

ISSN 2949-5598

# ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 31 № 2 2024

Новосибирск  
Издательство Института математики

## ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ЧЁТНЫХ И НЕЧЁТНЫХ ХОРДОВЫХ ДИАГРАММ

*Д. Б. Ефимов*

Физико-математический институт ФИЦ Коми НЦ УрО РАН,  
ул. Коммунистическая, 24, 167982 Сыктывкар, Россия  
E-mail: defimov@ipm.komisc.ru

**Аннотация.** Рассматривается общий метод перечисления различных классов хордовых диаграмм с чётным и нечётным числом пересечений хорд. В основе метода лежит вычисление пфаффиана и гафниана матрицы ограничений, характеризующей класс диаграмм. Табл. 3, ил. 6, библиогр. 23.

**Ключевые слова:** хордовая диаграмма, пфаффиан, гафниан.

### Введение

Пусть  $n$  — чётное натуральное число. *Хордовой диаграммой* на  $n$  вершинах называется простой граф, все вершины которого расположены на окружности, пронумерованы последовательно числами от 1 до  $n$  по часовой стрелке, и каждая вершина соединена ребром (хордой окружности) ровно с одной другой вершиной (рис. 1). Наряду с хордовой диаграммой также часто рассматривают её линейный эквивалент, располагая вершины не вдоль окружности, а вдоль отрезка горизонтальной прямой, и изображая рёбра в виде дуг. При этом говорят о линейной хордовой диаграмме.

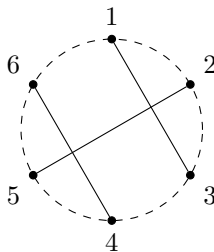


Рис. 1. Хордовая диаграмма на шести вершинах

С хордовыми диаграммами связано много интересных теоретико-вероятностных и комбинаторных задач [1–5]. Они также выступают в качестве удобной содержательной модели в задачах других разделов математики (топологии, теории представлений), а также в задачах других научных дисциплин (например биологии). Довольно подробный обзор применения хордовых диаграмм можно найти в [6].

Один из аспектов изучения хордовых диаграмм связан с комбинаторикой и статистикой числа пересечений их рёбер. Впервые задача пересчёта хордовых диаграмм с заданным числом хорд и с заданным числом пересечений хорд была рассмотрена в работах Тушара [7] и Риордана [8]. В последнее время появился ряд работ, посвящённых изучению хордовых диаграмм с точки зрения их графов пересечений (chord intersection graph) [6, 9, 10]. Вершины такого графа соответствуют хордам диаграммы, а роль ребра играет факт пересечения хорд в диаграмме, т. е. две вершины соединяются ребром в том и только том случае, когда соответствующие им хорды пересекаются.

Настоящая работа также посвящена комбинаторике пересечений рёбер хордовых диаграмм, а именно рассматривается вопрос пересчёта чётных и нечётных хордовых диаграмм, т. е. хордовых диаграмм с чётным и нечётным числом пересечений рёбер. В разд. 1 приводится общий метод пересчёта чётных и нечётных хордовых диаграмм с заданными свойствами, основанный на комбинации таких функций от матриц, как пфаффиан и гафниан. В разд. 2 доказываются некоторые общие утверждения, а полученные результаты применяются для пересчёта чётных и нечётных хордовых диаграмм некоторых конкретных классов.

## 1. Описание метода пересчёта

Рассмотрим сначала общий метод пересчёта чётных и нечётных перестановок с ограниченными позициями, основанный на комбинации таких функций от матриц, как определитель и перманент [11, 12]. Напомним, что *перманент* матрицы  $A = (a_{ij})$  порядка  $n$  определяется следующим образом [13]:

$$\text{per } A = \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)},$$

где  $S_n$  — множество всех перестановок порядка  $n$ . Таким образом, перманент матрицы в отличие от её определителя игнорирует знаки перестановок, по которым идёт суммирование. Предположим, что  $A$  — это  $(0, 1)$ -матрица. Тогда она задаёт некоторый класс  $\mathcal{P}_A$  (ограниченных) перестановок порядка  $n$ : в этот класс попадают те и только те перестановки, матрицы которых не превосходят поэлементно матрицу  $A$ . Обозначим

через  $\mathcal{EP}_A$  и  $\mathcal{OP}_A$  множество чётных и нечётных перестановок из  $\mathcal{P}_A$  соответственно. Нетрудно видеть, что перманент матрицы  $A$  равен общему числу перестановок в классе  $\mathcal{P}_A$ , а определитель матрицы  $A$  равен разности между числом чётных и нечётных перестановок в  $\mathcal{P}_A$ :

$$\text{per } A = |\mathcal{P}_A|, \quad \det A = |\mathcal{EP}_A| - |\mathcal{OP}_A|.$$

Отсюда следует, что число чётных и нечётных перестановок в классе  $\mathcal{P}_A$  можно определить с помощью следующих формул:

$$|\mathcal{EP}_A| = \frac{\text{per } A + \det A}{2}, \quad |\mathcal{OP}_A| = \frac{\text{per } A - \det A}{2}. \quad (1)$$

Введём понятие *двудольной хордовой диаграммы*. Под такой диаграммой будем понимать простой двудольный граф на  $2n$  вершинах степени 1, расположенных на окружности, причём вершины  $u_1, u_2, \dots, u_n$  первой доли расположены в правой части окружности по часовой стрелке, а вершины  $v_1, v_2, \dots, v_n$  — в левой части против часовой стрелки. Назовём такую диаграмму *чётной*, если её рёбра имеют чётное число взаимных пересечений, и *нечётной* в противном случае (рис. 2).

