. Положим

$$PI(X) = \{i_Y \mid Y \subseteq X\}, \quad I(X) = \{i_x \mid x \in X\}, \quad J(X) = \{j_{xy} \mid x, y \in X\}.$$

Нетрудно проверить, что

$$B_{\varnothing}(X) = B_{\nabla}(X) = B(X), \quad T_{\varnothing}(X) = T_{\Delta}(X) = T(X),$$

но при $|X| > 1$ $B_{\Delta}(X) \neq B(X)$, а $B_{\Delta}(X) = P(X)$.

Следующая лемма описывает случай, когда $\rho \in \{\varnothing, \Delta, \nabla\}$. Её доказательство является фактически небольшим видоизменением доказательства леммы 1 в [2]. Также отметим, что ниже утверждение (1) леммы 1 будет обобщено на $n$-арные отношения (см. теорему 3(1)).

**Лемма 1.** *Пусть $|X| > 1$. Тогда*
(1) *$B_\rho(X) = B(X)$ в том и только том случае, когда $\rho = \varnothing$ или $\rho = \nabla$;*
(2) *$B_\rho(X) = P(X)$ в том и только том случае, когда $\rho = \Delta$.*

Доказательство. Достаточность очевидна, докажем необходимость.

(1) Пусть $B_\rho(X) = B(X)$. Если $\rho \neq \varnothing$ и $\rho \neq \nabla$, то существуют $x, y, u, v \in X$ такие, что $(x, y) \in \rho$ и $(u, v) \notin \rho$. Рассмотрим бинарное отношение $\alpha = \{(x, u), (y, v)\}$. Нетрудно проверить, что $\alpha \in B(X) \setminus B_\rho(X)$.

(2) Пусть $B_\rho(X) = P(X)$. Если $\rho \nsubseteq \Delta$, то $(x, y) \in \rho$ для некоторых $x \neq y$. Рассмотрим бинарное отношение $\alpha = \{(x, x), (x, y)\}$. Нетрудно проверить, что $\alpha \in B_\rho(X) \setminus P(X)$. Пусть $\rho \subset \Delta$ (т. е. $\rho \subseteq \Delta$ и $\rho \neq \Delta$). Возьмём $x \in X$ такое, что $(x, x) \notin \rho$. Тогда для $\beta = \{(x, y)\}$ имеем $\beta \in P(X) \setminus B_\rho(X)$. Лемма 1 доказана.

Следующая лемма является видоизменением леммы 2 из [2].

**Лемма 2.** *Пусть $\rho$ — нетривиальное рефлексивное бинарное отношение на множестве $X$, а $\rho'$ — произвольное бинарное отношение на этом множестве. Тогда равенство $B_\rho(X) = B_{\rho'}(X)$ имеет место в том и только том случае, когда $\rho = \rho'$ или $\rho = \rho'^{-1}$.*

Доказательство. Достаточность очевидна ввиду равенств (3). Докажем необходимость.

Пусть $B_\rho(X) = B_{\rho'}(X)$. Если $\rho'$ тривиально, то $\rho$ также тривиально по лемме 1, что противоречит условию. Тем самым, $\rho'$ нетривиально.

Докажем, что $\rho'$ рефлексивно. Возьмём любой элемент $x \in X$. Так как $\rho$ рефлексивно, то $(x, x) \in \rho$. Так как $\rho' \neq \varnothing$, существует пара $(u, v) \in \rho'$. Положим $\alpha = \{(u, x), (v, x)\}$. Очевидно, что $\alpha \in B_\rho(X)$. Тогда $\alpha \in B'_\rho(X)$. Это означает, что $(x, x) \in \rho'$. Таким образом, $\rho'$ рефлексивно.

Докажем, что

$$\rho \cap \rho^{-1} = \rho' \cap \rho'^{-1}. \tag{4}$$

Ясно, что достаточно доказать включение $\rho' \cap \rho'^{-1} \subseteq \rho \cap \rho^{-1}$. Пусть $(x_1, y_1) \in \rho' \cap \rho'^{-1}$. Если $x_1 = y_1$, то $(x_1, y_1) \in \Delta$, а значит, $(x_1, y_1) \in \rho \cap \rho^{-1}$. Далее будем считать, что $x_1 \neq y_1$. Пусть $(x, y) \in \rho \cap \rho^{-1}$. Положим $\alpha =$

$\{(x_1,x),(y_1,y)\}$. Очевидно, что $\alpha \in B_\rho(X)$, следовательно, $\alpha \in B_{\rho'}(X)$, а значит, $(x_1,y_1) \in \rho \cap \rho^{-1}$.

