ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 31 № 3 2024

Новосибирск
Издательство Института математики

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2024. Т. 31, № 3. С. 123–143

УДК 519.8+519.6 DOI: 10.33048/daio.2024.31.782

ПОИСК ЛОКАЛЬНО ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ В ЛИНЕЙНОЙ ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ С БЛАГОПРИЯТНЫМИ СИТУАЦИЯМИ

А. Р. Маматов

Самаркандский гос. университет им. Ш. Рашидова,
Университетский б-р, 15, 140104 Самарканд, Узбекистан

E-mail: akmm1964@rambler.ru

Аннотация. Рассматривается линейная игровая задача двух игроков. Два игрока поочерёдно выбирают свои стратегии из соответствующих множеств. Сначала первый игрок выбирает свою стратегию, затем, зная стратегию первого игрока, второй игрок выбирает свою стратегию. Множество стратегий второго игрока зависит от стратегии первого игрока. Целью первого игрока является выбор стратегии для того, чтобы максимизировать выпуклую кусочно линейную функцию (функцию минимума по стратегии второго игрока). Цель второго игрока — минимизировать линейную функцию. Предложен алгоритм, позволяющий строить стратегии для этой, а также для двойственной задачи, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности «высокого порядка». Этот алгоритм использует формулу приращения целевой функции двойственной задачи. Доказаны теоремы о конечности предложенного алгоритма и его модификации. Приведён пример, иллюстрирующий работу алгоритма. Также приведены результаты численного эксперимента по построению стратегий, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности «высокого порядка» в задачах, элементы которых генерировались датчиком случайных чисел. По результатам численного эксперимента можно сделать вывод, что при исполнении предложенного алгоритма зачастую имеется возможность перехода от одной локально оптимальной стратегии первого игрока к другой стратегии, обеспечивающей возрастание целевой функции. Табл. 1, ил. 1, библиогр. 21.

Ключевые слова: линейная игра, максиминная задача, условие оптимальности, опора, алгоритм.

Введение

Обзор результатов. Конечной и основной проблемой теории оптимизации считается проблема вычислительных методов. В общей теории условий оптимальности в негладких задачах оптимизации [1–6] особое место занимает вывод необходимых условий оптимальности, учитывающих специфику задач, предназначенных для численного решения [7–10]. Как правило, решения таких задач представляются в виде алгоритмов. Существенное место при разработке алгоритмов решения многоэкстремальных задач занимает составление блока алгоритма, осуществляющего переход от одного локально оптимального плана к другому — позволяющему улучшить значение целевой функции.

Так же, как в линейном программировании, наряду с прямыми методами исследования экстремальных задач важную роль играют двойственные методы [11, 12]. Понятие двойственной полуигры (двойственной задачи для линейной максиминной задачи со связанными переменными) введено в работе [13], где доказано, что цены этих полуигр (оптимальные значения целевых функций этих задач) совпадают. Аналогичное утверждение для линейной игры с запрещёнными ситуациями [14] доказано в [15]. В [7, 16] исследованы отношения между максимином и минимаксом.

Отметим, что слабая задача линейного двухуровневого программирования [17] при $d_1 = d_2$ или $d_2 = 0 \in \mathbb{R}^m$ является линейной минимаксной задачей со связанными переменными. В [7, 17] для слабой задачи линейного двухуровневого программирования разработан подход, сочетающий метод штрафной функции и метод ветвей и границ. В этих же работах рассматриваемая задача сведена к линейной минимаксной (максиминной) задаче со связанными переменными.

В [18] для линейной максиминной задачи со связанными переменными доказаны условия, при выполнении которых из совпадения значений целевых функций взаимно двойственных задач следует локальная оптимальность соответствующих стратегий (планов) первых игроков этих задач. В [19] эти теоремы обобщены на случай необходимого условия глобальной оптимальности.

В настоящей работе предложен двойственный алгоритм, который позволяет строить стратегии для линейной игровой задачи с благоприятными ситуациями (для линейной максиминной задачи со связанными переменными), а также стратегии для двойственной задачи, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности «высокого порядка» [19]. Приведены результаты численного эксперимента по построению удовлетворяющих таким условиям стратегий. Задачи и их параметры для численного эксперимента генерировались датчиком случайных чисел.

Постановка задачи и предварительные сведения. Пусть имеются два игрока, которые поочерёдно выбирают векторы из множеств

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_* \leqslant x \leqslant f^*\},$$
$$Y(x) = \{y \in \mathbb{R}^l \mid g_* \leqslant y \leqslant g^*,\ Ax + By = b\}$$

соответственно: сначала первый игрок выбирает $x \in X$, затем второй игрок выбирает $y \in Y$, зная x. Здесь $f_*, f^* \in \mathbb{R}^n$, $g_*, g^* \in \mathbb{R}^l$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times l}$. Будем предполагать, что $\operatorname{rang} B = m < l$ и $Y(x) \neq \varnothing$ для любого $x \in X$.

Пусть $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^l$, а штрих $'$ обозначает транспонирование. Цель первого игрока — найти $\widehat{x} \in X$, доставляющий максимальное значение функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = \min_{y\in Y(x)} (c'x + d'y),$$

т. е. $\varphi(\widehat{x}) = \max\limits_{x\in X} \varphi(x)$. Цель второго игрока — найти $\widehat{y} \in Y(\widehat{x})$, минимизирующий функцию $d'y\colon Y(\widehat{x}) \to \mathbb{R}$, т. е.

$$d'\widehat{y} = \min_{y\in Y(\widehat{x})} d'y.$$

Другими словами, имеем линейную игровую задачу с благоприятными ситуациями (линейную максиминную задачу со связанными переменными) [18, 19]:

$$\varphi(x) = \min_{y\in Y(x)} (c'x + d'y) \to \max_{x\in X}. \tag{1}$$

Очевидно, что $\widehat{x}$ является точкой глобального максимума функции $\varphi(x)$, $x \in X$. Поиск $\widehat{x}$ составляет важную задачу теории оптимизации из класса задач математического программирования максиминного типа. В отличие от задач линейного программирования, до настоящего времени неизвестен эффективный алгоритм решения этой задачи.

Функция $\varphi(x)$, $x \in X$, выпукла и кусочно линейна [7, 16], поэтому, в общем случае задача (1) многоэкстремальна, т. е. локальный максимум может не дать глобального максимума. В связи с этим представляет особый интерес исследование задачи поиска локального максимума.

Определение 1. Вектор $x \in X$ называется *стратегией* (*планом*) первого игрока, а вектор $y \in Y(x)$ — x-*стратегией* второго игрока.

Определение 2. Стратегия $\widehat{x} \in X$ называется *оптимальной,* если $\varphi(x) \leqslant \varphi(\widehat{x})$ для всех $x \in X$.

Определение 3. При заданном $x \in X$ x-стратегия $\widehat{y} \in Y(x)$ второго игрока называется *оптимальной*, если $d'\widehat{y} \leqslant d'y$ для любого $y \in Y(x)$.

Таким образом, оптимальная стратегия $\widehat{x} \in X$ является решением задачи (1), а оптимальная x-стратегия $\widehat{y} \in Y(x)$, $x \in X$ — решением задачи

$$d'y \to \min_{y \in Y(x)}. \tag{2}$$

Определение 4. Стратегия $\widetilde{x} \in X$ называется *локально оптимальной,* если $\varphi(x) \leqslant \varphi(\widetilde{x})$ для всех $x \in X$ из некоторой окрестности точки $\widetilde{x}$ относительно X.

При решении таких задач естественно обратиться к теории двойственности [11]. В связи с этим в настоящей работе для задачи (1) предложен алгоритм, основанный на теории двойственности, который позволяет строить стратегии игроков, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности «высокого порядка» [19].

