ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 31 № 3 2024

Новосибирск
Издательство Института математики

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2024. Т. 31, № 3. С. 54–78

УДК 519.179.1+519.174.7 DOI: 10.33048/daio.2024.31.784

СОВЕРШЕННЫЕ РАСКРАСКИ ГИПЕРГРАФА ПОДМАТРИЦ

С. О. Бородин[a], *А. А. Тараненко*[b]

Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: [a]`s.borodin@g.nsu.ru`, [b]`taa@math.nsc.ru`

Аннотация. *Гиперграфом подматриц* $G_{n\times m}$ назовём гиперграф, вершинами которого являются элементы матрицы размера $n \times m$, а гиперрёбрами — все возможные подматрицы порядка 2. В настоящей работе рассматриваются совершенные раскраски гиперграфов $G_{n\times m}$ и условия на их параметры инцидентности. Предложено несколько конструкций совершенных раскрасок $G_{n\times m}$ и доказано, что матрицы инцидентности 2-схем являются совершенными раскрасками гиперграфа подматриц. Кроме того, описаны совершенные 2-раскраски гиперграфов $G_{2\times m}$ и $G_{3\times m}$. Ил. 1, библиогр. 12.

Ключевые слова: гиперграф, симметричная 2-схема, совершенная раскраска.

Введение

Совершенные раскраски неоднократно возникали под разными названиями. Одно из первых упоминаний, где они назывались «partition design», можно найти в книге Дельсарта [1]. В работе Годсила [2] применяется термин «equitable partitions», а в работах В. Г. Визинга [3] — «дистрибутивная раскраска». Термин «совершенная раскраска» впервые использован С. А. Пузыниной в [4].

Исследованиям совершенных раскрасок графов посвящено множество работ. Например, в [4–6] изучались совершенные раскраски графа бесконечной прямоугольной решётки. Совершенные раскраски графов Джонсона рассматривались в [7], совершенные раскраски циркулянтных графов — в [8].

Существенно менее изучены совершенные раскраски гиперграфов — обобщений графов, в которых ребром могут соединяться не только две вершины, но и любое подмножество вершин.

В [9] замечено, что совершенная раскраска гиперграфа эквивалентна двудольной совершенной раскраске его графа инцидентности. Взаимно однозначное соответствие между некоторыми комбинаторными схемами и специальными совершенными раскрасками гиперграфов установлено в [10].

Детальное исследование совершенных раскрасок гиперграфов выполнено в работе [11], в которой, в частности, обобщены основные результаты из теории совершенных раскраскок графов на гиперграфы. Кроме того, в ней введены многомерные матрицы параметров совершенной раскраски гиперграфов и исследованы их спектральные свойства.

Настоящая работа посвящена исследованию совершенных раскрасок одного семейства гиперграфов, которые будут называться гиперграфами подматриц. Вершинами этих гиперграфов являются элементы матрицы размера $n \times m$, а гиперрёбрами — все возможные подматрицы порядка два.

В разд. 1 приводится необходимая в дальнейшем терминология, определения совершенных раскрасок гиперграфов и полупараметров инцидентности, а также описываются некоторые их свойства.

В разд. 2 установлены соотношения между полупараметрами инцидентности совершенных 2-раскрасок, а также приводятся основные примеры совершенных раскрасок гиперграфа подматриц: блочные, раскраски линиями и конфигурационно однородные раскраски. Доказано, что блочные раскраски и раскраски линиями можно восстановить по полупараметрам инцидентности.

Далее, в разд. 3 доказано необходимое условие существования совершенных 2-раскрасок гиперграфа подматриц в терминах конфигураций пар строк и столбцов, откуда следует, что в любой совершенной 2-раскраске, отличной от раскраски линиями, строчные и столбцовые суммы совпадают. Доказано, что конфигурационно однородные совершенные 2-раскраски эквивалентны матрицам инцидентности 2-схем, и получены соотношения между их параметрами. Кроме того, приведены примеры не конфигурационно однородных совершенных раскрасок.

Разд. 4 посвящён построению совершенных 2-раскрасок гиперграфа подматриц с помощью произведения Кронекера из конфигурационно однородных раскрасок и многоцветных блочных совершенных раскрасок на основе совершенных раскрасок полных графов.

Наконец, в разд. 5 описаны совершенные 2-раскраски гиперграфов $G_{2\times m}$ и $G_{3\times m}$.

1. Определения и основные свойства

Гиперграфом G называется пара множеств (X, E), где X — конечное множество вершин, а $E \subseteq 2^X$ — множество гиперрёбер. Гиперграф G *d-однородный,* если каждое гиперребро состоит из d вершин, и *r-регулярный*, если каждая вершина содержится в r гиперрёбрах.

Гиперграф $G(X,E)$ можно представить в виде двудольного *графа инцидентности* (графа Леви), одна доля которого — это множество вершин X гиперграфа, а вторая доля — множество его гиперрёбер E, причём вершины x и e графа инцидентности соединены ребром тогда и только тогда, когда вершина x принадлежит гиперребру e в гиперграфе G.

Матрицей инцидентности B гиперграфа $G(X,E)$ называется $(0,1)$-матрица размера $|X|\times|E|$, в которой элемент b_{xe} равен 1 тогда и только тогда, когда $x\in e$. Заметим, что матрица инцидентности гиперграфа является матрицей смежности долей его графа инцидентности.

Раскраской вершин гиперграфа $G(X,E)$ в k цветов (*k-раскраской*) называется сюръективная функция $f\colon X\to\{0,\dots,k-1\}$. Каждой раскраске можно сопоставить *матрицу раскраски* P размера $|X|\times k$, элемент которой p_{xi} равен 1 тогда и только тогда, когда $f(x)=i$. Одноцветные раскраски (в которых все вершины покрашены в один цвет) тривиальны и в дальнейшем не рассматриваются.

Для выбранной раскраски f гиперграфа G и гиперребра e *цветовым составом гиперребра* назовём мультимножество цветов инцидентных ему вершин: $f(e)=\{f(x)\mid x\in e\}$. Каждой раскраске f гиперграфа G можно сопоставить *индуцированную раскраску* g его графа инцидентности, покрасив вершины x доли X в цвета $f(x)$, а вершины e доли E — в цвета $f(e)$.

Раскраску f гиперграфа G назовём *совершенной*, если цветовой состав гиперрёбер, инцидентных вершине цвета i, зависит только от цвета вершины, а не от выбора конкретной вершины этого цвета. В случае, когда гиперрёбра имеют мощность 2, имеем стандартное определение совершенной раскраски обыкновенного графа.

В [11] доказано, что раскраска f гиперграфа G совершенна тогда и только тогда, когда совершенна индуцированная раскраска g его графа инцидентности, а именно, верно равенство

$$\begin{bmatrix}0 & B\\ B^\top & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & P\\ R & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & P\\ R & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & W\\ V & 0\end{bmatrix}.$$

Здесь B — матрица инцидентности гиперграфа G, P и R — матрицы раскрасок вершин и гиперрёбер соответственно, а пара матриц (V,W) названа *параметрами инцидентности*. Элемент v_{ij} матрицы V равен числу гиперрёбер цвета j, инцидентных вершине цвета i, а w_{ji} равен числу вершин цвета i, содержащихся в гиперребре цвета j.

