ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 31 № 1 2024

Новосибирск
Издательство Института математики

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2024. Т. 31, № 1. С. 5–18

УДК 519.85+517.518.244 DOI: 10.33048/daio.2024.31.779

ВЫПУКЛОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Д. Н. Баротов

Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации,
4-й Вешняковский пр-д, 4, 109456 Москва, Россия

E-mail: dnbarotov@fa.ru

Аннотация. Строится выпуклое продолжение произвольной булевой функции на множество $[0,1]^n$. Более того, доказывается, что для любой булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не имеющей соседних точек на множестве $\operatorname{supp} f$, построенная функция $f_C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является единственным суммарно максимально выпуклым продолжением на $[0,1]^n$. На базе этого, в частности, конструктивно утверждается, что задача решения произвольной системы булевых уравнений может быть сведена к задаче минимизации функции, любой локальный минимум которой в искомой области является глобальным минимумом, и тем самым для этой задачи проблема локальных минимумов полностью решается. Библиогр. 15.

Ключевые слова: выпуклое продолжение функции, система булевых уравнений, SAT, безусловная оптимизация, булева функция, локальный минимум.

Введение

Системы булевых уравнений являются важным объектом в математике, компьютерных и прикладных науках, появляющимся повсеместно в различном виде [1–5]. В связи с этим, с одной стороны, для таких систем разрабатываются новые направления, методы и алгоритмы, а с другой — совершенствуются существующие направления, методы и алгоритмы решения таких систем. Одно из направлений заключается в том, что, во-первых, система булевых уравнений, заданная над кольцом булевых полиномов, трансформируется в систему уравнений над полем действительных чисел, а во-вторых, трансформированная система сводится либо к задаче численной минимизации соответствующей целевой функции [6–8], либо к задаче MILP или QUBO [9], либо к системе полиномиальных уравнений, решаемой на множестве целых чисел [1], либо к эквивалентной системе полиномиальных уравнений, решаемой символьными методами [10]. Имеется много способов, позволяющих трансформировать систему булевых уравнений в задачу непрерывной минимизации, поскольку принципиальное отличие таких методов от «переборных» алгоритмов локального поиска — на каждой итерации алгоритма сдвиг по антиградиенту производится по всем переменным одновременно [2, 3, 6–8, 11–14]. Однако, одна из основных проблем, возникающая при применении этих способов, состоит в том, что минимизируемая целевая функция в искомой области может иметь множество локальных минимумов, что значительно усложняет их практическое использование [2, 3, 6–8, 11, 12]. По теореме Д. Н. Баротова полилинейное продолжение булевой функции тоже играет важную роль в том числе и для уменьшения числа локальных минимумов целевой функции [3, 11]. По данной тематике недавно в [11] были найдены явные формы полилинейных продолжений для произвольных функций, определённых на множестве вершин n-мерного единичного куба, произвольного куба и параллелепипеда, и в каждом конкретном случае была доказана единственность соответствующего полилинейного продолжения. С учётом этого в данной работе конструируется выпуклое продолжение произвольной булевой функции на множество $[0,1]^n$. Доказывается, что для любой булевой функции f, не имеющей соседних точек на множестве $\operatorname{supp} f$, построенная функция f_C является не только выпуклым продолжением f на $[0,1]^n$, но и её единственным суммарно максимально выпуклым продолжением на $[0,1]^n$. На основе этого конструктивно утверждается, что задача решения произвольной системы булевых уравнений может быть сведена к задаче минимизации функции, любой локальный минимум которой в искомой области является глобальным минимумом, и тем самым для этой задачи проблема локальных минимумов полностью решается.

1. Определения и обозначения

Пусть $\mathbb{B}^n = \{b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \{0,1\}^n\}$ — множество всех двоичных слов (булевых векторов) длины n, $\mathbb{K}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0,1]^n\}$ — n-мерный куб, натянутый на булевы вектора длины n.

Пусть $\mathbb{P}_b^n = \left\{x \in \mathbb{K}^n \mid \sum\limits_{k=1}^{n}(2b_k - 1)x_k > b_1 + b_2 + \cdots + b_n - 1\right\}$ — n-мерная пирамида, прилежащая к вершине $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{B}^n$.

Определение 1. Функцию вида $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}$ назовём *булевой функцией.*

Пусть $\operatorname{supp} f = \{b \in \mathbb{B}^n \mid f(b) = 1\}$ — носитель f, т. е. множество всех булевых векторов, на которых булева функция f принимает значение 1.