Рассмотрим случай, когда $\rho$ симметрично. Пусть $(x_1,y_1) \in \rho'$. Докажем, что $(x_1,y_1) \in \rho$. Если $(y_1,x_1) \in \rho'$, то $(x_1,y_1) \in \rho' \cap \rho'^{-1} = \rho \cap \rho^{-1}$, откуда $(x_1,y_1) \in \rho$. Пусть $(y_1,x_1) \notin \rho'$. Положим $\alpha = \{(x_1,y_1),(y_1,x_1)\}$. Так как $\rho$ рефлексивно и симметрично, то $\alpha \in B_\rho(X)$. Значит, $\alpha \in B_{\rho'}(X)$, что противоречит соотношениям $(x_1,y_1) \in \rho'$, $(y_1,x_1) \notin \rho'$. Таким образом, доказано, что $\rho' \subseteq \rho$. Ввиду симметричности отношения $\rho$ из (4) вытекает, что $\rho \subseteq \rho'$. Следовательно, $\rho = \rho'$.

Осталось рассмотреть случай, когда $\rho$ несимметрично. В этом случае найдётся пара элементов $x, y \in X$ таких, что

$$(x,y) \in \rho, \quad (y,x) \notin \rho. \tag{5}$$

Далее доказательство разбивается на несколько случаев.

(а) $(x,y),(y,x) \notin \rho'$. Положим $\alpha = \{(x,y),(y,x)\}$. Тогда ввиду (5) $\alpha \in B_{\rho'}(X) \setminus B_\rho(X)$, что противоречит равенству $B_{\rho'}(X) = B_\rho(X)$.

(б) $(x,y),(y,x) \in \rho'$. Тогда $(x,y) \in \rho' \cap \rho'^{-1} = \rho \cap \rho^{-1}$, откуда $(y,x) \in \rho$, что противоречит условию.

(в) $(x,y) \in \rho', (y,x) \notin \rho'$. Возьмём любые $u,v \in X$ и положим $\alpha = \{(u,x),(v,y)\}$. Тогда $(u,v) \in \rho \leftrightarrow \alpha \in B_\rho(X)$. Ввиду (5) $(u,v) \in \rho' \leftrightarrow \alpha \in B_{\rho'}(X)$. Так как $B_\rho(X) = B_{\rho'}(X)$, то $(u,v) \in \rho \leftrightarrow (u,v) \in \rho'$. Следовательно, $\rho = \rho'$.

(г) $(x,y) \notin \rho', (y,x) \in \rho'$. Как и в случае (в), возьмём любые элементы $u,v \in X$ и положим $\alpha = \{(u,x),(v,y)\}$. Очевидно, что $\alpha \in B_{\rho'}(X) \leftrightarrow (u,v) \in \rho'^{-1}(X)$, а ввиду (5) $\alpha \in B_\rho(X) \leftrightarrow (u,v) \in \rho$. Так как $B_\rho(X) = B_{\rho'}(X)$, то $\rho = \rho'$. Лемма 2 доказана.

## 3. L-подмножества полугрупп $B(X)$ и $B_\rho(X)$

В этом разделе построим логические формулы, выделяющие определённые подмножества в полугруппе бинарных отношений. Не все из полученных здесь результатов будут использованы для доказательства основной теоремы. Мы их приводим, так как считаем, что они представляют самостоятельный интерес.

Пусть $S$ — полугруппа с нулём. Рассмотрим её подмножества

$$\begin{aligned} \mathrm{al}(S) &= \{\sigma \in S \mid \forall\, \alpha \in S\ (\sigma\alpha = 0 \to \alpha = 0)\}, \\ \mathrm{ar}(S) &= \{\sigma \in S \mid \forall\, \alpha \in S\ (\alpha\sigma = 0 \to \alpha = 0)\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Элементы из $\mathrm{al}(S)$ будем называть *левыми*, а элементы из $\mathrm{ar}(S)$ — *правыми неделителями нуля.* Если $S$ — полугруппа с единицей, то эти множества непусты, так как $1 \in \mathrm{al}(S) \cap \mathrm{ar}(S)$. Нетрудно проверить, что $\mathrm{al}(S)$ и $\mathrm{ar}(S)$ — подполугруппы полугруппы $S$, а $S \setminus \mathrm{al}(S)$ и $S \setminus \mathrm{ar}(S)$ — соответственно левый и правый идеалы.