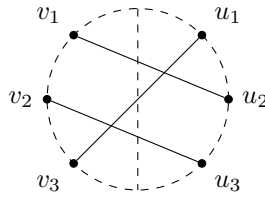


Рис. 2. Чётная двудольная хордовая диаграмма на шести вершинах

Отметим, что любая  $(0,1)$ -матрица  $A$  порядка  $n$  однозначно задаёт семейство  $\mathcal{BD}_A$  двудольных хордовых диаграмм на  $2n$  вершинах, в которое входят те и только те диаграммы, матрица бисмежности которых не превосходит поэлементно  $A$ . Любой перестановке из класса  $\mathcal{P}_A$  с матрицей  $M$  можно однозначно поставить в соответствие двудольную хордовую диаграмму из  $\mathcal{BD}_A$  с матрицей бисмежности  $M$ , при этом чётности перестановки и диаграммы будут совпадать. Отсюда следует, что формулы (1) можно также применять для перечисления чётных и нечётных двудольных хордовых диаграмм в заданных классах. Отметим также, что если рассматривать  $A$  как матрицу бисмежности двудольного графа, то каждой диаграмме из  $\mathcal{BD}_A$  будет однозначно соответствовать некоторое совершенное паросочетание данного графа.

Аналогичную роль в задачах перечисления хордовых диаграмм может играть комбинация таких функций от матриц как пфаффиан и гаффиан. Сделаем сначала несколько предварительных замечаний. Вполне

очевидно, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством хордовых диаграмм на  $n = 2m$  вершинах и множеством неупорядоченных разбиений множества  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  на непересекающиеся неупорядоченные пары  $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_m, b_m)\}$ . Паре  $(a_i, b_i)$  однозначно соответствует ребро хордовой диаграммы, соединяющее вершины с номерами  $a_i$  и  $b_i$ . В дальнейшем не будем различать эти два множества и обозначим их через  $\mathcal{D}_n$ . В зависимости от контекста под данным обозначением будем понимать ту или иную интерпретацию. Также условимся, что при записи ребра в виде пары чисел на первом месте будет стоять меньшее число. Пусть  $(i, j)$  и  $(k, l)$  — два ребра хордовой диаграммы. Нетрудно видеть, что эти два ребра геометрически пересекаются тогда и только тогда, когда выполняется одно из двух неравенств:  $i < k < j < l$  или  $k < i < l < j$ . Знаком  $\operatorname{sgn} \alpha$  хордовой диаграммы  $\alpha$  назовём число  $(-1)^p$ , где  $p$  — число пересечений рёбер из  $\alpha$ . Будем говорить, что хордовая диаграмма  $\alpha$  чётная (нечётная), если  $\operatorname{sgn} \alpha = 1$  ( $\operatorname{sgn} \alpha = -1$ ), т. е. если  $\alpha$  имеет чётное (нечётное) число пересечений рёбер. Множество всех чётных хордовых диаграмм на  $n$  вершинах обозначим через  $\mathcal{ED}_n$ , а нечётных — через  $\mathcal{OD}_n$ .

Пфафффиан кососимметричной матрицы  $A = (a_{ij})$  чётного порядка  $n$  можно определить следующим образом [14]:

$$\operatorname{Pf} A = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}_n} \operatorname{sgn} \alpha \prod_{(i,j) \in \alpha} a_{ij}.$$

Если не учитывать знаки хордовых диаграмм и вместо кососимметричной матрицы взять симметричную, получим определение гаффиана [15, гл. 4]:

$$\operatorname{Hf} A = \sum_{\alpha \in \mathcal{D}_n} \prod_{(i,j) \in \alpha} a_{ij}.$$

Произвольная симметричная  $(0, 1)$ -матрица  $A$  чётного порядка с нулевой главной диагональю задаёт некоторое семейство  $\mathcal{D}_A$  хордовых диаграмм: семейство  $\mathcal{D}_A$  состоит из хордовых диаграмм, матрицы смежности которых поэлементно не превосходят  $A$ . Если рассматривать  $A$  как матрицу смежности некоторого графа, то любой хордовой диаграмме из  $\mathcal{D}_A$  с матрицей смежности  $M$  однозначно соответствует совершенное паросочетание данного графа с такой же матрицей смежности. Имея в виду это соответствие, будем иногда говорить о хордовых диаграммах графа, подразумевая соответствующие совершенные паросочетания. Нетрудно заметить, что гаффиан матрицы  $A$  равен общему числу диаграмм в семействе  $\mathcal{D}_A$ . Действительно, при вычислении гаффиана суммирование идёт по всевозможным хордовым диаграммам, но ненулевые слагаемые (каждое из которых равно 1) возникают на тех и только

тех диаграммах, все рёбра которых соответствуют ненулевым элементам матрицы  $A$ .

Обозначим через  $A'$  кососимметричную матрицу, которая получается из матрицы  $A$  заменой всех ненулевых элементов ниже главной диагонали на  $-1$ . Если вычислить пфаффиан такой матрицы, то каждая чётная хордовая диаграмма из семейства  $\mathcal{D}_A$  будет вносить вклад  $1$  в общую сумму, а нечётная диаграмма — вклад  $-1$ . Таким образом, пфаффиан такой матрицы будет равен разности между числом чётных и нечётных хордовых диаграмм из  $\mathcal{D}_A$ .