Определение 2. Функцию вида $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ назовём *выпуклой* на $\mathbb{K}^n$, если для любых $x, y \in \mathbb{K}^n$ и любого $\alpha \in [0,1]$ выполняется

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Определение 3. Непрерывную функцию вида $f_C\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ назовём *выпуклым продолжением* булевой функции f на $\mathbb{K}^n$, если f_C на $\mathbb{K}^n$ выпуклая и для любого $(b_1, b_2, \ldots, b_n) \in \mathbb{B}^n$

$$f_C(b_1, b_2, \ldots, b_n) = f(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Определение 4. Функцию вида $f_{CM}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ назовём *суммарно максимально выпуклым продолжением* булевой функции f на $\mathbb{K}^n$, если

1) f_{CM} является выпуклым продолжением f на $\mathbb{K}^n$,

2) имеет место равенство

$$\max_{f_C} \underset{\mathbb{K}^n}{\iint\cdots\int} f_C(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \underset{\mathbb{K}^n}{\iint\cdots\int} f_{CM}(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

2. Конструирование выпуклых и суммарно максимально выпуклых продолжений булевых функций

Лемма 1. *Пусть* $f_b(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{b_1} \wedge x_2^{b_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{b_n}$, $b \in \mathbb{B}^n$, *— булева функция. Тогда существует единственная функция* $f_C^b(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *являющаяся суммарно максимально выпуклым продолжением* f_b *на* $\mathbb{K}^n$.

Доказательство. Существование. Пусть g_C — произвольное выпуклое продолжение булевой функции f_b на $\mathbb{K}^n$. В этом пункте на основании выпуклости функции g_C оцениваем её значение сверху с помощью неравенства Йенсена [15]. По оценке сверху конструируем новое — суммарно максимально выпуклое — продолжение f_{CM} булевой функции f_b.

Сначала покажем, что для любого $x^* \in \mathbb{K}^n \setminus \mathbb{P}_b^n$ имеем

$$g_C(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \leqslant 0. \tag{1}$$

В силу выпуклости множества $\mathbb{K}^n \setminus \mathbb{P}_b^n$ условие $x^* \in \mathbb{K}^n \setminus \mathbb{P}_b^n$ означает, что

$$(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \sum_{a \in \mathbb{B}^n \setminus \{b\}} \lambda_a^* \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

где $\lambda_a^* \geqslant 0$ и $\sum\limits_{a \in \mathbb{B}^n \setminus \{b\}} \lambda_a^* = 1$. Тогда в силу неравенства Йенсена [15] имеем

$$g_C(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = g_C\Big(\sum_{a \in \mathbb{B}^n \setminus \{b\}} \lambda_a^* \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n)\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{a\in\mathbb{B}^n\setminus\{b\}} \lambda_a^* \cdot g_C(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{a\in\mathbb{B}^n\setminus\{b\}} \lambda_a^* \cdot f_b(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \\ = \sum_{a\in\mathbb{B}^n\setminus\{b\}} \lambda_a^* \cdot 0 = 0.$$

Далее покажем, что для любого $x^* \in \mathbb{P}_b^n$

$$g_C(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{n}((2b_k - 1)x_k^* - b_k). \tag{2}$$

В силу выпуклости множества $\mathbb{P}_b^n$ условие $x^* \in \mathbb{P}_b^n$ означает, что

$$(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \sum_{\substack{a\in\mathbb{B}^n:\\ \rho(a,b)\leqslant 1}} \lambda_a^* \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

где $\lambda_a^* \geqslant 0$ и $\sum\limits_{\substack{a\in\mathbb{B}^n:\\ \rho(a,b)\leqslant 1}} \lambda_a^* = 1$. Приравняв покоординатно, заметим, что $\lambda_b^* = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n}((2b_k - 1)x_k^* - b_k)$. Тогда в силу неравенства Йенсена [15]

$$g_C(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \\ = g_C\Big(\sum_{\substack{a\in\mathbb{B}^n:\\ \rho(a,b)\leqslant 1}} \lambda_a^* \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n)\Big) \leqslant \sum_{\substack{a\in\mathbb{B}^n:\\ \rho(a,b)\leqslant 1}} \lambda_a^* \cdot g_C(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \\ = \sum_{\substack{a\in\mathbb{B}^n:\\ \rho(a,b)=0}} \lambda_a^* \cdot g_C(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \sum_{\substack{a\in\mathbb{B}^n:\\ \rho(a,b)=1}} \lambda_a^* \cdot g_C(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \\ = \lambda_b^* \cdot g_C(b) + \sum_{\substack{a\in\mathbb{B}^n:\\ \rho(a,b)=1}} \lambda_a^* \cdot 0 = \lambda_b^* = 1 + \sum_{k=1}^{n}((2b_k - 1)x_k^* - b_k).$$

