ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 31 № 4 2024

Новосибирск
Издательство Института математики

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2024. Т. 31, № 4. С. 116–133

УДК 519.8 DOI: 10.33048/daio.2024.31.801

СПУСК С ЧЕРЕДУЮЩИМИСЯ ОКРЕСТНОСТЯМИ ДЛЯ ПОИСКА РАДИУСА ПОРОГОВОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ЗАДАЧЕ РАЗМЕЩЕНИЯ И ДИСКРИМИНАЦИОННОГО ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ

А. А. Панин[a], *Д. А. Пискеева*[b], *А. В. Плясунов*[c]

Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: [a] aapanin1988@gmail.com,
[b] d.piskeeva@g.nsu.ru, [c] apljas@math.nsc.ru

Аннотация. Рассматривается новая проблема пороговой устойчивости при размещении предприятий и дискриминационном ценообразовании. В задаче размещения и ценообразования производитель принимает решение об открытии предприятий и назначении цен для каждого потребителя на каждом предприятии. Дискриминация в ценообразовании приводит к ситуации, когда каждый потребитель вынужден тратить максимум своих финансовых ресурсов, тем самым гарантируя максимальный доход производителю. В проблеме пороговой устойчивости финансовые ресурсы или бюджет каждого потребителя является параметром с известным ожидаемым значением. Цель — максимизировать отклонение параметров от ожидаемого значения при условии, что доход производителя не меньше заданного порога.

Для решения проблемы пороговой устойчивости предлагается алгоритм, основанный на спуске с чередующимися окрестностями (VND). Численное исследование алгоритма проводится на известных примерах и случайно сгенерированных. Исследуются различные способы построения стартового размещения и различные критерии сравнения векторов размещения предприятий. Табл. 3, ил. 6, библиогр. 12.

Ключевые слова: пороговая устойчивость, размещение и ценообразование, спуск с чередующимися окрестностями.

© А. А. Панин, Д. А. Пискеева, А. В. Плясунов, 2024

Введение

Пороговая устойчивость [5] является относительно новым направлением исследований в дискретной оптимизации и исследовании операций. В определённом смысле пороговая устойчивость является развитием робастной оптимизации [1]: оба подхода направлены на решение оптимизационных задач в условиях неточности входных данных. В робастной оптимизации задано множество сценариев, описывающих возможные и ожидаемые значения входных параметров примера оптимизационной задачи, а значение целевой функции опирается на худший сценарий для допустимого решения. В подходе пороговой устойчивости множество сценариев не задано, но известно ожидаемое значение целевой функции, определяемое как некоторый порог, ограничивающий это значение. Цель — найти такое решение, при котором значение целевой функции не преодолевает заданного порога на окрестности множества всевозможных сценариев максимального радиуса. Такой радиус называется *радиусом пороговой устойчивости.* Впервые подход пороговой устойчивости в дискретной оптимизации был предложен в работах [2, 3].

В данной работе исследуется пороговая устойчивость NP-трудной задачи размещения производства и ценообразования [9]. Производитель определяет, в каких местах и сколько предприятий ему нужно открыть и какие цены на однородную продукцию установить, чтобы максимизировать прибыль от обслуживания потребителей (потенциальных клиентов). В каждом возможном месте открытия (размещения) известна стоимость открытия предприятия. Каждый потребитель имеет ограниченный бюджет, который он готов потратить на покупку и транспортировку продукта в единичном экземпляре. Потребители действуют рационально, т. е. минимизируют свои затраты. Считаем, что транспортные затраты известны и неизменны, а информация о бюджетах неточна. В таком случае множество сценариев — это множество отклонений бюджетов от текущего ожидаемого значения.

Результат принятия решения в задачах размещения производства и ценообразования зависит от выбора политики назначения цен. Можно выделить три классических политики: равномерная, фабричная и дискриминационная [4]. При равномерной политике назначается единая цена на всю продукцию. При фабричной политике на каждом пункте обслуживания (предприятие, магазин) устанавливается своя цена. В данной работе ограничимся рассмотрением дискриминационной политики, когда на каждом предприятии для каждого потребителя назначается своя цена обслуживания.