1. Двойственная задача

1.1. Формулировка двойственной задачи. В отличие от задач классического линейного программирования, формулировка двойственной к задаче (1) требует некоторой изобретательности. Насколько известно, такая формулировка для задач типа (1) впервые была предложена Ю. П. Иваниловым [13].

Положим

$$M = \{(\mu, s, t) \in \mathbb{R}^{m+2l} \mid B'\mu - t + s = d;\ s \geqslant 0,\ t \geqslant 0\},$$
$$\Lambda(\mu, s, t) = \{(\lambda, \nu) \in \mathbb{R}^{2n} \mid A'\mu - \nu + \lambda = c;\ \nu \geqslant 0,\ \lambda \geqslant 0\},$$
$$\psi(\mu, s, t) = \min_{(\lambda,\nu) \in \Lambda(\mu,s,t)} (b'\mu + g_*'s - g^{*\prime}t + f^{*\prime}\lambda - f_*'\nu).$$

Легко заметить, что $\Lambda(\mu, s, t) \neq \varnothing$ при любом $(\mu, s, t) \in M$.

Определение 5. Задача максимизации функции $\psi(\mu, s, t)$ на M

$$\psi(\mu, s, t) \to \max_{(\mu,s,t) \in M} \tag{3}$$

называется *двойственной* к задаче (1).

В связи с этим задачу (1) назовём *прямой* задачей. Следующее предложение устанавливает связь между прямой и двойственной задачами.

Теорема 1 [20]**.** *Оптимальные значения целевых функций задач* (1) *и* (3) *совпадают.*

Определение 6. Вектор $(\mu, s, t) \in M$ называется *стратегией* первого игрока, вектор $(\lambda, \nu) \in \Lambda(\mu, s, t)$ называется (μ, s, t)*-стратегией* второго игрока в задаче (3).

Подчеркнём, что следует различать соответствующих игроков, участвующих в задачах (1) и (3), а именно: первый игрок в задаче (1) не является также первым игроком в задаче (3), а второй игрок в задаче (1) не является вторым игроком в задаче (3).

Понятия оптимальной и локально оптимальной стратегий первого игрока в задаче (3) вводятся аналогично определениям 1 и 4.

Определение 7. Векторы

$$\delta = B'\mu - d \in \mathbb{R}^l, \quad \nabla = A'\mu - c \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

построенные по стратегии (μ, s, t) первого игрока (по её компоненте μ) в задаче (3), называются *костратегиями* первого и второго игроков для задачи (1) соответственно.

Пусть $K = \{1, 2, \ldots, l\}$, $J = \{1, 2, \ldots, n\}$. Предполагается, что между переменными μ, s, t, λ, ν и переменными μ, δ, ∇ имеются следующие связи:

$$(s_k, t_k) = \begin{cases} (0, \delta_k), & \text{если } \delta_k \geqslant 0, \\ (-\delta_k, 0), & \text{если } \delta_k < 0, \end{cases} \quad k \in K, \tag{5}$$

$$(\nu_j, \lambda_j) = \begin{cases} (\nabla_j, 0), & \text{если } \nabla_j \geqslant 0, \\ (0, -\nabla_j), & \text{если } \nabla_j < 0, \end{cases} \quad j \in J, \tag{6}$$

которые представляют собой условия согласования стратегий (μ, s, t), (λ, ν) игроков задачи (3) с костратегиями δ, ∇ задачи (1). Для краткости пару $\beta = (\delta,\nabla)$ назовём *коситуацией* (*копланом*) задачи (1).

Определение 8. Коситуация $\beta \in \mathbb{R}^{l+n}$ называется *оптимальной* (*локально оптимальной*), если согласованная с ней стратегия (μ, s, t) является оптимальной (локально оптимальной) стратегией первого игрока в задаче (3).

1.2. Опорные конструкции. В дальнейшем координаты векторов размерности l разделяются на два типа: опорные и неопорные. Вектор, составленный из опорных координат (в том же порядке), обозначим нижним индексом «оп», а вектор, составленный из остальных координат, обозначим нижним индексом «н». Эти обозначения используются и для подматриц, составленных из опорных и неопорных столбцов.

Пусть $x \in X$ — стратегия первого игрока в задаче (1).

Определение 9 [12]**.** Совокупность $K_{\text{оп}} = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\} \subset K$ индексов, удовлетворяющих условию $\det B_{\text{оп}} \neq 0$, называется *опорой* задачи (2).

Определение 10. Пара $\{\beta, K_{\text{оп}}\}$ из коситуации β и опоры $K_{\text{оп}}$ называется *опорной коситуацией* задачи (1).

Определение 11. При заданном $\chi \in \mathbb{R}^n$ вектор $\omega \in \mathbb{R}^l$, удовлетворяющий равенству $A\chi + B\omega = b$, называется *χ-псевдостратегией* второго игрока в задаче (1).

По опорной коситуации $\{\beta, K_{\text{оп}}\}$ построим соответствующие ей стратегию первого игрока χ и χ-псевдостратегию второго игрока ω в задаче (1):

$$\chi_j = \begin{cases} f_{*j}, & \text{если } \nabla_j > 0, \\ f_j^*, & \text{если } \nabla_j < 0, \end{cases} \quad \chi_j \in [f_{*j}, f_j^*], \text{ если } \nabla_j = 0, \quad j \in J,$$

$$\omega_k = \begin{cases} g_{*k}, & \text{если } \delta_k < 0, \\ g_k^*, & \text{если } \delta_k > 0, \end{cases} \quad k \in K_{\text{н}} = K \setminus K_{\text{оп}},$$

$$\omega_k \in [g_{*k}, g_k^*], \quad \text{если } \delta_k = 0,\ k \in K_{\text{н}},$$

$$\omega_{\text{оп}} = B_{\text{оп}}^{-1}(b - A\chi - B_{\text{н}}\omega_{\text{н}}).$$

Для формулировки теоремы, являющейся необходимым условием глобальной оптимальности «высокого порядка», воспользуемся понятием условно соседних опор и лучшей опоры относительно другой опоры. По опоре $K_{\text{оп}}$ построим вектор $\mu \in \mathbb{R}^m$ следующим образом:

$$\mu' = d'_{\text{оп}} B_{\text{оп}}^{-1}. \tag{7}$$

Значение целевой функции задачи (3), вычисленное с помощью опоры $K_{\text{оп}}$ по формулам (4)–(7), обозначим через $\psi((\mu, s, t) \mid K_{\text{оп}})$ [19].

Определение 12 [19]**.** Опоры $K_{\text{оп}}^1, K_{\text{оп}}^2$ называются *условно соседними,* если они отличаются на один элемент.

Пусть $K_{\text{оп}}^1, K_{\text{оп}}^2$ — условно соседние опоры, $(\mu^1, s^1, t^1), (\mu^2, s^2, t^2)$ — соответствующие им стратегии первого игрока задачи (3).

Определение 13 [19]**.** Опора $K_{\text{оп}}^1$ называется *лучшей* по отношению к опоре $K_{\text{оп}}^2$, если $\psi\big((\mu^1, s^1, t^1) \mid K_{\text{оп}}^1\big) > \psi\big((\mu^2, s^2, t^2) \mid K_{\text{оп}}^2\big)$.