Объединив (1) и (2), для любого $x \in \mathbb{K}^n$ получим

$$g_C(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant \\ \leqslant \begin{Bmatrix} 0, & \text{если } 1 + \sum\limits_{k=1}^{n}((2b_k - 1)x_k - b_k) \leqslant 0, \\ 1 + \sum\limits_{k=1}^{n}((2b_k - 1)x_k - b_k), & \text{если } 1 + \sum\limits_{k=1}^{n}((2b_k - 1)x_k - b_k) \geqslant 0 \end{Bmatrix} = \\ = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{k=1}^{n}((2b_k - 1)x_k - b_k) + \left|1 + \sum_{k=1}^{n}((2b_k - 1)x_k - b_k)\right|\right). \tag{3}$$

Докажем, что сконструированная оценка наиболее точная, т. е.

$$f_C^b(x_1,x_2,\dots,x_n)=\frac{1}{2}\left(1+\sum_{k=1}^{n}((2b_k-1)x_k-b_k)+\left|1+\sum_{k=1}^{n}((2b_k-1)x_k-b_k)\right|\right).$$

Для этого осталось проверить справедливость следующих свойств:

1) $f_C^b(a_1,a_2,\dots,a_n)=f_b(a_1,a_2,\dots,a_n)$ для любого $a\in\mathbb{B}^n$;

2) функция f_C^b на множестве $\mathbb{K}^n$ непрерывна и выпукла;

3) имеет место равенство

$$\max_{g_C}\iint\limits_{\mathbb{K}^n}\cdots\int g_C(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_1dx_2\dots dx_n=$$
$$=\iint\limits_{\mathbb{K}^n}\cdots\int f_C^b(x_1,x_2,\dots,x_n)\,dx_1dx_2\dots dx_n. \quad (4)$$

1. Действительно, для любого $a\in\mathbb{B}^n$

$$f_C^b(a_1,a_2,\dots,a_n)=\left.\begin{cases}1, & \text{если } a=b,\\ 0, & \text{если } a\neq b\end{cases}\right\}=f_b(a_1,a_2,\dots,a_n).$$

2. Непрерывность очевидна, поэтому проверим только выпуклость. Пусть $x,y\in\mathbb{K}^n$, $\alpha\in[0,1]$. Тогда

$$f_C^b(\alpha x+(1-\alpha)y)=\frac{1}{2}\Bigg(1+\sum_{k=1}^{n}((2b_k-1)(\alpha x_k+(1-\alpha)y_k)-b_k)+$$
$$+\left|1+\sum_{k=1}^{n}((2b_k-1)(\alpha x_k+(1-\alpha)y_k)-b_k)\right|\Bigg)=$$
$$=\frac{1}{2}\Bigg(\alpha\left(1+\sum_{k=1}^{n}((2b_k-1)x_k-b_k)\right)+(1-\alpha)\left(1+\sum_{k=1}^{n}((2b_k-1)y_k-b_k)\right)+$$
$$+\left|\alpha\left(1+\sum_{k=1}^{n}((2b_k-1)x_k-b_k)\right)+(1-\alpha)\left(1+\sum_{k=1}^{n}((2b_k-1)y_k-b_k)\right)\right|\Bigg)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\Bigg(\alpha\left(1+\sum_{k=1}^{n}((2b_k-1)x_k-b_k)\right)+(1-\alpha)\left(1+\sum_{k=1}^{n}((2b_k-1)y_k-b_k)\right)+$$
$$+\alpha\left|1+\sum_{k=1}^{n}((2b_k-1)x_k-b_k)\right|+(1-\alpha)\left|1+\sum_{k=1}^{n}((2b_k-1)y_k-b_k)\right|\Bigg)=$$
$$=\alpha\cdot\frac{1}{2}\left(1+\sum_{k=1}^{n}((2b_k-1)x_k-b_k)+\left|1+\sum_{k=1}^{n}((2b_k-1)x_k-b_k)\right|\right)+$$

$$+ (1-\alpha)\cdot\frac{1}{2}\left(1+\sum_{k=1}^{n}((2b_k-1)y_k-b_k)+\left|1+\sum_{k=1}^{n}((2b_k-1)y_k-b_k)\right|\right) = \\ = \alpha f_C^b(x)+(1-\alpha)f_C^b(y).$$

3. Действительно, с одной стороны, из пп. 1 и 2 следует, что f_C^b является одним из выпуклых продолжений функции f_b и тем самым

$$\iint\limits_{\mathbb{K}^n}\cdots\int f_C^b(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n \leqslant \\ \leqslant \max_{g_C}\iint\limits_{\mathbb{K}^n}\cdots\int g_C(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n,$$

с другой стороны, из (3) следует, что

$$\max_{g_C}\iint\limits_{\mathbb{K}^n}\cdots\int g_C(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n \leqslant \\ \leqslant \iint\limits_{\mathbb{K}^n}\cdots\int f_C^b(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_1dx_2\ldots dx_n.$$

Из этого рассуждения получим требуемое равенство (4).

