ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 31 № 3 2024

Новосибирск
Издательство Института математики

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2024. Т. 31, № 3. С. 144–152

УДК 519.17 DOI: 10.33048/daio.2024.31.793

О МАКСИМАЛЬНОМ ЧИСЛЕ ОТКРЫТЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ В ГРАФАХ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ РЁБЕР

А. В. Пяткин

Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: `artem@math.nsc.ru`

Аннотация. Подмножество из трёх вершин, порождающее подграф ровно с двумя рёбрами, будем называть открытым треугольником (ОТ). Рассматривается задача поиска графов с максимальным числом ОТ. Доказано, что в классе графов, когда число рёбер превышает число вершин на фиксированную константу, такой граф единствен при достаточно большом числе вершин. Библиогр. 11.

Ключевые слова: открытый треугольник, индуцированный подграф, разреженный граф.

Введение

Известно [1–3], что для анализа сбалансированности социальной сети, её однородности, транзитивности и склонности к кластеризации необходимо изучить её триадный перечень — число различных ориентированных трёхвершинных подграфов, встречающихся в сети. Это обуславливает интерес к более общей задаче подсчёта количества заданных порождённых подграфов в графе [4–6], а также определения графов с наибольшим числом тех или иных подграфов как в ориентированном, так и в неориентированном случаях.

В неориентированном графе минимальным по числу вершин интересным случаем является подсчёт числа трёхвершинных подграфов. Так, в работах [7, 8] доказано, что

$$\max_G(\Delta_1(G)+\Delta_2(G)) = \begin{cases} t^3-t^2 & \text{при } n=2t,\\ 8t^3+2t^2 & \text{при } n=4t+1,\\ 8t^3+14t^2+8t+1 & \text{при } n=4t+3,\end{cases} \tag{1}$$

где $\Delta_i(G)$ — число индуцированных трёхвершинных подграфов с i рёбрами в неориентированном графе G.

В [9] доказана единственность графа G с максимальным $\Delta_2(G)$ при фиксированном числе вершин n, а именно $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$, причём имеет место формула

$$\max_G \Delta_2(G) = \begin{cases} t^3 - t^2 & \text{при } n = 2t, \\ t^3 + t(t-1)/2 & \text{при } n = 2t+1. \end{cases} \tag{2}$$

Заметим, что при чётных n значения в (1) и (2) совпадают.

В [9] была также поставлена задача максимизации $\Delta_2(G)$ в графах с фиксированным числом вершин n и рёбер m. Нетрудно заметить, что при $m < n$ максимум $\Delta_2(G)$ равен $(m^2 - m)/2$ и достигается на единственном графе $G = K_{1,m} \cup (n - m - 1)K_1$. В [10] получена полная характеризация графов с максимальным $\Delta_2(G)$ при $n = m$. Оказалось, что за исключением случая $n = m = 6$ максимальный граф всегда единственный. В частности, при $n \geqslant 7$ экстремальный граф получается добавлением одного ребра к звезде $K_{1,n-1}$ (при этом $\Delta_2(G) = (n^2 - 3n)/2$).

В настоящей статье исследуется случай $m = n + c$. Доказано, что при $n \geqslant 4c + 7$ экстремальный граф единствен: он получается добавлением всесмежной вершины к графу $(n - c - 3)K_1 \cup K_{1,c+1}$, при этом имеет место формула $\Delta_2(G) = (n^2 - 3n + c^2 - c)/2$.

В разд. 1 приводится конструкция графов с $\Delta_2 = (n^2 - 3n + c^2 - c)/2$, а также выводится ряд вспомогательных результатов. В разд. 2 доказывается основной результат работы, а именно, что при достаточно большом n данная конструкция оптимальна. В заключении даются некоторые комментарии к работе.

1. Предварительные результаты

Следуя терминологии работы [9], будем называть *открытым треугольником* (ОТ) простой неориентированный граф, состоящий из трёх вершин и двух рёбер, т. е. ОТ — это индуцированный путь длины 2. При этом центральную вершину этого пути — вершину степени 2 — будем называть *центром* ОТ. Тогда $\Delta_2(G)$ — это в точности число ОТ в графе G. Для произвольной вершины v через $N(v)$ обозначим множество её соседей и положим $N[v] = N(v) \cup \{v\}$.