В данной работе будут рассматриваться только гиперграфы, множество вершин которых X есть множество элементов $(n\times m)$-матрицы, а множество гиперрёбер E — все её подматрицы порядка 2. Получившийся гиперграф обозначим $G_{n\times m}$ и назовём *гиперграфом подматриц*. Всюду далее предполагается, что $n,m\geqslant 2$.

Заметим, что каждое гиперребро $G_{n\times m}$ содержит ровно 4 вершины (т. е. $G_{n\times m}$ — 4-однородный гиперграф), всего имеется $\frac{1}{4}nm(n-1)(m-1)$ гиперрёбер, а степень каждой вершины $G_{n\times m}$ равна $r=(n-1)(m-1)$.

Раскраску f вершин гиперграфа $G_{n\times m}$ будем представлять в виде $(n\times m)$-матрицы A с элементами $a_{ij}=f(x_{ij})$. Строки и столбцы этой матрицы будем называть *линиями.* Отметим, что перестановки строк и столбцов не влияют на свойство раскраски быть совершенной.

Полупараметрами инцидентности совершенной k-раскраски гиперграфа $G_{n\times m}$ назовём матрицу V размера $k\times L$ такую, что элемент v_{ij} равен числу гиперрёбер цветового состава j, инцидентных вершине цвета i. Здесь L — число всех возможных цветовых составов гиперрёбер $G_{n\times m}$, равное

$$L=k+k(k-1)+\binom{k}{2}+k\binom{k-1}{2}+\binom{k}{4}.$$

Совершенная 2-раскраска $f\colon X\to\{0,1\}$ вершин гиперграфа $G_{n\times m}$ имеет матрицу полупараметров инцидентности V размеров 2×5. При этом под цветовым составом (или просто цветом) $j\in\{0,1,2,3,4\}$ гиперребра будем понимать число вершин цвета 1 в нём. Отметим, что $v_{04}=v_{10}=0$.

Кроме того, для любой совершенной k-раскраски гиперграфа $G_{n\times m}$ сумма элементов в любой строке матрицы полупараметров инцидентности V равна степени гиперграфа G:

$$\sum_{j=0}^{L-1} v_{ij}=(n-1)(m-1),\quad i\in\overline{0,k-1}.$$

Для 2-раскрасок инверсия цветов вершин $f(x)\to f(x)\oplus 1$ сохраняет свойство раскраски быть совершенной, при этом полупараметры инцидентности изменяются по правилу $v_{i,j}\to v_{1-i,4-j}$. Если раскраска $G_{n\times m}$ была совершенной, то транспонированная раскраска гиперграфа $G_{m\times n}$ тоже будет совершенной.

2. Соотношения на полупараметры инцидентности совершенных 2-раскрасок $G_{n\times m}$

Обозначим через n_i, $i\in\{0,1\}$, число вершин цвета i в 2-раскраске гиперграфа $G_{n\times m}$.

Утверждение 1. *Пусть V — полупараметры инцидентности совершенной 2-раскраски $G_{n\times m}$. Тогда*

1) $v_{02}\neq 0$, $v_{12}\neq 0$ *и* $\frac{v_{02}}{v_{12}}=\frac{n_1}{n_0}$;

2) v_{01} *и* v_{11} *одновременно равны или не равны* 0; *если не равны, то* $\frac{v_{01}}{v_{11}}=\frac{3n_1}{n_0}$;

3) v_{03} *и* v_{13} *одновременно равны или не равны* 0; *если не равны, то* $\frac{v_{03}}{v_{13}} = \frac{n_1}{3n_0}$.

Доказательство. 1) В силу того, что раскраска не одноцветная, найдётся линия, содержащая и 0, и 1. Если $v_{02} = 0$, то все гиперрёбра, содержащие 0 и 1, имеют либо цвет 1, либо цвет 3. В таком случае имеем раскраску, в которой все строки (или столбцы), кроме одной, одноцветные, но которая не будет совершенной; противоречие.

Посчитаем число всех гиперрёбер цвета 2 в нашей совершенной 2-раскраске $G_{n\times m}$. Поскольку они содержат равно по две вершины каждого цвета, их число равно $\frac{1}{2}n_0v_{02} = \frac{1}{2}n_1v_{12}$, откуда $\frac{v_{02}}{v_{12}} = \frac{n_1}{n_0}$.

2) Заметим, что число гиперрёбер цвета 1 в совершенной 2-раскраске равно $\frac{1}{3}n_0v_{01} = n_1v_{11}$, откуда $\frac{v_{01}}{v_{11}} = \frac{3n_1}{n_0}$.

3) Аналогично число гиперрёбер цвета 3 равно $n_0v_{03} = \frac{1}{3}n_1v_{13}$, откуда $\frac{v_{03}}{v_{13}} = \frac{n_1}{3n_0}$. Утверждение 1 доказано.

Следствие 1. *Для совершенной 2-раскраски гиперграфа* $G_{n\times m}$

$$n_0 = \frac{v_{12}}{v_{12}+v_{02}}nm, \quad n_1 = \frac{v_{02}}{v_{12}+v_{02}}nm.$$

Доказательство следует из равенств $\frac{n_1}{n_0} = \frac{v_{02}}{v_{12}}$ и $n_0 + n_1 = mn$.

Теорема 1. *Для полупараметров инцидентности совершенной 2-раскраски* $G_{n\times m}$ *выполнены неравенства*

$$v_{11} \leqslant v_{01} + v_{00}, \quad v_{03} \leqslant v_{13} + v_{14}.$$

Доказательство. Для $v_{03} = v_{11} = 0$ соотношения, очевидно, выполнены. Без ограничения общности докажем первое неравенство, так как второе получается из него инверсией цветов совершенной раскраски.

Пусть $v_{11} \neq 0$. Приведём раскраску к виду

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & & A & & & B & & & * & & & * & \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & & C & & & D & & & * & & & * & \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & & * & & & * & & & * & & & * & \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & & * & & & * & & & * & & & * & \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ — столбцы подходящих размеров. Обозначим через N суммарное число нулей в подматрицах A, B, C и D. Посчитав число гиперрёбер цвета 1, содержащих единицу из первой строки и первого столбца, получаем $v_{11} = N$.

В свою очередь, для нуля из первой строки второго столбца нули в этих областях дают вклад в полупараметры инцидентности v_{01} и v_{00}, однако, не обязательно исчерпывают все гиперрёбра цветов 0 и 1, инцидентные рассматриваемой вершине цвета 0. Теорема 1 доказана.

Утверждение 2. *Пусть f — совершенная 2-раскраска $G_{n\times m}$, в которой число вершин цвета $i \in \{0,1\}$ равно n_i. Если $3n_1 \leqslant n_0$, то $v_{14} < v_{00}$.*

Доказательство. Поскольку в каждой строке матрицы полупараметров сумма элементов равна степени гиперграфа $G_{n\times m}$, то

$$v_{00} + v_{01} + v_{02} + v_{03} = v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{14}.$$

Из утверждения 1 следует, что $v_{01} = \frac{3n_1}{n_0}v_{11}$, $v_{02} = \frac{n_1}{n_0}v_{12}$ и $v_{03} = \frac{n_1}{3n_0}v_{13}$, поэтому

$$v_{00} - v_{14} = v_{11}\left(1 - \frac{3n_1}{n_0}\right) + v_{12}\left(1 - \frac{n_1}{n_0}\right) + v_{13}\left(1 - \frac{n_1}{3n_0}\right) > 0.$$

Утверждение 2 доказано.