Единственность. Докажем от противного. Пусть существует функция $r\colon \mathbb{K}^n\to\mathbb{R}$, которая также является суммарно максимально выпуклым продолжением функции f_b на $\mathbb{K}^n$, причём $r(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)\neq f_C^b(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)$ для некоторого $(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)\in\mathbb{K}^n$. Тогда, с одной стороны, в силу (4)

$$\iint\limits_{\mathbb{K}^n}\cdots\int (r(x_1,x_2,\ldots,x_n)-f_C^b(x_1,x_2,\ldots,x_n))\,dx_1dx_2\ldots dx_n = 0, \quad (5)$$

с другой стороны, в силу (3) для любого $x\in\mathbb{K}^n$

$$r(x_1,x_2,\ldots,x_n)-f_C^b(x_1,x_2,\ldots,x_n)\leqslant 0. \quad (6)$$

Тогда, во-первых, из (6) следует, что

$$d = r(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)-f_C^b(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)<0,$$

во-вторых, в силу непрерывности функции $r-f_C^b$ существует δ-окрестность

$$O_\delta=\{x\in\mathbb{K}^n \mid ||(x_1,x_2,\ldots,x_n)-(x_1^*,x_2^*,\ldots,x_n^*)||<\delta\},\quad \delta>0,$$

такая, что для любого $x\in O_\delta$

$$r(x_1,x_2,\ldots,x_n)-f_C^b(x_1,x_2,\ldots,x_n)<\frac{d}{2},$$

а значит,

$$\iint\limits_{\mathbb{K}^n} \cdots \int \big(r(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f_C^b(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{K}^n \setminus O_\delta} \cdots \int \big(r(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f_C^b(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n +$$

$$+ \iint\limits_{O_\delta} \cdots \int \big(r(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f_C^b(x_1, x_2, \ldots, x_n)\big)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{\mathbb{K}^n \setminus O_\delta} \cdots \int 0 \cdot dx_1 dx_2 \ldots dx_n + \iint\limits_{O_\delta} \cdots \int \frac{d}{2} \cdot dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= 0 + \frac{d}{2} \iint\limits_{O_\delta} \cdots \int dx_1 dx_2 \ldots dx_n \leqslant \frac{d}{2} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\pi^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \cdot \delta^n < 0;$$

противоречие с равенством (5). Лемма 1 доказана.

Теперь на основе леммы 1, теоремы 2 из [11] и формы СДНФ конструируем выпуклое продолжение произвольной булевой функции f в следующем виде:

$$f_C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{b \in \mathbb{B}^n} f(b) f_C^b(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Далее докажем, что для любой булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не имеющей соседних точек на множестве $\operatorname{supp} f$, функция $f_C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является не только выпуклым продолжением функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на $\mathbb{K}^n$, но и единственным суммарно максимально выпуклым продолжением этой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на $\mathbb{K}^n$.

Теорема 1. *Если булева функция f не имеет соседних вершин на множестве $\operatorname{supp} f$, то*

$$f_C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{b \in \operatorname{supp} f} f_C^b(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

является единственным суммарно максимально выпуклым продолжением f на $\mathbb{K}^n$.

Доказательство. 1. Сначала заметим, что функция f_C выпукла по построению, как сумма некоторых непрерывно выпуклых функций на множестве $\mathbb{K}^n$. Действительно, пусть $x, y \in \mathbb{K}^n$, $\alpha \in [0, 1]$. Тогда в силу леммы 1 имеем

$$f_C(\alpha x + (1-\alpha) y) = \sum_{b \in \mathbb{B}^n} f(b) f_C^b(\alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot y) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{b\in\mathbb{B}^n} f(b)\big(\alpha f_C^b(x) + (1-\alpha) f_C^b(y)\big) = \alpha \sum_{b\in\mathbb{B}^n} f(b) f_C^b(x) + \\ + (1-\alpha)\sum_{b\in\mathbb{B}^n} f(b) f_C^b(y) = \alpha f_C(x) + (1-\alpha) f_C(y).$$