**Утверждение 1.** *Полугруппа $T(X)$ является $L$-подполугруппой полугруппы $P(X)$. Кроме того, для произвольного бинарного отношения $\rho$ на множестве $X$ полугруппа $T_\rho(X)$ является $L$-подполугруппой полугруппы $P_\rho(X)$.*

Доказательство. Ввиду равенства (6) достаточно доказать, что

$$T(X) = \mathrm{ar}(P(X)), \quad T_\rho(X) = \mathrm{ar}(P_\rho(X)).$$

Пусть $\alpha \in \mathrm{ar}(P(X))$. Предположим, что $\operatorname{dom}\alpha \neq X$. Возьмём любой элемент $x \in X \setminus \operatorname{dom}\alpha$. Локальная единица $i_x$ такова, что $i_x \in P(X)$, $i_x \neq 0$ и $i_x\alpha = 0$; противоречие с тем, что $\alpha \in \mathrm{ar}(P(X)$. Следовательно, $\operatorname{dom}\alpha = X$, а значит, $\alpha \in T(X)$. Наоборот, если $\alpha \in T(X)$, то для любого $\beta \neq 0$ имеем $\operatorname{dom}\beta\alpha = \operatorname{dom}\beta \neq \varnothing$, а значит, $\alpha \in \mathrm{ar}(P(X))$.

Очевидно, что для любого бинарного отношения $\rho$ на множестве $X$ имеет место соотношение $i_x \in P_\rho(X)$, поэтому предыдущие рассуждения остаются верными для доказательства равенства $T_\rho(X) = \mathrm{ar}(P_\rho(X))$. Утверждение 1 доказано.

Рассмотрим вновь произвольную полугруппу $S$ с нулём. Для элемента $a \in S$ определим его *правый аннулятор* $r(a)$ и *левый аннулятор* $l(a)$ равенствами

$$r(a) = \{b \in S \mid ab = 0\}, \quad l(a) = \{b \in S \mid ba = 0\}.$$

Очевидно, что $r(a)$ и $l(a)$ — левый и правый идеалы полугруппы $S$. Пусть $\mathcal{R} = \{r(a) \mid a \neq 0\}$, $\mathcal{L} = \{l(a) \mid a \neq 0\}$. Заметим, что $\mathcal{R}$ и $\mathcal{L}$ частично упорядочены отношением включения $\subseteq$ . Условие $r(a_1) \subseteq r(a_2)$ можно выразить формулой логики первого порядка:

$$r(a_1) \subseteq r(a_2) \equiv \forall\, b \in S\ (a_1 b = 0 \to a_2 b = 0).$$

Аналогично логической формулой можно записать условие $l(a_1) \subseteq l(a_2)$. Тот факт, что $r(a)$, $a \neq 0$, — максимальный элемент в $\mathcal{R}$, также записывается логической формулой:

$$a \neq 0 \wedge \forall\, a' \neq 0\ (\forall\, b\ (ab = 0 \to a'b = 0) \to \forall\, b\ (a'b = 0 \to ab = 0)). \quad (7)$$

Аналогично формулой логики первого порядка записывается максимальность в $\mathcal{L}$ левого аннулятора $l(a)$, $a \neq 0$:

$$a \neq 0 \wedge \forall\, a' \neq 0\ ((\forall\, b\ (ba = 0 \to ba' = 0) \to (\forall\, b\ (ba' = 0 \to ba = 0)). \quad (8)$$

Пусть $S = B(X)$. Нетрудно проверить, что для $\alpha \in B(X)$ имеем

$$r(\alpha) = \{\beta \mid \operatorname{dom}\beta \cap \operatorname{im}\alpha = \varnothing\}, \quad l(\alpha) = \{\beta \mid \operatorname{im}\beta \cap \operatorname{dom}\alpha = \varnothing\},$$

поэтому для любого $\alpha \neq 0$

$$r(\alpha) \text{ максимален в } \mathcal{R} \Leftrightarrow |\operatorname{im}\alpha| = 1, \quad (9)$$

$$l(\alpha) \text{ максимален в } \mathcal{L} \Leftrightarrow |\operatorname{dom}\alpha| = 1. \quad (10)$$

Для произвольного бинарного отношения $\rho$ на множестве $X$ положим $J_\rho(X) = J(X) \cap B_\rho(X)$.

