

ISSN 2949-5598

# ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 31 № 1 2024

Новосибирск  
Издательство Института математики

## МЕТОД АВТОМАТИЧЕСКОГО ПОИСКА СЕМЕЙСТВ ОПТИМАЛЬНЫХ ХОРДАЛЬНЫХ КОЛЬЦЕВЫХ СЕТЕЙ

Э. А. Монахова<sup>a</sup>, О. Г. Монахов<sup>b</sup>

Институт вычислительной математики и математической геофизики,  
пр. Акад. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия  
E-mail: <sup>a</sup>emilia@rav.ssc.ru, <sup>b</sup>monakhov@rav.ssc.ru

**Аннотация.** Арден и Ли предложили класс хордальных кольцевых сетей степени три в качестве сетей связи мультикомпьютерных систем, получили формулу для вычисления диаметра и алгоритм поиска кратчайших путей для них. В настоящей работе показано, что найденные ими формула диаметра и алгоритм поиска кратчайших путей являются неточными. Нами построен большой массив экспериментальных данных (датасет), содержащий параметры описаний оптимальных по диаметру хордальных колец с числом узлов до 60 тысяч, и найдена точная нижняя граница диаметра хордальных колец. На основе анализа полученного массива данных предложен новый метод и реализованы алгоритмы автоматического поиска аналитических описаний семейств оптимальных хордальных колец, с помощью которых найдены аналитические описания более 500 новых семейств оптимальных хордальных кольцевых сетей для многих значений числа узлов (до этого в литературе были известны шесть семейств). Табл. 5, ил. 6, библиогр. 26.

**Ключевые слова:** оптимальная хордальная сеть степени три, диаметр, экстремальный хордальный граф, датасет оптимальных хордальных сетей.

### Введение

В работе [1] Арден и Ли ввели класс хордальных кольцевых графов (chordal ring networks) степени три в качестве возможной топологии сетей связи мультикомпьютерных систем и исследовали новый класс по трём направлениям: определение диаметра графов, поиск кратчайших путей для них и определение максимального числа вершин при заданном диаметре. Эта работа вызвала большой интерес (более 450 ссылок к настоящему времени) по исследованию свойств новых структур

сетей связи и построению расширений предложенной топологии (см. например, [2–15]). Исследования проводились по следующим направлениям: 1) расширение области значений образующих графа; 2) построение алгоритмов маршрутизации для них; 3) увеличение степени вершин графа и степени его симметрии; 4) построение иерархических структур на их основе; 5) рассмотрение ориентированных хордальных кольцевых графов, в том числе с исследованием их надёжности при отказах элементов, и др.

Неориентированный *хордальный* граф  $C_N(1, -1, s)$ , где  $N$  — чётное, а  $3 \leq s \leq N/2$  — нечётное числа, имеет множество вершин  $V = \mathbb{Z}_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$ , в котором вершины  $i$  и  $(i+1) \bmod N$  смежны для любого  $i$ , а каждая нечётная вершина  $i$  смежна также с  $(i+s) \bmod N$ . Параметры описания хордального графа:  $s$  — образующая (длина хорды),  $N$  — его порядок. Степень вершин равна трём. *Диаметр* графа — длина максимального кратчайшего пути на множестве всевозможных пар вершин. При фиксированном значении  $N$  назовём *оптимальным* хордальный граф  $C_N(1, -1, s)$  с минимально возможным диаметром для данного  $N$ . Недавно проведённые исследования структурной надёжности неориентированных хордальных колец показали, что минимизация диаметра при одном и том же порядке графа путём выбора соответствующей образующей даёт большую надёжность структуры связей графа при отказах элементов.

На рис. 1а изображён хордальный граф  $C_{20}(1, -1, 5)$  диаметра  $d = 4$ . Граф Хивуда  $C_{14}(1, -1, 5)$  также входит в рассматриваемый класс. Следует отметить, что хордальные кольца являются двудольными графами и входят в класс PRS-графов [16], как графы с двумя типами вершин, в отличие от другого широко изучаемого класса циркулянтных графов

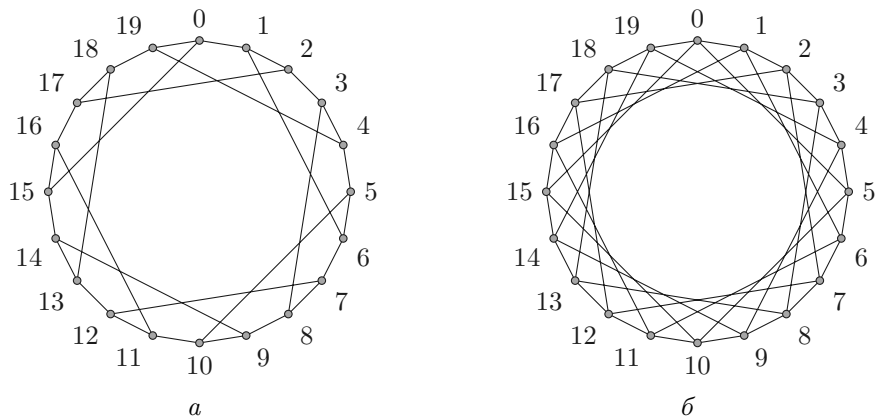


Рис. 1. а) Хордальный граф  $C_{20}(1, -1, 5)$ ; б) циркулянтный граф  $C(20; 1, 5)$

степени четыре [4–6], входящих также в класс PRS-графов, но вершинно-симметричных и имеющих один тип вершин. Можно сказать, что хордальные графы вида  $C_N(1, -1, s)$  являются подмножеством класса циркулянтов вида  $C(N; 1, s)$  с чётным числом вершин и упорядоченным удалением рёбер  $s$  или  $-s$ , но в отличие от циркулянтов имеют обхват 6, а не 4. На рис. 1b для сравнения изображён циркулянт  $C(20; 1, 5)$ . В настоящей работе исследуется решение двух оптимизационных проблем поиска оптимальных хордальных графов: 1) графов с минимальным диаметром при заданном числе вершин (порядке) графа и 2) графов с максимальным порядком при заданном диаметре (так называемых экстремальных графов). В общей постановке — это поиск аналитических описаний бесконечных семейств (серий) графов с минимальным диаметром при заданных порядках графов.

### 1. Известные результаты по оптимизации хордальных кольцевых графов

Первыми решение второй проблемы предложили Арден и Ли [1, теорема 3]. В силу того, что они рассмотрели не все возможные типы путей в хордальных графах [5], найденные ими формулы для максимальных порядков при заданных диаметрах оказались неточными. Авторы [2, 3] смогли улучшить их результат для максимального  $N$  и получили следующие экстремальные графы. Представляем их результат в виде теоремы, доказательство которой можно найти в [2].

**Теорема 1.** Пусть  $d \geq 3$  — целое число. Максимальный порядок  $N_d$  хордального графа  $C_N(1, -1, s)$  диаметра  $d$  равен

$$N = N_d = \begin{cases} (3d^2 + 1)/2 & \text{при нечётном } d, \\ 3d^2/2 - d & \text{при чётном } d, \end{cases} \quad (1)$$

образующая графа равна

$$s = \begin{cases} 3d & \text{при нечётном } d, \\ 3d + 1 & \text{при чётном } d. \end{cases} \quad (2)$$

Отметим, что это оптимальное решение найдено авторами [2, 3] методом плотной укладки (tessellation) на плоскости введённого ими обобщённого класса графов Ардена и Ли, а именно в их обозначении графов  $CR_N(a, b, c)$  степени 3, где порядок  $N$  — чётное, а образующие  $a, b, c$  — нечётные числа.