Теорема 2 (необходимые условия оптимальности «высокого порядка» [19])**.** *Пусть $\{\beta, K_{\text{оп}}\}$ — опорная коситуация задачи* (1)*, $\delta_{\text{оп}} = 0$, а χ и ω — соответствующие ей стратегия первого игрока и χ-псевдостратегия второго игрока задачи* (1)*. Для оптимальности коситуации β необходимы:*

1) *выполнение соотношений*

$$\omega_k = \begin{cases} g_{*k}, & \textit{если } \delta_k < 0, \\ g_k^*, & \textit{если } \delta_k > 0, \end{cases} \quad \omega_k \in [g_{*k}, g_k^*], \quad \textit{если } \delta_k = 0,\ k \in K_{\text{оп}};$$

2) *отсутствие для опоры $K_{\text{оп}}$ условно соседних лучших опор.*

Приводимый ниже алгоритм основан на формуле приращения целевой функции задачи (3) [19]:

$$\begin{aligned}\Delta\psi(\mu,s,t) = &\sum_{k\in K_{\text{оп}}}(\Delta\delta_k\omega_k + g_{*k}\Delta s_k - g_k^*\Delta t_k) + \\ &+ \sum_{\delta_k=0,\,\overline{\delta}_k<0,\,k\in K_{\text{н}}}\overline{\delta}_k(\omega_k - g_{*k}) + \sum_{\delta_k>0,\,\overline{\delta}_k<0,\,k\in K_{\text{н}}}\overline{\delta}_k(g_k^* - g_{*k}) + \\ &+ \sum_{\delta_k=0,\,\overline{\delta}_k\geqslant0,\,k\in K_{\text{н}}}\overline{\delta}_k(\omega_k - g_k^*) + \sum_{\delta_k<0,\,\overline{\delta}_k\geqslant0,\,k\in K_{\text{н}}}\overline{\delta}_k(g_{*k} - g_k^*) + \\ &+ \sum_{\nabla_j=0,\,\overline{\nabla}_j<0,\,j\in J}\overline{\nabla}_j(\chi_j - f_j^*) + \sum_{\nabla_j>0,\,\overline{\nabla}_j<0,\,j\in J}\overline{\nabla}_j(f_{*j} - f_j^*) + \\ &+ \sum_{\nabla_j=0,\,\overline{\nabla}_j\geqslant0,\,j\in J}\overline{\nabla}_j(\chi_j - f_{*j}) + \sum_{\nabla_j<0,\,\overline{\nabla}_j\geqslant0,\,j\in J}\overline{\nabla}_j(f_j^* - f_{*j}). \quad (8)\end{aligned}$$

2. Основной результат

2.1. Описание алгоритма. Пусть $\{\beta, K_{\text{оп}}\}$ — начальная опорная коситуация задачи (1) с $\delta_{\text{оп}} = 0$, χ и ω — соответствующие ей стратегия первого игрока и χ-псевдостратегия второго игрока в задаче (1).

Шаг 1. Найти набор чисел

$$\gamma_k = \begin{cases}\omega_k - g_{*k}, & \text{если } \omega_k < g_{*k},\\ \omega_k - g_k^*, & \text{если } \omega_k > g_k^*,\\ 0, & \text{если } \omega_k \in [g_{*k}, g_k^*],\end{cases} \qquad k \in K_{\text{оп}}.$$

Шаг 2. Найти k_0 такое, что $|\gamma_{k_0}| = \max\limits_{k\in K_{\text{оп}}}|\gamma_k|$, и положить $\overline{\alpha}_0 = |\gamma_{k_0}|$.

Шаг 3. Если $\overline{\alpha}_0 = 0$, то положить $\alpha\alpha := 0$, $z := 1$ и перейти к шагу 10.

Шаг 4. Положить $\Delta\delta_{k_0} = \operatorname{sgn}\gamma_{k_0}$, $\Delta\delta_k = 0$, $k \in K_{\text{оп}} \setminus \{k_0\}$, $\overline{\alpha}_0 = |\gamma_{k_0}|$.

Шаг 5. Вычислить

$$\Delta\delta'_{\text{н}} = \Delta\delta'_{\text{оп}}B_{\text{оп}}^{-1}B_{\text{н}}, \quad \Delta\nabla' = \Delta\delta'_{\text{оп}}B_{\text{оп}}^{-1}A,$$

$$\begin{aligned}\alpha_0 = \overline{\alpha}_0 + &\sum_{k\in K_{\text{н}0}^-}\Delta\delta_k(\omega_k - g_{*k}) + \sum_{k\in K_{\text{н}0}^+}\Delta\delta_k(\omega_k - g_k^*) + \\ &+ \sum_{j\in J_0^-}\Delta\nabla_j(\chi_j - f_j^*) + \sum_{j\in J_0^+}\Delta\nabla_j(\chi_j - f_{*j}),\end{aligned} \quad (9)$$

здесь

$$K_{\text{н}0}^+ = \{k\in K_{\text{н}} \mid \delta_k = 0,\, \Delta\delta_k > 0\}, \quad K_{\text{н}0}^- = \{k\in K_{\text{н}} \mid \delta_k = 0,\, \Delta\delta_k < 0\},$$
$$J_0^+ = \{j\in J \mid \nabla_j = 0,\, \Delta\nabla_j > 0\}, \quad J_0^- = \{j\in J \mid \nabla_j = 0,\, \Delta\nabla_j < 0\}.$$

Шаг 6. Если $\alpha_0 \leqslant 0$, то положить $\sigma^0 = 0$ и, взяв любой индекс (для определённости первый элемент) из $K_{н0} = K_{н0}^+ \cup K_{н0}^-$ в качестве k_*, перейти к шагу 8. Иначе определить числа

$$\sigma_k = \begin{cases} -\delta_k/\Delta\delta_k, & \text{если } \delta_k/\Delta\delta_k < 0, \\ \infty & \text{иначе}, \end{cases} \tag{10}$$

$$k \in K^0 = K_н \setminus K_{н0},$$

$$\xi_j = \begin{cases} -\nabla_j/\Delta\nabla_j, & \text{если } \nabla_j/\Delta\nabla_j < 0, \\ \infty & \text{иначе}, \end{cases} \tag{11}$$

$$j \in J^0 = J \setminus J_0, \quad J_0 = J_0^+ \cup J_0^-.$$

Найти $\sigma^0 = \min\limits_{k \in K^0} \sigma_k$.

Шаг 7. Упорядочить числа $\sigma_k, \xi_j < \infty$, $k \in K^0$, $j \in J^0$ по возрастанию:

$$\begin{gathered} \sigma_{k_1} \leqslant \sigma_{k_2} \leqslant \ldots \leqslant \sigma_{k_r}, \quad r \leqslant |K^0|, \\ \xi_{j_1} \leqslant \xi_{j_2} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{j_h}, \quad h \leqslant |J^0|. \end{gathered} \tag{12}$$

Построить множества

$$J_1 = \{j_i \in J^0 \mid \xi_{j_i} < \sigma_{k_1}\},$$

$$J_v = \left\{ j_i \in J^0 \setminus \bigcup_{q=1}^{v-1} J_q \mid \xi_{j_i} < \sigma_{k_v} \right\}, \quad v \in \overline{2, r},$$

$$J_{r+1} = \left\{ j_i \in J^0 \setminus \bigcup_{q=1}^{r} J_q \mid \xi_{j_i} < \infty \right\}.$$

Положить

$$\alpha_0 := \alpha_0 + \sum_{j_i \in J_1 \cap J^-} \Delta\nabla_{j_i}(\chi_{j_i} - f_{j_i}^*) + \sum_{j_i \in J_1 \cap J^+} \Delta\nabla_{j_i}(\chi_{j_i} - f_{*j_i}), \tag{13}$$

здесь $J^+ = \{j \in J \mid \Delta\nabla_j > 0\}$, $J^- = \{j \in J \mid \Delta\nabla_j < 0\}$. Найти

$$\alpha_\tau = \begin{cases} \alpha_{\tau-1} + \Delta\delta_{k_\tau}(\omega_{k_\tau} - g_{*k_\tau}) + \sum\limits_{j_i \in J_{\tau+1} \cap J^-} \Delta\nabla_{j_i}(\chi_{j_i} - f_{j_i}^*) + \\ \quad + \sum\limits_{j_i \in J_{\tau+1} \cap J^+} \Delta\nabla_{j_i}(\chi_{j_i} - f_{*j_i}), \quad \text{если } \Delta\delta_{k_\tau} < 0, \\ \alpha_{\tau-1} + \Delta\delta_{k_\tau}(\omega_{k_\tau} - g_{k_\tau}^*) + \sum\limits_{j_i \in J_{\tau+1} \cap J^-} \Delta\nabla_{j_i}(\chi_{j_i} - f_{j_i}^*) + \\ \quad + \sum\limits_{j_i \in J_{\tau+1} \cap J^+} \Delta\nabla_{j_i}(\chi_{j_i} - f_{*j_i}), \quad \text{если } \Delta\delta_{k_\tau} > 0, \end{cases} \tag{14}$$

для всех $\tau \in \overline{1, r}$, а также индекс $\zeta \in \overline{1, r}$ такой, что $\alpha_{\zeta-1} > 0$, $\alpha_\zeta \leqslant 0$.