Определение 1. Раскраску гиперграфа $G_{n\times m}$ назовём *раскраской линиями,* если она состоит из одноцветных строк или столбцов.

Раскраску $G_{n\times m}$ назовём *блочной,* если перестановками строк и столбцов её можно привести к виду

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ — прямоугольные матрицы одинаковых размеров.

Утверждение 3. *Все раскраски линиями и блочные раскраски совершенные. Раскраска линиями гиперграфа $G_{n\times m}$, в которой t столбцов окрашены в цвет 0, а $m-t$ столбцов — в цвет 1, имеет полупараметры инцидентности*

$$\begin{bmatrix} (n-1)(t-1) & 0 & (n-1)(m-t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (n-1)t & 0 & (n-1)(m-t-1) \end{bmatrix}.$$

Блочная раскраска $G_{n\times m}$ существует, только если n и m чётны, и имеет полупараметры инцидентности

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{m}{2}-1\right) & 0 & \frac{3}{4}nm - \frac{n+m}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4}nm - \frac{n+m}{2} & 0 & \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{m}{2}-1\right) \end{bmatrix}.$$

Более того, если совершенная 2-раскраска гиперграфа $G_{n\times m}$ имеет полупараметры инцидентности вида

$$\begin{bmatrix} a & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 & d \end{bmatrix},$$

то она либо является раскраской линиями, либо блочной раскраской.

Доказательство. Заметим, что ввиду отсутствия гиперрёбер нечётного цвета любая пара строк (пара столбцов) в раскраске либо совпадает, либо одна строка (столбец) получается инверсией цветов второй строки (столбца).

Таким образом, перестановками строк и столбцов раскраска (транспонированная раскраска) приводится к одному из двух видов:

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ — прямоугольные матрицы одинаковых размеров. В первом случае имеем совершенную раскраску линиями. Во втором случае можно проверить, что если блоки из нулей и единиц имеют не одинаковый размер, то раскраска не совершенная. Совершенность данных раскрасок и их полупараметры инцидентности находятся непосредственно. Утверждение 3 доказано.

Следствие 2. *Если в совершенной* 2*-раскраске гиперграфа* $G_{n\times m}$, *где* $n > 2$ *или* $m > 2$, *есть одноцветная строка или столбец, то она является раскраской линиями.*

Доказательство. Без ограничения общности предположим, что все элементы в первой строке раскраски имеют цвет 0. Заметим, что через любой нуль этой строки не проходят гиперрёбра цвета 3, поэтому $v_{03} = v_{13} = 0$, где v_{ij} — элементы матрицы полупараметров V.

Если рассматриваемая раскраска — не раскраска линиями, то найдётся строка, в которой есть вершины как цвета 0, так и цвета 1. Выберем среди них такую строку, что она содержит минимальное число t нулей, $t \neq 0$. Без ограничения общности можно считать, что это вторая строка раскраски. Переставив строки и столбцы, приведём раскраску к виду

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \mathbf{0} & & A & & & B & \\ \mathbf{1} & & C & & & D & \end{bmatrix}.$$

Посчитаем число гиперрёбер v_{00} цвета 0, проходящих через вершину цвета 0. Для элемента, находящегося в первой строке и в первом столбце, это число равно $t - 1 + \alpha + \beta$, где α и β — число нулей в областях A и B соответственно. С другой стороны, для нуля, находящегося во второй строке и первом столбце, число гиперрёбер цвета 0 равно $t - 1 + \alpha$. Отсюда следует, что $\beta = 0$ и подматрица B заполнена единицами.

Так как вторая строка содержит минимальное отличное от нуля число t нулей в строках, то либо $t = 1$ и в подматрице A нет элементов, либо вся подматрица A заполнена нулями. В первом случае в подматрице C тоже нет элементов, а условие $v_{03} = v_{13} = 0$ влечёт, что подматрица D полностью заполнена нулями. Тогда несложно видеть, что получившаяся раскраска не будет совершенной, так как при $m \geqslant 3$ одни нулевые элементы будут инцидентны гиперрёбрам цвета 0, а другие — нет, а все совершенные раскраски $G_{2\times m}$ и $G_{n\times 2}$ описаны в утверждении 5.

Предположим, что реализуется второй вариант и подматрица A полностью заполнена нулями. Снова из условия $v_{03} = v_{13} = 0$ следует, что подматрица D полностью заполнена нулями. Заметим, что в таком случае число v_{02} гиперрёбер цвета 2, инцидентных элементу в первой строке и в первом столбце, равно числу единиц в подматрице C. С другой стороны, для нуля из второй строки и первого столбца инцидентных ему гиперрёбер цвета 2 будет больше, чем число единиц в подматрице C, так как дополнительно возникнут гиперрёбра, использующие единицы из подматрицы B. Полученное противоречие завершает доказательство. Следствие 2 доказано.

3. Конфигурации линий и конфигурационно однородные раскраски

Определение 2. Будем говорить, что различные строки A_i и A_j в 2-раскраске гиперграфа $G_{n\times m}$ образуют *конфигурацию* $[A_i, A_j] = \left(t_{ij}^{00}, t_{ij}^{01}, t_{ij}^{10}, t_{ij}^{11}\right)$, если матрица, составленная из этой пары строк, содержит из t_{ij}^{00} столбцов $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, t_{ij}^{01} столбцов $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$, t_{ij}^{10} столбцов $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ и t_{ij}^{11} столбцов $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

Аналогично определяется конфигурация $[A^i, A^j]$ для пары различных столбцов A^i и A^j раскраски.

Пример 1. Раскраска с конфигурацией строк $[A_1, A_2] = (2, 3, 3, 3)$:

$$\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0&0&0&1&1&1&1&1&1\\0&0&1&1&1&0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}.$$

3.1. Необходимое условие существования совершенных 2-раскрасок в терминах конфигураций.

Теорема 2. *Пусть f — совершенная 2-раскраска гиперграфа $G_{n\times m}$, отличная от раскраски линиями, $n, m \geqslant 3$. Тогда для конфигурации двух строк (столбцов) с номерами i и j, $i \neq j$, справедливо равенство $t_{ij}^{01} = t_{ij}^{10}$.*

Доказательство проведём для конфигурации строк, для столбцов доказательство аналогично.

Рассмотрим сначала две строки, для которых $t_{ij}^{00} \neq 0$ (случай $t_{ij}^{11} \neq 0$ рассматривается аналогично).

Так как рассматриваемая раскраска не является раскраской линиями, по следствию 2 она не содержит одноцветных линий, а значит, перестановками строк и столбцов её можно привести к виду

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \mathbf{0} & & A & & & B & & & C & & & D & \\ \mathbf{1} & & A' & & & B' & & & C' & & & D' & \end{bmatrix}.$$

Заметим, что число столбцов в матрицах A и A' равно t_{12}^{00}, в матрицах B и B' — t_{12}^{11}, в C и C' — t_{12}^{01}, а в D и D' — t_{12}^{10}.

Без ограничения общности докажем, что для конфигураций первых двух строк выполнено $t_{12}^{01} = t_{12}^{10}$.

