ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 31 № 2 2024

Новосибирск
Издательство Института математики

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель–июнь 2024. Т. 31, № 2. С. 46–62

УДК 519.83 DOI: 10.33048/daio.2024.31.786

КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ С ПРЕДПОЧТЕНИЯМИ: ПРИЛОЖЕНИЕ ВЕСОВОГО ПРАВИЛА К ПРОБЛЕМАМ ОБЩЕСТВЕННОГО ПРОСТРАНСТВА В ГОРОДЕ САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

В. В. Гусев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Кантемировская, 3, 194100, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: vgusev@hse.ru

Аннотация. Исследуется проблема распределения общественного пространства с использованием методов кооперативной теории игр для её решения. Игроки — это районы, значение характеристической функции — это суммарное число людей, которые заинтересованы в конкретном виде общественного пространства в рассматриваемых районах. Составлены аксиомы, характерные для проблемы дележа. Выведено специальное значение кооперативной игры, которое зависит от весов игроков. Показано, как подобрать веса оптимизационными методами. Табл. 1, ил. 2, библиогр. 13.

Ключевые слова: теория игр, кооперативная игра, весовое правило, игра с предпочтениями.

Введение

Описание проблемы и метод её решения. По данным администрации г. Санкт-Петербург численность города достигает 7 млн человек на 2021 год. Из-за многомиллионной численности населения город сталкивается с проблемой распределения общественного пространства. Общественные пространства включают в себя все места, являющиеся общественной собственностью. Сюда входят места общественного пользования, открытые и доступные для всех жителей и гостей города. Примерами общественных мест являются детские площадки, парки, автомобильные стоянки, скверы, стадионы и т. п. Инфраструктура города расширяется, в районах города строятся новые жилые комплексы. Это делает актуальным вопрос о выборе типа общественного пространства в конкретном месте.

Предположим, что в некотором новом районе есть место под общественное пространство. Что лучше построить: детскую площадку или автостоянку? От выбора общественного пространства зависит привлекательность района для разных групп населения. Автомобилисты хотят автостоянку, молодые семьи предпочитают детские площадки, и те и другие были бы не против парка. Возникает вопрос: как именно распределить имеющийся ресурс (парки, автостоянки, детские площадки и т. п.) между районами?

Предположим, что требуется определить, какую площадь общественного пространства нужно занять под парки в каждом районе. Чтобы решить проблему распределения ресурса, пользуемся методами кооперативной теории игр. Кооперативная игра задаётся множеством игроков $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ и характеристической функцией $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$ такой, что $v(\varnothing) = 0$. Множество игроков — это множество районов, а характеристическая функция показывает число людей (измеряется в сотнях или тысячах человек), которые будут пользоваться общественным пространством.

Например, для $N = \{1, 2, 3\}$ характеристическую функцию вида

$$v(\{1\}) = 5, \quad v(\{2\}) = 6, \quad v(\{3\}) = 10, \quad v(\{1,2\}) = 15,$$
$$v(\{1,3\}) = 20, \quad v(\{2,3\}) = 25, \quad v(\{1,2,3\}) = 50$$

интерпретируем следующим образом. Если в районе 1 обустроить парк, то по прогнозам им будут пользоваться в среднем 5 сотен человек. Если расположить парки в районах 1 и 2, то ими будут пользоваться в среднем 15 сотен человек.

Монотонность и супераддитивность характеристической функции зависят от районов и их расположения. Иногда жители города готовы ездить в центральные районы для проведения своего досуга. Если в районе, близком к центральному, разместить общественное пространство, то это может значительно привлечь отдыхающих в район. Это говорит о том, что значение $v(K)$ может превышать число $\sum\limits_{i \in K} v(\{i\})$ для некоторых $K \subseteq N$, $K \neq \varnothing$.

Рассчитывая значение кооперативной игры, можно определить, какой район наиболее предпочтителен для размещения в нём конкретного общественного пространства. Однако, у самого города есть предпочтения относительно размещения общественных мест в городе. Может оказаться так, что город хочет разгрузить центральный район и намеренно размещает общественное пространство в близко расположенных районах. Тем самым в кооперативной модели нам нужно учесть предпочтения города, которые в статье обозначаем отношением $\succ$. Запись $i \succ j$ означает, что игрок (район) i предпочтительнее игрока j, где $i, j \in N$.

Характеристическая функция кооперативной игры хранит в себе информацию о числе жителей, которые заинтересованы в конкретном общественном пространстве, а предпочтения $\succ$ отражают намерения и способности города разместить в том или ином районе общественное пространство.

Для решения задачи распределения ресурса используется следующий подход. Сначала формулируем аксиомы, которые характерны для задачи распределения общественного пространства. С помощью аксиом выводим значение кооперативной игры, в котором у каждого игрока есть свой вес в коалиции. Вес одного и того же игрока в разных коалициях разный. Далее, используя аксиоматические и оптимизационные методы, выбираем веса игроков некоторым справедливым или оптимальным способом.