Далее считаем, что G является графом на n вершинах с $m = n + c$ рёбрами, имеющим максимальное число ОТ. Также предполагаем, что n достаточно велико, а именно, имеет место неравенство $n \geqslant 4c + 7$. Сначала приведём пример графов, на которых достигается оценка $\Delta_2(G) = (n^2 - 3n + c^2 - c)/2$.

Лемма 1. *Если граф G имеет вершину v степени $n - 1$ (всесмежную вершину), то $G \setminus \{v\} = (n - c - 3)K_1 \cup K_{1,c+1}$ и имеет место формула $\Delta_2(G) = (n^2 - 3n + c^2 - c)/2$.*

Доказательство. Очевидно, что G содержит ровно $\binom{n-1}{2} - c - 1$ ОТ с центром v независимо от того, как расположены оставшиеся $c+1$ рёбер в $N(v)$. Поскольку $n-1 > c+1$, из упомянутого выше результата работы [9] следует, что максимум $\Delta_2(G \setminus \{v\})$ равен $\binom{c+1}{2}$ и достигается на графе $G \setminus \{v\} = (n-c-3)K_1 \cup K_{1,c+1}$. Имеем

$$\Delta_2(G) = \frac{(n-1)^2 - n + 1}{2} - c - 1 + \frac{(c+1)^2 - c - 1}{2} = (n^2 - 3n + c^2 - c)/2.$$

Лемма 1 доказана.

Нам также потребуются структурные свойства графов с максимальным числом ОТ, доказанные в [10].

Лемма 2 [10]**.** *Пусть G — граф с максимальным числом открытых треугольников, содержащий n вершин и m рёбер. Тогда*

1) *максимум одна компонента связности графа G может иметь рёбра;*

2) *если при $m \geqslant n$ граф G имеет k изолированных вершин и одну связную компоненту C, то либо степень всех вершин в C не меньше $k+2$, либо для некоторого единственного $d \leqslant k+1$ компонента C содержит одну или несколько вершин степени d, смежных с d попарно несмежными вершинами максимальной степени Δ, а степени всех остальных вершин в C (если они есть) лежат на отрезке $[k+2, \Delta-1]$.*

Рассмотрев в лемме 2 случай $k = 1$, получим простое

Следствие 1. *Если $m \geqslant n$ и граф G имеет хотя бы одну изолированную вершину, то G не может одновременно содержать вершин степеней 1 и 2.*

Наконец, докажем следующий вспомогательный результат.

Лемма 3. *Функция $f(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ от целочисленных переменных при ограничениях $\Delta \geqslant x_1 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0$ и $x_1 + \dots + x_n = 2m$ достигает максимума в точке $x_1^* = \dots = x_t^* = \Delta$, $x_{t+1}^* = s$, $x_{t+2}^* = \dots = x_n^* = 0$, где $0 \leqslant s \leqslant \Delta - 1$ и $\Delta t + s = 2m$.*

Доказательство. Рассмотрим оптимальное решение x^*. По условию $\Delta \geqslant x_1^* \geqslant \ldots \geqslant x_n^* \geqslant 0$. Выберем номер k так, что $x_k^* < \Delta$, но $x_i^* = \Delta$ для всех $i < k$. Аналогично пусть номер l выбран так, что $x_l^* > 0$, но $x_j^* = 0$ для всех $j > l$. Предположим, что $k < l$. Рассмотрим решение

$$x_i' = \begin{cases} x_i^* + 1 & \text{при } i = k, \\ x_i^* - 1 & \text{при } i = l, \\ x_i^* & \text{при } i \notin \{k, l\}. \end{cases}$$

Очевидно, что x' удовлетворяет требуемым ограничениям, при этом

$$f(x') - f(x^*) = (x_k^* + 1)^2 - x_k^{*2} + (x_l^* - 1)^2 - x_l^{*2} = 2(x_k^* - x_l^* + 1) > 0,$$

что противоречит оптимальности решения x^*. Значит, либо $k = l = t+1$ и $s = x^*_{t+1} > 0$, либо $k = t+1 > l = t$ и $s = 0$; в обоих случаях оптимальное решение имеет требуемый вид. Лемма 3 доказана.