Проверим, что $f_C = f$ на $\mathbb{B}^n$. Действительно, в силу леммы 1 для любого $a \in \mathbb{B}^n$ имеем

$$f_C(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{b\in\mathbb{B}^n} f(b) f_C^b(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \\ = f(a) f_C^a(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \sum_{b\in\mathbb{B}^n\setminus\{a\}} f(b) f_C^b(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \\ = f(a)\cdot 1 + \sum_{b\in\mathbb{B}^n\setminus\{a\}} f(b)\cdot 0 = f(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

2. Пусть $p_C\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ — произвольное выпуклое продолжение булевой функции f на $\mathbb{K}^n$. Докажем оценку

$$p_C(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant f_C(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad x \in \mathbb{K}^n.$$

С этой целью рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $\operatorname{supp} f = \varnothing$. Тогда для любого $x^* \in \mathbb{K}^n$ имеем

$$p_C(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = p_C((1-x_1^*)\cdot 0 + x_1^*\cdot 1, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \\ = p_C((1-x_1^*)\cdot 0 + x_1^*\cdot 1, (1-x_1^*)x_2^* + x_1^* x_2^*, \ldots, (1-x_1^*)x_n^* + x_1^* x_n^*) \leqslant \\ \leqslant (1-x_1^*) p_C(0, x_2^*, \ldots, x_n^*) + x_1^* p_C(1, x_2^*, \ldots, x_n^*) \leqslant \\ \leqslant (1-x_1^*)(1-x_2^*) p_C(0, 0, \ldots, x_n^*) + (1-x_1^*) x_2^* p_C(0, 1, \ldots, x_n^*) + \\ + x_1^*(1-x_2^*) p_C(1, 0, \ldots, x_n^*) + x_1^* x_2^* p_C(1, 1, \ldots, x_n^*) \leqslant \\ \leqslant \ldots \leqslant \sum_{b\in\mathbb{B}^n} p_C(b) \prod_{k=1}^{n} ((2b_k - 1)x_k^* + 1 - b_k) = \\ = \sum_{b\in\mathbb{B}^n} f(b) \prod_{k=1}^{n} ((2b_k - 1)x_k^* + 1 - b_k) = \sum_{b\in\mathbb{B}^n} 0 \cdot \prod_{k=1}^{n} ((2b_k - 1)x_k^* + 1 - b_k) = \\ = 0 = \sum_{b\in\mathbb{B}^n} f(b) f_C^b(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = f_C(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*).$$

Случай 2. Пусть $\operatorname{supp} f = \{s_k = (s_{k1}, s_{k2}, \ldots, s_{kn})\}_{k=1}^{m} \neq \varnothing$. Относительно $x^* \in \mathbb{K}^n$ рассмотрим ещё два случая.

Случай 2.1. Пусть $x^* \in \mathbb{P}_{s_1}^n \cup \mathbb{P}_{s_2}^n \cup \cdots \cup \mathbb{P}_{s_m}^n$, т. е. $x^* \in \mathbb{P}_{s_k}^n$ для некоторого единственного $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$, так как элементы $\operatorname{supp} f$ не соседние и, следовательно, множества $\mathbb{P}^n_{s_1}, \mathbb{P}^n_{s_2}, \ldots, \mathbb{P}^n_{s_m}$ попарно не пересекаются. В силу выпуклости $\mathbb{P}^n_{s_k}$ условие $x^* \in \mathbb{P}^n_{s_k}$ означает, что

$$(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \sum_{\substack{a \in \mathbb{B}^n:\\ \rho(a,s_k)\leqslant 1}} \lambda_a^* \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

где $\lambda_a^* \geqslant 0$ и $\sum\limits_{\substack{a \in \mathbb{B}^n:\\ \rho(a,s_k)\leqslant 1}} \lambda_a^* = 1$. Приравняв покоординатно, заметим, что $\lambda_{s_k}^* = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} (2s_{ki} - 1)x_i^* - s_{ki}$. В силу неравенства Йенсена [15] имеем

$$\begin{aligned}
&p_C(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \\
&= p_C\Big(\sum_{\substack{a \in \mathbb{B}^n:\\ \rho(a,s_k)\leqslant 1}} \lambda_a^* \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n)\Big) \leqslant \sum_{\substack{a \in \mathbb{B}^n:\\ \rho(a,s_k)\leqslant 1}} \lambda_a^* \cdot p_C(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \\
&= \sum_{\substack{a \in \mathbb{B}^n:\\ \rho(a,s_k)=0}} \lambda_a^* \cdot p_C(a_1, a_2, \ldots, a_n) + \sum_{\substack{a \in \mathbb{B}^n:\\ \rho(a,s_k)=1}} \lambda_a^* \cdot p_C(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \\
&= \lambda_{s_k}^* \cdot p_C(s_k) + \sum_{\substack{a \in \mathbb{B}^n:\\ \rho(a,s_k)=1}} \lambda_a^* \cdot 0 = \lambda_{s_k}^* = 1 + \sum_{i=1}^{n} (2s_{ki} - 1)x_i^* - s_{ki}.
\end{aligned}$$