Отметим, что большинство работ в области исследования операций, урбанизации, индустриальной организации используют только оптимизационные и эмпирические методы решения проблем общественных пространств [1–3]. Здесь мы показываем, как можно решить задачу распределения общественного пространства по районам города с помощью методов кооперативной теории игр, учитывая предпочтения общества и города.

Результаты. В ходе исследования проблемы распределения общественного пространства получены следующие основные результаты:

- составлена аксиоматика для весового экспертного значения кооперативной игры (теорема 1);
- рассчитана оптимальная площадь для единственного вида общественного пространства (теорема 2).

С помощью методов кооперативной теории игр в статье выводится специальное значение кооперативной игры. Сформулированные аксиомы имеют физический смысл для решения задачи распределения общественного пространства. В теореме 1 показано, что аксиомам линейности, эффективности и предпочтения удовлетворяет значение кооперативной игры такое, что у каждого игрока существует вес для каждой коалиции. Стоит вопрос о том, как подобрать веса игроков. Для этого в статье предлагается два подхода. Первый подход аксиоматический, второй — оптимизационный. С помощью оптимизационного подхода показано, как можно рассчитать оптимальную площадь для единственного вида общественного пространства.

1. Основные обозначения и определения

Кооперативная игра — это пара (N, v), где $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество игроков и $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$, $v(\varnothing) = 0$, — характеристическая функция.

Обозначим через $G(N)$ множество всех характеристических функций для множества игроков N, т. е. $G(N) = \{v\colon 2^N \to \mathbb{R} \mid v(\varnothing) = 0\}$. *Значением кооперативной игры* называется отображение $\varphi\colon G(N) \to \mathbb{R}^n$. Число $\varphi_i(v)$ называется *значением игрока* $i \in N$ в кооперативной игре (N, v).

Пусть $\varnothing \subset K \subseteq N$. Единичная кооперативная игра — это пара (N, v_K), где

$$v_K(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } S = K, \\ 0, & \text{если } S \neq K. \end{cases}$$

Множество характеристических функций $\{v_K \mid \varnothing \subset K \subseteq N\}$ образует базис в пространстве $G(N)$. Характеристическая функция $v \in G(N)$ может быть представлена единственным образом в виде линейной комбинации характеристических функций единичных кооперативных игр следующим образом:

$$v(S) = \sum_{\varnothing \subset K \subseteq N} v(K) v_K(S), \quad S \subseteq N.$$

Будем предполагать, что существует общий порядок предпочтений игроков $1 \succeq 2 \succeq \cdots \succeq n$.

2. Весовое экспертное значение

В этом разделе вводим аксиомы, которые учитывают предпочтения в кооперативной игре.

Аксиома предпочтения. *Для любых* $i, j \in N$, $K \subseteq N$, $K \neq \varnothing$, *если* $i \succ j$, *то* $\varphi_i(v_K) \geqslant \varphi_j(v_K)$.

В аксиоме предпочтения задано отношение предпочтительности между игроками для любой единичной игры. Обычно в игре (N, v_K) агенты из коалиции K получают выигрыш не меньше нуля, а выигрыш каждого игрока из множества $N \setminus K$ — это нуль. Такое свойство дележа обусловлено только математическими свойствами единичных кооперативных игр. В действительности нулевые игроки могут получать ненулевой выигрыш. Аксиома предпочтения это учитывает. Например, если значение игрока i в игре (N, v_K) неотрицательно и для игрока $j \in N \setminus K$ имеет место $j \succ i$, то согласно аксиоме предпочтения $\varphi_j(v_K) \geqslant 0$.

Аксиома линейности. *Для любых характеристических функций* $v, w \in G(N)$ *и констант* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *имеем*

$$\varphi(\alpha v + \beta w) = \alpha\varphi(v) + \beta\varphi(w).$$

Аксиома эффективности. *Для любой характеристической функции* $v \in G(N)$ *имеем*

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N).$$

Теорема 1. *Значение φ удовлетворяет аксиомам предпочтения, линейности и эффективности, если и только если существуют числа w_S^i, $i \in N$, $\varnothing \subset S \subseteq N$, такие, что*

$$\sum_{j \in N} w_S^j = \begin{cases} 1, & \text{если } S = N, \\ 0, & \text{если } S \neq N, \end{cases} \tag{1}$$

и значение игрока $i \in N$ в кооперативной игре (N, v) равно

$$\varphi_i(v) = \sum_{\varnothing \subset S \subset N} w_S^i \cdot v(S) + \frac{w_N^i}{\sum\limits_{j \in N} w_N^j} \cdot v(N).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть существуют числа w_S^i, $\varnothing \subset S \subseteq N$, такие, что имеет место (1), а значение $\varphi_i(v)$ определено в условии теоремы. Покажем, что выполняются аксиомы линейности, эффективности и предпочтения.

Линейность. Так как $\varphi_i(v)$ задано линейным выражением относительно переменных $v(S)$, $\varnothing \subset S \subseteq N$, то $\varphi_i(v)$ удовлетворяет условию линейности.