2. Основной результат

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Если граф* $G = (V, E)$ *удовлетворяет условиям*

$$|V| = n \geqslant 4c + 7, \quad |E| = m = n + c,$$

то

$$\Delta_2(G) \leqslant (n^2 - 3n + c^2 - c)/2,$$

причём равенство достигается на единственном графе, описанном в лемме 1.

Доказательство. Пусть v — вершина максимальной степени Δ в G. Случай $\Delta = n - 1$ разобран в лемме 1. Достаточно доказать, что при всех $\Delta \leqslant n - 2$ имеет место неравенство $\Delta_2(G) < (n^2 - 3n + c^2 - c)/2$. Рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Пусть $\Delta \geqslant n - 5$. Сначала оценим сверху максимальное число ОТ в графе G. Очевидно, что граф G содержит не более $\binom{\Delta}{2}$ ОТ с центром v, причём равенство достигается только в случае, когда $N(v)$ независимо. Каждое из $m - \Delta$ рёбер, неинцидентных v, может входить ровно в один ОТ с вершиной v; значит, всего имеется не более $m - \Delta$ ОТ, в которых вершина v имеет степень 1, причём равенство достигается только в случае, когда каждое из $m - \Delta$ рёбер, неинцидентных v, имеет ровно один конец в $N(v)$. Наконец, $\Delta_2(G \setminus \{v\}) \leqslant \binom{m-\Delta}{2}$, причём равенство достигается только в случае, когда граф $G \setminus \{v\}$ содержит в качестве подграфа звезду $K_{1,m-\Delta}$. Заметим, что по выбору n имеем $|N(v)| = \Delta \geqslant n - 5 \geqslant 4c + 2 \geqslant c + 5 \geqslant m - \Delta$ при $c \geqslant 1$. Следовательно, максимально возможное число ОТ достигается на графе, в котором некоторая вершина $u \in V \setminus N[v]$ смежна ровно с $m - \Delta$ вершинами из $N(v)$ (тогда во всех трёх приведённых выше верхних оценках достигается равенство). Из следствия 1 получаем, что либо в G нет изолированных вершин (тогда $\Delta = n - 2$), либо в G нет вершин степени 1 (тогда $\Delta = (n + c)/2$).

В случае $\Delta = n - 2$ при $n \geqslant 4c + 7$ имеем

$$\Delta_2(G) = \binom{n-2}{2} + c + 2 + \binom{c+2}{2} = \\ = \frac{n^2 - 5n + c^2 + 5c + 12}{2} < \frac{n^2 - 3n + c^2 - c}{2}.$$

Если $\Delta = (n+\mathrm{c})/2$, то

$$\Delta_2(G) = 2\binom{(n+\mathrm{c})/2}{2} + \frac{n+c}{2} = \frac{n^2+2cn+c^2}{4} = \\ = \frac{n^2-3n+c^2-c}{2} - \frac{n^2-2cn+c^2-6n-2c}{4},$$

при этом

$$n^2-2cn+c^2-6n-2c = n(n-2c-6)+c^2-2c \geqslant (4c+7)(2c+1)+c^2-2c > 0.$$

В обоих вариантах получаем, что $\Delta_2(G) < (n^2-3n+c^2-c)/2$.

Случай 2. Пусть $n-6 \geqslant \Delta \geqslant 2n/5$. Оценим сверху $\Delta_2(G)$ так же, как и в предыдущем случае:

$$\Delta_2(G) = \binom{\Delta}{2} + n + c - \Delta + \binom{n+c-\Delta}{2} = \\ = \frac{n^2+c^2+2\Delta^2+2nc-2n\Delta-2c\Delta+n+c-2\Delta}{2} = \\ = \frac{n^2-3n+c^2-c}{2} - \frac{2n\Delta-2nc+2c\Delta-2\Delta^2-4n+2\Delta-2c}{2}.$$

Из условий $n-\Delta \geqslant 6$ и $\Delta \geqslant 2n/5$ вытекает, что

$$n\Delta - nc - 2n - \Delta^2 + c\Delta + \Delta - c = (n-\Delta)(\Delta-c-2) - \Delta - c \geqslant \\ \geqslant 5\Delta - 7c - 12 \geqslant 2n - 7c - 12 \geqslant c + 2 > 0$$

Значит, $\Delta_2(G) < (n^2-3n+c^2-c)/2$.