Обозначим через $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i, \alpha'_i, \beta'_i, \gamma'_i, \delta'_i$ число вершин цвета $i \in \{0, 1\}$ в матрицах $A, B, C, D, A', B', C', D'$ соответственно.

Так как раскраска совершенная, число гиперрёбер цвета 0, проходящих через нули в первом столбце и первой или второй строке, одинаково:

$$t_{12}^{00} + \alpha_0 + \gamma_0 = t_{12}^{00} + \alpha_0 + \delta_0.$$

Отсюда заключаем, что $\gamma_0 = \delta_0$.

Аналогично число гиперрёбер цвета 3, проходящих через нули в первом столбце и первой или второй строке, совпадает:

$$\beta'_1 + \delta'_1 = \beta'_1 + \gamma'_1,$$

откуда $\gamma'_1 = \delta'_1$.

Посчитаем и приравняем теперь число гиперрёбер цвета 1, проходящих через нули в первом столбце и первой и второй строке:

$$t_{12}^{01} + t_{12}^{10} + \alpha_1 + \beta_0 + \gamma_1 + \delta_0 + \alpha'_0 + \gamma'_0 = t_{12}^{01} + t_{12}^{10} + \alpha_1 + \beta_0 + \gamma_0 + \delta_1 + \alpha'_0 + \delta'_0,$$

откуда

$$\gamma_1 + \delta_0 + \gamma'_0 = \gamma_0 + \delta_1 + \delta'_0.$$

Используя соотношения $\gamma_0 = \delta_0$ и $\gamma'_1 = \delta'_1$, меняем в этом равенстве γ_0 и δ_0 местами, добавляем γ'_1 в левую часть, а δ'_1 — в правую:

$$\gamma_1 + \gamma_0 + \gamma'_0 + \gamma'_1 = \gamma_0 + \gamma_1 + \delta'_0 + \delta'_1.$$

Другими словами, суммарное число элементов в матрицах C и C' равно суммарному числу элементов в матрицах D и D', что ввиду равенства числа строк этих матриц возможно лишь при совпадении числа их столбцов, т. е. $t_{12}^{01} = t_{12}^{10}$.

Предположим теперь, что для конфигурации строк i и j выполнено $t_{ij}^{00} = t_{ij}^{11} = 0$ и существует строка $k \notin \{i, j\}$ такая, что подматрица, образованная этими тремя строками, имеет вид

$$\begin{array}{c}i\\j\\k\end{array}\begin{bmatrix}0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\end{bmatrix}.$$

Тогда t^{00}_{ik} или t^{11}_{ik} не равно нулю и t^{00}_{jk} или t^{11}_{jk} не равно нулю. Из предыдущих рассуждений следует, что $t^{01}_{ik} = t^{10}_{ik}$ и $t^{01}_{jk} = t^{10}_{jk}$. Остаётся только заметить, что $t^{01}_{ij} = t^{01}_{ik} + t^{10}_{jk}$ и $t^{10}_{ij} = t^{10}_{ik} + t^{01}_{jk}$, откуда $t^{01}_{ij} = t^{10}_{ij}$.

Наконец, если не существует строки, отличной от строк i или j, то либо $n = 2$, либо все строки совпадают со строками i и j. Первый случай исключается условием $n \geqslant 3$, описание совершенных 2-раскрасок $G_{2\times m}$ будет отдельно выполнено в утверждении 5. Во втором случае получается блочная раскраска, все возможные параметры которой описаны в утверждении 3. Теорема 2 доказана.

Следствие 3. *Любая совершенная 2-раскраска гиперграфа $G_{n\times m}$, отличная от раскраски линиями, имеет одинаковое число единиц в каждой строке и в каждом столбце.*

Доказательство проведём для строк: для столбцов аналогично.

Так как раскраска отлична от раскраски линиями, по теореме 2 для конфигурации строк с номерами 1 и $j \neq 1$ верно $t^{01}_{1j} = t^{10}_{1j}$. Заметим, что число единиц в строке с номером j равно $t^{11}_{1j} + t^{01}_{1j} = t^{11}_{1j} + t^{10}_{1j}$, что совпадает с числом единиц в первой строке. Таким образом, все строки совершенной раскраски содержат одинаковое число единиц. Следствие 3 доказано.

Замечание 1. Существуют совершенные 2-раскраски $G_{n\times m}$ (пример 3), в которых строки находятся разных конфигурациях, т. е. $t^{01}_{ij} \neq t^{10}_{ik}$ для различных i, j, k.

Замечание 2. В случае k-раскраски, где $k \geqslant 3$, условие вида $t^{01}_{ij} = t^{10}_{ij}$ не является необходимым (пример 2).

3.2. Конфигурационно однородные раскраски.

Определение 3. Раскраску гиперграфа $G_{n\times m}$ назовём *конфигурационно однородной по строкам*, если для любых её конфигураций строк выполнено $[A_i, A_j] = [A_k, A_l]$, где $i, j, k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$, $k \neq l$.

Аналогично определяется конфигурационная однородность по столбцам.

Назовём раскраску *конфигурационно однородной,* если она конфигурационно однородна и по строкам, и по столбцам, но, возможно, с различными конфигурациями.

Так как по теореме 2 для любых двух строк 2-раскрасок выполнено $t_{ij}^{01} = t_{ij}^{10}$, можно считать, что конфигурация строк совершенных конфигурационно однородных по строкам 2-раскрасок задаётся тройкой чисел, которую для удобства будем записывать как (t_{00}, t_{01}, t_{11}).

Приведём описание конфигурационно однородных по строкам совершенных 2-раскрасок и свяжем их конфигурации строк с полупараметрами инцидентности. Для конфигурационно однородных совершенных раскрасок в большее число цветов утверждение аналогично, но не будет приведено в силу своей громоздкости.

Теорема 3. *Конфигурационно однородная по строкам 2-раскраска гиперграфа $G_{n\times m}$ с числом единиц в каждом столбце, равным r, совершенная. Кроме того, если (t_{00}, t_{01}, t_{11}) — конфигурация строк такой совершенной раскраски, то $t_{01}^2 > t_{00}t_{11}$ и число строк n, величина r и полупараметры инцидентности однозначно выражаются через t_{00}, t_{01} и t_{11}.*

Доказательство. Из конфигурационной однородности и равенства числа единиц в столбцах следует, что каждая вершина цвета i инцидентна одному и тому же числу гиперрёбер цвета j. При этом полупараметры инцидентности задаются следующим образом:

$$v_{00} = (t_{00}-1)(n-r-1), \quad v_{01} = 2t_{01}(n-r-1) + rt_{00},$$
$$v_{02} = (n-r-1)t_{11} + r(2t_{01}-1), \quad v_{03} = rt_{11},$$
$$v_{11} = (n-r)t_{00}, \quad v_{12} = (r-1)t_{00} + (n-r)(2t_{01}-1),$$
$$v_{13} = 2(r-1)t_{01} + (n-r)t_{11}, \quad v_{14} = (r-1)(t_{11}-1).$$

Заметим, что отношение $\frac{n_1}{n_0}$ числа вершин цвета 1 к числу вершин цвета 0 в раскраске равно $\frac{r}{n-r}$. По утверждению 1 имеем

$$\frac{v_{01}}{v_{11}} = \frac{3r}{n-r}, \quad \frac{v_{03}}{v_{13}} = \frac{r}{3(n-r)}.$$