Эффективность. Покажем, что сумма значений игроков равна $v(N)$:

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = \sum_{i \in N} \Bigg(\sum_{\varnothing \subset S \subset N} w_S^i \cdot v(S) + \frac{w_N^i}{\sum\limits_{j \in N} w_N^j} \cdot v(N) \Bigg) =$$

$$= \sum_{\varnothing \subset S \subset N} v(S) \cdot \underbrace{\sum_{i \in N} w_S^i}_{0} + \frac{\sum\limits_{i \in N} w_N^i}{\sum\limits_{j \in N} w_N^j} \cdot v(N) = v(N).$$

Аксиома предпочтения. Пусть $\varnothing \subset K \subseteq N$. Вычислим

$$\varphi_i(v_K) = \sum_{\varnothing \subset S \subset N} w_S^i \cdot v_K(S) + \frac{w_N^i}{\sum\limits_{j \in N} w_N^j} \cdot v_K(N) = \begin{cases} w_K^i, & K \neq N, \\ \frac{w_N^i}{\sum\limits_{j \in N} w_N^j}, & K = N. \end{cases}$$

Согласно аксиоме предпочтения если $i \succ j$, то должно выполняться $\varphi_i(v_K) \geqslant \varphi_j(v_K)$. Учитывая явный вид значения $\varphi_i(v_K)$, неравенство $\varphi_i(v_K) \geqslant \varphi_j(v_K)$ верно, если и только если $w_K^i \geqslant w_K^j$ для любого $K \subseteq N$, $K \neq \varnothing$. Следовательно, существуют веса w_K^i, $i \in N$, $\varnothing \subset K \subseteq N$, при которых аксиома предпочтения выполняется.

Достаточность. Пусть φ удовлетворяет аксиомам предпочтения, линейности и эффективности. Покажем, что существуют веса игроков, для которых φ определено в условии теоремы.

Можем представить любую характеристическую функцию в виде линейной комбинации единичных характеристических функций:

$$v(S) = \sum_{\varnothing \subset K \subseteq N} v(S) v_K(S), \quad S \subseteq N.$$

Так как φ удовлетворяет свойству линейности, имеем

$$\varphi(v) = \sum_{\varnothing \subset K \subseteq N} v\varphi(v_K).$$

Пусть $v = v_K$ и $i_1 \succ_K i_2 \succ_K \cdots \succ_K i_n$, где $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ — некоторая перестановка игроков. Из аксиомы предпочтения и эффективности получаем

$$\varphi_{i_1}(v_K) \geqslant \varphi_{i_2}(v_K) \geqslant \ldots \geqslant \varphi_{i_n}(v_K),$$

$$\sum_{i \in N} \varphi_i(v_K) = v(K) = \begin{cases} 0, & \text{если } K \neq N, \\ 1, & \text{если } K = N. \end{cases}$$

Следовательно, существуют описанные веса игроков такие, что выигрыш игрока i в единичной кооперативной игре (N, v_K) можно представить в виде

$$\varphi_i(v_K) = \begin{cases} w_K^i, & \text{если } K \neq N, \\ \dfrac{w_N^i}{\sum\limits_{j \in N} w_N^j}, & \text{если } K = N. \end{cases}$$

Значит, значение $\varphi_i(v)$ можно записать следующим образом:

$$\varphi_i(v) = \sum_{\varnothing \subset K \subseteq N} v\varphi_i(v_K) = \sum_{\varnothing \subset S \subset N} w_S^i \cdot v(S) + \frac{w_N^i}{\sum\limits_{j \in N} w_N^j} \cdot v(N).$$

Теорема 1 доказана.

Значение $\varphi_i(v)$, определённое в теореме 1, будем называть *весовым экспертным значением* игрока i в кооперативной игре (N, v). Значение $\varphi(v)$ называем экспертным, поскольку некий эксперт даёт нам информацию о предпочтениях для каждой единичной кооперативной игры. Обычно такую информацию исследователи задают самостоятельно путём введения некоторых аксиом (нулевые игроки получают нуль, выигрыши симметричных игроков равны и т. п.). Наш подход шире, так как веса игроков можно задать исходя из аксиом или с помощью эксперта.

Заметим, что если $w_K^i = 0$ для любых $i \in N$ и $K \subset N$, то получим пропорциональный делёж (proportional rule) [4, 5]

$$\varphi_i(v) = \frac{w_N^i}{\sum\limits_{j \in N} w_N^j} \cdot v(N),$$

частным случаем которого является равномерный делёж (equal division value) [6–8]

$$\varphi_i(v) = \frac{v(N)}{|N|}.$$

Аксиоматика равномерного дележа приведена в работе [9], в основе которой лежит аксиома аннулирующего игрока (nullifying players). Игрок $i \in N$ в кооперативной игре (N, v) называется *аннулирующим,* если $v(S \cup \{i\}) = 0$ для любого $S \subseteq N \setminus \{i\}$. Тогда согласно рассматриваемой аксиоме выигрыш аннулирующего игрока — это нуль. В зависимости от весов игроков весовое экспертное значение аннулирующего игрока может быть как равно нулю, так и нет.