Пусть  $A$  — симметричная  $(0, 1)$ -матрица чётного порядка. Обозначим через  $\mathcal{ED}_A$  и  $\mathcal{OD}_A$  множества чётных и нечётных хордовых диаграмм из семейства  $\mathcal{D}_A$  соответственно. Из вышесказанного следует, что

$$\text{Hf } A = |\mathcal{D}_A| = |\mathcal{ED}_A| + |\mathcal{OD}_A|, \quad \text{Pf } A' = |\mathcal{ED}_A| - |\mathcal{OD}_A|.$$

Отсюда

$$|\mathcal{ED}_A| = \frac{\text{Hf } A + \text{Pf } A'}{2}, \quad |\mathcal{OD}_A| = \frac{\text{Hf } A - \text{Pf } A'}{2}. \quad (2)$$

В терминах графов пересечений формулы (2) позволяют найти общее число графов пересечений данного набора хордовых диаграмм с чётным (нечётным) числом рёбер.

**Пример 1.** Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Единственный её нулевой элемент выше главной диагонали находится на позиции  $(1, 3)$ , поэтому данной матрице соответствует семейство хордовых диаграмм на четырёх вершинах, в которых нет ребра  $(1, 3)$ . Нетрудно подсчитать, что  $\text{Hf } A = \text{Pf } A' = 2$ . Это согласуется с тем, что семейство  $\mathcal{D}_A$  состоит из двух диаграмм, каждая из которых имеет нулевое число пересечений рёбер (рис. 3).

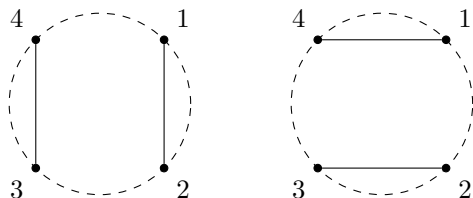


Рис. 3. Семейство хордовых диаграмм на четырёх вершинах, в которых нет ребра  $(1, 3)$

Отметим, что чётным и нечётным хордовым диаграммам можно дать интерпретацию на языке диаграмм Брауэра [16–18], что является обобщением интерпретации двудольных хордовых диаграмм через перестановки.

Чтобы применять формулы (2), необходимо, как бы банально это ни звучало, уметь вычислять пфаффиан и гафниан. Наибольшим камнем преткновения в этой связке является гафниан. Сложность его вычисления заведомо не меньше сложности вычисления перманента, а последняя задача, как известно, принадлежит как минимум к классу NP-полных задач. Тем не менее, существует ряд в той или иной степени эффективных алгоритмов для вычисления гафниана специальных типов матриц (см., например, [19]). Особо отметим изящный метод эффективного вычисления гафниана матриц смежности планарных графов, разработанный Кастелейном в 1960-х гг. в рамках решения задач статистической физики (см., например, [20, гл. 8]). К этому методу ещё вернёмся в разд. 2. Существуют также алгоритмы для эффективного вычисления пфаффиана [21, 22].

В данной работе нас больше интересует не алгоритмический, а аналитический подход. В разд. 2 докажем несколько несложных, но полезных утверждений, характеризующих число чётных и нечётных хордовых диаграмм в различных классах диаграмм, а также рассмотрим некоторые примеры, когда на основе общих свойств пфаффиана и гафниана можно получить точные аналитические формулы, выражающие число чётных и нечётных хордовых диаграмм в классе диаграмм (в графе).

## 2. Утверждения и примеры

**2.1. Свойства пфаффиана и гафниана.** Прежде чем переходить к доказательству утверждений и рассмотрению примеров, перечислим некоторые известные свойства пфаффиана и гафниана, используемые в дальнейшем.

Пусть дана кососимметричная матрица  $A = (a_{ij})$   $n$ -го порядка. Пфаффиан матрицы  $A$  обладает следующим свойством разложения по  $i$ -й строке:

$$\text{Pf } A = \sum_{j=1, j \neq i}^n (-1)^{i+j+1+\theta(i-j)} a_{ij} \text{Pf } A(i, j),$$

где  $A(i, j)$  — матрица, которая получается из матрицы  $A$  удалением строк и столбцов с номерами  $i$  и  $j$ ,  $\theta$  — функция Хевисайда. Применительно к первой строке данная формула приобретает более простой вид:

$$\text{Pf } A = \sum_{j=2}^n (-1)^j a_{1j} \text{Pf } A(1, j). \quad (3)$$

Пфаффиан кососимметричной матрицы тесно связан с её определителем, а именно, справедливо следующее соотношение:

$$|\text{Pf } A| = \sqrt{\det A}. \quad (4)$$

Пусть  $B$  — произвольная матрица порядка  $n$ . Имеет место следующее свойство:

$$\text{Pf}(BAB^T) = \det(B) \text{Pf}(A). \quad (5)$$

В частности, отсюда следует, что пфаффиан матрицы не меняется при таких элементарных преобразованиях, как перестановка строк совместно с аналогичной перестановкой столбцов, а также прибавление к одной строке другой, умноженной на произвольное число, соединённое с аналогичной операцией над столбцами с такими же номерами.