Выражая из этих двух равенств r, находим

$$r = \frac{t_{01}}{t_{00}+t_{01}}(n-1) = \frac{nt_{11}+t_{01}}{t_{11}+t_{01}}.$$

Решая последнее равенство относительно n и используя соотношение $m = t_{00} + 2t_{01} + t_{11}$, получаем

$$n = \frac{t_{01}}{t_{01}^2 - t_{00}t_{11}} m,$$

откуда, в частности, следует, что $t_{01}^2 > t_{00}t_{11}$. Осталось выразить все оставшиеся полупараметры совершенной раскраски через t_{00}, t_{01} и t_{11}:

$$r = \frac{t_{01}^2 + t_{01}t_{11}}{t_{01}^2 - t_{00}t_{11}},$$

$$v_{00} = \frac{t_{00}(t_{00}-1)(t_{01}+t_{11})}{t_{01}^2 - t_{00}t_{11}}, \quad v_{01} = \frac{3t_{00}t_{01}(t_{01}+t_{11})}{t_{01}^2 - t_{00}t_{11}},$$
$$v_{02} = \frac{(t_{01}+t_{11})\bigl(2t_{01}^2 + t_{00}t_{11} - t_{01}\bigr)}{t_{01}^2 - t_{00}t_{11}}, \quad v_{03} = \frac{t_{01}t_{11}(t_{01}+t_{11})}{t_{01}^2 - t_{00}t_{11}},$$
$$v_{11} = \frac{t_{00}t_{01}(t_{00}+t_{01})}{t_{01}^2 - t_{00}t_{11}}, \quad v_{12} = \frac{(t_{00}+t_{01})\bigl(2t_{01}^2 + t_{00}t_{11} - t_{01}\bigr)}{t_{01}^2 - t_{00}t_{11}},$$
$$v_{13} = \frac{3t_{01}t_{11}(t_{00}+t_{01})}{t_{01}^2 - t_{00}t_{11}}, \quad v_{14} = \frac{t_{11}(t_{11}-1)(t_{00}+t_{01})}{t_{01}^2 - t_{00}t_{11}}.$$

Теорема 3 доказана.

Замечание 3. Целочисленность r и полупараметров инцидентности накладывает дополнительные условия на конфигурации строк совершенных конфигурационно однородных по строкам 2-раскрасок.

Замечание 4. Существуют не конфигурационно однородные совершенные раскраски, как двуцветные, так и многоцветные. Примером таких 2-раскрасок служат блочные раскраски, а многоцветных — раскраски, полученные конструкцией из п. 4.2 и объединением подходящих цветов (под объединением цветов подразумевается перекрашивание вершин этих цветов в новый цвет).

Пример 2. Совершенная, но не конфигурационно однородная 3-раскраска:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Приведём также бесконечную серию не конфигурационно однородных совершенных 2-раскрасок.

Пример 3. Пусть $k \geqslant 2$. Рассмотрим 2-раскраски гиперграфа $G_{2k\times k^2}$ вида

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ & I & & & I & & \dots & & I & \end{bmatrix},$$

где каждая группа столбцов имеет ширину k, число таких групп равно k, а I — единичная матрица порядка k.

Заметим, что для различных $1 \leqslant i, j \leqslant 2k$ имеем конфигурацию

$$[A_i, A_j] = \begin{cases} (k(k-2), k, 0), & \text{если } 1 \leqslant i, j \leqslant k \\ & \text{или } k+1 \leqslant i, j \leqslant 2k, \\ ((k-1)^2, k-1, 1), & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant k,\ k+1 \leqslant j \leqslant 2k \\ & \text{или } k+1 \leqslant i \leqslant 2k,\ 1 \leqslant j \leqslant k. \end{cases}$$

Полупараметры инцидентности раскраски равны

$$\begin{bmatrix} (k-2)(2k^2-3k-1) & 3(2k^2-4k+1) & 5(k-1) & 1 & 0 \\ 0 & (k-1)(2k^2-4k+1) & 5(k-1)^2 & 3(k-1) & 0 \end{bmatrix}.$$

3.3. Комбинаторные схемы как конфигурационно однородные раскраски.

Определение 4. 2-(v, k, λ)-*Схемой* называется множество блоков B, в котором каждый блок есть k-элементное подмножество множества точек X, $|X| = v$, причём любая пара различных точек содержится ровно в λ блоках. Число блоков в 2-схеме обозначается через b, а число блоков, содержащих фиксированную точку из X, — через r. Схема может содержать кратные блоки, поэтому, говоря общо, B — мультимножество. Тройку чисел (v, k, λ) будем называть *параметрами* 2-схемы.

Для 2-схем с параметрами (v, k, λ) числа r и b определяются соотношениями

$$r = \lambda \frac{v-1}{k-1}, \quad b = \lambda \frac{v(v-1)}{k(k-1)}.$$

Определение 5. *Матрицей инцидентности* 2-(v, k, λ)-схемы называется матрица A размера $v \times b$, строки и столбцы которой занумерованы точками из X и блоками из B соответственно, при этом $a_{ij} = 1$, если точка i принадлежит блоку j, и $a_{ij} = 0$ иначе.

Теорема 4. *Матрица инцидентности* 2-(v, k, λ)-*схемы соответствует совершенной конфигурационно однородной по строкам* 2-*раскраске гиперграфа* $G_{v \times b}$ *с конфигурацией строк*

$$\Big(\lambda \frac{(v-k)(v-k-1)}{k(k-1)}, \lambda \frac{v-k}{k-1}, \lambda\Big).$$

Более того, совершенные конфигурационно однородные по строкам 2-*раскраски гиперграфов подматриц (отличные от раскрасок линиями) находятся во взаимно однозначном соответствии с матрицами инцидентности* 2-*схем.*

Доказательство. Пусть имеется совершенная раскраска гиперграфа $G_{n \times m}$, конфигурационно однородная по строкам с конфигурацией строк (t_{00}, t_{01}, t_{11}) и отличная от раскраски линиями. Представим её как матрицу инцидентности точек из некоторого множества X, $|X| = n$, и блоков из некоторого множества B, $|B| = m$. Пусть строки матрицы занумерованы точками из X, а столбцы — блоками из B. Покажем, что B — это 2-схема.

По следствию 3 все столбцы раскраски содержат одинаковое число единиц, которое обозначим через k. Заметим, что пара различных точек i и j принадлежит t_{ij}^{11} блокам, поэтому из конфигурационной однородности следует, что любая пара различных точек принадлежит ровно t_{11} блокам, а значит, B является 2-схемой.

Докажем соответствие в обратную сторону. По определению матрица A инцидентности 2-схемы имеет размер $v \times b$, каждый её столбец содержит k единиц, а строка — r единиц.

Пусть $[A_i, A_j] = \left(t_{ij}^{00}, t_{ij}^{01}, t_{ij}^{11}\right)$ — конфигурации строк с номерами i и j. Так как любые точки из множества X принадлежат ровно λ блокам, для любых i и j имеем $t_{ij}^{11} = \lambda$. Далее, поскольку в каждой строке матрицы A содержится ровно r единиц, то $t_{ij}^{01} = r - \lambda = \lambda\frac{v-k}{k-1}$ для всех i и j. Отсюда $t_{ij}^{00} = b - 2(r-\lambda) - \lambda = \lambda\frac{(v-k)(v-k-1)}{k(k-1)}$.