Подобрав веса специальным образом, так же можем получить другие классические дележи. Например, когда

$$w_K^i = \begin{cases} \frac{1}{|N|}, & \text{если } K = N, \\ -\frac{1}{|N|}, & \text{если } K = \{j\},\ j \neq i, \\ 1 - \frac{1}{|N|}, & \text{если } K = \{i\}, \\ 0 & \text{иначе}, \end{cases}$$

получим делёж с равно пропорциональным делением остатка (equal surplus division solution) [10, 11]

$$\varphi_i(v) = v(\{i\}) + \frac{1}{|N|}\Big(v(N) - \sum_{j \in N} v(\{j\})\Big).$$

Когда веса имеют вид

$$w_K^i = \begin{cases} \frac{(|K|-1)!(|N|-|K|)!}{|N|!}, & \text{если } i \in K, \\ -\frac{(|K|-1)!(|N|-|K|)!}{|N|!}, & \text{если } i \notin K, \end{cases}$$

весовое экспертное значение — это значение Шепли [12, 13]

$$\varphi_i(v) = \sum_{i \in K \subseteq N} \frac{(|K|-1)!(|N|-|K|)!}{|N|!} \cdot (v(K) - v(K \setminus \{i\})).$$

Заметим, что для перечисленных дележей при любом $\varnothing \subset K \subseteq N$ веса удовлетворяют ограничению теоремы 1, а именно:

$$\sum_{j \in N} w_K^j = \begin{cases} 1, & \text{если } K = N, \\ 0, & \text{если } K \neq N. \end{cases}$$

Весовое экспертное значение охватывает достаточно широкий класс дележей из-за того, что вес одного и того же игрока в разных коалициях различен. Однако мы не можем подбирать веса произвольным образом, так как они хранят в себе информацию о предпочтениях в единичных кооперативных играх. Возникает вопрос: как задать числа w^i_K, $i \in N$, $\varnothing \subset K \subseteq N$, зная предпочтения эксперта. Далее сформулируем аксиомы, которые позволяют определить веса игроков единственным образом.

3. Аксиоматические методы нахождения весов

В этом разделе вводим аксиомы, которые характерны для задачи распределения ресурса и позволяют упростить весовое экспертное значение каждого игрока.

Пусть имеется только два игрока, т. е. $N = \{1, 2\}$. Напомним, что игрок $i \in N$ аннулирующий в игре (N, v), если $v(K \cup \{i\}) = 0$ для любого $K \subseteq N \setminus \{i\}$.

Аксиома сверхнулевого игрока. *Если в кооперативной игре (N, v) игрок $i \in N$ аннулирующий и $j \succeq i$ для любого $j \in N \setminus \{i\}$, то $\varphi_i(v) = 0$.*

Если игрок является одновременно аннулирующим и самым не предпочтительным, то согласно аксиоме сверхнулевого игрока его выигрыш равен нулю.

Аксиома равенства критериев. *Если $i, j \in N$ — аннулирующий и не аннулирующий игроки соответственно в кооперативной игре (N, v), причём $i \succeq j$, то $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$.*

С одной стороны, если игрок $i \in N$ аннулирующий, а $j \in N$ нет, то $\varphi_j(v) \geqslant \varphi_i(v)$. С другой стороны, игрок i предпочтительнее игрока j, т. е. $i \succeq j$, и должно выполняться $\varphi_i(v) \geqslant \varphi_j(v)$. Если выполняется $\varphi_j(v) > \varphi_i(v)$ или $\varphi_j(v) < \varphi_i(v)$, то свойство аннулирования доминирует свойство предпочтений, или наоборот. В аксиоме равенства критериев предполагается, что $\varphi_i(v) = \varphi_j(v)$, т. е. нельзя выделить доминирующий критерий.

Утверждение. *Пусть $N = \{1, 2\}$, $1 \succeq 2$. Значение $\varphi\colon G(\{1, 2\}) \to \mathbb{R}^2$ удовлетворяет аксиомам сверхнулевого игрока, равенства критериев, линейности и эффективности, если и только если существуют $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$, $w_1 \geqslant w_2$, такие, что*

$$\varphi_1(v) = \frac{w_1}{w_1 + w_2} \cdot v(\{1, 2\}), \quad \varphi_2(v) = \frac{w_2}{w_1 + w_2} \cdot v(\{1, 2\}).$$

Доказательство. Необходимость. Покажем, что

$$\varphi(v) = \left(\frac{w_1}{w_1 + w_2} \cdot v(\{1, 2\}),\ \frac{w_2}{w_1 + w_2} \cdot v(\{1, 2\})\right)$$

удовлетворяет аксиомам из утверждения. Аксиома линейности выполняется, так как $\varphi_i(v)$, $i \in \{1, 2\}$, выражается линейно через $v(\{1, 2\})$. Поскольку $\varphi_1(\{1, 2\}) + \varphi_2(\{1, 2\}) = v(\{1, 2\})$, верна аксиома эффективности.