Проблема получения минимально возможного диаметра для заданного значения  $N$  является более сложной задачей, чем получение максимального  $N$ , поскольку диаметр не всегда монотонно увеличивается

Таблица 1

## Семейства оптимальных хордальных колец [2]

Семейство	$2N$	$s$	$d \bmod 2$	$N_d - N$
$f_0$	$3d^2 - 2d$	$3d + 1$	0	0
$f_0$	$3d^2 + 1$	$3d$	1	0
$f_1$	$3d^2 - 4d$	$3d - 1$	0	$d$
$f_2$	$3d^2 - 2d - 1$	$3d - 2$	1	$d + 1$
$f_3$	$3d^2 - 4d - 3$	$3d - 4$	1	$2(d + 1)$
$f_4$	$3d^2 - 4d + 1$	$3d - 4$	1	$2d$
$f_5$	$3d^2 - 6d - 1$	$3d - 6$	1	$3d + 1$

с ростом порядка. Кроме получения семейства с максимальным  $N$ , авторы [2] нашли ещё пять семейств графов с минимально возможным диаметром, используя плотную укладку графов на плоскости. В табл. 1 приведены все ранее известные семейства оптимальных графов (семейство экстремальных графов обозначено как  $f_0$ ) с описаниями параметров в виде функций (полиномов) от диаметра  $d$ . В последнем столбце показана разница между значением  $N_d$  и порядками графов соответствующих семейств. В настоящей работе с помощью анализа построенного датасета оптимальных хордальных кольцевых графов были найдены новые закономерности в появлении бесконечных семейств таких графов, предложен и реализован метод автоматического поиска и открытия новых семейств и на его основе расширен список семейств оптимальных хордальных колец; получено дополнительное описание образующих для бесконечного экстремального семейства из теоремы 1 и построено более 500 новых аналитически задаваемых семейств оптимальных графов.

## 2. Формула для диаметра хордальных кольцевых графов

Проведённый нами анализ формулы для вычисления диаметра хордальных графов из [1] показал, что она верна для ряда значений  $N$  и  $s$ , но для большинства графов наблюдается рост (при росте числа вершин) разницы между реальным диаметром и значением диаметра, вычисляемым по формуле из [1].

Из теоремы 1, как следствие, получаем вид зависимости диаметра экстремальных графов от их порядка.

**Лемма 1.** Пусть для любого целого  $d \geq 3$  порядок и образующая хордального графа  $C_N(1, -1, s)$  определяются формулами (1) и (2) соответственно. Тогда диаметр экстремального графа равен  $\lfloor \sqrt{2N/3} \rfloor$  при нечётном  $d$  и  $\lceil \sqrt{2N/3} \rceil$  при чётном  $d$ .

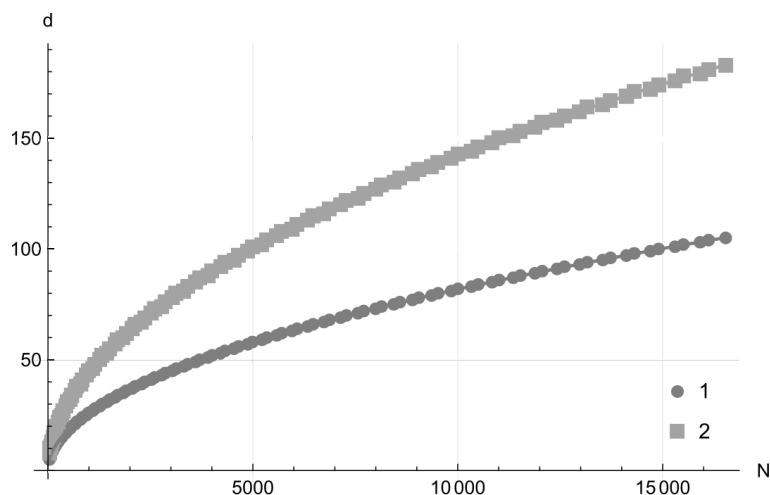


Рис. 2. Диаметр экстремальных графов:  
1 — реальный, 2 — вычисленный по формуле из [1]

На рис. 2 разница между реальным диаметром хордальных графов и диаметром, получаемым по формуле из [1], наглядно показана на примере семейства экстремальных графов. Данная ошибка авторов [1] произошла в силу того, что они рассмотрели не все возможные виды путей в хордальных графах, а ограничились тремя видами вместо шести [5]. Таким образом, формула вычисления диаметра хордальных колец, полученная в [1], в общем случае даёт только его грубую верхнюю оценку. Следует отметить, что в 2009 г. в работе [17] автор частично скорректировал формулу из [1], но нахождение точной формулы для диаметра хордальных кольцевых графов при любых  $N$  и  $s$  по-прежнему остаётся открытой проблемой.

Имеет место аналогичная история поиска общей формулы для вычисления диаметра циркулянтных графов степени четыре вида  $C(N; 1, s)$ : в течение 30 лет появляется ряд работ, которые либо не полностью учитывают все возможные условия для соотношений между  $N$  и  $s$ , либо дают неточные результаты. Последний по времени пример неверного в ряде случаев определения диаметра — работа [18].

В связи с выявлением неточности вычисления диаметра в [1] нами была проверена также справедливость теоремы 2 из [1], где дана следующая оценка диаметра хордальных колец с числом вершин  $N = m^2$  при чётном  $m \geq 8$ : диаметр графа  $d(C_{m^2}(1, -1, s)) \geq m - 1$ . Она оказалась верной только для значений  $m = 8, 10, 12, 14$ , при  $16 \leq m \leq 244$   $d(C_{m^2}(1, -1, s)) < m - 1$ .

### 3. Построение датасета оптимальных хордальных графов

Используя при поиске оптимальных хордальных кольцевых графов сокращённый вариант переборного алгоритма и его параллельные реализации на кластере Kunpeng 920 (подробное описание алгоритмов и их оценки можно найти в [19]), мы впервые построили большой массив данных (датасет) оптимальных хордальных графов. Для заданного значения  $N$  перебирались все образующие  $3 \leq s \leq N/2$  и определялся граф (графы) с минимальным диаметром. Полная версия полученного датасета для  $N \leq 60\,000$  доступна по ссылке [github.com/mila0411/ChordalRing](https://github.com/mila0411/ChordalRing). Даны значения порядка  $N$ , всех образующих  $s$ , задающих оптимальный граф и минимальный диаметр  $d$  графа. На рис. 3 показаны графики зависимостей образующих  $s$  от  $N$  для оптимальных хордальных графов. Нижний ряд точек соответствует образующим с линейной зависимостью от диаметра, верхний ряд — максимальные по величине образующие квадратичного вида от диаметра. Прослеживаются некоторые упорядоченности в расположении образующих при росте  $N$ , которые указывают на возможность существования многих аналитически задаваемых семейств графов. Анализ осложняется тем, что у разных порядков графов число оптимальных образующих меняется от одного до заранее не определённого количества (меньшего чем  $N/2 - 3$ ). Анализ датасета

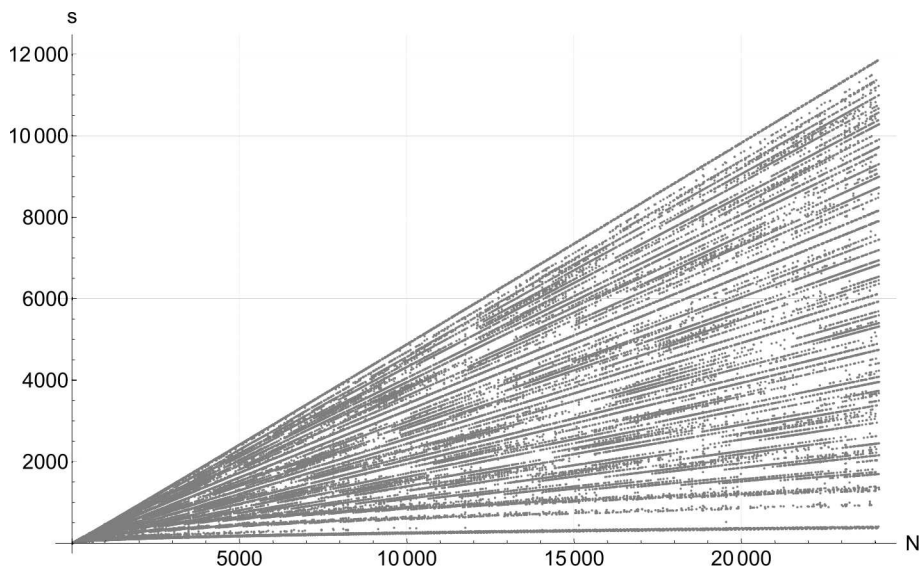


Рис. 3. График зависимости образующих  $s$  от порядка  $N$  для оптимальных хордальных графов

показал, что есть много оптимальных графов с единственной образующей, которая не является линейным полиномом от  $d$ .