Таким образом, матрица инцидентности A является конфигурационно однородной по строкам раскраской с одинаковым числом единиц в каждом столбце, а значит, по теореме 3 она будет совершенной. Теорема 4 доказана.

Из доказательства теоремы 3 также получаем

Следствие 4. *Матрица инцидентности* 2-(v, k, λ)*-схемы является совершенной* 2*-раскраской гиперграфа* $G_{v\times b}$ *с полупараметрами инцидентности*

$$v_{00} = (v-k-1)\left(\lambda\frac{(v-k)(v-k-1)}{k(k-1)} - 1\right),$$
$$v_{01} = 3\lambda\frac{(v-k)(v-k-1)}{k-1},$$
$$v_{02} = \frac{1}{k-1}(3\lambda k(v-k) - \lambda(v-1) - k(k-1)),$$
$$v_{03} = \lambda k, \quad v_{11} = \lambda\frac{(v-k)^2(v-k-1)}{k(k-1)},$$
$$v_{12} = \frac{v-k}{k(k-1)}(3\lambda k(v-k) - \lambda(v-1) - k(k-1)),$$
$$v_{13} = 3\lambda(v-k), \quad v_{14} = (\lambda-1)(k-1).$$

Замечание 5. Матрица инцидентности 2-схемы не обязательно конфигурационно однородна по столбцам, что показывает пример ниже.

Пример 4. Матрица инцидентности 2-схемы с параметрами $(6, 3, 2)$ имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Важным частным случаем 2-схем являются *симметричные* 2-схемы, в которых число блоков b совпадает с числом точек v.

Утверждение 4. *Матрица инцидентности симметричной 2-(v, k, λ)-схемы является конфигурационно однородной по строкам и столбцам совершенной 2-раскраской гиперграфа $G_{v\times v}$, строки и столбцы которой имеют конфигурацию $(v-2k+\lambda, k-\lambda, \lambda)$, а полупараметры инцидентности равны*

$$\begin{gathered} v_{00} = (v-k-1)(v-2k+\lambda-1), \\ v_{01} = k(v-2k+\lambda) + 2(v-k-1)(k-\lambda), \\ v_{02} = \lambda(v-k-1) + k(2k-2\lambda-1), \quad v_{03} = \lambda k, \\ v_{11} = (v-k)(v-2k+\lambda), \\ v_{12} = (k-1)(v-2k+\lambda) + (v-k)(2k-2\lambda-1), \\ v_{13} = 2(k-1)(k-\lambda) + \lambda(v-k), \quad v_{14} = (\lambda-1)(k-1). \end{gathered}$$

Доказательство. Совершенность раскраски и конфигурационная однородность по строкам напрямую следуют из теоремы 4, вид конфигураций линий и конфигурационная однородность по столбцам следуют из того, что в симметричных 2-схемах любая пара блоков имеет одинаковое число λ общих точек. Следствие 4 доказано.

Пример 5. Матрица инцидентности симметричной 2-схемы с параметрами $(7, 3, 1)$ представляет собой совершенную 2-раскраску гиперграфа $G_{7\times 7}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

с конфигурациями линий $(2,2,1)$. Полупараметры инцидентности такой 2-раскраски имеют вид

$$\begin{bmatrix} 3 & 18 & 12 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 16 & 12 & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим несколько примеров симметричных 2-схем и найдём их параметры как совершенных раскрасок. Начнём с вырожденной схемы, матрица инцидентности которой представляет собой диагональную матрицу.

Пример 6. Единичная матрица I порядка n является конфигурационно однородной совершенной 2-раскраской $G_{n\times n}$ с конфигурациями линий $(n-2,1,0)$ и полупараметрами инцидентности

$$\begin{bmatrix} (n-2)(n-3) & 3(n-2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (n-1)(n-2) & n-1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Определение 6. *Матрицей Адамара* порядка n называется квадратная матрица H размера $n\times n$ с элементами 1 и -1, удовлетворяющая соотношению $HH^\top = nI$, где $H^\top$ — транспонированная матрица H, а I — единичная матрица порядка n.

Приведём несколько хорошо известных свойств матриц Адамара, которые можно найти, например, в [12].

Матрицы Адамара могут существовать только для порядков $n=4k$. Любую матрицу Адамара перестановками строк и столбцов, а также умножением их на -1 можно привести к стандартной форме, в которой первая строка и первый столбец состоят из 1.

Если из матрицы Адамара порядка $4k$, находящейся в стандартной форме, удалить первую строку и первый столбец и заменить все вхождения -1 на 0, то получится $(0,1)$-матрица H', которая будет матрицей инцидентности симметричной 2-схемы с параметрами $(4k-1, 2k-1, k-1)$. Такая схема называется называется 2-*схемой Адамара.*

По утверждению 4 2-схема Адамара, полученная из матрицы Адамара порядка $4k$, даёт пример совершенной 2-раскраски $G_{(4k-1)\times(4k-1)}$ с конфигурациями линий $(k,k,k-1)$ и полупараметрами инцидентности

$$v_{00} = (2k-1)(k-1), \quad v_{01} = 3k(2k-1),$$
$$v_{02} = (2k-1)(3k-2), \quad v_{03} = (k-1)(2k-1),$$
$$v_{11} = 2k^2, \quad v_{12} = 2k(3k-2),$$
$$v_{13} = 6k(k-1), \quad v_{14} = 2(k-2)(k-1).$$

4. Конструкции совершенных раскрасок гиперграфа подматриц

4.1. Произведение Кронекера.

Определение 7. *Произведение Кронекера* матрицы A размера $n \times m$ и матрицы B размера $k \times l$ есть матрица $A \otimes B$ размера $nk \times ml$ вида

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1m}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & \dots & a_{nm}B \end{bmatrix}.$$

Умножение Кронекера на матрицу из единиц позволяет получить бесконечную серию совершенных раскрасок из любой матрицы конфигурационно однородной раскраски.

Теорема 5. *Пусть A — совершенная 2-раскраска гиперграфа $G_{n\times m}$, конфигурационно однородная по строкам (столбцам) с конфигурацией строк (столбцов) (t_{00}, t_{01}, t_{11}) и столбцовыми (строчными) суммами, равными k. Тогда матрица $A \otimes E$ есть совершенная 2-раскраска $G_{nl\times mr}$, где E — матрица размера $l \times r$, все элементы которой равны единице.*

Доказательство. Докажем теорему для случая, когда матрица A конфигурационно однородна по строкам. Для случая конфигурационной однородности по столбцам доказательство аналогично.

Поскольку умножение Кронекера ассоциативно, то

$$A \otimes E = A \otimes \left(\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \left(A \otimes \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right) \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

При умножении матрицы A на вектор-строку из единиц длины r

$$B = A \otimes \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

достаточно заметить, что столбцовые суммы не изменятся, а получившаяся матрица B будет конфигурационно однородной по строкам с конфигурацией строк $(rt_{00}, rt_{01}, rt_{11})$, а значит, B — совершенная раскраска.