**Лемма 3.** *Для любого бинарного отношения $\rho$ на множестве $X$ множество $I(X)$ всех локальных единиц и множество $J_\rho(X)$ являются L-подмножествами полугруппы $B_\rho(X)$.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что утверждения (9) и (10) верны не только при $S = B(X)$, но и при $S = B_\rho(X)$. Ввиду (9) и (10) локальные единицы $i_x$ таковы, что правый аннулятор $r(i_x)$ максимален в $\mathcal{R}$, а левый аннулятор $l(i_x)$ максимален в $\mathcal{L}$. Максимальность правого аннулятора $r(a)$ для $a \neq 0$ отмечается формулой (7), а левого аннулятора — формулой (8). Формулы (7) и (8) являются формулами логики первого порядка. Очевидно, что формулы (7) и (8), взятые вместе, определяют множество $J_\rho(X)$, поэтому $J_\rho(X)$ — L-подмножество. Нетрудно видеть, что $i_x \in B_\rho(X)$ для любого $x \in X$ (и любого бинарного отношения $\rho$) и $i_x = j_{xx}$. Локальные единицы $i_x$ выделяются среди элементов множества $J_\rho(X)$ свойством идемпотентности: $\alpha^2 = \alpha$ для $\alpha = i_x$ и $\alpha^2 \neq \alpha$ для $\alpha = j_{xy}$ при $x \neq y$. Следовательно, $I$ — L-подмножество полугруппы $B_\rho(X)$. Лемма 3 доказана.

**Утверждение 2.** *Для любого бинарного отношения $\rho$ на множестве $X$ полугруппа $P_\rho(X)$ является L-подполугруппой полугруппы $B_\rho(X)$.*

Доказательство. Очевидно, что для отношения $\alpha \in B_\rho(X)$ имеет место $\alpha \in P_\rho(X)$ в том и только том случае, когда $\alpha$ не содержит одновременно двух пар вида $(x, y)$, $(x, z)$, где $y \neq z$. Проверим, что

$$\alpha \in P_\rho(X) \equiv \forall\, \beta \in I(X)\ (\beta\alpha = 0 \vee \beta\alpha \in J_\rho(X)). \tag{11}$$

Действительно, пусть $\alpha \in B_\rho(X) \setminus P_\rho(X)$. Тогда существуют $x, y, z \in X$ такие, что $(x, y), (x, z) \in \alpha$ и $y \neq z$. Имеем $i_x\alpha \ni (x, y), (x, z)$, поэтому $i_x\alpha \neq 0$ и $i_x\alpha \notin J_\rho(X)$, т. е. правая часть (11) ложна. Пусть $\alpha \in P_\rho(X)$, а $\beta \in I(X)$ таково, что $\beta\alpha \neq 0$. Имеем $\beta = i_x$ при некотором $x$, поэтому $|\operatorname{dom}(\beta\alpha)| = 1$. Если $\beta\alpha \notin J_\rho(X)$, то $|\operatorname{im}(\beta\alpha)| \geqslant 2$, т. е. $(x, y), (x, z) \in \beta\alpha$ для некоторых $y, z \in X$, $y \neq z$. Очевидно, что $\beta\alpha = (\{x\} \times X) \cap \alpha$. Отсюда $(x, y), (x, z) \in \beta\alpha$, что противоречит условию $\alpha \in P_\rho(X)$. Таким образом, доказано (11), а так как $I(X)$ и $J_\rho(X)$ — L-подмножества (по лемме 3), то $P_\rho(X)$ — L-подполугруппа. Утверждение 2 доказано.

## 4. Теорема Глускина для многозначных отображений

Перед тем как перейти к доказательству теоремы, сделаем

**Замечание 1.** Понятие бинарного отношения на множестве $A$, как подмножества $\sigma \subseteq A \times A$, можно обобщить, считая для произвольных множеств $A$ и $B$ бинарным отношением между элементами этих множеств произвольное подмножество $\sigma \subseteq A \times B$. Умножение $\sigma\tau$ отношений $\sigma \subseteq A \times B$ и $\tau \subseteq B \times C$ осуществляется обычным образом: $\sigma\tau \subseteq A \times C$, причём $(a, c) \in \sigma\tau$ в том и только том случае, когда $(a, b) \in \sigma$ и $(b, c) \in \tau$ для некоторого $b \in B$ (см. [8]). В этом смысле всякое отображение $A \to B$, частичное отображение $A_1 \to B$ и многозначное отображение $A \to 2^B$ являются бинарными отношениями — подмножествами множества $A \times B$. При этом произведение отображений совпадает с произведением бинарных отношений.

Теорему Глускина [1, теорема 1] можно переформулировать так: если $\varphi\colon T_{\rho_1}(X_1) \to T_{\rho_2}(X_2)$ — изоморфизм полугрупп, где $\rho_1$ — квазипорядок на $X_1$, а $\rho_2$ — нетривиальное рефлексивное бинарное отношение на $X_2$, то $\varphi$ имеет вид $\varphi\colon \alpha \mapsto f^{-1}\alpha f$, где $f\colon X_1 \to X_2$ — изоморфизм или антиизоморфизм структуры $(X_1, \rho_1)$ на структуру $(X_2, \rho_2)$:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & X_2 \\ {\scriptstyle\alpha}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\alpha\varphi} \\ X_1 & \xrightarrow[f]{} & X_2 \end{array}.$$

Отметим, что правую часть равенства $\alpha\varphi = f^{-1}\alpha f$ можно понимать как произведение бинарных отношений $f^{-1} \subseteq X_2 \times X_1$, $\alpha \subseteq X_1 \times X_1$, $f \subseteq X_1 \times X_2$, а левую часть — как бинарное отношение $\alpha\varphi \subseteq X_2 \times X_2$.