Случай 2.2. Пусть $x^* \in \mathbb{K}^n \setminus \big(\mathbb{P}^n_{s_1} \cup \mathbb{P}^n_{s_2} \cup \cdots \cup \mathbb{P}^n_{s_m}\big)$. В силу выпуклости множества $\mathbb{K}^n \setminus \big(\mathbb{P}^n_{s_1} \cup \mathbb{P}^n_{s_2} \cup \cdots \cup \mathbb{P}^n_{s_m}\big)$ это означает, что

$$(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \sum_{a \in \mathbb{B}^n \setminus \operatorname{supp} f} \lambda_a^* \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

где $\lambda_a^* \geqslant 0$ и $\sum\limits_{a \in \mathbb{B}^n \setminus \operatorname{supp} f} \lambda_a^* = 1$. В силу неравенства Йенсена [15] имеем

$$\begin{aligned}
&p_C(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*) = \\
&= p_C\Big(\sum_{a \in \mathbb{B}^n \setminus \operatorname{supp} f} \lambda_a^* \cdot (a_1, a_2, \ldots, a_n)\Big) \leqslant \sum_{a \in \mathbb{B}^n \setminus \operatorname{supp} f} \lambda_a^* \cdot p_C(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \\
&\qquad = \sum_{a \in \mathbb{B}^n \setminus \operatorname{supp} f} \lambda_a^* \cdot f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{a \in \mathbb{B}^n \setminus \operatorname{supp} f} \lambda_a^* \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Таким образом, для любого $x \in \mathbb{K}^n$ получаем

$$\begin{aligned}
&p_C(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqslant \\
&\leqslant \left\{\begin{matrix} 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} ((2s_{ki} - 1)x_i - s_{ki}), & \text{если } x \in \mathbb{P}^n_{s_k},\ k = 1, 2, \ldots, m, \\ 0 & \text{иначе} \end{matrix}\right\} =
\end{aligned}$$

$$= \begin{Bmatrix} f_C^{s_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n), & \text{если } x \in \mathbb{P}^n_{s_k},\ k = 1, 2, \ldots, m, \\ 0 & \text{иначе} \end{Bmatrix} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} f_C^{s_k}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{b \in \operatorname{supp} f} f_C^{b}(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= f_C(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

так как множества $\mathbb{P}^n_{s_1}, \mathbb{P}^n_{s_2}, \ldots, \mathbb{P}^n_{s_m}$ попарно не пересекаются и $\{x \in \mathbb{K}^n \mid f_C^{s_k}(x) \neq 0\} = \mathbb{P}^n_{s_k}$ для любого $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ в силу леммы 1. Исходя из доказанного в п. 1 и рассуждения, аналогичного рассуждению п. 3 в доказательстве леммы 1, получим

$$\max_{p_C} \iint\limits_{\mathbb{K}^n} \cdots \int p_C(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n =$$

$$= \iint\limits_{\mathbb{K}^n} \cdots \int f_C(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Единственность суммарно максимально выпуклого продолжения булевой функции f доказывается аналогично тому, как это сделано в доказательстве леммы 1. Теорема 1 доказана.

Замечание. На основе полученных результатов задача решения системы булевых уравнений вида

$$p_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

может быть трансформирована в соответствующую систему выпуклых уравнений вида

$$p_{Ck}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{7}$$

где $p_{Ck}(x) = \sum\limits_{b \in \mathbb{B}^n} p_k(b) f_C^b(x)$ — неотрицательное выпуклое продолжение булевой функции p_k. В свою очередь, задача решения системы (7) может быть сведена к задаче минимизации выпуклой функции

$$tf_C(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{m} p_{Ci}(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Заключение