Умножим теперь матрицу B на вектор-столбец высоты $l \geqslant 1$:

$$C = B \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Получившаяся раскраска C совершенна, что следует непосредственно из подсчёта полупараметров инцидентности v_{ij}, которые будут иметь вид

$$v_{00} = (l-1)(rt_{00} + rt_{01} - 1) + l(n-k-1)(rt_{00} - 1),$$

$$v_{01} = 2lr(n-k-1)t_{01} + lkrt_{00},$$
$$v_{02} = r(l-1)(t_{11} + t_{01}) + lr(n-k-1)t_{11} + lk(2rt_{01} - 1),$$
$$v_{03} = lkrt_{11}, \quad v_{11} = lr(n-k)t_{00},$$
$$v_{12} = r(l-1)(t_{00} + t_{01}) + l(n-k)(2rt_{01} - 1) + lr(k-1)t_{00},$$
$$v_{13} = lr(n-k)t_{11} + 2lr(k-1)t_{01},$$
$$v_{14} = (l-1)(rt_{11} + rt_{01} - 1) + l(k-1)(rt_{11} - 1).$$

Таким образом, $C = A \otimes E$ будет совершенной раскраской. Теорема 5 доказана.

Замечание 6. Аналогичная теорема справедлива для конфигурационно однородных (одновременно и по строкам, и по столбцам) совершенных раскрасок гиперграфа $G_{n\times m}$ в $k \geqslant 3$ цветов.

Замечание 7. При умножении Кронекера не конфигурационно однородной совершенной 2-раскраски из примера 3 на матрицу E также получается (не конфигурационная однородная) совершенная раскраска, что проверяется подсчётом полупараметров инцидентности.

4.2. Многоцветная блочная раскраска. Рассмотрим обобщение блочной совершенной 2-раскраски $G_{n\times m}$ на большее число цветов. Оно основано на следующем свойстве.

Лемма 1. *Пусть K_n и K_m — полные графы с матрицами инцидентности B_n и B_m соответственно. Тогда $B_n \otimes B_m = B$ — матрица инцидентности гиперграфа $G_{n\times m}$.*

Доказательство. Из определения произведения Кронекера следует, что строки матрицы B соответствуют парам вершин (x, y), где $x \in V(K_n)$, $y \in V(K_m)$, а столбцы — парам рёбер (e, w), где $e \in E(K_n)$, $w \in E(K_m)$.

В гиперграфе с матрицей инцидентности B вершина (x, y) инцидентна гиперребру (e, w) тогда и только тогда, когда x инцидентна e в K_n и y инцидентна w в K_m, а множество гиперрёбер есть множество всех четвёрок вершин гиперграфа вида (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1) и (x_2, y_2). Таким образом, B — матрица инцидентности гиперграфа $G_{n\times m}$. Лемма 1 доказана.

Теорема 6. *Пусть f и g — совершенные раскраски графов K_n и K_m в k и l цветов с матрицами раскраски P' и P'' и параметрами инцидентности (V', W') и (V'', W'') соответственно. Тогда $P = P' \otimes P''$ — совершенная раскраска гиперграфа $G_{n\times m}$ в kl цветов с параметрами инцидентности $(V' \times V'', W' \otimes W'')$.*

Доказательство. Пусть B_n и B_m — матрицы инцидентности графов K_n и K_m соответственно. Так как раскраски f и g совершенные, для графов инцидентности рассматриваемых полных графов справедливы равенства

$$\begin{bmatrix} 0 & B_n \\ B_n^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P' \\ R' & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & P' \\ R' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & W' \\ V' & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & B_m \\ B_m^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P'' \\ R'' & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & P'' \\ R'' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & W'' \\ V'' & 0 \end{bmatrix},$$

где R' и R'' — индуцированные раскраски рёбер. Отсюда получаем

$$B_nR' = P'V', \quad B_mR'' = P''V'',$$

$$B_n^\top P' = R'W', \quad B_m^\top P'' = R''W''.$$

Перемножим произведением Кронекера равенства в каждой строке:

$$(B_nR') \otimes (B_mR'') = (P'V') \otimes (P''V''),$$

$$(B_n^\top P') \otimes (B_m^\top P'') = (R'W') \otimes (R''W'').$$

Используя равенство $AB \otimes CD = (A \otimes B)(C \otimes D)$ для матриц согласованных размеров, получаем

$$(B_n \otimes B_m)(R' \otimes R'') = (P' \otimes P'')(V' \otimes V''),$$

$$(B_n^\top \otimes B_m^\top)(P' \otimes P'') = (R' \otimes R'')(W' \otimes W'').$$

Положим $B = B_n \otimes B_m$, $P = P' \otimes P''$, $R = R' \otimes R''$, $V = V' \otimes V''$ и $W = W' \otimes W''$. Тогда из данной системы равенств имеем

$$\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^\top & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P \\ R & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & P \\ R & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & W \\ V & 0 \end{bmatrix}.$$

По лемме 1 матрица $B = B_n \otimes B_m$ является матрицей инцидентности гиперграфа $G_{n\times m}$, а значит, последнее уравнение эквивалентно тому, что P — это совершенная раскраска $G_{n\times m}$ с параметрами инцидентности (V, W).

Из размеров матрицы P следует, что раскраска гиперграфа $G_{n\times m}$ является раскраской в kl цветов. Теорема 6 доказана.

Замечание 8. Как известно, любая раскраска полного графа совершенна. Раскраска гиперграфа $G_{n\times m}$, построенная описанным образом из совершенных раскрасок графов K_n и K_m, будет многоцветной блочной раскраской.

Пример 7. Построим совершенную раскраску $G_{2\times 3}$ с помощью совершенных раскрасок графов K_2 и K_3. Рассмотрим совершенные раскраски этих графов, которые индуцируют раскраски их графов инцидентности, представленные на рис. 1.

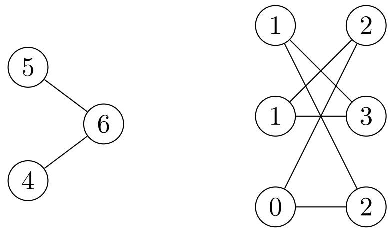

Рис. 1. Индуцированные совершенные раскраски графов инцидентности K_2 и K_3

Для графа K_2 матрица инцидентности равна $B_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, матрицы раскрасок вершин и рёбер — $P' = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$, $R' = \begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$, параметры инцидентности — $V' = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$, $W' = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$. Для графа K_3 матрица инцидентности равна $B_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$, матрицы раскрасок вершин и рёбер — $P'' = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$, $R'' = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$, параметры инцидентности — $V'' = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$, $W'' = \begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$. Тогда матрица $\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\1 & 3 & 3\end{bmatrix}$ представляет совершенную раскраску гиперграфа $G_{2\times 3}$ с параметрами инцидентности $(V' \otimes V'', W' \otimes W'')$.

5. Совершенные 2-раскраски $G_{2\times m}$ и $G_{3\times m}$

В справедливости утверждения 5 нетрудно убедиться прямым перебором, полупараметры инцидентности вычисляются непосредственно.