Положить

$$k_* = k_\zeta, \quad \sigma^0 = \sigma_{k_*}, \tag{15}$$

$$\chi_{j_i} = \begin{cases} f^*_{j_i}, & \text{если } \Delta\nabla_{j_i} < 0, \\ f_{*j_i}, & \text{если } \Delta\nabla_{j_i} > 0, \end{cases} \quad j_i \in J_{\tau+1}, \tag{16}$$

$$\omega_{k_\tau} = \begin{cases} g^*_{k_\tau}, & \text{если } \Delta\delta_{k_\tau} > 0, \\ g_{*k_\tau}, & \text{если } \Delta\delta_{k_\tau} < 0, \end{cases} \quad \tau \in \overline{0, \zeta - 1}. \tag{17}$$

Шаг 8. Вычислить $\overline{\beta} = \beta + \sigma^0\Delta\delta$, $\overline{\nabla} = \nabla + \sigma^0\Delta\nabla$, положить $\beta := \overline{\beta}$, $\nabla := \overline{\nabla}$, $K_{\text{оп}} := (K_{\text{оп}} \setminus \{k_0\}) \cup \{k_*\}$, $K_{\text{н}} := K \setminus K_{\text{оп}}$.

Шаг 9. Вычислить $\omega_{\text{оп}} = B^{-1}_{\text{оп}}(b - A\chi - B_{\text{н}}\omega_{\text{н}})$ и перейти к шагу 1.

Шаг 10. Положить $\alpha\alpha := \alpha\alpha + 1$. Если $\alpha\alpha > m$, то положить $\alpha\alpha := 0$, $z := -1$ и перейти к шагу 17. Иначе положить

$$k_0 := k_{\alpha\alpha} \in K_{\text{оп}} = \{k_1, k_2, \ldots, k_{\alpha\alpha}, \ldots, k_m\},$$

$\Delta\delta_{k_0} := 1$, $\Delta\delta_k := 0$, $k \in K_{\text{оп}} \setminus \{k_0\}$, $\overline{\alpha_0} := \omega_{k_0} - g^*_{k_0}$.

Шаг 11. Определить $\Delta\delta_{\text{н}}$, $\Delta\nabla$, α_0, σ_k, $k \in K^0$, ξ_j, $j \in J^0$ согласно (9)–(11). Найти $\sigma^0 = \min\limits_{k \in K^0} \sigma_k$.

Шаг 12. Если $\sigma^0 = \infty$ и $z = 1$, то перейти к шагу 10.

Шаг 13. Если $\sigma^0 = \infty$ и $z = -1$, то перейти к шагу 17.

Шаг 14. Определить α_τ, $\tau \in \overline{1, r}$, независимо от значения α_0 согласно (12)–(14).

Шаг 15. Если существует индекс $\zeta \in \overline{1, r}$ такой, что

$$\begin{aligned} \Delta\psi(\mu, s, t) = \sum_{\tau=0}^{\zeta-1} \Big(& \alpha^1_\tau(\sigma_{k_{\tau+1}} - \sigma_{k_\tau}) + \\ & + \sum_{j_i \in J_{\tau+1} \cap J^-} \Delta\nabla_{j_i}(\chi_{j_i} - f^*_{j_i})(\sigma_{k_{\tau+1}} - \xi_{j_i}) + \\ & \quad + \sum_{j_i \in J_{\tau+1} \cap J^+} \Delta\nabla_{j_i}(\chi_{j_i} - f_{*j_i})(\sigma_{k_{\tau+1}} - \xi_{j_i}) \Big) > 0, \end{aligned} \tag{18}$$

то определить k_*, σ^0, χ_{j_i}, $j_i \in J_{\tau+1}$, ω_{k_τ}, $\tau \in \overline{0, \zeta - 1}$ согласно (15)–(17) и перейти к шагу 8 (α^1_τ — слагаемое α_τ, соответствующее K).

Шаг 16. Если $z = 1$, то перейти к шагу 10.

Шаг 17. Положить $\alpha\alpha := \alpha\alpha + 1$. Если $\alpha\alpha > m$, то перейти к шагу 18. Иначе положить $k_0 := k_{\alpha\alpha} \in K_{\text{оп}} = \{k_1, k_2, \ldots, k_{\alpha\alpha}, \ldots, k_m\}$, $\Delta\delta_{k_0} := -1$, $\Delta\delta_k := 0$, $k \in K_{\text{оп}} \setminus \{k_0\}$, $\overline{\alpha}_0 := -\omega_{k_0} + g_{*k_0}$ и перейти к шагу 11.

Шаг 18. Конец. Построенная опорная коситуация $\{\beta, K_{\text{оп}}\}$ удовлетворяет необходимым условиям оптимальности «высокого порядка».

Замечание. Параметры $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ означают скорости изменения целевой функции задачи (3) (начальная и т. д.) вдоль направления $\Delta\mu' = \Delta\delta'_{\text{оп}} B^{-1}_{\text{оп}}$ изменения двойственных стратегий и коситуации.

2.2. Обоснование алгоритма.

Определение 14. Переход от одной опорной коситуации $\{\beta, K_{\text{оп}}\}$ к другой опорной коситуации $\{\overline{\beta}, \overline{K}_{\text{оп}}\}(\{\beta, K_{\text{оп}}\} \to \{\overline{\beta}, \overline{K}_{\text{оп}}\})$ назовём *итерацией.*

Определение 15. Итерацию назовём *регулярной,* если $\sigma^0 > 0$.

Теорема 3. *Если в процессе работы алгоритма встречается конечное число нерегулярных итераций, то за конечное число итераций алгоритм строит опорную коситуацию $\{\beta, K_{\text{оп}}\}$, удовлетворяющую необходимым условиям оптимальности «высокого порядка».*

Доказательство. Во-первых, количество опор задачи (2) не превосходит $N = C_l^m = \frac{l!}{m!(l-m)!}$. Во-вторых, при конечности нерегулярных итераций никакая опора в ходе работы алгоритма не может встречаться дважды. Таким образом, за конечное число итераций алгоритм построит опорную коситуацию $\{\beta, K_{\text{оп}}\}$, удовлетворяющую необходимым условиям оптимальности «высокого порядка». Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Для произвольной задачи* (1) *при любой начальной опорной коситуации $\{\beta, K_{\text{оп}}\}$ приведённый алгоритм с модификацией выбора индекса k_0 на шаге* 2 ($k_0 = \min\{k \in K_{\text{оп}} \mid \omega_k \overline{\in} [g_{*k}, g^*_k]\}$) *и индекса k_* при $\sigma^0 = 0$ на шаге* 6 ($k_* = \min K_{\text{н}0}$) *за конечное число итераций строит опорную коситуацию $\{\beta, K_{\text{оп}}\}$, удовлетворяющую необходимым условиям оптимальности «высокого порядка».*