Пусть  $A$  и  $B$  — две кососимметричные матрицы чётного порядка  $n$ . Тогда справедлива следующая формула, выражающая пфаффиан суммы матриц через сумму произведений пфаффианов подматриц [14]:

$$\text{Pf}(A + B) = \sum_J (-1)^{|J|/2} (-1)^{s(J)} \text{Pf}(A[J]) \text{Pf}(B(J)), \quad (6)$$

где суммирование ведётся по всем подмножествам чётной мощности  $J \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $s(J) = \sum_{j \in J} j$  (при этом  $s(\emptyset) = 0$ ),  $A[J]$  — матрица, полученная из матрицы  $A$  выбором строк и столбцов с номерами из  $J$ ,  $B(J)$  — матрица, полученная из матрицы  $B$  вычёркиванием строк и столбцов с номерами из  $J$ . По определению считаем, что пфаффиан  $(0 \times 0)$ -матрицы равен 1.

Для гафниана справедливы аналогичные формулы, причём, выглядят они проще за счёт того, что гафниан не учитывает знаки хордовых диаграмм, по которым идёт суммирование. При этом «платой» за простоту является значительное сужение диапазона применения аналогов формул (4) и (5) по сравнению со случаем пфаффиана. Имеет место следующий аналог формулы (6) для гафниана суммы симметричных матриц:

$$\text{Hf}(A + B) = \sum_J \text{Hf}(A[J]) \text{Hf}(B(J)). \quad (7)$$

**2.2. Хордовые диаграммы полного графа.** Рассмотрим множество всех хордовых диаграмм с  $n = 2m$  вершинами. Напомним, что мы обозначили его через  $\mathcal{D}_n$ . Мощность данного множества равна общему



числу совершенных паросочетаний полного графа с  $n$  вершинами, а также равна гаффиану матрицы  $A$   $n$ -го порядка с нулевой главной диагональю и единичными элементами вне главной диагонали:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|\mathcal{D}_n| = \text{Hf } A = \frac{(2m)!}{m!2^m} = (n-1)!!.$$

**Утверждение 1.** В полном графе на  $2m$  вершинах разница между числом чётных и нечётных хордовых диаграмм равна 1.

**Доказательство.** Рассмотрим кососимметричную матрицу  $A'$ , которая получается из матрицы  $A$  умножением всех элементов ниже главной диагонали на  $-1$ . Разница между числом чётных и нечётных хордовых диаграмм в полном графе равна пфаффиану данной матрицы. Обозначим пфаффиан матрицы  $A'$  порядка  $2m$  через  $\pi_m$ . Раскладывая пфаффиан матрицы  $A'$  по первой строке, получаем рекуррентное соотношение  $\pi_m = \pi_{m-1}$ . Так как  $\pi_1 = 1$ , то  $\pi_m = 1$  для любого  $m \geq 1$ . Утверждение 1 доказано.

Таким образом, с учётом (2) число чётных и нечётных хордовых диаграмм полного графа на  $n$  вершинах ( $n$  — чётное) равно соответственно

$$|\mathcal{ED}_n| = \frac{(n-1)!! + 1}{2}, \quad |\mathcal{OD}_n| = \frac{(n-1)!! - 1}{2}.$$

Тем самым в обозначениях работы [8] получены суммы коэффициентов  $T_{n,k}$  для чётных и нечётных  $k$  при фиксированном  $n$ :

$$|\mathcal{ED}_n| = \sum_{i=0} T_{n,2i}, \quad |\mathcal{OD}_n| = \sum_{i=0} T_{n,2i+1}.$$

Если вместо  $n$  поочерёдно подставить чётные числа, то получим последовательности, представленные в табл. 1.

Таблица 1

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$ \mathcal{ED}_{2m} $	1	2	8	53	473	5198	67568	1013513	...
$ \mathcal{OD}_{2m} $	0	1	7	52	472	5197	67567	1013512	...

Отметим, что в [23] эти последовательности имеют номера A193651 и A249349, но там не указана приведённая здесь интерпретация.

**2.3. Беспетлевые хордовые диаграммы.** Рассмотрим теперь хордовые диаграммы, в которых нет рёбер, соединяющих соседние вершины (иногда их называют беспетлевыми [2]). Класс таких диаграмм на  $n = 2m$  вершинах задаётся симметричной  $(0, 1)$ -матрицей  $A$  порядка  $n$  с нулями на главной диагонали, на примыкающих к ней диагоналях, а также на позициях  $(1, n)$  и  $(n, 1)$ . Такая матрица также является матрицей смежности полного графа на  $n$  вершинах без гамильтонова цикла  $1 - 2 - 3 - \dots - n - 1$ . Например, при  $n = 6$  матрица  $A$  будет иметь следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Утверждение 2.** Разность между числом чётных и нечётных беспетлевых хордовых диаграмм на  $2m$ ,  $m \geq 2$ , вершинах равна 2, если  $m \equiv 0 \pmod{3}$ , и  $-1$  в противном случае.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим кососимметричную матрицу  $A'$  порядка  $2m$ , которая получается из матрицы  $A$  умножением всех элементов ниже главной диагонали на  $-1$ . Пусть  $\pi_m = \text{Pf } A'$ . Разница между числом чётных и нечётных беспетлевых хордовых диаграмм на  $2m$  вершинах равна  $\pi_m$ . Чтобы вычислить  $\pi_m$ , введём вспомогательную матрицу  $A''$  порядка  $2m$ , которая отличается от матрицы  $A'$  тем, что  $a''_{1,2m} = a''_{2m,1} = 1$ . Положим  $\rho_m = \text{Pf } A''$ . Учитывая правило (3) разложения пфаффиана по первой строке, нетрудно видеть, что пфаффианы матриц  $A'$  и  $A''$  связаны друг с другом следующим соотношением:

$$\pi_m = \rho_m - \rho_{m-1}, \quad m \geq 2. \tag{8}$$

Рассмотрим матрицу  $A''$  порядка  $2m$ . Вычтем в ней из первой строки вторую строку и из первого столбца второй столбец, а затем из второй строки третью строку и из второго столбца третий столбец. В силу свойства (5) пфаффиан матрицы при этом не изменится. Раскладывая затем пфаффиан получившейся матрицы по первой строке, получаем рекуррентное соотношение  $\rho_m = -\rho_{m-1} - \rho_{m-2}$ ,  $m \geq 2$ . Тогда с учётом (8) для  $m \geq 4$  получаем

$$\begin{aligned} \pi_m &= \rho_m - \rho_{m-1} = -\rho_{m-1} - \rho_{m-2} - (-\rho_{m-2} - \rho_{m-3}) = \\ &= -(\rho_{m-1} - \rho_{m-2}) - (\rho_{m-2} - \rho_{m-3}) = -\pi_{m-1} - \pi_{m-2}. \end{aligned}$$

Нетрудно непосредственно вычислить, что  $\pi_2 = -1$ ,  $\pi_3 = 2$ . Утверждение 2 доказано.

**Замечание.** Если представить матрицу  $A'$  порядка  $2m$  в виде суммы двух кососимметричных матриц, в одной из которых все элементы выше главной диагонали равны 1, и применить формулу (6), выражающую пфаффиан суммы матриц через сумму произведений пфаффианов подматриц, то при  $m \geq 2$  получим

$$\text{Pf } A' = \pi_m = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} (C_{m+k}^{m-k} + C_{m+k-1}^{m-k-1}). \quad (9)$$

Общее число беспетлевых хордовых диаграмм на  $2m$ ,  $m \geq 2$ , вершинах равно гаффиану матрицы  $A$  порядка  $2m$ . Чтобы вычислить данную величину, можно опять представить матрицу  $A$  в виде суммы двух симметричных матриц, одна из которых полностью состоит из единиц за исключением главной диагонали, и воспользоваться формулой (7). В результате имеем

$$\text{Hf } A = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} (C_{m+k}^{m-k} + C_{m+k-1}^{m-k-1}) (2k-1)!!. \quad (10)$$

Подставляя (9), (10) в (2), получаем, что общие числа чётных и нечётных беспетлевых хордовых диаграмм на  $2m$ ,  $m \geq 2$ , вершинах можно выразить следующими суммами:

$$|\mathcal{ED}_A| = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} (C_{m+k}^{m-k} + C_{m+k-1}^{m-k-1}) \frac{(2k-1)!! + 1}{2},$$

$$|\mathcal{OD}_A| = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} (C_{m+k}^{m-k} + C_{m+k-1}^{m-k-1}) \frac{(2k-1)!! - 1}{2}.$$

Случай  $m = 1$  стоит особняком: здесь очевидно, что  $|\mathcal{ED}_A| = |\mathcal{OD}_A| = 0$ . Отметим, что данные формулы можно также получить с помощью метода включений-исключений, используя результаты п. 2.2. Подставляя поочерёдно в эти формулы значения  $m$ , получаем целочисленные последовательности, представленные в табл. 2.

Таблица 2

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$ \mathcal{ED}_A $	0	0	3	15	146	1663	22 094	336 735	...
$ \mathcal{OD}_A $	0	1	1	16	147	1663	22 095	336 736	...

На рис. 4 представлены соответствующие диаграммы для  $m = 3$ . Первые три имеют чётное число пересечений рёбер, последняя — нечётное.

Рассмотрим далее два «пограничных» случая, когда число чётных и нечётных хордовых диаграмм в графе совпадает и когда в графе есть только диаграммы одного типа.

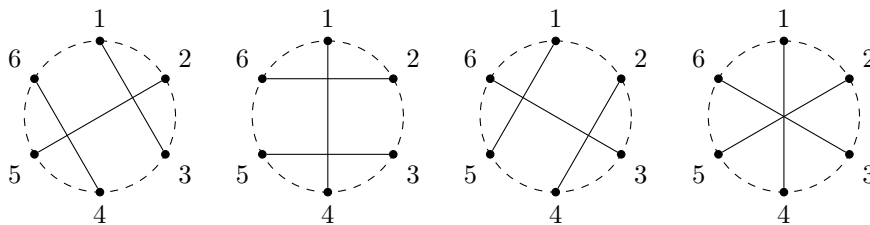


Рис. 4. Беспетлевые хордовые диаграммы на шести вершинах

**2.4. Критерий равенства числа чётных и нечётных хордовых диаграмм.** В силу (2) и (4) получаем следующий простой критерий равенства числа чётных и нечётных хордовых диаграмм в рассматриваемом классе хордовых диаграмм (в графе).