Пороговая устойчивость для задач размещения производства и ценообразования исследовалась в работах [5–7]. В [6] исследовалась задача

с медианным ограничением на открытие предприятий и равномерной стратегией назначения цен. В [5] можно найти обзор работ, посвящённых проблемам размещения производства и ценообразования и пороговой устойчивости. В [7] впервые исследована пороговая устойчивость задач ценообразования с различными ценовыми политиками и задач конкурентного ценообразования.

В разд. 1 приводится математическая модель исследуемой проблемы. Приближённые алгоритмы для её решения предлагаются в разд. 2. В разд. 3 описывается численный эксперимент для сравнения разработанных алгоритмов с решателем Gurobi.

1. Математическая модель

Для описания математической модели введём следующие обозначения входных данных:

- I — конечное множество предприятий, предлагаемых к размещению или открытию;
- J — конечное множество потребителей;
- b_j — бюджет потребителя j;
- c_{ij} — стоимость транспортировки товара от предприятия i к потребителю j;
- f_i — стоимость открытия предприятия i;
- V — желаемая прибыль производителя (порог).

Кроме того, введём следующие переменные:

- ρ — радиус пороговой устойчивости, отклонение от ожидаемых значений бюджетов потребителей;
- p_{ij} — цена товара на предприятии i для потребителя j;
- $x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если клиент } j \text{ обслуживается на предприятии } i, \\ 0 & \text{иначе;} \end{cases}$
- $y_i = \begin{cases} 1, & \text{если предприятие } i \text{ открыто,} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$

Используя данные обозначения, запишем задачу пороговой устойчивости для размещения и дискриминационного ценообразования в виде следующей модели квадратичного программирования:

$$\rho \to \max_{\rho,p,y,x}, \tag{1}$$

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} p_{ij}x_{ij} - \sum_{i\in I} f_i y_i \geqslant V, \tag{2}$$

$$x_{ij} \leqslant y_i, \quad i \in I,\, j \in J, \tag{3}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} \leqslant 1, \quad j \in J, \tag{4}$$

$$\sum_{i\in I}(b_j - \rho - c_{ij} - p_{ij})x_{ij} \geqslant 0, \quad j \in J, \tag{5}$$

$$\sum_{i\in I}(c_{ij} + p_{ij})x_{ij} \leqslant c_{kj} + p_{kj}, \quad k \in I,\ j \in J, \tag{6}$$

$$x_{ij}, y_i \in \{0,1\}, \quad \rho, p_{ij} \geqslant 0, \quad i \in I,\ j \in J. \tag{7}$$

В целевой функции (1) максимизируется радиус пороговой устойчивости. Пороговое ограничение (2) гарантирует, что прибыль производителя будет не меньше заданного порога V. Ограничение (3) запрещает обслуживать потребителей в закрытых (не размещённых) предприятиях. Условие (4) говорит о том, что потребители заинтересованы только в одном экземпляре продукта. Бюджетное ограничение (5) и условие (6) гарантируют, что каждый потребитель обслуживается на предприятии с минимальными суммарными затратами и совершает покупку только в том случае, если затраты не превышают бюджета.

Заметим, что мы не рассматриваем сценарии увеличения значения бюджетов потребителей и не проверяем допустимость решения при всех значениях радиуса, не превышающих максимального, в силу очевидности последнего. При увеличении значения бюджетов левая часть ограничения (5) не убывает.

2. Эвристические алгоритмы решения

В [6] рассматривалась задача пороговой устойчивости при равномерной стратегии ценообразования и медианном ограничении на размещение предприятий. Предложенный авторами алгоритм решения использует идеи подходов, представленных в [8, 9], для максимизации прибыли производителя в условиях фабричной политики назначения цен и медианного ограничения на размещение производства. В основе алгоритма из [6] лежит метод спуска с чередующимися окрестностями (VND). Для решения исследуемой в данной статье задачи мы предлагаем алгоритмы, являющиеся модификацией этого эвристического подхода.