Доказательство. Предположим противное утверждению теоремы. Пусть число итераций алгоритма при решении некоторой задачи (1) бесконечно. Замена опорной коситуации $\{\beta^\tau, K^\tau_{\text{оп}}\}$ опорной коситуацией $\{\beta^{\tau+1}, K^{\tau+1}_{\text{оп}}\}$ на τ-й итерации алгоритма происходит однозначно. Следовательно, в случае бесконечного числа итераций существует цикл-последовательность $\{\beta^\tau,\ K^\tau_{\text{оп}}\}$, $\{\beta^{\tau+1},\ K^{\tau+1}_{\text{оп}}\}$, $\ldots$, $\{\beta^{\tau+\gamma}\ ,\ K^{\tau+\gamma}_{\text{оп}}\} = \{\beta^\tau, K^\tau_{\text{оп}}\}$, реализующаяся на последовательных итерациях алгоритма (верхний индекс обозначает номер итерации). Из описания алгоритма вытекает, что целевая функция задачи (3) не уменьшается на итерациях, т. е.

$$\psi^\tau \leqslant \psi^{\tau+1} \leqslant \ldots \leqslant \psi^{\tau+\gamma} = \psi^\tau,$$

где для краткости $\psi^v = \psi(\mu^v, s^v, t^v)$, $v \in \overline{\tau, \tau+\gamma}$. Действительно, для итерации алгоритма возможны следующие варианты последовательности шагов: а) 1–9; б) 1–6, 8, 9; в) 1–3, (10–12)+, 14, 15, 8, 9; г) 1–3, 10, (11–13, 17)+, 11, 14, 15, 8, 9. В случае а) целевая функция задачи (3) не уменьшается, поскольку скорость её изменения вдоль соответствующих направлений неотрицательна. В случае б) значение целевой функции задачи (3) не меняется. В случаях в), г) приращения целевой функции задачи (3) положительны. Тем самым на протяжении цикла $\{\beta^\tau, K^\tau_{\text{оп}}\}$, $\{\beta^{\tau+1}, K^{\tau+1}_{\text{оп}}\}$, …, $\{\beta^{\tau+\gamma}, K^{\tau+\gamma}_{\text{оп}}\} = \{\beta^\tau, K^\tau_{\text{оп}}\}$ выполняются равенства

$$\psi^\tau = \psi^{\tau+1} = \cdots = \psi^{\tau+\gamma} = \psi^\tau, \quad \psi^v = \psi(\mu^v, s^v, t^v),\ v \in \overline{\tau, \tau+\gamma}.$$

Это возможно только в том случае, когда $\sigma^0 = 0$ начиная с τ-й итерации, следовательно,

$$(\mu^\tau, s^\tau, t^\tau) = (\mu^{\tau+1}, s^{\tau+1}, t^{\tau+1}) = \cdots = (\mu^{\tau+\gamma}, s^{\tau+\gamma}, t^{\tau+\gamma}) = (\mu^\tau, s^\tau, t^\tau),$$
$$\delta^\tau = \delta^{\tau+1} = \cdots = \delta^{\tau+\gamma} = \delta^\tau.$$

Рассмотрим последовательность итераций $\tau, \tau+1, \ldots, \tau+\gamma-1$. Следуя [12, § 6], разобьём множество K на непересекающиеся подмножества:

$$K_{\text{поп}} = \bigcap_{ii=\tau}^{\tau+\gamma-1} K^{ii}_{\text{оп}}, \quad K_{\text{пн}} = \bigcap_{ii=\tau}^{\tau+\gamma-1} K^{ii}_{\text{н}}, \quad K_{0\text{н}} = K \setminus (K_{\text{поп}} \cup K_{\text{пн}}).$$

Таким образом, $K_{\text{поп}}$ — множество индексов, которые начиная с некоторой итерации L_1 постоянно находятся в опоре; $K_{\text{пн}}$ — множество индексов, которые начиная с некоторой итерации L_2 постоянно находятся вне опоры и не выбираются в качестве k_*; $K_{0\text{н}}$ — множество индексов, которые выбираются в качестве k_0 и k_* бесконечное число раз.

Рассмотрим итерации начиная с номера $\max\{L_1, L_2\}$. Пусть $s1 = \max K_{\text{оп}}$ и p, q номера итераций цикла такие, что $k_0 = s1$ на итерации p, а $k_* = s1$ на итерации q впервые после итерации p, при этом $k_0 = r$ на итерации q. Определим знак величины

$$\begin{aligned}
&\Delta\delta'^{(q)}(\omega^{(p)} - \omega^{(q)}) + \Delta\nabla'^{(q)}(\chi^{(p)} - \chi^{(q)}) = \\
&\quad = \sum_{k\in K} \Delta\delta^{(q)}_k\big(\omega^{(p)}_k - \omega^{(q)}_k\big) + \sum_{j\in J} \Delta\nabla^{(q)}_j\big(\chi^{(p)}_j - \chi^{(q)}_j\big) = \\
&= \sum_{k\in K_{\text{поп}}\setminus\{r\}} \Delta\delta^{(q)}_k\big(\omega^{(p)}_k - \omega^{(q)}_k\big) + \sum_{k\in K_{\text{пн}}} \Delta\delta^{(q)}_k\big(\omega^{(p)}_k - \omega^{(q)}_k\big) + \\
&\quad + \Delta\delta^{(q)}_{s1}\big(\omega^{(p)}_{s1} - \omega^{(q)}_{s1}\big) + \Delta\delta^{(q)}_r\big(\omega^{(p)}_r - \omega^{(q)}_r\big) + \\
&\quad + \sum_{k\in(K_{\text{поп}}\setminus\{r\})\cap K^{(q)}_{\text{н}}} \Delta\delta^{(q)}_k\big(\omega^{(p)}_k - \omega^{(q)}_k\big) + \sum_{j\in J} \Delta\nabla^{(q)}_j\big(\chi^{(p)}_j - \chi^{(q)}_j\big),
\end{aligned}$$

для чего рассмотрим знаки каждого слагаемого. Из описания алгоритма следует, что выполняются соотношения

$$\Delta\delta_k^{(ii)} = 0, \quad k \in K_{\text{поп}},\, ii \in \overline{\tau, \tau+\gamma-1},$$
$$\omega_k^{(i)} = \omega_k^{(z)}, \quad k \in K_{\text{пн}},\, i, z \in \overline{\tau, \tau+\gamma-1}.$$

Тогда с учётом (8) имеем

$$\sum_{k \in K_{\text{поп}} \setminus \{r\}} \Delta\delta_k^{(q)} \big(\omega_k^{(p)} - \omega_k^{(q)}\big) + \sum_{k \in K_{\text{пн}}} \Delta\delta_k^{(q)} \big(\omega_k^{(p)} - \omega_k^{(q)}\big) = 0,$$
$$\sum_{j \in J} \Delta\nabla_j^{(q)} \big(\chi_j^{(p)} - \chi_j^{(q)}\big) \geqslant 0.$$

Так как $s1 \in K_{\text{н}}^{(q)}$, то $g_{*s1} \leqslant \omega_{s1}^{(q)} \leqslant g_{s1}^*$. Более того, $\omega_{s1}^{(q)} \in \{g_{*s1}, g_{s1}^*\}$, поскольку на итерации $p < q$ компонента $\omega_{s1}^{(p)}$ была в опоре, а при выходе из неё приняла граничное значение и больше не изменялась в силу определения $s1$, итерации q и правила выбора k_*. Так как $s1 = k_0$ на итерации p, то $\omega_{s1}^{(p)} \notin [g_{*s1}, g_{s1}^*]$ и возможны два случая:

1) $\omega_{s1}^{(p)} < g_{*s1}$, тогда $\omega_{s1}^{(q)} = g_{*s1}$ и $\Delta\delta_{s1}^{(q)} < 0$,
2) $\omega_{s1}^{(p)} > g_{s1}^*$, тогда $\omega_{s1}^{(q)} = g_{s1}^*$ и $\Delta\delta_{s1}^{(q)} > 0$.