В настоящей работе построено выпуклое продолжение произвольной булевой функции на множество $[0,1]^n$. Доказано, что для любой булевой функции f, не имеющей соседних точек в своём носителе $\operatorname{supp} f$, построенная функция f_C является не просто выпуклым продолжением f на $[0,1]^n$, но и её единственным суммарно максимально выпуклым продолжением на $[0,1]^n$. На основе этого, в частности, показано, что задача решения произвольной системы булевых уравнений может быть сведена к задаче минимизации функции, любой локальный минимум которой в искомой области является глобальным минимумом, и тем самым упомянутая выше проблема локальных минимумов полностью решена.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт бюджета Финансового университета при Правительстве Российской Федерации. Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. **Abdel-Gawad A. H., Atiya A. F., Darwish N. M.** Solution of systems of Boolean equations via the integer domain // Inf. Sci. 2010. V. 180, No. 2. P. 288–300. DOI: 10.1016/j.ins.2009.09.010.
2. **Barotov D. N., Barotov R. N.** Polylinear transformation method for solving systems of logical equations // Mathematics. 2022. V. 10, No. 6. Paper ID 918. 10 p. DOI: 10.3390/math10060918.
3. **Barotov D. N.** Target function without local minimum for systems of logical equations with a unique solution // Mathematics. 2022. V. 10, No. 12. Paper ID 2097. 8 p. DOI: 10.3390/math10122097.
4. **Armario J. A.** Boolean functions and permanents of Sylvester Hadamard matrices // Mathematics. 2021. V. 9, No. 2. Paper ID 177. 8 p. DOI: 10.3390/math9020177.
5. **Valiant L. G.** The complexity of computing the permanent // Theor. Comput. Sci. 1979. V. 8, No. 2. P. 189–201. DOI: 10.1016/0304-3975(79)90044-6.
6. **Файзуллин Р. Т., Дулькейт В. И., Огородников Ю. Ю.** Гибридный метод поиска приближенного решения задачи 3-выполнимость, ассоциированной с задачей факторизации // Тр. Ин-та математики и механики. 2013. Т. 19, № 2. С. 285–294.
7. **Gu J.** Global optimization for satisfiability (SAT) problem // IEEE Trans. Knowl. Data Eng. 1994. V. 6, No. 3. P. 361–381. DOI: 10.1109/69.334864.
8. **Gu J., Gu Q., Du D.** On optimizing the satisfiability (SAT) problem // J. Comput. Sci. Technol. 1999. V. 14, No. 1. P. 1–17. DOI: 10.1007/BF02952482.
9. **Pakhomchik A. I., Voloshinov V. V., Vinokur V. M., Lesovik G. B.** Converting of Boolean expression to linear equations, inequalities and QUBO penalties for cryptanalysis // Algorithms. 2022. V. 15, No. 2. Paper ID 33. 22 p. DOI: 10.3390/a15020033.
10. **Barotov D. N., Barotov R. N., Soloviev V., Feklin V., Muzafarov D., Ergashboev T., Egamov Kh.** The development of suitable inequalities and their application to systems of logical equations // Mathematics. 2022. V. 10, No. 11. Paper ID 1851. 9 p. DOI: 10.3390/math10111851.

11. **Баротов Д. Н., Баротов Р. Н.** Полилинейные продолжения некоторых дискретных функций и алгоритм их нахождения // Вычисл. методы и программирование. 2023. Т. 24, вып. 1. С. 10–23. DOI: 10.26089/NumMet.v24r102.
12. **Barotov D. N., Osipov A., Korchagin S., Pleshakova E., Muzafarov D., Barotov R. N., Serdechnyi D.** Transformation method for solving system of Boolean algebraic equations // Mathematics. 2021. V. 9, No. 24. Paper ID 3299. 12 p. DOI: 10.3390/math9243299.
13. **Owen G.** Multilinear extensions of games // Manage. Sci. 1972. V. 18, No. 5-2. P. 64–79. DOI: 10.1287/mnsc.18.5.64.
14. **Wittmann D. M., Krumsiek J., Saez-Rodriguez J., Lauffenburger D. A., Klamt S., Theis F. J.** Transforming Boolean models to continuous models: Methodology and application to T-cell receptor signaling // BMC Syst. Biol. 2009. V. 3, No. 1. Paper ID 98. 21 p. DOI: 10.1186/1752-0509-3-98.
15. **Jensen J. L. W. V.** Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes // Acta Math. 1906. V. 30. P. 175–193. [French]. DOI: 10.1007/BF02418571.

Баротов Достонжон Нумонжонович

Статья поступила
17 июля 2023 г.
После доработки —
4 августа 2023 г.
Принята к публикации
22 сентября 2023 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2024. Vol. 31, No. 1. P. 5–18

UDC 519.85+517.518.244 DOI: 10.33048/daio.2024.31.779

CONVEX CONTINUATION OF A BOOLEAN FUNCTION AND ITS APPLICATIONS

D. N. Barotov

Financial University under the Government of the Russian Federation,
4 Chetvyortyi Veshnyakovskii Passage, 109456 Moscow, Russia
E-mail: `dnbarotov@fa.ru`

Abstract. A convex continuation of an arbitrary Boolean function to the set $[0,1]^n$ is constructed. Moreover, it is proved that for any Boolean function $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ that has no neighboring points on the set $\operatorname{supp} f$, the constructed function $f_C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ is the only totally maximally convex continuation to $[0,1]^n$. Based on this, in particular, it is constructively stated that the problem of solving an arbitrary system of Boolean equations can be reduced to the problem of minimizing a function any local minimum of which in the desired region is a global minimum, and thus for this problem the problem of local minima is completely resolved. Bibliogr. 15.