**Теорема 1.** *Пусть $\rho_1$ — нетривиальное рефлексивное или антирефлексивное отношение на множестве $X_1$, $\rho_2$ — произвольное нетривиальное отношение на множестве $X_2$. Полугруппы $B_{\rho_1}(X_1)$ и $B_{\rho_2}(X_2)$ изоморфны тогда и только тогда, когда структура $(X_1, \rho_1)$ изоморфна одной из структур $(X_2, \rho_2)$ или $\left(X_2, \rho_2^{-1}\right)$. При этом всякий изоморфизм $\varphi$ полугруппы $B_{\rho_1}(X_1)$ на $B_{\rho_2}(X_2)$ имеет вид*

$$\alpha \in B_{\rho_1}(X_1) \mapsto \alpha\varphi = f^{-1}\alpha f \in B_{\rho_2}(X_2),$$

*где $f$ — изоморфизм или антиизоморфизм структуры $(X_1, \rho_1)$ на $(X_2, \rho_2)$.*

Доказательство. Достаточность очевидна, докажем необходимость. Пусть имеется изоморфизм полугрупп $\varphi\colon B_{\rho_1}(X_1) \to B_{\rho_2}(X_2)$. Поскольку $P_{\rho_1}(X_1)$ и $P_{\rho_2}(X_2)$ являются L-полугруппами, изоморфизм $\varphi$ индуцирует изоморфизм $\varphi'\colon P_{\rho_1}(X_1) \to P_{\rho_2}(X_2)$. По теоремам Поповой [2, теоремы 1, 2] существует изоморфизм или антиизоморфизм $f$ структур $(X_1, \rho_1)$ и $(X_2, \rho_2)$ такой, что $\alpha\varphi' = f^{-1}\alpha f$. Проверим, что $\alpha\varphi = f^{-1}\alpha f$.

Рассмотрим изоморфизм полугрупп $\psi\colon B_{\rho_2}(X_2) \to B_{\rho_1}(X_1)$, который индуцирован изоморфизмом структур $f^{-1}\colon (X_2, \rho_2) \to (X_1, \rho_1)$. Композиция $\varphi\psi = \xi$ даёт автоморфизм полугруппы $B_{\rho_1}(X_1)$, который действует тождественно на подполугруппе $P_{\rho_1}(X_1)$. Докажем, что $\xi$ действует тождественно на всей полугруппе $B_{\rho_1}(X_1)$.

Пусть $\sigma \in B_{\rho_1}(X_1)$ и $\sigma\xi = \tau$. Покажем, что $\sigma = \tau$, для чего проверим включение $\sigma \subseteq \tau$. Обратное включение $\tau \subseteq \sigma$ доказывается аналогично. Пусть $\sigma \not\subseteq \tau$, т. е. существует $(a, b) \in \sigma \setminus \tau$. Рассмотрим частичные константы $i_a = \{(a, a)\}$ и $i_b = \{(b, b)\}$, которые, очевидно, принадлежат $PT_{\rho_1}(X_1)$. Заметим, что бинарное отношение $i_a\sigma i_b = \{(a, b)\}$ непусто и $i_a\sigma i_b \in PT_{\rho_1}(X_1)$. Тогда $i_a\sigma i_b = i_a\sigma i_b\xi = i_a\tau i_b \neq \varnothing$, а это противоречит тому факту, что $(a, b) \notin \tau$. Следовательно, $\sigma \subseteq \tau$. Аналогично $\tau \subseteq \sigma$, откуда следует $\sigma = \tau$.

Тем самым показано, что автоморфизм $\xi$ действует тождественно на всём $B_{\rho_1}(X_1)$. Это и означает справедливость равенства $\alpha\varphi = f^{-1}\alpha f$. Теорема 1 доказана.