Пусть игрок 2 аннулирующий, тогда $v(\{2\}) = v(\{1,2\}) = 0$. Так как $1 \succ 2$, то 2 — сверхнулевой игрок и должно выполняться $\varphi_2(v) = 0$. Аксиома сверхнулевого игрока выполняется, поскольку

$$\varphi_2(v) = \frac{w_2}{w_1 + w_2} \cdot v(\{1,2\}) = 0.$$

Пусть только игрок 1 аннулирующий, тогда $v(\{1\}) = v(\{1,2\}) = 0$. Так как $1 \succ 2$, то согласно аксиоме равенства критериев должно выполняться $\varphi_1(v) = \varphi_2(v)$, что верно, поскольку $\varphi_1(v) = \varphi_2(v) = 0$. Таким образом, φ удовлетворяет аксиомам из утверждения.

Достаточность. Покажем, что значение $\varphi(v)$, удовлетворяющее перечисленным аксиомам, единственно.

Из аксиомы линейности следует, что

$$\varphi_1(v) = v(\{1\})\varphi_1(v_1) + v(\{2\})\varphi_1(v_2) + v(\{1,2\})\varphi_1(v_{1,2}),$$
$$\varphi_2(v) = v(\{1\})\varphi_2(v_1) + v(\{2\})\varphi_2(v_2) + v(\{1,2\})\varphi_2(v_{1,2}).$$

В игре (N, v_1) игрок 2 сверхнулевой, поэтому $\varphi_2(v_1) = 0$. Из аксиомы эффективности следует, что $\varphi_1(v_1) + \varphi_2(v_1) = v_1(\{1,2\}) = 0$, значит, $\varphi_1(v_1) = \varphi_2(v_1) = 0$.

Для игры (N, v_2) из выполнения аксиом равенства критериев и эффективности следует, что $\varphi_1(v_2) = \varphi_2(v_2)$ и

$$\varphi_1(v_2) + \varphi_2(v_2) = v_2(\{1,2\}) = 0,$$

значит, $\varphi_1(v_2) = \varphi_2(v_2) = 0$.

Для игры (N, v_{12}) игроки 1 и 2 не аннулирующие. Из аксиомы эффективности следует, что $\varphi_1(v_{12}) + \varphi_2(v_{12}) = v_{12}(\{1,2\}) = 1$. Следовательно, существуют $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\varphi_1(v_{12}) = \frac{w_1}{w_1 + w_2}, \quad \varphi_2(v_{12}) = \frac{w_2}{w_1 + w_2}.$$

Так как разложение характеристической функции v по базису единственно и значения $\varphi_i(v_K)$, $i \in N$, $\varnothing \subset K \subseteq N$, вычисляются однозначно, значения $\varphi_i(v)$, $i \in \{1,2\}$, определяются единственным образом:

$$\varphi_1(v) = v(\{1\})\varphi_1(v_1) + v(\{2\})\varphi_1(v_2) + \\ + v(\{1,2\})\varphi_1(v_{1,2}) = \frac{w_1}{w_1 + w_2} \cdot v(\{1,2\}),$$
$$\varphi_2(v) = v(\{1\})\varphi_2(v_1) + v(\{2\})\varphi_2(v_2) + \\ + v(\{1,2\})\varphi_2(v_{1,2}) = \frac{w_2}{w_1 + w_2} \cdot v(\{1,2\}).$$

Утверждение доказано.

Упрощая весовое экспертное значение путём расширения списка аксиом, можно получить известные значения игры или их аналоги. Так, например, в утверждении 1 получено весовое значение для двух игроков. Добавление новых аксиом в аксиоматику весового экспертного значения будет приводить к обнулению или равенству весов либо получится некоторое другое элементарное упрощение. Если действительно нужно добавить новые аксиомы, то желательно проверить, подойдут ли классические дележи в качестве решения задачи распределения ресурса.

Далее фокусируемся на оптимизационных методах нахождения весов.

4. Оптимизационные методы нахождения весов

4.1. Задача выпуклого программирования для одного типа общественного пространства. В этом разделе показываем, как можно найти веса игроков с помощью методов оптимизации.

Так как игрок — это район, а значение характеристической функции $v(K)$, $K \subseteq N$, — это число людей, которые заинтересованы в общественном пространстве в районах из K, значение $\varphi_i(v)$ показывает число игроков, которые будут пользоваться общественным пространством в районе i.

Можем учитывать значения $\varphi_i(v)$, $i \in N$, при распределении общественного пространства. Площадь, выделяемую под общественное пространство, можно считать равной $\alpha_i \varphi_i^2(v)$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$, $i \in N$. Мы заинтересованы в таком распределении, которое удовлетворяет человеческим нуждам и при этом занимает минимальную площадь. Стало быть, для задачи распределения общественного пространства достаточно минимизировать суммарную площадь районов, выделяемую под общественное пространство:

$$F(w) = \sum_{i \in N} \alpha_i \varphi_i^2(v) \to \min_{\substack{w_S^i,\\ i \in S \subseteq N}},$$

$$\sum_{i \in S} w_S^i = \begin{cases} 0, & \text{если } S \subset N, \\ 1, & \text{если } S = N, \end{cases}$$

$$w_N^i \geqslant 0, \quad i \in N.$$

Получили оптимизационную модель для нахождения весов игроков. Числа $\varphi_i(v)$, $i \in N$, зависят от w_S^i, $\varnothing \subset S \subseteq N$, а $w = \{w_S^i\}_{i \in N,\, S \subseteq N}$.