**Утверждение 3.** *Класс хордовых диаграмм, задаваемый матрицей  $A$  (граф с матрицей смежности  $A$ ), содержит одинаковое число чётных и нечётных хордовых диаграмм тогда и только тогда, когда  $\det A' = 0$ .*

Напомним, что *беспорядком* (англ. derangement) называется перестановка, при которой ни один элемент не остаётся на своём месте (перестановка без неподвижных точек). В качестве диаграммного аналога таких перестановок рассмотрим хордовые диаграммы, в которых нет рёбер вида  $(2i - 1, 2i)$ . Назовём такие диаграммы *хордовыми беспорядками*. Множество таких диаграмм на  $n = 2m$  вершинах задаётся симметричной  $(0, 1)$ -матрицей  $A$  порядка  $n$  с нулевыми элементами на главной диагонали и на позициях  $(2i - 1, 2i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ . Данная матрица является также матрицей смежности полного графа на  $n$  вершинах без совершенного паросочетания  $\{(1, 2), (3, 4), \dots, (n - 1, n)\}$ . Например, при  $n = 6$  такая матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что при любом  $n$  определитель соответствующей кососимметричной матрицы  $A'$  равен нулю. Отсюда в силу утверждения 3 следует, что для фиксированного  $n$  число чётных и нечётных хордовых беспорядков совпадает. Для того чтобы вычислить общее число хордовых беспорядков для фиксированного  $n$ , можно представить матрицу  $A$  в виде суммы двух симметричных матриц, одна из которых за исключением главной диагонали полностью состоит из единиц, и воспользоваться

формулой (7), выражающей гафниан суммы матриц через сумму произведений гафнианов подматриц, или же применить метод включений-исключений. В результате получим

$$|\mathcal{D}_A| = \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k (2k-1)!!,$$

откуда в силу вышесказанного

$$|\mathcal{ED}_A| = |\mathcal{OD}_A| = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_m^k (2k-1)!!.$$

Подставляя поочерёдно вместо  $m$  натуральные числа, получаем последовательность, представленную в табл. 3.

Таблица 3

$m$	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$ \mathcal{ED}_A  =  \mathcal{OD}_A $	0	1	4	30	272	3020	39 504	595 336	...

Эта последовательность представлена в [23] под номером A179540, но имеет весьма скудное описание без приведённой здесь интерпретации.

**Пример 2.** Рассмотрим хордовые беспорядки на шести вершинах. Всего таких диаграмм 8, из них 4 с чётным числом пересечений хорд и 4 — с нечётным (рис. 5).

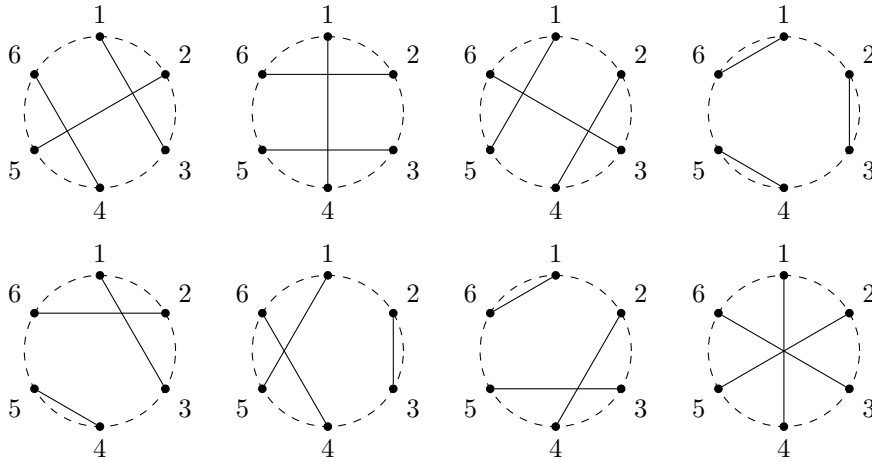


Рис. 5. Хордовые беспорядки на шести вершинах

**2.5. Хордовые диаграммы пфаффовых графов.** В 1960-х гг. Кастелейн разработал метод, позволяющий вычислять число совершенных паросочетаний (хордовых диаграмм) графа с помощью определителя его матрицы смежности. Суть метода заключается в том, чтобы построить на графе так называемую *пфаффову ориентацию*. При такой ориентации все слагаемые пфаффиана матрицы смежности графа имеют одинаковый знак и модуль пфаффиана матрицы смежности, или в силу свойства (4) квадратный корень её определителя, равны общему числу совершенных паросочетаний графа. Граф, на котором можно построить пфаффову ориентацию, называется *пфаффовым*. Известно [20, с. 411], что если граф не содержит подразбиения полного двудольного графа  $K_{3,3}$ , то он пфаффов. В частности, в эту категорию попадают планарные графы. Для того чтобы ориентация связного планарного графа была пфаффовой, достаточно, чтобы граница каждой внутренней грани соответствующего плоского графа содержала нечётное число рёбер, ориентированных по часовой стрелке.

Очевидно, что общее число хордовых диаграмм графа не зависит от нумерации его вершин, но число его чётных и нечётных хордовых диаграмм, вообще говоря, от нумерации вершин зависит. В данном контексте следующее утверждение характеризует один из специальных случаев нумерации вершин пфаффовых графов.

**Утверждение 4.** Пусть на графе задана пфаффова ориентация так, что у него нет ориентированных циклов. Тогда вершины графа можно занумеровать таким образом, чтобы все его хордовые диаграммы имели одинаковую чётность.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Занумеруем вершины графа так, чтобы каждое ребро было направлено от вершины с меньшим номером к вершине с большим. Покажем, что это всегда можно сделать. Так как в графе нет ориентированных циклов, в нём есть хотя бы один сток. Присвоим этой вершине-стоку наибольший номер. Далее удалим из графа эту вершину и смежные с ней рёбра. Получим новый граф, в котором так же нет ориентированных циклов и есть сток. Найденному стоку присвоим следующий по убыванию номер. Продолжая аналогично, занумеруем требуемым образом все вершины.