Утверждение 5. *Любая раскраска гиперграфа $G_{2\times 2}$ совершенна. При $m > 2$ существуют два следующих типа раскрасок $G_{2\times m}$.*

1) *Раскраска линиями (столбцами)*

$$\begin{bmatrix}0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1\\0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1\end{bmatrix}.$$

Если число нулевых столбцов равно t, то полупараметры инцидентности такой совершенной раскраски имеют вид

$$\begin{bmatrix}t-1 & 0 & m-t & 0 & 0\\0 & 0 & t & 0 & m-t-1\end{bmatrix}.$$

2) *Раскраска без одноцветных столбцов:*

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Такая раскраска определяется с точностью до инверсии цветов в произвольном наборе столбцов. Полупараметры инцидентности такой совершенной раскраски имеют вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & m-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Утверждение 6. *Любая совершенная раскраска гиперграфа $G_{3\times m}$, где $m \geqslant 3$, является одной из приведённых ниже раскрасок с точностью до инверсии цветов и перестановок строк и столбцов.*

1) *Раскраска линиями (столбцами)*

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Если число нулевых столбцов равно t, то полупараметры инцидентности такой совершенной раскраски имеют вид

$$\begin{bmatrix} 2(t-1) & 0 & 2(m-t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2t & 0 & 2(m-t-1) \end{bmatrix}.$$

2) *Раскраска линиями (строками)*

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Полупараметры инцидентности такой совершенной раскраски равны

$$\begin{bmatrix} m-1 & 0 & m-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2(m-1) & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

3) *Раскраска, представимая в виде произведения Кронекера*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

где вектор-строка имеет длину $t \geqslant 1$. Полупараметры инцидентности такой совершенной раскраски

$$\begin{bmatrix} t-1 & 3t & 2t-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2t & 4t-2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Если раскраска отличается от раскраски линиями, то по следствию 3 во всех её столбцах (и во всех строках) содержится одинаковое число единиц. Отсюда следует, что единственным возможным остаётся только третий тип раскрасок.

Полупараметры инцидентности приведённых раскрасок вычисляются непосредственным образом. Утверждение 6 доказано.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт Российского научного фонда (проект № 22–11–00266, `rscf.ru/project/22-11-00266`). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Литература

1. **Дельсарт Ф.** Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования. М.: Мир, 1976. 134 с.
2. **Godsil C.** Compact graphs and equitable partitions // Linear Algebra Appl. 1997. V. 255, No. 1–3. P. 259–266. DOI: `10.1016/S0024-3795(97)83595-1`.
3. **Визинг В. Г.** Дистрибутивная раскраска вершин графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 4. С. 3–12.
4. **Пузынина С. А.** Периодичность совершенных раскрасок бесконечной прямоугольной решётки // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2004. Т. 11, № 1. С. 79–92.
5. **Krotov D. S.** Perfect colorings of the infinite square grid: Coverings and twin colors // Electron. J. Comb. 2023. V. 30, No. 2. Paper ID P2.4. 59 p. DOI: `10.37236/10005`.
6. **Axenovich M. A.** On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius // Discrete Math. 2003. V. 268, No. 1–3. P. 31–49. DOI: `10.1016/S0012-365X(02)00744-6`.
7. **Августинович С. В., Могильных И. Ю.** Совершенные раскраски графов Джонсона $J(8,3)$ и $J(8,4)$ в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2010. Т. 17, № 2. С. 3–19.
8. **Хорошилова Д. Б.** О циркулярных совершенных раскрасках в два цвета // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 1. С. 80–92.
9. Handbook of combinatorics. V. 1. Amsterdam: Elsevier, 1995. 2198 p.
10. **Потапов В. Н., Августинович С. В.** Комбинаторные дизайны, разностные множества и бент-функции как совершенные раскраски графов и мультиграфов // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 5. С. 1087–1100.
11. **Taranenko A. A.** Perfect colorings of hypergraphs. Ithaca, NY: Cornell Univ., 2022. 20 p. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv:2208.03447). DOI: `10.48550/arXiv.2208.03447`.

12. Handbook of combinatorial designs. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2007. 1018 p.

Бородин Семён Олегович
Тараненко Анна Александровна

Статья поступила
4 сентября 2023 г.
После доработки —
7 февраля 2024 г.
Принята к публикации
22 марта 2024 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2024. Vol. 31, No. 3. P. 54–78

UDC 519.179.1+519.174.7 DOI: 10.33048/daio.2024.31.784

PERFECT COLORINGS OF SUBMATRIX HYPERGRAPHS

S. O. Borodin [a] and *A. A. Taranenko* [b]

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, 4, 630090, Novosibirsk, Russia
E-mail: [a] `s.borodin@g.nsu.ru`, [b] `taa@math.nsc.ru`

Abstract. A submatrix hypergraph $G_{n\times m}$ is a hypergraph whose vertices are entries of an $n \times m$ matrix and hyperedges are submatrices of order 2. In this paper, we consider perfect colorings of submatrix hypergraphs and study their parameters. We provide several constructions of perfect colorings of $G_{n\times m}$ and prove that the incidence matrices of 2-designs are perfect colorings of the submatrix hypergraph. Moreover, we describe all perfect 2-colorings of hypergraphs $G_{2\times m}$ and $G_{3\times m}$. Illustr. 1, bibliogr. 12.

Keywords: hypergraph, symmetric 2-design, perfect coloring.

References

1. **P. Delsarte,** *An Algebraic Approach to the Association Schemes of Coding Theory* (N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken, Eindhoven, 1973; Mir, Moscow, 1976 [Russian]).
2. **C. Godsil,** Compact graphs and equitable partitions, *Linear Algebra Appl.* **255** (1–3), 259–266 (1997), DOI: `10.1016/S0024-3795(97)83595-1`.
3. **V. G. Vizing,** Distributive coloring of graph vertices, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **2** (4), 3–12 (1995) [Russian].
4. **S. A. Puzynina,** Periodicity of perfect colorings of an infinite rectangular grid, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **11** (1), 79–92 (2004) [Russian].
5. **D. S. Krotov,** Perfect colorings of the infinite square grid: Coverings and twin colors, *Electron. J. Comb.* **30** (2), ID P2.4 (2023), DOI: `10.37236/10005`.
6. **M. A. Axenovich,** On multiple coverings of the infinite rectangular grid with balls of constant radius, *Discrete Math.* **268** (1–3), 31–49 (2003), DOI: `10.1016/S0012-365X(02)00744-6`.

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **18** (3), 424–440 (2024), DOI: 10.1134/S1990478924030050.

7. **S. V. Avgustinovich** and **I. Yu. Mogilnykh,** Perfect colorings of the Johnson graphs $J(8,3)$ and $J(8,4)$ with two colors, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **17** (2), 3–19 (2010) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **5** (1), 19–30 (2011)].
8. **D. B. Khoroshilova,** On two-colour perfect colourings of circular graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **16** (1), 80–92 (2009) [Russian].
9. *Handbook of Combinatorics,* Vol. 1 (Elsevier, Amsterdam, 1995).
10. **V. N. Potapov** and **S. V. Avgustinovich,** Combinatorial designs, difference sets, and bent functions as perfect colorings of graphs and multigraphs, *Sib. Mat. Zh.* **61** (5), 1087–1100 (2020) [Russian] [*Sib. Math. J.* **61** (5), 867–877 (2020)].
11. **A. A. Taranenko,** Perfect colorings of hypergraphs (Cornell Univ., Ithaca, NY, 2022) (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:2208.03447), DOI: `10.48550/arXiv.2208.03447`.
12. *Handbook of Combinatorial Designs* (Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2007).

Semyon O. Borodin
Anna A. Taranenko

Received September 4, 2023
Revised February 7, 2024
Accepted March 22, 2024