В [6] для поиска вектора размещения использовалась окрестность k-swap, соответствующая всевозможным вариантам одновременного закрытия k предприятий и открытия k новых. Другими словами, k-swap(y) содержит векторы с таким же весом Хэмминга, что и y, но находящиеся на расстоянии Хэмминга $2k$ от него.

В постановке, предлагаемой в настоящей работе, таких окрестностных структур недостаточно. Невозможно предугадать заранее оптимальное число открытых предприятий, поэтому рассмотрим ещё одну классическую окрестность k-flip [9], соответствующую тем размещениям, при которых либо k предприятий закрываются, либо открываются k новых.

Другими словами, окрестность k-flip(y) содержит размещения, находящиеся на расстоянии Хэмминга k от y, вес Хэмминга которых отличается от веса y на k. Для простоты: swap = 1-swap, flip = 1-flip.

Определим также процедуру встряски k-shake(y), которая понадобится для описания VND-алгоритмов. Эта процедура состоит из последовательного просмотра окрестностей 2-swap$(y) \cup$ 2-flip(y), $\ldots$, k-swap$(y) \cup$ k-flip(y) до первого улучшения размещения y.

Общая схема разработанных алгоритмов представлена алгоритмом 1. Приведённая схема VND-алгоритмов основана на идеях VNS- и VND-метаэвристик [10]. В нашей интерпретации окрестности строятся на части решения, соответствующей размещению производства. Такой подход связан с простотой задачи при фиксированном размещении. Задача дискриминационного ценообразования полиномиально разрешима [11].

Алгоритм 1. Схема алгоритмов VND

Вход: k — параметр процедуры встряски k-shake(y).
Выход: радиус пороговой устойчивости ρ, вектор размещения y, матрица цен p, матрица назначения клиентов x.

1: задать начальный вектор размещения y;
2: применить локальный спуск по окрестности $\mathrm{swap}(y) \cup \mathrm{flip}(y)$ и найти локальный оптимум y^*;
3: $y := k$-shake(y^*);
4: **if** $y = y^*$ **then** стоп; ▷ Улучшения не произошло.
5: **else goto** 2.

Для сравнения векторов размещения предприятий требуется сперва определить цены, назначения клиентов и радиус. Дискриминационное ценообразование позволяет перейти от матрицы цен к вектору, каждый элемент которого соответствует цене обслуживания клиента на ближайшем предприятии производителя. Алгоритм поиска радиуса ρ и матриц p, x приведён ниже (алгоритм 2).

Для вычисления матрицы цен достаточно для любого клиента j положить цену обслуживания на всех предприятиях равной p_j. При повторении шага 6 алгоритма 2 число обслуживаемых клиентов сокращается. Следовательно, трудоёмкость алгоритма равна $O(|I||J| + |J|^2)$ и верно

Утверждение 1. *При фиксированном размещении* $y \in \{0,1\}^{|I|}$ *задача* (1)–(7) *разрешима за* $O(|I||J| + |J|^2)$ *операций.*

Ограничимся рассмотрением двух процедур поиска стартового размещения: случайная генерация и жадный алгоритм. В обеих процедурах сперва задаётся число открываемых предприятий. Схема жадного алгоритма отражена в алгоритме 3.

Алгоритм 2. Вычисление цен и радиуса пороговой устойчивости

Вход: y — вектор размещения предприятий.

Выход: радиус пороговой устойчивости ρ, вектор цен p, матрица назначения клиентов x.

1: $I(y) := \{i \mid y_i = 1\}$; ▷ Множество индексов открытых предприятий.

2: **for** $j \in J$ **do** $p_j := \max\Big\{0,\ \max\limits_{i \in I(y)} \{b_j - c_{ij}\}\Big\}$; ▷ Цена обслуживания клиента j на ближайшем открытом предприятии.

3: $c(p) := |\{j \in J \mid p_j \neq 0\}|$; ▷ Число обслуживаемых клиентов.

4: $d(p) := \sum\limits_{j \in J} p_j - \Big(V + \sum\limits_{i \in I} y_i f_i\Big)$; ▷ Излишек прибыли, доступный для перераспределения.