Авторы хотели бы отметить, что при поиске аналитических зависимостей параметров на множестве графического отображения точек  $\{N, s, d\}$ , представленного на рис. 3 как новый геометрический объект, прослеживаются некоторые аналогии с постановкой задач для таких математических объектов как спираль Улама [20], рекуррентные графики динамических систем [21] и других подобных множеств.

#### 4. Получение новых образующих для экстремального семейства графов

При анализе датасета для семейства с максимальным  $N = N_d$  было найдено описание образующих квадратичного вида в отличие от линейных образующих (2) при диаметрах  $d$ , кратных четырём.

**Теорема 2.** Пусть  $d \geq 4$  — целое число и  $d \equiv 0 \pmod{4}$ . Существует оптимальный хордальный граф  $C_N(1, -1, s)$  с максимальным порядком и диаметром  $d$ , где

$$\begin{aligned} N &= N_d = 3d^2/2 - d, \\ s &= 3d^2/4 - 2d + 1. \end{aligned} \quad (3)$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Покажем, что при диаметре  $d \geq 4$ , кратном четырём, существует изоморфизм между графами, задаваемыми (1) и (2), и графами, задаваемыми (1) и (3). Обозначим образующую (2), равную  $3d + 1$ , через  $s_1$ , а образующую (3) — через  $s_2$ . Тогда имеем следующее соотношение между  $N$  и образующими  $s_1$  и  $s_2$ :  $N = 2s_2 + s_1 - 3$ .

Для доказательства будем использовать лемму 10 из [22], которая утверждает, что хордальные кольцевые графы  $C_N(a, b, c)$  и  $C_N(a', b', c')$ , где  $a, b, c, a', b', c' \in \overline{1, N-1}$ , изоморфны, если и только если существует взаимно простое с  $N/2$  число  $l$ , для которого выполняются следующие сравнения:

$$a' - b' \equiv l(a - b) \pmod{N}, \quad (4)$$

$$b' - c' \equiv l(b - c) \pmod{N}. \quad (5)$$

Положим  $a = 1$ ,  $b = N - 1$ ,  $c = s_1$ ,  $a' = s_2$ ,  $b' = N - 1$ ,  $c' = 1$ . Тогда  $a' - b' = -N + s_2 + 1$ , отсюда  $(a' - b') \pmod{N} = s_2 + 1$ . Аналогично  $(b' - c') \pmod{N} = N - 2$ .

Возьмём  $l = (s_2 + 1)/2$ . При  $d = 4t$ ,  $t \geq 1$ , имеем  $\text{НОД}(l, N/2) = 1$ . Подставив значение  $l$  в (4), имеем  $l(a - b) = -(s_2 + 1)/2 \cdot N + s_2 + 1$  и  $l(a - b) \pmod{N} = s_2 + 1$ .



Подставив значение  $l$  в (5) и проведя соответствующие замены, имеем  $l(b-c) = (3d^2/8 - 7d/4 + 1)N + N - 2$ , отсюда  $l(b-c) \bmod N = N - 2$ . Теорема 2 доказана.

Отметим, что изображённый на рис. 1а хордальный граф оптимальный и принадлежит семейству из теоремы 2.

### 5. Новые семейства оптимальных хордальных колец с образующими $s = s(d)$

При анализе датасета дополнительно был получен ряд новых семейств оптимальных хордальных графов с образующими, линейно зависящими от диаметра:  $s = s(d)$ . Новые семейства представлены в табл. 2 (здесь и далее  $d_{\min}$  — значение минимального диаметра, начиная с которого данное семейство существует).

Таблица 2

Новые семейства оптимальных хордальных колец с образующей  $s = s(d)$

Семейство	$2N$	$s$	$d \bmod 2$	$d_{\min}$	$N_d - N$
$k_1$	$3d^2 - 8d$	$3d + 1$	0	10	$3d$
$k_2$	$3d^2 - 8d - 4$	$3d + 1$	0	12	$3d + 2$
$k_3$	$3d^2 - 14d$	$3d + 1$	0	30	$6d$
$k_4$	$3d^2 - 14d - 8$	$3d + 1$	0	34	$6d + 4$
$k_5$	$3d^2 - 6d + 3$	$3d$	1	7	$3d - 1$
$k_6$	$3d^2 - 6d - 1$	$3d$	1	7	$3d + 1$
$k_7$	$3d^2 - 12d + 5$	$3d$	1	15	$6d - 2$
$k_8$	$3d^2 - 12d - 3$	$3d$	1	19	$6d + 2$
$k_9$	$3d^2 - 10d$	$3d - 1$	0	14	$4d$
$k_{10}$	$3d^2 - 16d$	$3d - 1$	0	38	$7d$

Докажем для примера существование семейства  $k_5$ .

**Теорема 3.** Пусть  $d \geq 7$  — нечётное число. Существует оптимальный хордальный граф  $C_N(1, -1, s)$  с диаметром  $d$ , где

$$N = 3d^2/2 - 3d + 3/2, \quad s = 3d.$$

**Доказательство.** Для доказательства применим метод построения плотной укладки графов семейства на плоскости  $Z^2$ , предложенный авторами [2] для доказательства существования при любых диаметрах семейств из табл. 1. Укладка графов семейства  $k_5$  на плоскости  $Z^2$  может

быть получена из плотной укладки (см. детали в [2]), соответствующей экстремальному графу нечётного диаметра  $d \geq 7$  с порядком  $N_d$ , путём удаления требуемого числа вершин, в данном случае  $3d - 1$  вершин, с внешних слоёв вершин (треугольников). На рис. 4 показан пример плотной укладки графа  $C_{54}(1, -1, 21)$  диаметра  $d = 7$ . Число окрашенных треугольников равно разности между порядком экстремального графа того же диаметра и порядком графа семейства  $k_5$ .

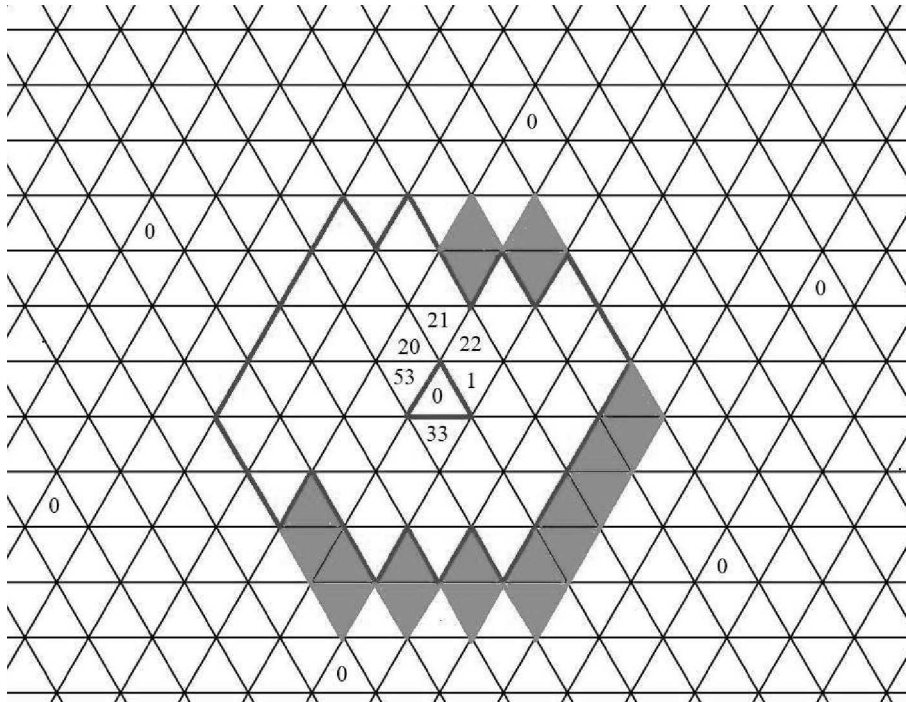


Рис. 4. Плотная укладка графа  $C_{54}(1, -1, 21)$  на плоскости  $Z^2$

Оставшийся граф по построению имеет тот же минимальный диаметр и образует плотную укладку на плоскости, определяемую кратчайшими путями между центральным нулём и соседними нулями на плоскости. Для достижения левого верхнего нуля требуется пройти  $(d - 1)/2$  шагов по образующей  $s$ , 0 шагов по образующей  $s = 1$  и  $3(d - 1)/2$  шагов по образующей  $s = -1$ . Чтобы достичь правый верхний нуль, требуется пройти  $d - 2$  шагов по  $s$ ,  $(d + 1)/2$  шагов по  $s = 1$  и  $(d - 5)/2$  шагов по  $s = -1$ . Для достижения следующего по часовой стрелке нуля требуется пройти  $(d - 3)/2$  шагов по  $s$ , 0 шагов по  $s = -1$  и  $3(d + 1)/2$  шагов по  $s = 1$ . Остальные три соседних нуля расположены симметрично по отношению