В обоих случаях $\Delta\delta_{s1}^{(q)}\big(\omega_{s1}^{(p)} - \omega_{s1}^{(q)}\big) > 0$.

В силу выбора k_0 на итерациях p и q имеем неравенства $g_{*r} \leqslant \omega_r^{(q)} \leqslant g_r^*$ $(r \in K_{\text{н}}^{(p)} \cap K_{\text{н}}^{(q)})$, поэтому $\Delta\delta_r^{(q)}\big(\omega_r^{(p)} - \omega_r^{(q)}\big) > 0$.

С другой стороны,

$$\begin{aligned} &\Delta\delta'^{(q)}(\omega^{(p)} - \omega^{(q)}) + \Delta\nabla'^{(q)}(\chi^{(p)} - \chi^{(q)}) = \\ &\quad = \Delta\delta'^{(q)}\omega^{(p)} + \Delta\nabla'^{(q)}\chi^{(p)} - \Delta\delta'^{(q)}\omega^{(q)} - \Delta\nabla'^{(q)}\chi^{(q)} = \\ &\quad = \Delta\mu'^{(q)}(A\chi^{(p)} + B\omega^{(p)}) - \Delta\mu'^{(q)}(A\chi^{(q)} + B\omega^{(q)}) \\ &\quad = \Delta\mu'^{(q)}b - \Delta\mu'^{(q)}b = 0. \end{aligned}$$

Полученное противоречие доказывает теорему. Теорема 4 доказана.

Пример. Рассмотрим задачу (1) при следующих значениях параметров [19]:

$$n = 2, \quad m = 3, \quad l = 5, \quad c = (-1; 0)', \quad f_* = (-6; -8)', \quad f^* = (2; 2)',$$
$$d = (-2; 1; 0; 0; 0)', \quad g_* = (0; 0; 0; 0; 0)', \quad g^* = (6; 6; 100; 100; 100)',$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = (4; 10; 2)'.$$

В качестве начальной опорной коситуации рассмотрим

$$\{\beta, K_{\text{оп}}\}, \quad \beta = (\delta, \nabla), \quad \nabla = (-1;-1)', \quad \delta = (1;0;0;0;-1)',$$
$$K_{\text{оп}} = \{2,3,4\}, \quad \chi = (2;2)', \quad \omega = (6;10;0;-8;0)'.$$

Применим описанный алгоритм.

Итерация 1. $\{\beta, K_{\text{оп}}\} \to \{\overline{\beta}, \overline{K}_{\text{оп}}\}$:

$$\{\overline{\beta}, \overline{K}_{\text{оп}}\}, \quad \overline{\beta} = (\overline{\delta}, \overline{\nabla}), \overline{\delta} = (0;0;0;-1/2;-3/2)', \quad \overline{\nabla} = (-3/2;-5/2)',$$
$$\overline{K}_{\text{оп}} = \{1,2,3\}, \quad \overline{\chi} = (2;2)', \quad \overline{\omega} = (2;6;0;0;0)',$$

$\overline{\beta}$ — локально оптимальная коситуация задачи (1), $(\overline{\mu}, \overline{s}, \overline{t})$ — локально оптимальная стратегия первого игрока задачи (3),

$$\overline{\mu} = (0;-1/2;-3/2)', \quad \overline{t} = (0;0;0;0;0)', \quad \overline{s} = (0;0;0;1/2;3/2)',$$

$\overline{\chi}$ — локально оптимальная стратегия первого игрока задачи (1) согласно теореме 6 [19], при этом $\varphi(\overline{\chi}) = 0$.

Итерация 2. $\{\beta, K_{\text{оп}}\} \to \{\overline{\beta}, \overline{K}_{\text{оп}}\}$:

$$\{\beta, K_{\text{оп}}\}, \quad \beta = (\delta, \nabla), \quad \delta = (0;0;0;-1/2;-3/2)', \quad \nabla = (-3/2;-5/2)',$$
$$K_{\text{оп}} = \{1,2,3\}, \quad \chi = (2;2)', \quad \omega = (2;6;0;0;0)',$$
$$\{\overline{\beta}, \overline{K}_{\text{оп}}\}, \quad \overline{\beta} = (\overline{\delta}, \overline{\nabla}), \quad \overline{\nabla} = (3;-4)', \quad \overline{\delta} = (0;-3;0;-2;0)',$$
$$\overline{K}_{\text{оп}} = \{1,3,5\}, \quad \overline{\chi} = (-6;2)', \quad \overline{\omega} = (0;0;12;0;12)'.$$

$\overline{\beta}$ — локально оптимальная коситуация задачи (1), $(\overline{\mu}, \overline{s}, \overline{t})$ — локально оптимальная стратегия первого игрока задачи (3),

$$\overline{\mu} = (0;-2;0)', \quad \overline{t} = (0;0;0;0;0)', \quad \overline{s} = (0;3;0;2;0)',$$

$\overline{\chi}$ — локально оптимальная стратегия первого игрока задачи (1) согласно теореме 6 [19], при этом $\varphi(\overline{\chi}) = 6$.

Для опорной коситуации $\{\overline{\beta}, \overline{K}_{\text{оп}}\}$ условия теоремы 2 выполняются. При этом коситуация β оптимальна, в чём можно убедиться, решив задачу алгоритмом, предложенным в работе [20].

Замечания. 1. Задача (1) для параметров, приведённых в примере, имеет три локально оптимальные стратегии первого игрока: $x^1 = (2,2)'$, $x^2 = (-6,-8)'$, $x^3 = (-6,2)'$.

2. Локальная оптимальность стратегии первого игрока $x^1 = (2,2)'$ при исследовании задачи прямым методом идентифицируется с помощью пакета x^1-оптимальных опор $K^p_{\text{оп}}(x^0) = \{\{1,2,3\},\{1,3,4\}\}$ [19, теорема 4].

3. С помощью предложенного алгоритма удалось перейти от локально оптимальной стратегии первого игрока $x^1 = (2,2)'$ к локально оптимальной стратегии $x^3 = (-6,2)'$, при этом значение целевой функции улучшилось.

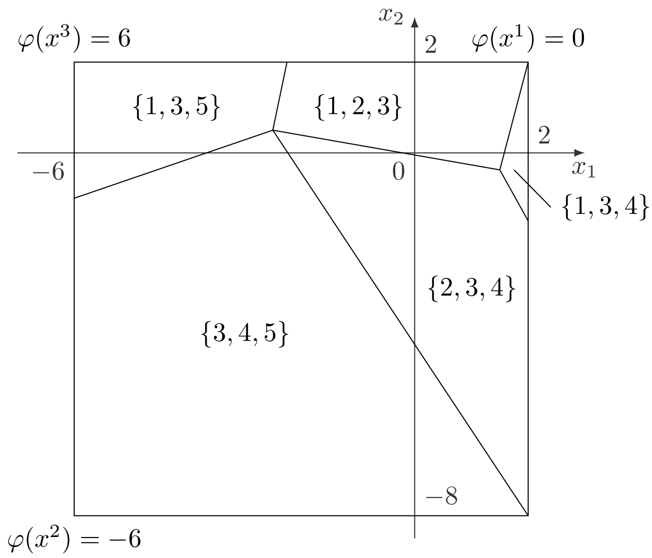

Рис. 1

4. На рис. 1 приведены локально оптимальные стратегии первого игрока и соответствующие значения целевой функции задачи (1), а также x-оптимальные опоры и соответствующие им области [19].