## 5. Полугруппы, сохраняющие $n$-арное отношение

Перейдём к рассмотрению ситуации, когда на множестве $X$ задано $n$-арное отношение $\rho$. *Диагональ* $\Delta$ и *универсальное отношение* $\nabla$ определяются аналогично бинарному случаю:

$$\Delta = \{(x, x, \ldots, x) \in X^n \mid x \in X\}, \quad \nabla = X^n.$$

Элементы $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ будем рассматривать как отображения $\overline{x}\colon \{1, 2, \ldots, n\} \to X : i \mapsto x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Будем говорить, что отношение $\rho \subseteq X^n$ удовлетворяет условию $(*)$, если

$$\forall\, \overline{x}, \overline{y} \in X^n \ (\overline{x} \in \rho \wedge \ker \overline{y} \supseteq \ker \overline{x} \to \overline{y} \in \rho).$$

Нетрудно видеть, что в случае $n = 2$ для $\overline{x} = (x_1, x_2)$ имеем

$$\ker \overline{x} = \begin{cases} \nabla_{\{1,2\}} & \text{при } x_1 = x_2, \\ \Delta_{\{1,2\}} & \text{при } x_1 \neq x_2, \end{cases}$$

поэтому в случае $n = 2$ условию $(*)$ удовлетворяют только бинарные отношения $\varnothing$, $\Delta_X$ и $\nabla_X$, в случае $n > 2$ имеются и другие отношения с этим свойством.

Для дальнейшего понадобится ещё одно хорошо известное утверждение, доказательство которого не приводим. Напомним, что умножение отображений осуществляем слева направо, т. е. $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$.

**Лемма 4.** *Пусть $A, B, C$ — произвольные множества. Тогда*

(1) *для отображений $\alpha\colon A \to C$ и $\beta\colon A \to B$ существует $\gamma\colon B \to C$ такое, что $\alpha = \beta\gamma$, в том и только том случае, когда $\ker\alpha \supseteq \ker\beta$;*

(2) *для отображений $\alpha\colon B \to A$ и $\beta\colon C \to A$ существует $\gamma\colon B \to C$ такое, что $\alpha = \gamma\beta$, в том и только том случае, когда $\operatorname{im}\alpha \subseteq \operatorname{im}\beta$.*

Определим полугруппы $T_\rho(X)$, $P_\rho(X)$ и $B_\rho(X)$ в случае $n$-арного отношения $\rho$ на множестве $X$. Для $\overline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ и $\alpha \in T(X)$ полагаем $\overline{x}\alpha = (x_1\alpha, \ldots, x_n\alpha)$. Если $\alpha \in P(X)$ и $x_1, \ldots, x_n \in \operatorname{dom}\alpha$, также полагаем $\overline{x}\alpha = (x_1\alpha, \ldots, x_n\alpha)$. В этих обозначениях

$$T_\rho(X) = \{\alpha \in T(X) \mid \forall\, \overline{x} \in X^n\ (\overline{x} \in \rho \to \overline{x}\alpha \in \rho\},$$

$$P_\rho(X) = \{\alpha \in P(X) \mid \forall\, \overline{x} \in (\operatorname{dom} X)^n\ (\overline{x} \in \rho \to \overline{x}\alpha \in \rho\},$$

$$B_\rho(X) = \{\alpha \in B(X) \mid \forall\, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n' \in X$$
$$((x_1, \ldots, x_n) \in \rho \wedge (x_1, x_1'), \ldots, (x_n, x_n') \in \alpha \to (x_1', \ldots, x_n') \in \rho)\}.$$

Следующая теорема даёт необходимые и достаточные условия выполнения равенств $T_\rho(X) = T(X)$ и $P_\rho(X) = P(X)$ в $n$-арном случае.

**Теорема 2.** *Пусть $\rho$ — $n$-арное отношение на множестве $X$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $T_\rho(X) = T(X)$;

(2) $P_\rho(X) = P(X)$;

(3) *$\rho$ удовлетворяет условию $(*)$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (3) Пусть $\overline{x} \in \rho$, $\overline{y} \in X^n$ и $\ker\overline{y} \supseteq \ker\overline{y}$. По лемме 4(2) существует отображение $\alpha \in T(X)$ такое, что $\overline{x}\alpha = \overline{y}$. Так как $T_\rho(X) = T(X)$, то $\alpha \in T_\rho(X)$, поэтому $\overline{y} \in \rho$. Таким образом, $\rho$ удовлетворяет условию $(*)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Рассуждая, как выше, предположим, что $\overline{x} \in \rho$, $\overline{y} \in X^n$ и $\ker\overline{y} \supseteq \ker\overline{x}$. По лемме 4(2) $\overline{x}\alpha = \overline{y}$ для некоторого $\alpha \in T(X)$. Так как $T(X) \subseteq P(X)$, то $\alpha \in P(X)$. По условию $P(X) = P_\rho(X)$, поэтому $\alpha \in P_\rho(X)$. Следовательно, $\overline{y} \in \rho$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Пусть $\alpha \in P(X)$ и $\overline{x} \in \rho \cap ((\operatorname{dom}\alpha)^n$. Так как $x_1, \ldots, x_n \in \operatorname{dom}\alpha$, то $\overline{x}\alpha$ существует. Очевидно, что $\ker(\overline{x}\alpha) \supseteq \ker\overline{x}$, поэтому из условия $(*)$ получаем $\overline{\alpha} \in \rho$. Следовательно, $\alpha \in P_\rho(X)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Пусть $\alpha \in T(X)$. Тогда $\alpha \in P(X)$. Ввиду доказанного (3) $\Rightarrow$ (2) имеем равенство $P_\rho(X) = P(X)$. Следовательно, $\alpha \in P_\rho(X)$. Так как $\alpha \in T(X)$, то $\alpha \in T_\rho(X)$.