к указанным. Таким образом, получаем следующие три сравнения для распределения соседних нулей на плоскости:

$$\begin{aligned}(d-1)/2 \cdot s - 3(d-1)/2 &\equiv 0 \pmod{N}, \\ (d-2)s + 3 &\equiv 0 \pmod{N}, \\ (d-3)/2 \cdot s + 3(d+1)/2 &\equiv 0 \pmod{N}.\end{aligned}$$

Подстановка  $s = 3d$  даёт решение всех трёх сравнений. Теорема 3 доказана.

При анализе датасета оптимальных хордальных графов были замечены следующие интересные особенности: существуют тетрады (quadruple) семейств графов, идущие по четыре семейства подряд с одинаковой образующей при одинаковом диаметре. Существуют также такие же триплеты (triplet) семейств, идущие по три семейства подряд, и дуплеты (double) семейств, идущие по два семейства подряд. Все перечисленные семейства графов показаны в табл. 3. Отметим, что шесть семейств из табл. 3 являются новыми по сравнению с [2].

Таблица 3

Семейства оптимальных графов

Семейство	$N = \bigcup N_i$	$s$	$d \bmod 2$	$d_{\min}$
Тетрада	$N_1 = (3d^2 + 1)/2 - 3d + 3,$ $N_2 = N_1 - 2, N_3 = N_1 - 4,$ $N_4 = N_1 - 6$	$3d - 6$	1	7
Триплет	$N_1 = (3d^2 + 1)/2 - 2d - 2,$ $N_2 = N_1 + 2, N_3 = N_1 + 4$	$3d - 4$	1	7
Дуплет	$N_1 = (3d^2 + 1)/2 - d - 1,$ $N_2 = N_1 + 2$	$3d - 2$	1	5
Дуплет	$N_1 = 3d^2/2 - 2d + 2,$ $N_2 = N_1 - 2$	$3d - 1$	0	6

Существование всех семейств графов из табл. 2 и 3 было проверено и подтверждено экспериментально для всех диаметров  $d = d_{\min} \div 154$  и порядков графов  $N \leq 35000$ . Полученные экспериментальные результаты говорят в пользу того, что найденные семейства графов существуют при любых диаметрах, больших  $d_{\min}$ , т. е. являются бесконечными семействами. Теоретическое подтверждение этого свойства (или его опровержения) составляет предмет будущей работы. Также дополнительного исследования требует задача определения условий возникновения новых семейств оптимальных графов и определения нижних границ для  $d_{\min}$ .

### 6. Точная нижняя граница диаметра хордальных колец

До сих пор мы рассматривали оптимальные графы как графы с минимально возможным диаметром при заданном порядке графа. Возникает вопрос: совпадает ли их диаметр с точной нижней границей?

Для этого надо знать точную нижнюю границу диаметра хордальных графов для любого  $N$ . Определяем её, исходя из значений диаметров, полученных для графов с максимальным числом вершин при заданном диаметре.

**Теорема 4.** Пусть  $d \geq 2$  — целое число. Точная нижняя граница для диаметра хордального кольцевого графа порядка  $N$  равна  $lb(N) = d + 1$  при нечётном  $d$  и  $(3d^2 + 1)/2 + 2 \leq N \leq (3d^2 + 1)/2 + 2d$  либо при чётном  $d$  и  $3d^2/2 - d + 2 \leq N \leq 3d^2/2 + 3d + 2$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Точная нижняя граница диаметра хордальных кольцевых графов  $lb(N)$  представляет собой кусочно постоянную функцию величины  $d + 1$  на интервалах  $N_d + 2 \leq N \leq N_{d+1}$ , где  $d \geq 2$  — диаметр графа. При переходе к очередному интервалу величина функции  $lb(N)$  увеличивается на единицу. Подставляя значения функции  $N_d$  из теоремы 1, получаем искомый результат. Теорема 4 доказана.

На рис. 5 показан вид полученной кривой для точной нижней границы диаметра хордальных кольцевых графов при  $N \leq 24000$ . Отметим, что

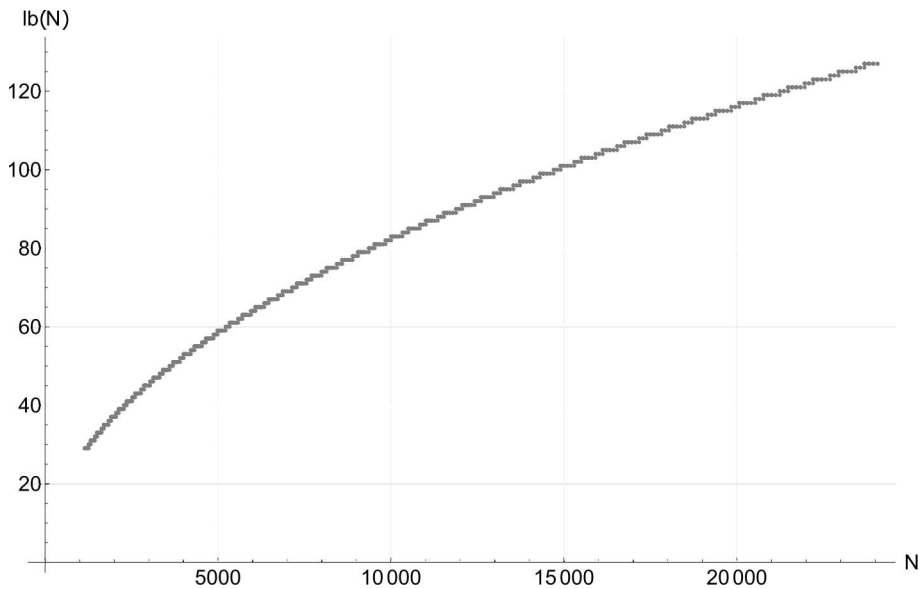


Рис. 5. Точная нижняя граница диаметра хордального кольцевого графа

все графы из табл. 3 имеют диаметры, равные  $lb(N)$ . В табл. 2 только графы семейств  $k_5$  и  $k_6$  имеют диаметры, совпадающие с точной нижней границей. Графы семейства  $k_1$  имеют диаметр  $d = lb(N) + 1$ .

### 7. Семейства оптимальных графов, достигающих точной нижней границы диаметра

Для дальнейшего исследования из общего массива экспериментальных данных оптимальных графов выделим параметры  $\{N, s, d\}$  только тех графов, диаметры которых совпадают с  $lb(N)$ . Назовём их предельно оптимальными или  $p$ -оптимальными. На рис. 6 в координатах  $N$  и  $s$  показан фрагмент датасета для графов с порядками  $1200 \leq N \leq 24000$ , относящийся к  $p$ -оптимальным графам.

Сначала рассмотрим множество образующих квадратичного вида, относящихся к  $p$ -оптимальным графам. Нашей целью является поиск семейств  $p$ -оптимальных графов с общими аналитическими описаниями параметров  $N$  и  $s$ , представленными в виде полиномов от диаметра  $d$ .

Отметим следующие особенности в расположении порядков и образующих квадратичного вида для  $p$ -оптимальных графов.