2.3. Численный эксперимент. Численный эксперимент поставлен на ЭВМ. Элементы задачи (1) генерировались датчиком случайных чисел. Координаты векторов c, d и элементы матриц A, B выбирались на отрезке $[-10, 10]$, координаты векторов f_*, g_* — на отрезке $[-10, 0]$, координаты векторов f^*, g^* — на отрезке $[0, 10]$. Вектор b полагался равным $b = Ax^0 + By^0$, где

$$x^0 = \frac{f_* + f^*}{2}, \quad y^0 = \frac{g_* + g^*}{2}.$$

После этого первые m компонент векторов g_*, g^* доопределялись следующим образом:

$$g_{*i} = \min_{x \in [f_*, f^*],\, y_{\text{н}} \in [g_{*\text{н}}, g^*_{\text{н}}]} h_i(b - Ax - B_{\text{н}} y_{\text{н}}),$$
$$g^*_i = \max_{x \in [f_*, f^*],\, y_{\text{н}} \in [g_{*\text{н}}, g^*_{\text{н}}]} h_i(b - Ax - B_{\text{н}} y_{\text{н}}),$$
$$i \in I = \{1, 2, \ldots, m\}, \quad K_{\text{н}} = \{m+1, m+2, \ldots, l\},$$

h_i — i-я строка матрицы $B_{\text{оп}}^{-1}$. Для каждой тройки (m, n, l) рассматривалась серия из трёх задач.

Таблица 1

m	n	l	$K^l_{\text{оп}}$	$K^{gl}_{\text{оп}}$	m	n	l	$K^l_{\text{оп}}$	$K^{gl}_{\text{оп}}$
2	3	5	{1,2}	{1,2}	2	3	5	{1,2}	{1,2}
2	3	5	{1,4}	{1,4}	2	3	8	{2,8}	{2,8}
2	3	8	{4,5}	{4,5}	2	3	8	{2,8}	{2,8}
3	5	8	{1,2,3}	{1,2,3}	3	5	8	{1,2,3}	{1,2,3}
3	5	8	{1,2,3}	{1,2,3}	2	10	8	{1,2}	{1,2}
2	10	8	{1,2}	{1,2}	2	10	8	{1,2}	{1,2}
3	10	8	{1,2,3}	{1,2,3}	3	10	8	{1,2,3}	{1,2,3}
3	10	8	{1,2,3}	{1,2,3}	4	10	8	{1,2,3,4}	{1,2,3,4}
4	10	8	{1,2,3,4}	{1,2,3,4}	4	10	8	{1,2}	{1,2}
2	50	8	{1,2}	{1,2}	2	50	8	{1,2}	{1,2}
2	50	8	{1,2}	{1,2}	3	50	8	{1,2,3}	{1,2,3}
3	50	8	{1,2,3}	{1,2,3}	3	50	8	{1,2,3}	{1,2,3}
3	10	15	{1,2,3}	{1,2,3}	3	10	15	{1,2,15}	{1,2,15}
3	10	15	{1,2,3}	{1,2,3}	3	10	25	{1,8,16}	{1,8,16}
3	10	25	{2,3,16}	{2,3,16}	3	10	25	{2,5,9}	{2,5,9}

Для полученных задач применён предложенный алгоритм, а также — для сравнения — алгоритм из [20]. Результаты эксперимента приведены в табл. 1, в которой приняты следующие обозначения: $K^l_{\text{оп}}$ — опора задачи (2), построенная предложенным алгоритмом, вместе с соответствующей коситуацией, удовлетворяющей условиям теоремы 2; $K^{gl}_{\text{оп}}$ — опора задачи (2), построенная алгоритмом из [20], для которой соответствующая коситуация оптимальна.

Из 30 задач в 22 случаях начальная коситуация удовлетворяла теореме 2, в восьми случаях построена опорная коситуация, удовлетворяющая теореме 2. В трёх случаях из восьми удалось перейти с локально оптимальной костратегии (локально оптимальной стратегии первого игрока) к другой костратегии (стратегии первого игрока), при которой значение целевой функции задачи (3) возрастало.

Заметим, что построенные предложенным алгоритмом костратегии оптимальны согласно алгоритму [20].

Если начальную опору взять равной $K_{\text{оп}} = \{l-m+1, l-m+2, \ldots, l\}$, то только при $m = 2$, $n = 3$, $l = 5$ (в двух случаях из трёх) не удаётся перейти к опоре $K^{gl}_{\text{оп}}$. Во всех остальных случаях эксперимента удаётся перейти к опоре $K^{gl}_{\text{оп}}$, применяя предложенный алгоритм.

Заключение

Для линейной игровой задачи с благоприятными ситуациями предложен двойственный алгоритм, который позволяет строить стратегию первого игрока, удовлетворяющую необходимым условиям оптимальности «высокого порядка». Приведён пример, иллюстрирующий работу алгоритма. Также представлены результаты численного эксперимента по построению стратегий первого игрока, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности «высокого порядка». Элементы этих задач генерировались датчиком случайных чисел. Из результатов численного эксперимента можно сделать вывод, что при предложенном алгоритме зачастую имеется возможность перехода от одной локально оптимальной стратегии первого игрока к другой стратегии, обеспечивающей возрастание целевой функции. Кроме того, предложенный алгоритм аналогично двойственному симплекс-алгоритму решения задачи линейного программирования [21, § 2] характеризуется

1) неубыванием целевой функции задачи (3) на итерациях, его строгим возрастанием при регулярных итерациях;

2) на итерациях $\{\beta, K_{\text{оп}}\} \to \{\overline{\beta}, \overline{K}_{\text{оп}}\}$ отсутствием перехода к опорам, для которых соответствующие значения целевой функции задачи (3) меньше $\varphi((\mu, s, t) \mid K_{\text{оп}});$

3) максимальным возрастанием целевой функции задачи (3) при движении вдоль направления $\Delta\mu' = \Delta\delta'_{\text{оп}} B^{-1}_{\text{оп}}$ изменения двойственных стратегий и костратегии.

Алгоритм можно использовать или модифицировать как для решения игровой задачи с благоприятными ситуациями, так и для решения игровой задачи с произвольными ситуациями [13, 20], для решения игровой задачи с запрещёнными ситуациями [9, 15], а также для решения слабых задач линейного двухуровневого программирования [7, 17].

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт бюджета Самаркандского государственного университета им. Ш. Рашидова. Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. **Пшеничный Б. Н.** Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982. 144 с.

2. **Мордухович Б. Ш.** К необходимым условиям экстремума в негладкой оптимизации // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 4. С. 816–822.
3. **Кларк Ф.** Оптимизация и негладкий анализ. М.: Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1988. 288 с.
4. **Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.** Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990. 431 с.
5. **Гороховик В. В.** Выпуклые и негладкие задачи векторной оптимизации. Мн.: Навука і тэхніка, 1990. 239 с.
6. **Иоффе А. Д.** О необходимых условиях минимума // Фундамент. и прикл. математика. 2014. Т. 19, № 4. С. 121–152.
7. **Фёдоров В. В.** Численные методы максимина. М.: Наука, 1979. 280 с.
8. **Габасов Р., Шилкина Е. И.** Прямой точный метод решения одного класса минимаксных задач // Докл. АН БССР. 1981. Т. 25, № 11. С. 971–973.
9. **Азизов И.** Конечный алгоритм решения линейной максиминной задачи со связанными переменными и результаты численного эксперимента. Мн., 1984. 20 с. (Препр. / Ин-т математики АН БССР; № 18 (203)).
10. **Габасов Р., Кириллова Ф. М., Костина Е. А.** Глобальная максимизация специальных классов выпуклых функций на выпуклом многогранном множестве // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1992. Т. 32, № 8. С. 1313–1320.
11. **Гольштейн Е. Г.** Теория двойственности в математическом программировании и её приложения. М.: Наука, 1971. 352 с.
12. **Габасов Р., Кириллова Ф. М., Тятюшкин А. И.** Конструктивные методы оптимизации. Ч. 1. Линейные задачи. Мн.: Университетское, 1984. 214 с.
13. **Иванилов Ю. П.** Двойственные полуигры // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. 1972. № 4. С. 3–9.
14. **Гермейер Ю. Б.** Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976. 327 с.
15. **Лозовану Д. Д.** Максиминные задачи со связанными переменными и их применения к исследованию и решению циклических игр // Изв. АН Респ. Молдова. Математика. 1990. № 2. С. 22–29.
16. **Falk J. E.** Linear max-min problem // Math. Program. 1973. V. 5, No. 2. P. 169–188. DOI: 10.1007/BF01580119.
17. **Liu J., Hong Y., Zheng Y.** A branch and bound-based algorithm for the weak linear bilevel programming problems // Wuhan Univ. J. Nat. Sci. 2018. V. 23, No. 6. P. 480–486. DOI: 10.1007/s11859-018-1352-8.
18. **Маматов А. Р.** Двойственный алгоритм вычисления локального оптимума одной максиминной задачи со связанными переменными // Узб. журн. «Пробл. информатики и энергетики». 2000. № 1. С. 7–12.
19. **Маматов А. Р.** Необходимые условия оптимальности «высокого порядка» в линейной максиминной задаче со связанными переменными // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2010. Т. 50, № 6. С. 1017–1022.
20. **Маматов А. Р.** Алгоритм решения одной игры двух лиц с передачей информации // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 10. С. 1784–1789.