Теорема 2. *Суммарная оптимальная площадь, занятая под единственный тип общественного пространства, равна*

$$F(w^*) = \frac{v(N)}{\sum\limits_{i \in N} \alpha_i^{-1}}.$$

Доказательство. Функция Лагранжа задачи минимизации $F(w)$ имеет вид

$$L(w,\lambda)=\sum_{i\in N}\alpha_i\Big(\sum_{\varnothing\subset S\subseteq N}w_S^i\cdot v(S)\Big)^2+$$
$$+\sum_{\varnothing\subset S\subset N}\lambda_S\sum_{i\in S}w_S^i+\lambda_N\Big(\sum_{i\in N}w_N^i-1\Big).$$

Целевая функция выпуклая, а ограничения системы линейны. Запишем необходимые условия для нахождения стационарной точки функции Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial w_K^i}=2\alpha_i v(K)\sum_{\varnothing\subset S\subseteq N}w_S^i v(S)+\lambda_K=0,\quad \varnothing\subset K\subseteq N,$$
$$\sum_{i\in S}w_S^i=\begin{cases}0, & \text{если } S\subset N,\\ 1, & \text{если } S=N,\end{cases}$$
$$w_N^i\geqslant 0,\quad i\in N.$$

Пусть $w_K^i=0$ для любых $i\in K$, $\varnothing\subset K\subset N$. Найдём значения w_N^i из системы

$$\begin{cases}2w_N^i\alpha_i v(N)+\lambda=0, & i\in N,\\ \sum\limits_{i\in N}w_N^i=1.\end{cases}$$

Получим

$$w_N^i=\frac{\alpha_i^{-1}}{\sum\limits_{j\in N}\alpha_j^{-1}},\quad i\in N,$$

и числа λ_K, $\varnothing\subset K\subseteq N$ имеют вид

$$\lambda_K=-\frac{2v(N)}{\sum\limits_{j\in N}\alpha_j^{-1}}\cdot v(K).$$

Числа w_N^i удовлетворяют ограничению неотрицательности. Таким образом, веса игроков имеют вид

$$w_K^i=0,\quad i\in K,\ \varnothing\subset K\subset N,$$
$$w_N^i=\frac{\alpha_i^{-1}}{\sum\limits_{j\in N}\alpha_j^{-1}},\quad i\in N.$$

Поставляя найденные веса игроков в целевую функцию, получим

$$F(w^*) = \frac{v(N)}{\sum\limits_{i \in N} \alpha_i^{-1}}.$$

Теорема 2 доказана.

4.2. Числовой пример. Парки, сады, парковки могут расширяться или, наоборот, их территория может уменьшиться. Так, например, парковку могут закрыть полностью или отдать под неё близлежащие территории. Рассмотрим задачу расширения парков. Анализируем только парки Калининского района города Санкт-Петербург, изображённые на рис. 1.

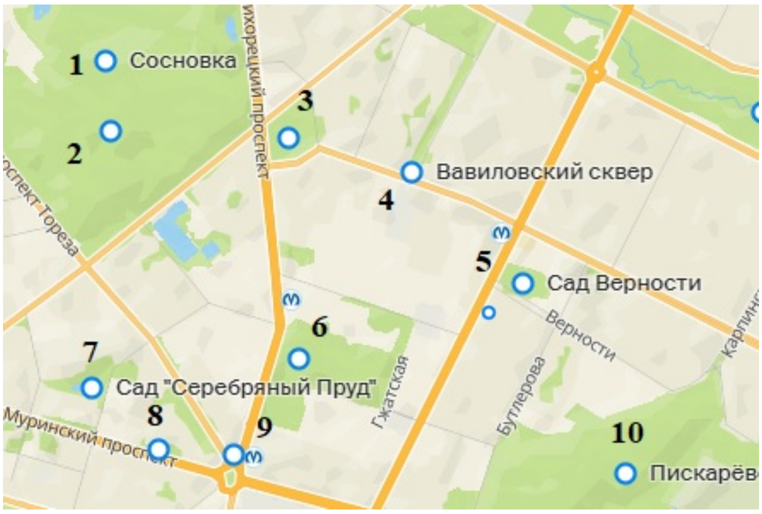

Рис. 1. Карта парков

Названия парков и нормированное число жителей вблизи парка (a_i) приведены в табл. 1.

Если некоторый человек находится в парке, то он может перейти в расположенный рядом парк. Также жители могут выбрать парк, который расположен не рядом с ними. Предполагаем, что переходы людей между парками происходят, если между соответствующими парками существует ребро в весовом графе парков, изображённом на рис. 2.

Вес ребра показывает связь между графами. Чем меньше вес ребра, тем менее вероятно, что люди будут переходить между графами.