Keywords: convex continuation of a function, system of Boolean equations, SAT, global optimization, Boolean function, local minimum.

References

1. **A. H. Abdel-Gawad, A. F. Atiya,** and **N. M. Darwish,** Solution of systems of Boolean equations via the integer domain, *Inf. Sci.* **180** (2), 288–300 (2010), DOI: 10.1016/j.ins.2009.09.010.
2. **D. N. Barotov** and **R. N. Barotov,** Polylinear transformation method for solving systems of logical equations, *Mathematics* **10** (6), ID 918 (2022), DOI: 10.3390/math10060918.
3. **D. N. Barotov,** Target function without local minimum for systems of logical equations with a unique solution, *Mathematics* **10** (12), ID 2097 (2022), DOI: 10.3390/math10122097.
4. **J. A. Armario,** Boolean functions and permanents of Sylvester Hadamard matrices, *Mathematics* **9** (2), ID 177 (2021), DOI: 10.3390/math9020177.

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **18** (1), 1–9 (2024), DOI: 10.1134/S1990478924010010.

5. **L. G. Valiant,** The complexity of computing the permanent, *Theor. Comput. Sci.* **8** (2), 189–201 (1979), DOI: 10.1016/0304-3975(79)90044-6.
6. **R. T. Faizullin, V. I. Dul'keit,** and **Yu. Yu. Ogorodnikov,** Hybrid method for the approximate solution of the 3-satisfiability problem associated with the factorization problem, *Tr. Inst. Mat. Mekh.* **19** (2), 285–294 (2013) [Russian].
7. **J. Gu,** Global optimization for satisfiability (SAT) problem, *IEEE Trans. Knowl. Data Eng.* **6** (3), 361–381 (1994), DOI: 10.1109/69.334864.
8. **J. Gu, Q. Gu,** and **D. Du,** On optimizing the satisfiability (SAT) problem, *J. Comput. Sci. Technol.* **14** (1), 1–17 (1999), DOI: 10.1007/BF02952482.
9. **A. I. Pakhomchik, V. V. Voloshinov, V. M. Vinokur,** and **G. B. Lesovik,** Converting of Boolean expression to linear equations, inequalities and QUBO penalties for cryptanalysis, *Algorithms* **15** (2), ID 33 (2022), DOI: 10.3390/a15020033.
10. **D. N. Barotov, R. N. Barotov, V. Soloviev, V. Feklin, D. Muzafarov, T. Ergashboev,** and **Kh. Egamov,** The development of suitable inequalities and their application to systems of logical equations, *Mathematics* **10** (11), ID 1851 (2022), DOI: 10.3390/math10111851.
11. **D. N. Barotov** and **R. N. Barotov,** Polylinear continuations of some discrete functions and an algorithm for finding them, *Vychisl. Metody Program.* **24** (1), 10–23 (2023) [Russian], DOI: 10.26089/NumMet.v24r102.
12. **D. N. Barotov, A. Osipov, S. Korchagin, E. Pleshakova, D. Muzafarov, R. N. Barotov,** and **D. Serdechnyi,** Transformation method for solving system of Boolean algebraic equations, *Mathematics* **9** (24), ID 3299 (2021), DOI: 10.3390/math9243299.
13. **G. Owen,** Multilinear extensions of games, *Manage. Sci.* **18** (5-2), 64–79 (1972), DOI: 10.1287/mnsc.18.5.64.
14. **D. M. Wittmann, J. Krumsiek, J. Saez-Rodriguez, D. A. Lauffenburger, S. Klamt,** and **F. J. Theis,** Transforming Boolean models to continuous models: Methodology and application to T-cell receptor signaling, *BMC Syst. Biol.* **3** (1), ID 98 (2009), DOI: 10.1186/1752-0509-3-98.
15. **J. L. W. V. Jensen,** Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta Math.* **30**, 175–193 (1906) [French], DOI: 10.1007/BF02418571.

Dostonjon N. Barotov

Received July 17, 2023
Revised August 4, 2023
Accepted September 22, 2023