1. Члены семейств располагаются вдоль линий общего угла наклона, определяемого значением  $\lfloor N/s \rfloor$ .
2. Повторяемость членов семейств при росте диаметра  $d$  реализуется через чётное число  $p \geq 4$  значений, зависящее от  $\lfloor N/s \rfloor$ . Назовём  $p$

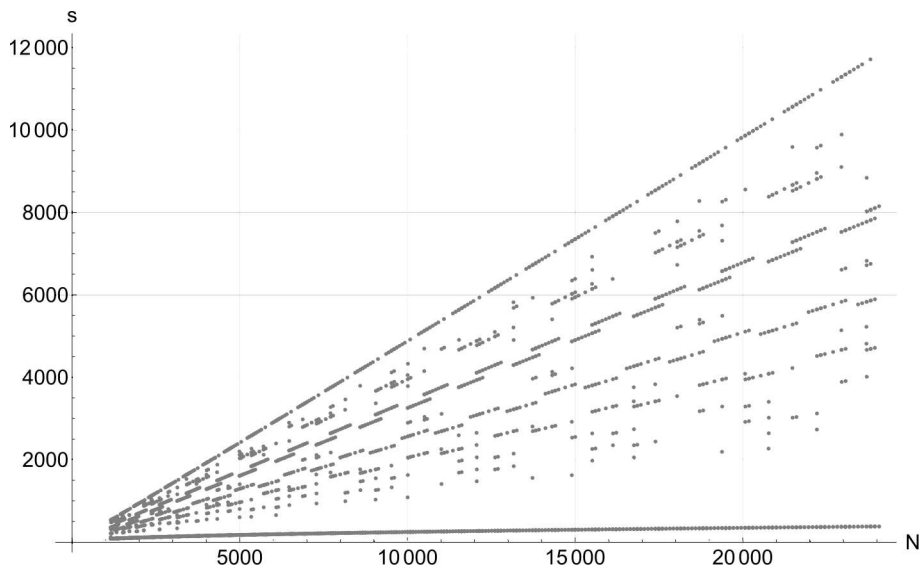


Рис. 6.  $p$ -оптимальные хордальные графы

периодом повторяемости аналитического описания. Начальное значение диаметра, при котором описание семейства приобретает повторяемость, может быть достаточно большим.

3. Семейства на каждой линии дублируются с некоторым сдвигом по диаметру на ближайшей линии снизу следующим образом: на верхней линии —  $N_1 = \lfloor N_1/s_1 \rfloor s_1 - N_1/s_1 \pmod{s_1}$ , на нижней линии —  $N_2 = \lfloor N_2/s_2 \rfloor s_2 + N_2/s_2 \pmod{s_2}$ , где  $N_2/s_2 \pmod{s_2} = N_1/s_1 \pmod{s_1} + 3p$ . Исключение составляет самая верхняя линия графика, соответствующая  $p = 4$ , поскольку по определению хордальных графов значения образующих  $s$  ограничены величиной  $N/2$ .

4. Так как нас интересуют семейства графов с общим аналитическим описанием, которые имеют устойчивую повторяемость на больших диапазонах изменения диаметра, целесообразно рассматривать для поиска семейств достаточно большие начальные значения диаметров.

### 8. Алгоритм поиска семейств оптимальных графов с квадратичными образующими

С учётом найденных особенностей расположения семейств  $p$ -оптимальных графов для автоматизации их поиска был разработан и реализован эвристический алгоритм. При записи алгоритма использованы следующие обозначения (здесь  $q_i$  — целая часть,  $r_i$  — остаток):

$$\begin{aligned} q_i &= \lfloor N_i/s_i \rfloor, & r_i &= N_i \bmod s_i, & i &= 1, 2, \\ q'_i &= \lfloor r_i/d_i \rfloor, & r'_i &= r_i \bmod d_i, & i &= 1, 2, \\ q''_i &= \lfloor s_i/d_i \rfloor, & r''_i &= s_i \bmod d_i, & i &= 1, 2. \end{aligned}$$

**Алгоритм 1** (автоматический поиск семейств оптимальных графов)

ШАГ 1. Выбирается начальное значение периода  $p \in \{4, 6, \dots\}$  и диаметра  $d = d_1 \equiv 0 \pmod{p}$ . Перебираются все точки в массиве данных  $\{N_1, s_1, d_1\}$  и среди всех точек вида  $\{N_2, s_2, d_2\}$  выбираются точки, где  $d_2 = d_1 + p$  и  $\lfloor N_2/s_2 \rfloor = \lfloor N_1/s_1 \rfloor$ . Для точки  $\{N_1, s_1, d_1\}$  и удовлетворяющей условиям очередной точки  $\{N_2, s_2, d_2\}$  создаётся общая формула возможного семейства графов с  $s$  и  $N$  в виде полиномов от диаметра:

$$N = ad^2 + bd + c, \quad s = ed^2 + fd + g.$$

Для этого используется свойство повторяемости вида членов семейства через  $k = (d - d_1)/p$  при создании образующих и порядков с помощью формул, сохраняющих пропорциональность наращивания коэффициентов при степенях  $d$ :

$$s = (q''_1 + k(q''_2 - q''_1))d + r''_1 + k(r''_2 - r''_1), \quad (6)$$

$$N = q_1s + (q'_1 + k(q'_2 - q'_1))d + r'_1 + k(r'_2 - r'_1). \quad (7)$$

Подстановками  $k = (d - d_1)/p$  в (6), значений  $k$  и  $s$  в (7) и приведением подобных слагаемых получаются коэффициенты для полиномов  $N$  и  $s$ :

$$\begin{aligned} a &= (q'_2 - q'_1)/p + q_1(q''_2 - q''_1)/p, \\ b &= q'_1 + q_1q''_1 + (r'_2 - r'_1)/p + q_1(r''_2 - r''_1)/p - d_1a, \\ c &= r'_1 + q_1r''_1 - d_1(r'_2 - r'_1)/p - d_1q_1(r''_2 - r''_1)/p, \\ e &= (q''_2 - q''_1)/p, \\ f &= q''_1 - d_1(q''_2 - q''_1)/p + (r''_2 - r''_1)/p, \\ g &= r''_1 - d_1(r''_2 - r''_1)/p. \end{aligned}$$

Таким образом, для точек  $\{N_1, s_1, d_1\}$  и  $\{N_2, s_2, d_2\}$  аналитический вид графов возможного семейства сформирован.

ШАГ 2. Проверяется наличие членов сформированного семейства в массиве данных при увеличении диаметра на величину  $p$ . Если на выбранном фрагменте данных существование следующих членов семейства подтверждено, то считается, что семейство прошло тестирование и новое семейство найдено, и оно записывается в список новых семейств.

Таблица 4

Семейства оптимальных хордальных кольцевых графов

$2N$	$s$	$2N$	$s$
$3d^2 - 6d - 5$	$\frac{1}{10}(3d^2 - 17)$	$3d^2 - 6d + 19$	$\frac{1}{8}(3d^2 + 13)$
$3d^2 - 6d - 5$	$\frac{1}{10}(3d^2 - 12d + 7)$	$3d^2 - 6d + 19$	$\frac{1}{8}(3d^2 - 12d + 25)$
$3d^2 - 6d - 5$	$\frac{1}{5}(3d^2 - 9d + 1)$	$3d^2 - 4d - 3$	$\frac{1}{6}(3d^2 - 10d + 5)$
$3d^2 - 6d - 5$	$\frac{1}{5}(3d^2 - 3d - 11)$	$3d^2 - 4d - 3$	$\frac{1}{6}(3d^2 + 2d - 11)$
$3d^2 - 6d - 1$	$\frac{1}{4}(3d^2 - 12d + 5)$	$3d^2 - 4d + 1$	$\frac{1}{4}(3d^2 - 10d + 3)$
$3d^2 - 6d + 7$	$\frac{1}{4}(3d^2 - 12d + 13)$	$3d^2 - 4d + 5$	$\frac{1}{6}(3d^2 - 10d + 1)$
$3d^2 - 6d + 7$	$\frac{1}{14}(3d^2 - 5)$	$3d^2 - 4d + 5$	$\frac{1}{10}(3d^2 - 10d + 13)$
$3d^2 - 6d + 7$	$\frac{1}{8}(3d^2 + 13)$	$3d^2 - 4d + 5$	$\frac{1}{5}(3d^2 - 7d + 9)$
$3d^2 - 6d + 7$	$\frac{1}{8}(3d^2 - 12d + 1)$	$3d^2 - 4d + 5$	$\frac{1}{5}(3d^2 - d + 1)$
$3d^2 - 6d + 7$	$\frac{1}{14}(3d^2 - 12d + 19)$	$3d^2 - 4d + 5$	$\frac{1}{10}(3d^2 + 2d - 3)$
$3d^2 - 6d + 7$	$\frac{1}{7}(3d^2 - 9d + 13)$	$3d^2 - 4d + 5$	$\frac{1}{6}(3d^2 + 2d + 9)$
$3d^2 - 6d + 7$	$\frac{3}{14}(3d^2 - 8d + 11)$	$3d^2 - 4d + 9$	$\frac{1}{8}(3d^2 - 10d + 11)$
$3d^2 - 6d + 7$	$\frac{3}{14}(3d^2 - 4d + 3)$	$3d^2 - 4d + 9$	$\frac{1}{4}(3d^2 - 10d + 11)$
$3d^2 - 6d + 7$	$\frac{1}{7}(3d^2 - 3d + 1)$	$3d^2 - 4d + 9$	$\frac{1}{6}(3d^2 - 10d + 17)$