21. **Габасов Р., Кириллова Ф. М., Альсевич В. В., Калинин А. И., Крахотко В. В., Павлёнок Н. С.** Методы оптимизации. Мн.: Четыре четверти, 2011. 472 с.

Маматов Акмал Равшанович

Статья поступила
16 августа 2023 г.
После доработки —
17 января 2024 г.
Принята к публикации
22 марта 2024 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2024. Vol. 31, No. 3. P. 123–143

UDC 519.8+519.6 DOI: 10.33048/daio.2024.31.782

SEARCH FOR LOCALLY OPTIMAL STRATEGIES IN A LINEAR GAME PROBLEM WITH FAVORABLE SITUATIONS

A. R. Mamatov

Rashidov Samarkand State University,
15 University Boulevard, 140104 Samarkand, Uzbekistan

E-mail: `akmm1964@rambler.ru`

Abstract. A linear game problem for two players is considered. The two players alternately choose their strategies from their respective sets. First, player 1 chooses his/her strategy, then player 2, knowing the strategy of player 1, does the same. The set of strategies of player 2 depends on the strategy of player 1. The goal of player 1 is to choose a strategy to maximize a convex and piecewise linear function (the minimum function of the strategy of player 2). The goal of player 2 is to minimize the linear function. An algorithm is proposed that allows constructing strategies in this problem, as well as strategies in the dual problem, that satisfy necessary "higher-order" optimality conditions. This algorithm uses a formula for the increment of the objective function in the dual problem. Theorems that assert the finiteness of the proposed algorithm and its modification are proved. An example illustrating the operation of the algorithm is given. The results of a numerical experiment on the construction of strategies that satisfy the necessary "higher-order" optimality conditions in problems whose elements were generated by a random number generator are also presented. Based on the results of the numerical experiment, we can conclude that with the proposed algorithm, it is often possible to switch from one locally optimal strategy of player 1 to another one increasing the objective function. Tab. 1, illustr. 1, bibliogr. 21.

Keywords: linear game, maximin problem, optimality condition, support, algorithm.

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **18** (3), 489–502 (2024), DOI: 10.1134/S1990478924030104.

References

1. **B. N. Pshenichnyi,** *Necessary Conditions for Extremum* (Nauka, Moscow, 1982) [Russian].
2. **B. Sh. Mordukhovich,** On necessary conditions for an extremum in nonsmooth optimization, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **283** (4), 816–822 (1985) [Russian] [*Soviet Math. Dokl.* **32**, 215–220 (1985)].
3. **F. H. Clarke,** *Optimization and Nonsmooth Analysis* (John Wiley & Sons, New York, 1983; Nauka, Moscow, 1988 [Russian]).
4. **V. F. Demyanov** and **A. M. Rubinov,** *Nonsmooth Analysis Foundations and Quasi-Differential Calculus* (Nauka, Moscow, 1990) [Russian].
5. **V. V. Gorokhovik,** *Convex and Nonsmooth Vector Optimization Problems* (Nauka Tekh., Minsk, 1990) [Russian].
6. **A. D. Ioffe,** On necessary conditions for a minimum, *Fundam. Prikl. Mat.* **19** (4), 121–152 (2014) [Russian].
7. **V. V. Fyodorov,** *Numerical Maximin Methods* (Nauka, Moscow, 1979) [Russian].
8. **R. Gabasov** and **E. I. Shilkina,** A direct exact method for solving one class of minimax problems, *Dokl. Akad. Nauk BSSR* **25** (11), 971–973 (1981) [Russian].
9. **I. Azizov,** A finite algorithm for solving a linear maximin problem with bound variables and results of a numerical experiment (Inst. Mat. AN BSSR, Minsk, 1984) (Prepr. № 18 (203)) [Russian].
10. **R. Gabasov, F. M. Kirillova,** and **E. A. Kostina,** Global maximization of special classes of convex functions on a convex polyhedral set, *Zh. Vychisl. Mat Mat. Fiz.* **32** (8), 1313–1320 (1992) [Russian] [*Comput. Math. Math. Phys.* **32** (8), 1171-1177 (1992)].
11. **E. G. Golshtein,** *Duality Theory in Mathematical Programming and Its Aplications* (Nauka, Moscow, 1971) [Russian].
12. **R. Gabasov, F. M. Kirillova,** and **A. I. Tyatyushkin,** *Constructive Optimization Methods. Pt. 1. Linear Problems* (Universitetskoe, Minsk, 1984) [Russian].
13. **Yu. P. Ivanilov,** Dual semi-games, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Tekh. Kibern.,* No. 4, 3–9 (1972) [Russian].
14. **Yu. B. Germeier,** *Games with Non-Opposite Interests* (Nauka, Moscow, 1976) [Russian].
15. **D. D. Lozovanu,** Maximin linear problems with connected variables and their applications to the study and solution of cyclic games, *Bul. Acad. Ştiinţe Repub. Mold., Mat.,* No. 2, 22–29 (1990) [Russian].
16. **J. E. Falk,** Linear max-min problem, *Math. Program.* **5** (2), 169–188 (1973), DOI: `10.1007/BF01580119`.
17. **J. Liu, Y. Hong,** and **Y. Zheng,** A branch and bound-based algorithm for the weak linear bilevel programming problems, *Wuhan Univ. J. Nat. Sci.* **23** (6), 480–486 (2018), DOI: `10.1007/s11859-018-1352-8`.

18. A. R. Mamatov, A dual algorithm for computing a local optimum in a linear maximin problem with coupled variables, *Uzb. Zh. "Probl. Inform. Energ.",* No. 1, 7–12 (2000) [Russian].

19. A. R. Mamatov, High-order necessary optimality conditions in a linear maxmin problem with coupled variables, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **50** (6), 1017–1022 (2010) [Russian] [*Comput. Math. Math. Phys.* **50** (6), 963–968 (2010)].

20. A. R. Mamatov, An algorithm for solving a two-person game with information transfer, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **46** (10), 1784–1789 (2006) [Russian] [*Comput. Math. Math. Phys.* **46** (10), 1699–1704 (2006)].

21. R. Gabasov, F. M. Kirillova, V. V. Alsevich, A. I. Kalinin, V. V. Krakhotko, and **N. S. Pavlyonok,** *Optimization Methods* (Chetyre Chetverti, Minsk, 2011) [Russian].

Akmal R. Mamatov

Received August 16, 2023
Revised January 17, 2024
Accepted March 22, 2024