5: $\rho := 0$;

6: **while** $d(p) > 0$ **do**

7: $\quad \rho := \rho + \frac{d(p)}{c(p)}$;

8: $\quad$ **for** $j \in J$ **do** $p_j := \max\big\{0,\ p_j - \frac{d(p)}{c(p)}\big\}$;

9: $\quad c(p) := |\{j \in J \mid p_j \neq 0\}|$;

10: $\quad d(p) := \sum\limits_{j \in J} p_j - \Big(V + \sum\limits_{i \in I} y_i f_i\Big)$;

11: **for** $i \in I$, $j \in J$ **do** ▷ Матрица назначения клиентов x.

12: $\quad$ **if** $p_j > 0$ и предприятие i ближайшее к потребителю j **then** $x_{ij} := 1$;

13: $\quad$ **else** $x_{ij} := 0$.

Алгоритм 3. Жадный алгоритм поиска стартового размещения y

Вход: r — число открываемых предприятий.

Выход: вектор размещения предприятий y.

1: **for** $i \in I$ **do** $v_i := \sum\limits_{j \in J} (b_j - \min\limits_{i \in I} c_{ij})$; ▷ Максимальный доход предприятия i от обслуживания всех клиентов.

2: упорядочить предприятия по убыванию дохода;

3: открыть r наиболее доходных предприятий.

В [6] рассмотрены два критерия для сравнения векторов размещения предприятий: 1) максимизация прибыли производителя; 2) максимизация радиуса пороговой устойчивости. Использование первого критерия приводит к алгоритму решения исходной задачи с последующим вычислением (ρ, p, x). При втором критерии (ρ, p, x) определяются для каждого вектора размещения. Так как на каждой итерации алгоритма спуска

с чередующимися окрестностями решение не ухудшается, для каждого рекордного радиуса ρ можем уменьшить на его значение все бюджеты клиентов, тем самым упростив задачу.

3. Численный эксперимент

Для проведения вычислительного эксперимента использованы примеры из библиотеки «Дискретные задачи размещения» [12], а также случайно сгенерированные примеры из статьи [6]. Все примеры разбиты на шесть групп:

1) FLPr-40-100, 10 примеров;
2) FLPr-100-100, 10 примеров;
3) gen-20-20, 2 примера;
4) gen-40-40, 2 примера;
5) gen-60-60, 2 примера;
6) gen-100-100, 3 примера.

Префикс «FLPr» означает примеры из библиотеки, «gen» — случайно сгенерированные примеры. Первое число в названии группы — число мест для размещения предприятий, а второе — число потребителей. Все примеры содержат информацию об исходных бюджетах и транспортных затратах.

В качестве порога рассматривались три уровня (значения): 30, 50, 70% от наибольшей прибыли производителя, найденной решателем Gurobi для исходной задачи размещения и ценообразования. Стоимости открытия предприятий, обозначенные на рисунках charge, брались одинаковыми и равными 5, 15, 30, 50, 100, 300. Так как в зависимости от числа открываемых предприятий r в стартовом размещении y разработанный алгоритм спуска с чередующимися окрестностями может приводить

Таблица 1

Среднее относительное отклонение (%) и время счёта (с) для алгоритмов VND и Gurobi

Алгоритм	VND								Gurobi
Критерий	px		rho		px-rho		rho-px		
Примеры	gap	time	gap	time	gap	time	gap	time	time
gen-20-20	0,0295	0,004	0,0256	0,004	0,0256	0,004	0,0256	0,004	1,76
gen-40-40	0,0284	0,027	0,0255	0,029	0,0255	0,039	0,0255	0,040	113,73
gen-60-60	0,0761	0,088	0,0632	0,103	0,0757	0,139	0,0632	0,141	845,81
FLPr-40-100	2,4275	0,120	0,1396	0,120	0,1004	0,189	0,1388	0,183	25,63
gen-100-100	−0,0907	0,688	−0,0928	0,733	−0,0929	1,007	−0,0937	1,020	8203,2
FLPr-100-100	2,9078	2,929	0,1505	2,252	0,1075	3,980	0,1503	3,496	157,34
Все примеры	0,8964	0,64	0,0519	0,54	0,0403	0,89	0,0516	0,81	1557,9