ШАГ 3. Поиск семейств продолжается до тех пор, пока не рассмотрены сначала диаметры для всех значений вычетов по модулю  $p$ , а затем весь заданный диапазон значений параметра  $p$ .

ШАГ 4. После этого происходит валидация найденных семейств, для чего используется часть массива данных, не участвующая в ранее проведённом тестировании на шаге 2. При положительном результате считается, что новое семейство найдено.

ШАГ 5. На выходе алгоритма генерируется множество аналитических описаний (формул  $N(d)$  и  $s(d)$ ) семейств  $p$ -оптимальных графов с квадратичными образующими, ограниченное заданным диапазоном изменения параметра  $p$ .

Алгоритм реализован в системе Wolfram Mathematica 10. Реализовав алгоритм для значений  $36 \leq d \leq 156$  и всех чётных значений  $4 \leq p \leq 18$ , получили на выходе множество семейств  $p$ -оптимальных графов с квадратичными образующими, которое совпало полностью со всеми точками выделенного фрагмента массива данных на рис. 6. Общее количество полученных аналитически описываемых семейств  $p$ -оптимальных графов с квадратичными образующими равно 455. В табл. 4 приведён фрагмент описаний оптимальных семейств, полученных при реализации алгоритма 1. В табл. 5 приведён фрагмент полученных оптимальных семейств вместе с их периодом повторяемости и видом диаметров.

Для того, чтобы продвигаться дальше, увеличивая порядки графов, необходимо увеличивать значения параметра  $p$ , тем самым выявлять новые возникающие семейства.

Описанный алгоритм открытия семейств  $p$ -оптимальных хордальных графов позволяет также получать аналитические описания множеств семейств оптимальных графов с квадратичными образующими, диаметры которых превосходят точную нижнюю границу  $lb(N)$ , так как положенные в его основу принципы построения семейств могут быть использованы для других оптимальных хордальных колец. Все найденные семейства оптимальных графов также включены в отдельный раздел датасета.

### 9. Алгоритм поиска семейств оптимальных графов с линейными образующими

Для автоматизации поиска семейств оптимальных хордальных колец с линейными образующими вида  $s = 3d - \alpha$ , где  $\alpha$  принимает любые целые значения, в том числе и отрицательные, был разработан эвристический алгоритм 2. Анализируя известные семейства оптимальных хордальных колец с линейными образующими, мы пришли к выводу, что условия для включения точек  $\{N, s, d\}$  массива данных в искомое семейство, как и вид формул для  $N$  и  $s$  графов семейства, одинаковы



Таблица 5

Семейства оптимальных графов с указанием периода повторяемости и вида диаметров

$2N/3$	$s$	$p$	$d \bmod p$	$2N/3$	$s$	$p$	$d \bmod p$
$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2-3)$	6	1	$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2+1)$	12	9
$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2-3)$	12	1	$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2+1)$	18	3
$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2-3)$	12	7	$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2+1)$	18	9
$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2-3)$	18	1	$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2+1)$	18	15
$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2-3)$	18	7	$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2-4d+1)$	6	1
$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2-3)$	18	13	$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2-4d+1)$	12	1
$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2-1)$	8	3	$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2-4d+1)$	12	7
$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2-1)$	16	3	$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2-4d+1)$	18	1
$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2-1)$	16	11	$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2-4d+1)$	18	7
$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2+1)$	6	3	$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2-4d+1)$	18	13
$(d-1)^2$	$\frac{1}{2}(d^2+1)$	12	3	$(d-1)^2$	$\frac{3}{8}(d^2-4d+3)$	8	7

для чётных и нечётных диаметров  $d$ . Виды семейств графов с нечётным (чётным) диаметром повторяются через  $p = 2$ . Алгоритм 2 строится аналогично алгоритму 1 с использованием тех же обозначений. Алгоритм 2 применяется для поиска семейств графов с любыми диаметрами.

**Алгоритм 2** (автоматический поиск семейств оптимальных графов)

ШАГ 1. Выбирается начальное значение чётного (нечётного) диаметра  $d = d_1$ . Из массива данных сначала в отдельный список выбираются точки вида  $\{N_1, s_1, d_1\}$ , а затем в другой список — все точки вида  $\{N_2, s_2, d_2\}$  с  $d_2 = d_1 + 2$ , для которых выполняются условия

$$\lfloor N_2/s_2 \rfloor = \lfloor N_1/s_1 \rfloor + (d_2 - d_1)/2,$$

$$N_2 \bmod s_2 = N_1 \bmod s_1 + 3(d_2 - d_1)/2.$$

Последовательно образуются все возможные сочетания точек  $\{N_1, s_1, d_1\}$  и  $\{N_2, s_2, d_2\}$ . Для очередной пары  $\{N_1, s_1, d_1\}$  и  $\{N_2, s_2, d_2\}$  создаётся общая формула возможного семейства графов с  $N$  и  $s$  в виде полиномов от диаметра:

$$N = ad^2 + bd + c, \quad s = 3d - 3d_1 + s_1. \quad (8)$$

Для этого используется свойство повторяемости вида членов семейства через  $k = (d - d_1)/2$  шагов при образовании порядков с помощью формулы, сохраняющей пропорциональность наращивания коэффициентов при степенях  $d$ :

$$N = (q_1 + k)s + r_1 + 3k. \quad (9)$$

Аналогично алгоритму 1 подстановкой  $k = (d - d_1)/2$  и  $s$  из (8) в (9) и сборкой коэффициентов при степенях  $d$  получаются коэффициенты для полинома  $N$ :

$$\begin{aligned} a &= 3/2, & b &= 3q_1 - 3d_1 + (s_1 + 3)/2, \\ c &= q_1(s_1 - 3d_1) + r_1 + d_1(3d_1 - s_1 - 3)/2. \end{aligned}$$

Таким образом, для точек  $\{N_1, s_1, d_1\}$  и  $\{N_2, s_2, d_2\}$  аналитический вид графов возможного семейства сформирован.

ШАГ 2. Проверяется наличие членов сформированного семейства в массиве данных при увеличении диаметра на величину  $p = 2$ . Если на выбранном фрагменте данных существование следующих членов семейства подтверждено, то считается, что семейство прошло тестирование и новое семейство найдено, и оно записывается в список новых семейств.

ШАГ 3. Поиск семейств продолжается до тех пор, пока не рассмотрены все имеющиеся паросочетания графов с диаметрами  $d = d_1$  и  $d = d_2$ .

ШАГ 4. Проводится валидация полученных семейств, для чего используется часть массива данных, не участвовавшая в ранее проведённом тестировании на шаге 2. При положительном результате считается, что новое семейство найдено, и его аналитическое описание пополняет список найденных семейств.

ШАГ 5. На выходе алгоритма генерируется множество аналитических описаний (формул  $N(d)$  и  $s(d)$ ) семейств оптимальных хордальных графов с линейными образующими вида  $s = 3d - \alpha$ .

Алгоритм реализован в системе Wolfram Mathematica 10. Реализовав алгоритм для чётных и нечётных значений диаметров, получили на выходе множество семейств оптимальных графов с линейными образующими. Общее количество полученных аналитически описываемых семейств оптимальных графов с линейными образующими равно 80. Описания всех оптимальных семейств, полученных при реализации алгоритма 2, приведены в разделе датасета.