Случай 3. Пусть $\Delta \leqslant 2n/5$. Перенумеруем вершины графа в порядке невозрастания их степеней $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$. Тогда в графе G может существовать не более $\binom{d_i}{2}$ ОТ с центром в i-й вершине. Поскольку $d_1 + \cdots + d_n = 2m$, получаем оценку

$$\Delta_2(G) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} = \frac{f(d_1,\ldots,d_n)}{2} - m.$$

По лемме 3 имеем $f(d_1,\ldots,d_n) \leqslant t\Delta^2 + s^2 \leqslant \Delta(t\Delta+s) = 2m\Delta$, откуда

$$\Delta_2(G) \leqslant m(\Delta-1) \leqslant (n+c)\left(\frac{2n}{5}-1\right) = \frac{2n^2+2nc-5n-5c}{5} = \\ = \frac{n^2-3n+c^2-c}{2} - \frac{n^2-4nc-5n+5c^2+5c}{10}.$$

Однако $n^2-4nc-5n+5c^2+5c \geqslant 2(4c+7)+5c^2+5c > 0$, следовательно, $\Delta_2(G) < (n^2-3n+c^2-c)/2$. Теорема 1 доказана.

Отметим, что хотя в доказательстве теоремы 1 используется условие $c \geqslant 1$, её результат остаётся верным и при $c = 0$: как следует из результата работы [10], при $m = n \geqslant 7$ максимальное число ОТ, равное $(n^2 - 3n)/2$, достигается на единственном графе, получаемом добавлением ребра к звезде $K_{1,n-1}$, что совпадает с конструкцией из леммы 1 при $c = 0$.

Заключение

В работе исследуется проблема определения максимального числа ОТ в графах с n вершинами и $m = n + c$ рёбрами, а также описания графов, на которых достигается этот максимум. Доказано, что при $n \geqslant 4c + 7$ такой граф единствен и имеет место формула $\Delta_2(G) = (n^2 - 3n + c^2 - c)/2$. В качестве открытых проблем можно предложить следующие.

1) Можно ли улучшить нижнюю оценку на n, при которой данный результат остаётся верным (скажем, до $n \geqslant 3c + 7$)?

2) Найти максимальное число ОТ в графах с линейным относительно числа вершин числом рёбер (т. е. $m = an + b$) и описать оптимальные графы.

Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева (проект № FWNF–2022–0019). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. **Johnsen E. C.** Structure and process: Agreement models for friendship formation // Social Networks. 1986. V. 8. P. 257–306.
2. **Wasserman S., Faust K.** Social network analysis: Methods and applications. Cambridge, UK: Camb. Univ. Press, 1994. 852 p. DOI: 10.1017/cbo9780511815478.
3. **Moody J.** Matrix methods for calculating the triad census // Social Networks. 1998. V. 20. P. 291–299.
4. **Robins G.** A tutorial on methods for the modeling and analysis of social network data // J. Math. Psychol. 2013. V. 57. P. 261–274.
5. **Schank T., Wagner D.** Finding, counting and listing all triangles in large graphs, an experimental study // Experimental and efficient algorithms. Proc. 4th Int. Workshop (Santorini Island, Greece, May 10–13, 2005). Heidelberg: Springer, 2005. P. 606–609. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 3503). DOI: 10.1007/11427186_54.