Таблица 2

Среднее относительное отклонение (%) по группе тестов FLPr-40-100

	r	Уровень порога V от наибольшей прибыли											
		30%				50%				70%			
		Стоимость открытия предприятий											
		5	50	100	300	5	50	100	300	5	50	100	300
px	0	1,21	3,06	3,49	5,69	0,77	2,08	1,87	3,58	0,64	1,30	0,92	1,60
		1,21	3,06	3,49	5,69	0,77	2,08	1,87	3,58	0,64	1,30	0,92	1,60
	5	1,23	2,98	3,51	8,93	0,83	2,07	1,92	6,09	0,64	1,29	0,86	3,56
		1,22	3,06	4,36	8,15	0,79	2,08	2,57	5,61	0,67	1,30	1,38	3,40
	10	1,27	3,07	3,81	8,34	0,85	2,15	2,20	5,56	0,67	1,41	1,26	3,08
		1,24	3,27	4,29	7,64	0,83	2,28	2,53	4,99	0,71	1,46	1,45	2,52
	15	1,31	3,29	4,06	7,55	0,91	2,36	2,49	4,89	0,77	1,57	1,52	2,22
		1,27	3,43	4,16	8,17	0,86	2,35	2,41	5,34	0,76	1,57	1,30	2,81
	20	1,28	3,28	4,39	7,55	0,87	2,35	2,69	4,89	0,70	1,56	1,69	2,22
		1,24	3,53	4,19	8,17	0,84	2,44	2,55	5,34	0,75	1,69	1,52	2,81
	25	1,30	3,18	4,19	7,47	0,90	2,26	2,55	5,10	0,75	1,44	1,52	2,89
		1,25	3,53	4,33	7,68	0,85	2,44	2,69	4,92	0,77	1,69	1,70	2,56
	opt	1,28	2,98	3,51	5,42	0,87	2,15	1,92	3,27	0,74	1,41	1,08	1,04
		1,27	3,06	4,39	5,69	0,84	2,08	2,57	4,11	0,75	1,46	1,12	2,97
rho	0	0	0	0,26	1,44	0	0	0,02	0,07	0	0,03	0,02	0,91
		0	0	0,26	1,44	0	0	0,02	0,07	0	0,03	0,02	0,91
	5	0	0,01	0	0,40	0	0	0	0,56	0	0	0	0,84
		0	0	0	0,59	0	0,06	0,01	0,99	0	0,03	0,45	1,25
	10	0	0,01	0	0,30	0	0,04	0,01	1,42	0	0	0	0,19
		0	0,01	0	0,30	0	0,07	0,02	1,17	0	0,03	0,48	0,19
	15	0	0,01	0	0,40	0	0	0,01	1,42	0	0	0	0,44
		0	0,01	0	0,40	0	0,03	0,02	1,17	0	0,03	0,17	0,25
	20	0	0,01	0	0,40	0	0	0,01	0,56	0	0	0	1,87
		0	0	0	0,30	0	0	0,01	0,30	0	0,03	0,48	1,16
	25	0	0	0	0,40	0	0,04	0,01	0,56	0	0	0	1,87
		0	0	0	0,30	0	0	0,01	0,44	0	0,03	0	1,16
	opt	0	0,01	0	0,74	0	0	0	0,38	0	0	0,03	1,81
		0	0	0	0,50	0	0,04	0,01	0,00	0	0,03	0,31	1,46

к разным результатам, эксперимент проводился на 7 значениях: 0, 5, 10, 15, 20, 25 и opt — число открытых предприятий в решении, найденном решателем Gurobi. Для применения Gurobi математическая модель линеаризована, как в [6]. Параметр k процедуры встряски shake равен 2.

VND-алгоритм применён с критериями максимизации прибыли (px) и максимизации радиуса пороговой устойчивости (rho). Вместе с тем исследовано чередование этих критериев на последовательных итерациях алгоритма (одна итерация включает локальный спуск и встряску). Группа запусков с критерием прибыли на первой итерации обозначена через px-rho, а с критерием максимизации радиуса — через rho-px.