## 10. Проблема маршрутизации в хордальных кольцах степени три

В работе [1] авторы показали, что способность эффективной маршрутизации в хордальных кольцах зависит от диаметра и соответственно от длины хорды. Они предложили аналитический алгоритм вычисления кратчайшего пути по номерам вершин источника и приёмника. Алгоритм рассмотрен относительно источника  $u = 0$ , и суть его состоит в том, что для расчёта требуемого числа шагов по образующим в кратчайшем пути в вершину  $v$  из  $u = 0$  найдены некоторые соотношения между  $s$

и значениями  $\lfloor v/w \rfloor$  и  $v \bmod w$ , где  $w = s + 1$ . Проверить правильность изложенного алгоритма невозможно, так как в статье он представлен не полностью (со ссылкой [23] на диссертацию, которая нам не доступна). Но учитывая, что авторы рассмотрели не все возможные типы движений по образующим в графе, можно сказать, что в общем их алгоритм даёт путь из источника в приёмник, но не всегда кратчайший, и оценить его длину не представляется возможным.

В [8] для хордальных графов представлены два квазиоптимальных алгоритма маршрутизации с гарантированными границами порядка  $s - 3$  дополнительной длины пути, превышающей длину кратчайшего пути.

В [24, 25] для упрощения расчёта маршрутизации в хордальных кольцевых графах также рассмотрено частично ограниченное множество путей в приёмник, разработаны два квазиоптимальных алгоритма маршрутизации и определён процент и частота превышения длины кратчайшего пути при экспериментальной реализации этих алгоритмов маршрутизации.

Таким образом, проблема разработки оптимального (аналитического) алгоритма маршрутизации в хордальных кольцевых графах остаётся не решённой до настоящего времени, а в связи с возможностью реализации этих структур в сетях на кристалле [26] по-прежнему актуальна.

### Заключение

В настоящей работе рассмотрена проблема построения семейств оптимальных по диаметру хордальных колец с аналитическим описанием в виде полиномов от диаметра сети. Построен большой массив экспериментальных данных, содержащий параметры оптимальных по диаметру хордальных колец для числа вершин  $12 \leq N \leq 60000$ . Разработан новый метод, и реализованы два алгоритма автоматического поиска аналитических описаний семейств оптимальных хордальных колец. Найдены новое аналитическое описание образующих экстремальных хордальных колец с максимальным числом вершин при заданном диаметре, а также аналитические описания более 500 новых семейств оптимальных графов с разного типа образующими на больших диапазонах изменения диаметра. Как показал предварительный анализ, найденный метод автоматического получения аналитических описаний новых оптимальных семейств может быть обобщён и использован для открытия новых семейств в классе оптимальных циркулянтных сетей вида  $C(N; 1, s)$ .

Построенный массив данных оптимальных хордальных колец является эффективным инструментом для дальнейшего изучения топологических и коммуникативных свойств хордальных сетей — среднего расстояния, надёжности, пропускной способности, алгоритмов маршрутизации, а также для открытия новых математических закономерностей

при поиске описаний оптимальных графов и условий их существования. Оптимальные графы уже полученных семейств могут быть рассмотрены в качестве основы для построения моделей надёжных иерархических структур связи сетей на кристалле и суперкомпьютерных систем.

### Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках государственного задания Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (соглашение № FWNM-2022-0005).

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Литература

1. **Arden B. W., Lee H.** Analysis of chordal ring network // IEEE Trans. Comput. 1981. V. C-30, No. 4. P. 291–295.
2. **Morillo P., Comellas F., Fiol M. A.** The optimization of chordal ring networks // Communication technology. Singapore: World Scientific, 1987. P. 295–299.
3. **Yebra J. L. A., Fiol M. A., Morillo P., Alegre I.** The diameter of undirected graphs associated to plane tessellations // Ars Comb. 1985. V. 20-B. P. 159–171.
4. **Bermond J. C., Comellas F., Hsu D. F.** Distributed loop computer-networks: A survey // J. Parallel Distrib. Comput. 1995. V. 24, No. 1. P. 2–10.
5. **Hwang F. K.** A survey on multi-loop networks // Theor. Comput. Sci. 2003. V. 299, No. 1–3. P. 107–121.
6. **Monakhova E. A.** A survey on undirected circulant graphs // Discrete Math. Algorithms Appl. 2012. V. 4, No. 1. Paper ID 1250002. 30 p.
7. **Pedersen J. M., Riaz M. T., Madsen O. B.** Distances in generalized double rings and degree three chordal rings // Parallel and distributed computing and networks. Proc. IASTED Int. Conf. (Innsbruck, Austria, Feb. 15–17, 2005). Calgary: ACTA Press, 2005. P. 153–158.
8. **Parhami B.** Periodically regular chordal rings are preferable to double-ring networks // J. Interconnect. Netw. 2008. V. 9, No. 1. P. 99–126.
9. **Farah R. N., Chien S. L. E., Othman M.** Optimum free-table routing in the optimised degree six 3-modified chordal ring network // J. Commun. 2017. V. 12, No. 12. P. 677–682.
10. **Hwang F. K., Wright P. E.** Survival reliability of some double-loop networks and chordal rings // IEEE Trans. Comput. 1995. V. 44, No. 12. P. 1468–1471.
11. **Chen S. K., Hwang F. K., Liu Y. C.** Some combinatorial properties of mixed chordal rings // J. Interconnect. Netw. 2003. V. 4, No. 1. P. 3–16.

12. **Stojmenović I.** Honeycomb networks: Topological properties and communication algorithms // *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.* 1997. V. 8. P. 281–305.
13. **Ahmad M., Zahid Z., Zavaid M., Bonyah E.** Studies of chordal ring networks via double metric dimensions // *Math. Probl. Eng.* 2022. V. 98. Paper ID 8303242. 7 p.
14. **Bujnowski S., Marciniak B., Oyerinde O. O., Lutowski Z., Flizikowski A., Galan S. G.** The possibility of equalising the transmission properties of networks described by chordal rings // *Proc. 15th Int. Conf. Signal Processing and Communication Systems (Sydney, Australia, Dec. 13–15, 2021)*. Piscataway: IEEE, 2021. 8 p.
15. **Irwan N., Othman M., Farah R. N.** Network properties for classes of chordal ring network degree three topologies // *2010 Proc. Int. Conf. Intelligent Network and Computing (Kuala Lumpur, Malaysia, Nov. 26–28, 2010)*. Piscataway: IEEE, 2010. P. 16–20.
16. **Monakhov O. G., Monakhova E. A.** A class of parametric regular networks for multicomputer architectures // *Comput. Sist. J.* 2000. V. 4, No. 2. P. 85–93.
17. **Huang H.-C.** The diameter-edge invariant property of chordal ring networks: Master Thes. Hsinchu: Natl. Chiao Tung Univ., 2009. 30 p.
18. **Loudiki L., Kchkech M., Essaky E. H.** A new approach for computing the distance and the diameter in circulant graphs. Ithaca, NY: Cornell Univ., 2022. 14 p. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv:2210.11116).
19. **Monakhov O. G., Monakhova E. A., Kireev S. E.** Parallel generation and analysis of optimal chordal ring networks using Python tools on Kunpeng processors // *Parallel computing technologies. Proc. 17th Int. Conf. (Astana, Kazakhstan, Aug. 21–25, 2023)*. Cham: Springer, 2023. P. 126–135. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 14098).
20. **Mollin R. A.** Quadratic polynomials producing consecutive, distinct primes and class groups of complex quadratic fields // *Acta Arithmetica.* 1996. V. 74. P. 17–30.
21. **Marwan N., Romano M. C., Thiel M., Kurths J.** Recurrence plots for the analysis of complex systems // *Phys. Rep.* 2007. V. 438, No. 5–6. P. 237–329.
22. **Barriere L.** Symmetry properties of chordal rings of degree 3 // *Discrete Appl. Math.* 2003. V. 129. P. 211–232.
23. **Lee H.** Modeling of multi-microcomputer networks: PhD Thes. Princeton, NJ: Princeton Univ., 1979.
24. **Gutierrez J., Riaz T., Pedersen J., Labeaga S., Madsen O.** Degree 3 networks topological routing // *Image Process. Commun.* 2009. V. 14, No. 4. P. 35–48.
25. **Gutierrez J., Riaz T., Pedersen J., Labeaga S., Madsen O.** On topological routing on degree 3 chordal rings // *Proc. 1st Int. Conf. Image Processing & Communications (Bydgoszcz, Poland, Sept. 16–18, 2009)*. Warsaw: Acad. Publ. House EXIT, 2009. Paper ID 59020255. 8 p.