**Теорема 3.** *Пусть $\rho$ — $n$-арное отношение на множестве $X$. Тогда*

(1) *$B_\rho(X) = B(X)$ в том и только том случае, если $\rho \in \{\varnothing, \nabla\}$;*

(2) *если $T(X) \subseteq B_\rho(X)$, то $\rho$ удовлетворяет условию $(*)$.*

Доказательство. (1) Достаточность очевидна, докажем необходимость. Пусть $\rho \neq \varnothing$ и $\rho \neq \nabla$. Тогда существуют $\overline{x} \in \rho$, $\overline{y} \notin \rho$. Очевидно, что для бинарного отношения $\alpha = \{(x_1, y_1), \ldots, (x_n), y_n)\}$ имеет место соотношение $\alpha \notin B_\rho(X)$.

(2) Пусть $\rho$ не удовлетворяет условию $(*)$. Тогда существуют такие $\overline{x}, \overline{y} \in X^n$, что $\overline{x} \in \rho$, $\ker \overline{y} \supseteq \ker \overline{x}$, но $\overline{y} \notin \rho$. По лемме 4(2) существует $\alpha \in T(X)$ такое, что $\overline{y} = \overline{x}\alpha$. Очевидно, что $\alpha \notin B_\rho(X)$.

**Замечание 2.** В бинарном случае ($n = 2$) условию $(*)$ удовлетворяют ровно три отношения — $\varnothing$, $\Delta$ и $\nabla$. Лемма 1 показывает, что условие $(*)$ влечёт выполнение одного из равенств $B_\rho(X) = B(X)$, $B_\rho(X) = P(X)$. При $n > 2$ это неверно, как показывает приводимый ниже пример. Необходимые и достаточные условия выполнения равенства $B_\rho(X) = P(X)$ авторам неизвестны.

Изложение примера сделаем после введения некоторых обозначений. Для натурального числа $k$ положим

$$B^{(k)}(X) = \{\sigma \in B(X) \mid |\operatorname{im} \sigma| \leqslant k\}.$$

Очевидно, что $B^{(k)}(X)$ — левый идеал полугруппы $B(X)$. Далее, пусть

$$\sigma_k = \{\overline{x} \in X^n \mid |\operatorname{im} \overline{x}| \leqslant k\}.$$

Так же ясно, что $\sigma_k$ удовлетворяет условию $(*)$.

**Пример.** Пусть $2 \leqslant k < n$ и $|X| > k$. Тогда $\sigma_k$ удовлетворяет условию $(*)$, но $B_{\sigma_k}(X) \neq B(X), P(X), T(X)$. Докажем это. Заметим вначале, что $B^{(k)}(X) \subseteq B_{\sigma_k}(X)$. Действительно, если $\alpha \in B^{(k)}(X)$ и $\overline{x} \in \sigma_k$, то $|\operatorname{im}(\overline{x}\alpha)| \leqslant |\operatorname{im} \alpha| \leqslant k$, откуда $\overline{x}\alpha \in \sigma_k$. Далее, так как $k \geqslant 2$, то $P(X) \subset B^{(k)}(X) \subseteq B_{\sigma_k}(X)$. Кроме того, ввиду неравенства $k < n$ имеем $B_{\sigma_k}(X) \neq B(X)$.

### Финансирование работы

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22–11–00052).

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Литература

1. **Глускин Л. М.** Полугруппы изотонных преобразований // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, вып. 5. С. 157–162.
2. **Попова Л. М.** Полугруппы частичных эндоморфизмов множества с отношением // Сиб. мат. журн. 1963. Т. 4, № 2. С. 309–317.