Таблица 2 (продолжение)

	r	Уровень порога V от наибольшей прибыли											
		30%				50%				70%			
		Стоимость открытия предприятий											
		5	50	100	300	5	50	100	300	5	50	100	300
px-rho	0	0	0,02	0	0,40	0	0,03	0,01	0,44	0	0,03	0,02	0,24
		0	0,02	0	0,40	0	0,03	0,01	0,44	0	0,03	0,02	0,24
	5	0	0,01	0	0,40	0	0	0,01	0,56	0	0,03	0,02	0,24
		0	0,02	0	0,30	0	0,01	0	1,12	0	0,03	0,31	1,25
	10	0	0,03	0	0,40	0	0,04	0,01	0,85	0	0,03	0,03	0,49
		0	0,02	0	0,40	0	0,01	0,01	0,41	0	0,03	0,18	0,25
	15	0	0	0	0,40	0	0,01	0,01	0,85	0	0	0,02	0,24
		0	0,02	0	0,40	0	0,01	0,01	0,18	0	0,03	0,17	0,24
	20	0	0,02	0	0,40	0	0	0,01	0,30	0	0,03	0,18	0,49
		0	0,02	0	0,40	0	0,03	0,01	0,18	0	0,03	0,18	0,24
	25	0	0,02	0	0,40	0	0,04	0	0,30	0	0,03	0,18	0,49
		0	0,02	0	0,40	0	0,04	0	0,44	0	0,03	0,18	0,24
	opt	0	0,03	0	0,21	0	0,04	0,02	1,42	0	0	0,03	0,00
		0	0,02	0	0,90	0	0	0	0,87	0	0,03	0	1,25
rho-px	0	0	0	0,26	1,44	0	0	0,02	0,07	0	0,03	0,02	0,91
		0	0	0,26	1,44	0	0	0,02	0,07	0	0,03	0,02	0,91
	5	0	0,01	0	0,40	0	0	0	0,56	0	0	0	0,44
		0	0	0	0,59	0	0,03	0,01	0,99	0	0,03	0,45	1,25
	10	0	0,01	0	0,30	0	0,04	0,01	1,42	0	0	0	0,19
		0	0,01	0	0,30	0	0,04	0,02	1,17	0	0,03	0,48	0,19
	15	0	0,01	0	0,40	0	0	0,01	1,42	0	0	0	0,44
		0	0,01	0	0,40	0	0,03	0,02	1,17	0	0,03	0,17	0,25
	20	0	0,01	0	0,40	0	0	0,01	0,56	0	0	0	1,87
		0	0	0	0,30	0	0	0,01	0,30	0	0,03	0,48	1,16
	25	0	0	0	0,40	0	0,04	0,01	0,56	0	0	0	1,87
		0	0	0	0,30	0	0	0,01	0,44	0	0,03	0	1,16
	opt	0	0,01	0	0,74	0	0	0	0,38	0	0	0,03	1,81
		0	0	0	0,50	0	0,04	0,01	0,00	0	0,03	0,31	1,46

В табл. 1 приведены средние результаты по группам примеров для всех значений порога, стоимости открытия и всех стартовых векторов размещения предприятий, построенных жадным алгоритмом. В частности, приведено относительное отклонение $\text{gap} = \frac{\rho_{\text{gurobi}} - \rho_{\text{VND}}}{\rho_{\text{gurobi}}}$ в процентах и время вычисления time в секундах. Здесь ρ_{gurobi} — радиус пороговой устойчивости, найденный решателем Gurobi, а ρ_{VND} — радиус, найденный алгоритмом VND. Время работы решателя Gurobi ограничивалось 10 800 секундами. В группе примеров gen-100-100 он не смог достичь оптимального решения за это время. Отрицательное относительное отклонение говорит о том, что Gurobi за отведённое время нашёл решение хуже, чем VND-алгоритм.