Таблица 1

Парки и число жителей вблизи них

№	Парк	a_i
1	Сосновка	0,14
2	Центральная аллея парка «Сосновка»	0,14
3	Сад Бенуа	0,07
4	Вавилонский сквер	0,06
5	Сад Верности	0,09
6	Парк Политехнического университета	0,13
7	Сад «Серебряный пруд»	0,08
8	Сквер Академика Михачёва	0,08
9	Сквер Блокадников	0,08
10	Пискарёвский парк	0,13

Построим характеристическую функцию кооперативной игры (N, v), $N = \{1, 2, \ldots, 10\}$, следующим образом:

$$v(\{i\}) = a_i - \sum_{j \in N_i} r_{ij} a_i + \sum_{j \in N_i} r_{ji} a_j, \quad i \in N,$$
$$v(K) = \sum_{i \in K} v(\{i\}), \quad \varnothing \subset K \subseteq N,$$

где N_i, $i \in N$, — множество парков таких, что для любого $j \in N_i$ существует ребро $\{i, j\}$ в графе на рис. 2. Число r_{ij} — это доля людей, которые переходят из парка i в парк j. Считаем, что $r_{ij} = r_{ji}$. Можно сказать, что числа r_{ij} хранят в себе только информацию о расстоянии между парками i и j. Значения чисел r_{ij} отображены на рис. 2.

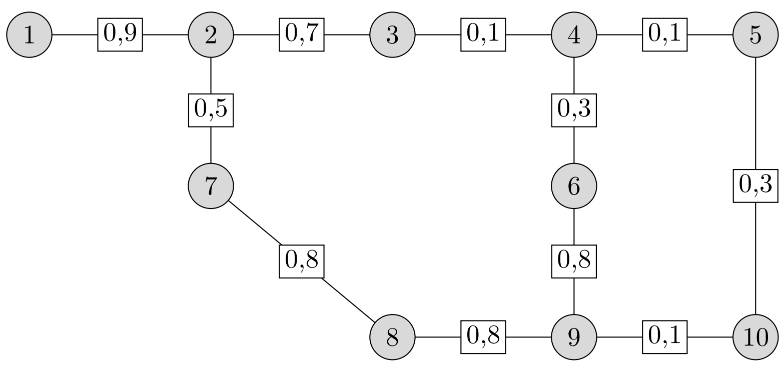

Рис. 2. Весовой граф

Пусть $\alpha_i = a_i^{-1}$, $i \in N$. Тогда согласно теореме 2 оптимальная площадь парков для коалиции N равна

$$\frac{v(N)}{\sum\limits_{i\in N}\alpha_i^{-1}} = \frac{v(N)}{\sum\limits_{i\in N}a_i} = 1.$$

В силу нормировки и свойства $v(K) = \sum\limits_{i\in K} v(\{i\})$ получаем единичную оптимальную площадь. Решая оптимизационную задачу для парков 1 и 2, получаем

$$\frac{v(\{1\})}{\alpha_1^{-1}} = \frac{a_1 - 0{,}9a_1 + 0{,}9a_2}{a_1} = 1,$$

$$\frac{v(\{2\})}{\alpha_2^{-1}} = \frac{a_2 - 0{,}9a_2 - 0{,}7a_2 - 0{,}5a_2 + 0{,}9a_1 + 0{,}7a_3 + 0{,}5a_7}{a_2} = 0{,}025.$$

Таким образом, площадь парка 1 (Сосновка) должна быть в среднем в 40 раз больше площади парка 2 (Центральная аллея), что соответствует действительности. Рассчитывая оптимальные значения площадей парков можно понять, какие парки нуждаются в расширении.

Заключение

Проблемы распределения общественных пространств актуальны для больших городов и требуют математических подходов к решению. Для решения таких проблем нужно учитывать мнения жителей города, его инфраструктуру, бюджетные ограничения. В настоящей статье показано, что мнение жителей можно учесть с помощью предпочтений в кооперативной игре и вывести соответствующий делёж. Чтобы среди допустимых дележей выделить единственный делёж, можно использовать как аксиоматические, так и оптимизационные подходы.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 22–21–20070, `rscf.ru/project/22-21-20070`), а также поддержано грантом Санкт-Петербургского научного фонда (соглашение № 65/2022).

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. **Garcia-Ramon M. D., Ortiz A., Prats M.** Urban planning, gender and the use of public space in a peripheral neighbourhood of Barcelona // Cities. 2004. V. 21, No. 3. P. 215–223. DOI: `10.1016/j.cities.2004.03.006`.