6. **Milo R., Shen-Orr S., Itzkovitz S., Kashtan N., Chklovskii D., Alon U.** Network motifs: Simple building blocks of complex networks // Science. 2002. V. 298. P. 824–827.
7. **Goodman A. W.** On sets of acquaintances and strangers at any party // Am. Math. Mon. 1959. V. 66, No. 9. P. 778–783. DOI: 10.1080/00029890.1959.11989408.
8. **Sauve L.** On chromatic graphs // Am. Math. Mon. 1961. V. 68, No. 2. P. 107–111. DOI: 10.1080/00029890.1961.11989632.
9. **Pyatkin A., Lykhovyd E., Butenko S.** The maximum number of induced open triangles in graphs of a given order // Optim. Lett. 2018. V. 13, No. 8. P. 1927–1935. DOI: 10.1007/s11590-018-1330-2.
10. **Пяткин А. В., Чёрных О. И.** О максимальном числе открытых треугольников в графах с одинаковым числом вершин и рёбер // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2022. Т. 29, № 1. С. 46–55.
11. **Batagelj V., Mrvar A.** A subquadratic triad census algorithm for large sparse networks with small maximum degree // Soc. Networks. 2001. V. 23. P. 237–243.

Пяткин Артём Валерьевич

Статья поступила
25 января 2024 г.
После доработки —
20 февраля 2024 г.
Принята к публикации
22 марта 2024 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2024. Vol. 31, No. 3. P. 144–152

UDC 519.17 DOI: 10.33048/daio.2024.31.793

ON THE MAXIMUM NUMBER OF OPEN TRIANGLES IN GRAPHS WITH FEW EDGES

A. V. Pyatkin

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: `artem@math.nsc.ru`

Abstract. A three-vertex subset is called an open triangle (OT) if it induces a subgraph with exactly two edges. The problem of finding graphs with maximum number of OTs is considered. It is proved that, in case of sufficiently many vertices, such a graph is unique in the class of graphs with constant difference between the numbers of edges and vertices. Bibliogr. 11.

Keywords: open triangle, induced subgraph, sparse graph.

References

1. **E. C. Johnsen,** Structure and process: Agreement models for friendship formation, *Social Networks* **8**, 257–306 (1986).
2. **S. Wasserman** and **K. Faust,** *Social Network Analysis: Methods and Applications* (Camb. Univ. Press, Cambridge, UK, 1994), DOI: `10.1017/cbo9780511815478`.
3. **J. Moody,** Matrix methods for calculating the triad census, *Social Networks* **20**, 291–299 (1998).
4. **G. Robins,** A tutorial on methods for the modeling and analysis of social network data, *J. Math. Psychol.* **57**, 261–274 (2013).
5. **T. Schank** and **D. Wagner,** Finding, counting and listing all triangles in large graphs, an experimental study, in *Experimental and Efficient Algorithms* (Proc. 4th Int. Workshop, Santorini Island, Greece, May 10–13, 2005) (Springer, Heidelberg, 2005), pp. 606–609 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 3503), DOI: `10.1007/11427186_54`.
6. **R. Milo, S. Shen-Orr, S. Itzkovitz, N. Kashtan, D. Chklovskii,** and **U. Alon,** Network motifs: Simple building blocks of complex networks, *Science* **298**, 824–827 (2002).

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **18** (3), 516–520 (2024), DOI: 10.1134/S1990478924030128.

7. A. W. Goodman, On sets of acquaintances and strangers at any party, *Am. Math. Mon.* **66** (9), 778–783 (1959), DOI: `10.1080/00029890.1959.11989408`.

8. L. Sauve, On chromatic graphs, *Am. Math. Mon.* **68** (2), 107–111 (1961), DOI: `10.1080/00029890.1961.11989632`.

9. A. Pyatkin, E. Lykhovyd, and **S. Butenko,** The maximum number of induced open triangles in graphs of a given order, *Optim. Lett.* **13** (8), 1927–1935 (2018), DOI: `10.1007/s11590-018-1330-2`.

10. A. V. Pyatkin and **O. I. Chernykh,** On the maximum number of open triangles in graphs with the same number of vertices and edges, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **29** (1), 46–55 (2022) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **16** (1), 116–121 (2022)].

11. V. Batagelj and **A. Mrvar,** A subquadratic triad census algorithm for large sparse networks with small maximum degree, *Soc. Networks* **23**, 237–243 (2001).

Artyom V. Pyatkin

Received January 25, 2024
Revised February 20, 2024
Accepted March 22, 2024