При такой нумерации матрица смежности данного графа выше главной диагонали будет содержать неотрицательные элементы, равные 0 или 1. Как известно, пфаффиан такой матрицы равен разности чисел чётных и нечётных хордовых диаграмм. С другой стороны, поскольку по условию заданная ориентация пфаффова, пфаффиан такой матрицы по модулю равен общему числу хордовых диаграмм графа. Утверждение 4 доказано.

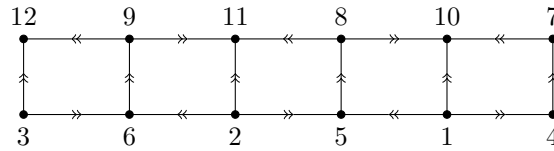


Рис. 6. Прямоугольная решётка с пфаффовской ориентацией без ориентированных циклов

**Пример 3.** Рассмотрим прямоугольную решётку на рис. 6. Нетрудно видеть, что на ней задана пфаффовская ориентация. Так как все вертикальные рёбра ориентированы вверх, у неё нет ориентированных циклов. Следовательно, вершины можно занумеровать так, чтобы каждое ребро было направлено от вершины с меньшим номером к вершине с большим. Одна из таких нумераций представлена на рис. 6. Легко проверить непосредственно, что, например, хордовая диаграмма, соответствующая множеству вертикальных рёбер, чётная. Отсюда в силу утверждения 4 следует, что все хордовые диаграммы данной решётки будут чётными.

### Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках плановой гос. бюджетной темы НИР Физико-математического института ФИЦ Коми НЦ УрО РАН «Математические проблемы теории стохастических и детерминированных систем, включая системы большой размерности» (номер гос. регистрации 122040600066–5). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

### Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

### Литература

1. **Acan H.** An enumerative-probabilistic study of chord diagrams: PhD Thes. Columbus: Ohio State Univ., 2013. 144 p.
2. **Краско Е. С., Лабутин И. Н., Омельченко А. В.** Перечисление помеченных и непомеченных гамильтоновых циклов в полных  $k$ -дольных графах // Зап. науч. сем. ПОМИ. 2019. Т. 488. С. 119–142.
3. **Nakamigawa T.** The expansion of a chord diagram and the Genocchi numbers // Ars Math. Contemp. 2020. V. 18. P. 381–391.
4. **Sullivan E.** Linear chord diagrams with long chords // Electron. J. Comb. 2017. V. 24, No. 4. Paper ID P4.20. 8 p.
5. **Cameron N. T., Killpatrick K.** Statistics on linear chord diagrams // Discrete Math. Theor. Comput. Sci. 2020. V. 21, No. 2. Paper ID 11. 10 p.
6. **Acan H.** On a uniformly random chord diagram and its intersection graph // Discrete Math. 2017. V. 340, No. 8. P. 1967–1985.

7. **Touchard J.** Sur un problème de configurations et sur les fractions continues // *Canad. J. Math.* 1952. V. 4. P. 2–25. [French].
8. **Riordan J.** The distribution of crossing of chords joining pairs of  $2n$  points on a circle // *Math. Comput.* 1975. V. 29, No. 129. P. 215–222.
9. **Courtiel J., Yeats K., Zeilberger N.** Connected chord diagrams and bridgeless maps // *Electron. J. Comb.* 2019. V. 26, No. 4. Paper ID P4.37. 56 p.
10. **Mahmoud A. A., Yeats K.** Connected chord diagrams and the combinatorics of asymptotic expansions // *J. Integer Seq.* 2022. V. 25, No. 7. Paper ID 22.7.5. 22 p.
11. **Shevelev V. S.** Combinatorial minors for matrix functions and their applications // *Zesz. Nauk. Politech. Śląsk. Ser. Mat. Stosow.* 2014. No. 4. P. 5–16.
12. **Шевелев В. С.** Некоторые вопросы теории перечисления перестановок с ограниченными позициями // *Итоги науки и техники. Сер. Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика.* Т. 30. М.: ВИНТИ, 1992. С. 113–177.
13. **Минк Х.** Перманенты. М.: Мир, 1982. 211 с.
14. **Stembridge J. R.** Nonintersecting paths, Pfaffians, and plane partitions // *Adv. Math.* 1990. V. 83. P. 96–131.
15. **Barvinok A.** *Combinatorics and complexity of partition functions.* Cham: Springer, 2016. 304 p. (Algorithms Comb.; V. 30).
16. **Fishel S., Grojnowski I.** Canonical bases for the Brauer centralizer algebra // *Math. Res. Lett.* 1995. V. 2. P. 15–26.
17. **Barcelo H., Ram A.** *Combinatorial representation theory // New perspectives in algebraic combinatorics.* New York: Camb. Univ. Press, 1999. P. 23–90. (Math. Sci. Res. Inst. Publ.; V. 38).
18. **Shalile A.** On the center of the Brauer algebra // *Algebr. Represent. Theory.* 2013. V. 16. P. 65–100.
19. **Schwartz M.** Efficiently computing the permanent and Hafnian of some banded Toeplitz matrices // *Linear Algebra Appl.* 2009. V. 430. P. 1364–1374.
20. **Ловас Л., Пламмер М.** *Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии.* М.: Мир, 1998. 656 с.
21. **Gabaiati G., Maffioli F.** On the computation of Pfaffians // *Discrete Appl. Math.* 1994. V. 51. P. 269–275.
22. **Wimmer M.** Algorithm 923: Efficient numerical computation of the Pfaffian for dense and banded skew-symmetric matrices // *ACM Trans. Math. Softw.* 2012. V. 38, No. 4. Paper ID 30. 17 p. DOI: 10.1145/2331130.2331138.
23. The on-line encyclopedia of integer sequences. Highland Park, NJ: OEIS Found., 2024. URL: [oeis.org](http://oeis.org) (accessed Mar. 3, 2024).