Таблица 3

Среднее относительное отклонение (%) по группе тестов FLPr-100-100

	r	Уровень порога V от наибольшей прибыли											
		30%				50%				70%			
		Стоимость открытия предприятий											
		5	50	100	300	5	50	100	300	5	50	100	300
px	0	2,02	2,96	4,97	7,84	1,36	1,77	3,23	4,35	1,01	1,32	3,16	2,54
		2,02	2,96	4,97	7,84	1,36	1,77	3,23	4,35	1,01	1,32	3,16	2,54
	5	2,04	2,86	4,36	10,01	1,46	1,78	2,71	6,66	1,11	1,56	2,51	5,17
		1,99	2,93	4,52	7,84	1,35	1,74	2,91	4,35	1,00	1,30	2,93	2,54
	10	2,03	3,30	5,39	9,36	1,47	1,98	3,58	6,06	1,15	1,56	3,05	4,64
		2,02	3,03	5,26	8,57	1,43	1,76	3,53	5,11	1,10	1,36	3,40	3,64
	15	2,11	3,29	5,62	9,36	1,53	1,99	3,71	6,06	1,19	1,67	3,03	4,64
		2,02	2,89	5,11	8,57	1,44	1,60	3,42	5,11	1,11	1,20	3,01	3,64
	20	2,07	3,56	5,29	7,84	1,46	2,31	3,55	4,35	1,10	1,97	3,39	2,54
		2,03	3,38	5,27	8,57	1,44	2,06	3,42	5,11	1,07	1,68	3,00	3,64
	25	2,02	3,46	5,21	7,84	1,40	2,28	3,52	4,35	1,03	1,98	2,98	2,54
		2,01	3,40	4,89	8,57	1,42	2,00	3,18	5,11	1,08	1,65	3,02	3,64
	opt	2,05	3,02	4,33	6,76	1,45	1,59	2,47	3,30	1,07	1,27	2,30	1,02
		2,00	2,97	4,34	6,28	1,41	1,54	2,68	3,25	1,07	1,36	2,10	1,90
rho	0	0,01	0,10	0,14	0,43	0	0,16	0,31	1,55	0,01	0,33	0,85	0,90
		0,01	0,10	0,14	0,43	0	0,16	0,31	1,55	0,01	0,33	0,85	0,90
	5	0,01	0,09	0,16	0,05	0,01	0,28	0,18	0,50	0,03	0,16	0,89	1,30
		0	0,24	0,21	0,05	0	0,22	0,06	0,26	0,01	0,18	1,19	0,05
	10	0,01	0,07	0,06	0,05	0	0,04	0,19	0,57	0,02	0,25	0,42	1,08
		0	0,16	0,17	0,77	0	0	0,21	0,57	0,01	0,02	0,54	1,18
	15	0,01	0,05	0,05	0,05	0,01	0,22	0,18	0,57	0,02	0,06	0,49	1,76
		0	0,08	0,04	0,17	0,01	0	0,11	0,57	0,01	0,07	0,68	1,15
	20	0,01	0,07	0,05	0,05	0	0,16	0,13	0,57	0,02	0,17	0,61	1,15
		0,01	0,04	0,07	0,05	0,01	0,06	0,04	0,13	0,01	0,07	0,28	0,00
	25	0,01	0,05	0,05	0,77	0	0,06	0,19	0,77	0,02	0,40	0,65	1,15
		0,01	0,04	0,07	0,05	0,01	0,06	0,20	0,13	0	0,07	0,69	0,00
	opt	0,01	0,04	0,03	0,00	0,01	0,10	0,38	0,00	0,01	0,26	0,87	0,91
		0,01	0,11	0	0,00	0,01	0,04	0,06	0,00	0	0,49	0,40	0,46

Как видно из табл. 1, VND-алгоритм практически всегда находит оптимальное или близкое к оптимальному решение. Относительное отклонение превосходит 0,15% только для критерия максимизации прибыли и только на примерах FLPr, на которых среднее значение gap превышает 2,4%. При этом время работы алгоритма VND на 2–3 порядка меньше времени работы Gurobi.