2. **Amin A.** Collective culture and urban public space // City. 2008. V. 12, No. 1. P. 5–24. DOI: `10.1080/13604810801933495`.
3. **Gaffikin F., Mceldowney M., Sterrett K.** Creating shared public space in the contested city: The role of urban design // J. Urban Des. 2010. V. 15, No. 4. P. 493–513. DOI: `10.1080/13574809.2010.502338`.
4. **Bergantinos G., Lorenzo L., Lorenzo-Freire S.** A characterization of the proportional rule in multi-issue allocation situations // Oper. Res. Lett. 2010. V. 38, No. 1. P. 17–19.
5. **Csóka P., Herings P. J. J.** An axiomatization of the proportional rule in financial networks // Manag. Sci. 2021. V. 67, No. 5. P. 2799–2812.
6. **Béal S., Casajus A., Huettner F., Rémila E., Solal P.** Characterizations of weighted and equal division values // Theory Decis. 2016. V. 80, No. 4. P. 649–667.
7. **Casajus A., Huettner F.** Null, nullifying, or dummifying players: The difference between the Shapley value, the equal division value, and the equal surplus division value // Econ. Lett. 2014. V. 122, No. 2. P. 167–169.
8. **Moulin H.** Equal or proportional division of a surplus, and other methods // Int. J. Game Theory. 1987. V. 16. P. 161–186.
9. **Van den Brink R.** Null or nullifying players: the difference between the Shapley value and equal division solutions // J. Econ. Theory. 2007. V. 136, No. 1. P. 767–775.
10. **Moulin H.** Equal or proportional division of a surplus, and other methods // Int. J. Game Theory. 1987. V. 16. P. 161–186.
11. **Van den Brink R., Funaki Y.** Axiomatizations of a class of equal surplus sharing solutions for TU-games // Theory Decis. 2009. V. 67. P. 303–340.
12. **Winter E.** The Shapley value // Handbook of game theory with economic applications. V. 3. Amsterdam: North Holland, 2002. P. 2025–2054.
13. **Hart S.** Shapley value // Game theory. London: Macmillan Press, 1989. P. 210–216. DOI: `10.1007/978-1-349-20181-5_25`.

Гусев Василий Васильевич

Статья поступила
8 ноября 2023 г.
После доработки —
4 декабря 2023 г.
Принята к публикации
22 декабря 2023 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
April–June 2024. Vol. 31, No. 2. P. 46–62

UDC 519.83 DOI: 10.33048/daio.2024.31.786

COOPERATIVE GAMES WITH PREFERENCES: APPLICATION OF THE WEIGHT RULE TO PROBLEMS OF PUBLIC SPACE IN ST. PETERSBURG

V. V. Gusev

HSE University,
3 Kantemirovskaya Street, 194100 St. Petersburg, Russian Federation
E-mail: vgusev@hse.ru

Abstract. The paper examines the problem of the distribution of public space. We use the methods of cooperative game theory to solve this problem. Players are districts, while the value of the characteristic function is the total number of people interested in a particular type of public space in the areas under consideration. The axioms that are characteristic of the problem of division are compiled. A special value of the cooperative game is derived that depends on the weights of the players. It is shown how to choose the weights by optimization methods. Tab. 1, illustr. 2, bibliogr. 13.

Keywords: game theory, cooperative game, weight rule, preference game.

References

1. **M. D. Garcia-Ramon, A. Ortiz,** and **M. Prats,** Urban planning, gender and the use of public space in a peripheral neighbourhood of Barcelona, *Cities* **21** (3), 215–223 (2004), DOI: 10.1016/j.cities.2004.03.006.
2. **A. Amin,** Collective culture and urban public space, *City* **12** (1), 5–24 (2008), DOI: 10.1080/13604810801933495.
3. **F. Gaffikin, M. Mceldowney,** and **K. Sterrett,** Creating shared public space in the contested city: The role of urban design, *J. Urban Des.* **15** (4), 493–513 (2010), DOI: 10.1080/13574809.2010.502338.
4. **G. Bergantinos, L. Lorenzo,** and **S. Lorenzo-Freire,** A characterization of the proportional rule in multi-issue allocation situations, *Oper. Res. Lett.* **38** (1), 17–19 (2010).

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **18** (2), 271–281 (2024), DOI: 10.1134/S1990478924020091.

5. **P. Csóka** and **P. J. J. Herings,** An axiomatization of the proportional rule in financial networks, *Manag. Sci.* **67** (5), 2799–2812 (2021).
6. **S. Béal, A. Casajus, F. Huettner, E. Rémila,** and **P. Solal,** Characterizations of weighted and equal division values, *Theory Decis.* **80** (4), 649–667 (2016).
7. **A. Casajus** and **F. Huettner,** Null, nullifying, or dummifying players: The difference between the Shapley value, the equal division value, and the equal surplus division value, *Econ. Lett.* **122** (2), 167–169 (2014).
8. **H. Moulin,** Equal or proportional division of a surplus, and other methods, *Int. J. Game Theory* **16**, 161–186 (1987).
9. **R. van den Brink,** Null or nullifying players: the difference between the Shapley value and equal division solutions, *J. Econ. Theory* **136** (1), 767–775 (2007).
10. **H. Moulin,** Equal or proportional division of a surplus, and other methods, *Int. J. Game Theory* **16**, 161–186 (1987).
11. **R. van den Brink** and **Y. Funaki,** Axiomatizations of a class of equal surplus sharing solutions for TU-games, *Theory Decis.* **67**, 303–340 (2009).
12. **E. Winter,** The Shapley value, in *Handbook of Game Theory with Economic Applications,* Vol. 3 (North Holland, Amsterdam, 2002), pp. 2025–2054.
13. **S. Hart,** Shapley value, in *Game Theory* (Macmillan Press, London, 1989), pp. 210–216, DOI: 10.1007/978-1-349-20181-5_25.

Vasily V. Gusev

Received November 8, 2023
Revised December 4, 2023
Accepted December 22, 2023