Ефимов Дмитрий Борисович

Статья поступила  
3 апреля 2023 г.  
После доработки —  
11 октября 2023 г.  
Принята к публикации  
22 декабря 2023 г.



## ENUMERATION OF EVEN AND ODD CHORD DIAGRAMS

D. B. Efimov

Institute of Physics and Mathematics FRC Komi SC UrB RAS,  
24 Kommunisticheskaya Street, 167982 Syktyvkar, Russia  
E-mail: defimov@ipm.komisc.ru

**Abstract.** A general method for the enumeration of various classes of chord diagrams with even and odd numbers of chord intersections is considered. The method is based on the calculation of the Pfaffian and Hafnian of the constraint matrix characterizing a class of diagrams. Tab. 3, illustr. 6, bibliogr. 23.

**Keywords:** chord diagram, Pfaffian, Hafnian.

### References

1. **H. Acan**, An enumerative-probabilistic study of chord diagrams, *PhD Thesis* (Ohio State Univ., Columbus, 2013).
2. **E. S. Krasko, I. N. Labutin, and A. V. Omelchenko**, Enumeration of labelled and unlabelled Hamiltonian cycles in complete  $k$ -partite graphs, *Zap. Nauchn. Semin. POMI*, **488**, 119–142 (2019) [Russian].
3. **T. Nakamigawa**, The expansion of a chord diagram and the Genocchi numbers, *Ars Math. Contemp.* **18**, 381–391 (2020).
4. **E. Sullivan**, Linear chord diagrams with long chords, *Electron. J. Comb.* **24** (4), Paper ID P4.20 (2017).
5. **N. T. Cameron and K. Killpatrick**, Statistics on linear chord diagrams, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* **21** (2), Paper ID 11 (2020).
6. **H. Acan**, On a uniformly random chord diagram and its intersection graph, *Discrete Math.* **340** (8), 1967–1985 (2017).
7. **J. Touchard**, Sur un problème de configurations et sur les fractions continues, *Canad. J. Math.* **4**, 2–25 (1952) [French].
8. **J. Riordan**, The distribution of crossing of chords joining pairs of  $2n$  points on a circle, *Math. Comput.* **29** (129), 215–222 (1975).
9. **J. Courtiel, K. Yeats, and N. Zeilberger**, Connected chord diagrams and bridgeless maps, *Electron. J. Comb.* **26** (4), Paper ID P4.37 (2019).

10. **A. A. Mahmoud** and **K. Yeats**, Connected chord diagrams and the combinatorics of asymptotic expansions, *J. Integer Seq.* **25** (7), Paper ID 22.7.5 (2022).
11. **V. S. Shevelev**, Combinatorial minors for matrix functions and their applications, *Zesz. Nauk. Politech. Śląsk. Ser. Mat. Stosow.* No. 4, 5–16 (2014).
12. **V. S. Shevelev**, Some problems of the theory of enumerating the permutations with restricted positions, in *Itohi Nauki Tekhn., Teoriya Veroyatn. Mat. Stat. Teor. Kibern.*, Vol. 30 (VINITI, Moscow, 1992), pp. 113–177 [Russian] [*J. Sov. Math.* **61** (4), 2272–2317 (1992)].
13. **H. Minc**, *Permanents* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1978; Mir, Moscow, 1982 [Russian]).
14. **J. R. Stembridge**, Nonintersecting paths, Pfaffians, and plane partitions, *Adv. Math.* **83**, 96–131 (1990).
15. **A. Barvinok**, *Combinatorics and Complexity of Partition Functions* (Springer, Cham, 2016) (Algorithms Comb., Vol. 30).
16. **S. Fishel** and **I. Grojnowski**, Canonical bases for the Brauer centralizer algebra, *Math. Res. Lett.* **2**, 15–26 (1995).
17. **H. Barcelo** and **A. Ram**, Combinatorial representation theory, in *New Perspectives in Algebraic Combinatorics* (Camb. Univ. Press, New York, 1999), pp. 23–90 (Math. Sci. Res. Inst. Publ., Vol. 38).
18. **A. Shalile**, On the center of the Brauer algebra, *Algebr. Represent. Theory* **16**, 65–100 (2013).
19. **M. Schwartz**, Efficiently computing the permanent and Hafnian of some banded Toeplitz matrices, *Linear Algebra Appl.* **430**, 1364–1374 (2009).
20. **L. Lovász** and **M. D. Plummer**, *Matching Theory* (North-Holland, Amsterdam, 1986; Mir, Moscow, 1998 [Russian]).
21. **G. Gabiati** and **F. Maffioli**, On the computation of Pfaffians, *Discrete Appl. Math.* **51**, 269–275 (1994).
22. **M. Wimmer**, Algorithm 923: Efficient numerical computation of the Pfaffian for dense and banded skew-symmetric matrices, *ACM Trans. Math. Softw.* **38** (4), Paper ID 30 (2012), DOI: 10.1145/2331130.2331138.
23. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS Found., Highland Park, NJ, 2024), URL: [oeis.org](https://oeis.org) (accessed Mar. 3, 2024).

Dmitry B. Efimov

Received April 3, 2023

Revised October 11, 2023

Accepted December 22, 2023