3. **Кожухов И. Б., Ярошевич В. А.** Полугруппы отображений, сохраняющих бинарное отношение // Фундам. и прикл. математика. 2008. Т. 14, вып. 7. С. 129–135.
4. **Molchanov V. A.** Semigroups of mappings on graphs // Semigroup Forum. 1983. V. 27. P. 155–199.
5. **Клиффорд А., Престон Г.** Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. М.: Мир, 1972.
6. **Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.** Математическая логика. М.: Наука, 1987. 336 с.
7. **Плоткин Б. И.** Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966. 604 с.
8. **Вагнер В. В.** Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и её приложения. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1965. С. 3–178.


*Клюшин Алексей Александрович*
*Кожухов Игорь Борисович*
*Манилов Дмитрий Юрьевич*
*Решетников Артём Владимирович*

Статья поступила
28 августа 2023 г.
После доработки —
6 сентября 2023 г.
Принята к публикации
22 сентября 2023 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2024. Vol. 31, No. 1. P. 19–34

UDC 512.534.1 DOI: 10.33048/daio.2024.31.783

# DEFINABILITY OF RELATIONS BY SEMIGROUPS OF ISOTONE TRANSFORMATIONS

*A. A. Klyushin*[1, a], *I. B. Kozhukhov*[2, 3, b],
*D. Yu. Manilov*[4, c], and *A. V. Reshetnikov*[2, d]

[1] Cadence Design Systems,
Bld. 1 Penrose Dock, Penrose Quay, Cork, T23 KW81, Ireland

[2] National Research University of Electronic Technology,
1 Shokin Square, 124498 Moscow, Russia

[3] Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, 119991 Moscow, Russia

[4] ELVEES Research and Development Center,
14 Bld. 14 Konstruktor Lukin Street, 1244660 Zelenograd, Moscow, Russia

E-mail: [a] `xkreed@gmail.com`, [b] `kozhuhov_i_b@mail.ru`, [c] `thdi@ro.ru`,
[d] `a_reshetnikov@hush.com`

**Abstract.** In 1961, L. M. Gluskin proved that a given set $X$ with an arbitrary nontrivial quasiorder $\rho$ is determined up to isomorphism or anti-isomorphism by the semigroup $T_\rho(X)$ of all isotone transformations of $(X, \rho)$, i. e., the transformations of $X$ preserving $\rho$. Subsequently, L. M. Popova proved a similar statement for the semigroup $P_\rho(X)$ of all partial isotone transformations of $(X, \rho)$; here the relation $\rho$ does not have to be a quasiorder but can be an arbitrary nontrivial reflexive or antireflexive binary relation on the set $X$. In the present paper, under the same constraints on the relation $\rho$, we prove that the semigroup $B_\rho(X)$ of all isotone binary relations (set-valued mappings) of $(X, \rho)$ determines $\rho$ up to an isomorphism or anti-isomorphism as well. In addition, for each of the conditions $T_\rho(X) = T(X)$, $P_\rho(X) = P(X)$, $B_\rho(X) = B(X)$, we enumerate all $n$-ary relations $\rho$ satisfying the given condition. Bibliogr. 8.

**Keywords:** semigroup of binary relations, isotone transformation.

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **18** (1), 60–69 (2024), DOI: 10.1134/S199047892401006X.

## References


1. **L. M. Gluskin,** Semigroups of isotone transformations, *Usp. Mat. Nauk* **16** (5), 157–162 (1961) [Russian].
2. **L. M. Popova,** Semigroups of partial endomorphisms of a set with a relation, *Sib. Mat. Zh.* **4** (2), 309–317 (1963) [Russian].
3. **I. B. Kozhukhov** and **V. A. Yaroshevich,** Transformation semigroups preserving a binary relation, *Fundam. Prikl. Mat.* **14** (7), 129–135 (2008) [Russian] [*J. Math. Sci.* **164** (2), 240–244 (2010)].
4. **V. A. Molchanov,** Semigroups of mappings on graphs, *Semigroup Forum* **27**, 155–199 (1983).
5. **A. H. Clifford** and **G. B. Preston,** *The Algebraic Theory of Semigroups,* Vol. 1 (AMS, Providence, 1961; Mir, Moscow, 1972 [Russian]).
6. **Yu. L. Ershov** and **E. A. Palyutin,** *Mathematical Logic* (Nauka, Moscow, 1987) [Russian].
7. **B. I. Plotkin,** *Automorphism Groups of Algebraic Systems* (Nauka, Moscow, 1966) [Russian].
8. **V. V. Vagner,** Relation theory and algebra of partial mappings // Theory of Semigroups and Its Applications (Izd. Saratov. Univ., Saratov, 1965), pp. 3–178 [Russian].


*Aleksey A. Klyushin*
*Igor B. Kozhukhov*
*Dmitry Yu. Manilov*
*Artyom V. Reshetnikov*

Received August 28, 2023
Revised September 6, 2023
Accepted September 22, 2023