- 
- 26. Monakhova E. A., Monakhov O. G., Romanov A. Yu.** Routing algorithms in optimal degree four circulant networks based on relative addressing: comparative analysis for networks-on-chip // *IEEE Trans. Netw. Sci. Eng.* 2023. V. 10, No. 1. P. 413–425.

*Монахова Эмилия Анатольевна*  
*Монахов Олег Геннадьевич*

Статья поступила  
9 августа 2023 г.

После доработки —  
30 августа 2023 г.

Принята к публикации  
22 сентября 2023 г.

A METHOD FOR AUTOMATIC SEARCH FOR FAMILIES  
OF OPTIMAL CHORDAL RING NETWORKSE. A. Monakhova<sup>a</sup> and O. G. Monakhov<sup>b</sup>Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,  
6 Acad. Lavrentiev Avenue, 630090 Novosibirsk, RussiaE-mail: <sup>a</sup>emilia@rav.sccc.ru, <sup>b</sup>monakhov@rav.sccc.ru

**Abstract.** Arden and Lee proposed a class of chordal ring networks of degree three as communication networks for multicomputer systems, derived a formula for the diameter, and produced an algorithm for finding the shortest paths for them. In this paper, it is shown that the formula for the diameter and the routing algorithm presented by them are inaccurate. We have obtained a large dataset containing parameters for describing optimal diameter chord rings for all the numbers of nodes up to 60 000 and found the exact lower bound for the diameter of chordal ring networks. A new method is proposed and the algorithms for automatic search for analytical descriptions of families of optimal chordal rings are realized based on an analysis of the database. Using the latter, analytical descriptions of over 500 new families of optimal chordal ring networks for many values of the number of nodes are found (only six families have been known until now in the literature). Tab. 5, illustr. 6, bibliogr. 26.

**Keywords:** optimal degree-three chordal network, diameter, extremal chordal graph, optimal chordal ring dataset.

## References

1. B. W. Arden and H. Lee, Analysis of chordal ring network, *IEEE Trans. Comput.* **C-30** (4), 291–295 (1981).
2. P. Morillo, F. Comellas, and M. A. Fiol, The optimization of chordal ring networks, in *Communication Technology* (World Scientific, Singapore, 1987), pp. 295–299.

3. **J. L. A. Yebra, M. A. Fiol, P. Morillo, and I. Alegre**, The diameter of undirected graphs associated to plane tessellations, *Ars Comb.* **20-B**, 159–171 (1985).
4. **J. C. Bermond, F. Comellas, and D. F. Hsu**, Distributed loop computer-networks: A survey, *J. Parallel Distrib. Comput.* **24** (1), 2–10 (1995).
5. **F. K. Hwang**, A survey on multi-loop networks, *Theor. Comput. Sci.* **299** (1–3), 107–121 (2003).
6. **E. A. Monakhova**, A survey on undirected circulant graphs, *Discrete Math. Algorithms Appl.* **4** (1), ID 1250002 (2012).
7. **J. M. Pedersen, M. T. Riaz, and O. B. Madsen**, Distances in generalized double rings and degree three chordal rings, in *Parallel and Distributed Computing and Networks*, Proc. IASTED Int. Conf. (Innsbruck, Austria, Feb. 15–17, 2005) (ACTA Press, Calgary, 2005), pp. 153–158.
8. **B. Parhami**, Periodically regular chordal rings are preferable to double-ring networks, *J. Interconnect. Netw.* **9** (1), 99–126 (2008).
9. **R. N. Farah, S. L. E. Chien, and M. Othman**, Optimum free-table routing in the optimised degree six 3-modified chordal ring network, *J. Commun.* **12** (12), 677–682 (2017).
10. **F. K. Hwang and P. E. Wright**, Survival reliability of some double-loop networks and chordal rings, *IEEE Trans. Comput.* **44** (12), 1468–1471 (1995).
11. **S. K. Chen, F. K. Hwang, and Y. C. Liu**, Some combinatorial properties of mixed chordal rings, *J. Interconnect. Netw.* **4** (1), 3–16 (2003).
12. **I. Stojmenović**, Honeycomb networks: Topological properties and communication algorithms, *IEEE Trans. Parallel Distrib. Syst.* **8**, 281–305 (1997).
13. **M. Ahmad, Z. Zahid, M. Zavaid, and E. Bonyah**, Studies of chordal ring networks via double metric dimensions, *Math. Probl. Eng.* **98**, ID 8303242 (2022).
14. **S. Bujnowski, B. Marciniak, O. O. Oyerinde, Z. Lutowski, A. Flizikowski, and S. G. Galan**, The possibility of equalising the transmission properties of networks described by chordal rings, in *Proc. 15th Int. Conf. Signal Processing and Communication Systems (Sydney, Australia, Dec. 13–15, 2021)* (IEEE, Piscataway, 2021).
15. **N. Irwan, M. Othman, and R. N. Farah**, Network properties for classes of chordal ring network degree three topologies, in *2010 Proc. Int. Conf. Intelligent Network and Computing (Kuala Lumpur, Malaysia, Nov. 26–28, 2010)* (IEEE, Piscataway, 2010), pp. 16–20.
16. **O. G. Monakhov and E. A. Monakhova**, A class of parametric regular networks for multicomputer architectures, *Comput. Syst. J.* **4** (2), 85–93 (2000).
17. **H.-C. Huang**, The diameter-edge invariant property of chordal ring networks, *Master Thesis* (Natl. Chiao Tung Univ., Hsinchu, 2009).
18. **L. Loudiki, M. Kchkech, and E. H. Essaky**, A new approach for computing the distance and the diameter in circulant graphs (Cornell Univ., Ithaca, NY, 2022) (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv:2210.11116).



19. **O. G. Monakhov, E. A. Monakhova, and S. E. Kireev**, Parallel generation and analysis of optimal chordal ring networks using Python tools on Kunpeng processors, in *Parallel Computing Technologies*, Proc. 17th Int. Conf. (Astana, Kazakhstan, Aug. 21–25, 2023) (Springer, Cham, 2023), pp. 126–135 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 14098).
20. **R. A. Mollin**, Quadratic polynomials producing consecutive, distinct primes and class groups of complex quadratic fields, *Acta Arithmetica* **74**, 17–30 (1996).
21. **N. Marwan, M. C. Romano, M. Thiel, and J. Kurths**, Recurrence plots for the analysis of complex systems, *Phys. Rep.* **438** (5–6), 237–329 (2007).
22. **L. Barriere**, Symmetry properties of chordal rings of degree 3, *Discrete Appl. Math.* **129**, 211–232 (2003).
23. **H. Lee**, Modeling of multi-microcomputer networks, *PhD Thesis* (Princeton Univ., Princeton, NJ, 1979).
24. **J. Gutierrez, T. Riaz, J. Pedersen, S. Labeaga, and O. Madsen**, Degree 3 networks topological routing, *Image Process. Commun.* **14** (4), 35–48 (2009).
25. **J. Gutierrez, T. Riaz, J. Pedersen, S. Labeaga, and O. Madsen**, On topological routing on degree 3 chordal rings, in *Proc. 1st Int. Conf. Image Processing & Communications (Bydgoszcz, Poland, Sept. 16–18, 2009)* (Acad. Publ. House EXIT, Warsaw, 2009), ID 59020255.
26. **E. A. Monakhova, O. G. Monakhov, and A. Yu. Romanov**, Routing algorithms in optimal degree four circulant networks based on relative addressing: comparative analysis for networks-on-chip, *IEEE Trans. Netw. Sci. Eng.* **10** (1), 413–425 (2023).

Emilia A. Monakhova  
Oleg G. Monakhov

Received August 9, 2023  
Revised August 30, 2023  
Accepted September 22, 2023