Критерий максимизации прибыли существенно проигрывает критерию максимизации радиуса пороговой устойчивости на примерах FLPr. Причина кроется в том, что в исходной задаче размещения производства и ценообразования оптимальные или близкие к оптимальным решения

Таблица 3 (продолжение)

	r	Уровень порога V от наибольшей прибыли											
		30%				50%				70%			
		Стоимость открытия предприятий											
		5	50	100	300	5	50	100	300	5	50	100	300
px-rho	0	0,01	0,13	0,27	0,05	0	0	0,24	0,64	0	0,02	0,49	0,05
		0,01	0,13	0,27	0,05	0	0	0,24	0,64	0	0,02	0,49	0,05
	5	0,01	0,05	0,18	0,77	0,01	0,10	0,23	0,77	0,01	0,04	0,50	0,05
		0	0,01	0,10	0,05	0,01	0,10	0,15	0,77	0	0,17	0,80	0,05
	10	0	0,14	0,10	0,05	0,01	0	0,08	0,63	0,02	0,09	0,13	0,05
		0	0,06	0,18	0,05	0,01	0,04	0,18	0,63	0,01	0,02	0,43	0,05
	15	0,01	0,17	0,10	0,05	0,01	0,10	0,09	0,57	0,02	0,04	0,14	0,05
		0	0,01	0,08	0,05	0,01	0	0,18	0,64	0,01	0,09	0,15	0,05
	20	0,01	0,09	0,10	0,05	0,01	0,10	0,20	0,64	0,02	0,02	0,71	1,20
		0	0,19	0,08	0,05	0,01	0,06	0,03	0,77	0,01	0,09	0,18	0,05
	25	0,01	0,19	0,30	0,05	0,01	0	0,24	0,77	0,02	0,04	0,77	0,05
		0	0,19	0,28	0,05	0,01	0,12	0,20	0,77	0	0,12	0,36	0,05
	opt	0,01	0	0,11	0,05	0,01	0,04	0,23	0,26	0,01	0,09	0,75	0,05
		0	0,01	0,05	0,05	0,01	0,04	0,15	0,20	0	0,02	0,29	0,05
rho-px	0	0,01	0,10	0,14	0,43	0	0,16	0,31	1,55	0,01	0,33	0,85	0,90
		0,01	0,10	0,14	0,43	0	0,16	0,31	1,55	0,01	0,33	0,85	0,90
	5	0,01	0,09	0,16	0,05	0,01	0,28	0,18	0,50	0,03	0,16	0,89	1,30
		0	0,24	0,21	0,05	0	0,22	0,06	0,26	0,01	0,18	1,19	0,05
	10	0,01	0,07	0,06	0,05	0	0,04	0,19	0,57	0,02	0,25	0,42	1,08
		0	0,16	0,17	0,77	0	0	0,21	0,57	0,01	0,02	0,54	1,18
	15	0,01	0,05	0,05	0,05	0,01	0,22	0,18	0,57	0,02	0,06	0,49	1,76
		0	0,08	0,04	0,17	0,01	0	0,11	0,57	0,01	0,07	0,68	1,15
	20	0,01	0,07	0,05	0,05	0	0,16	0,13	0,57	0,02	0,17	0,61	1,15
		0,01	0,03	0,07	0,05	0,01	0,06	0,04	0,13	0,01	0,07	0,28	0,00
	25	0,01	0,05	0,05	0,77	0	0,06	0,19	0,77	0,02	0,40	0,65	1,15
		0,01	0,04	0,07	0,05	0,01	0,06	0,20	0,13	0	0,07	0,69	0,00
	opt	0,01	0,04	0,03	0,00	0,01	0,10	0,38	0,00	0,01	0,26	0,87	0,91
		0,01	0,11	0	0,00	0,01	0,04	0,06	0,00	0	0,02	0,40	0,46

могут сильно отличаться по числу открытых предприятий и числу обслуживаемых потребителей. При высокой стоимости открытия предприятий условно лишние предприятия могут заметно ограничивать допустимые вариации бюджетов и цен, что мы и наблюдаем. Однако, если применять идею чередования критериев и, используя критерий rho, перестроить решение, полученное критерием px, можно достигнуть наилучших результатов, что видно из табл. 1.

В табл. 2 и 3 представлены средние результаты по группам тестов FLPr отдельно для каждого порога, стартового размещения и каждой стоимости открытия, кроме 15 и 30 — при этих значениях поведение алгоритмов почти такое же, как при стоимости открытия 5. Для каждого значения r получены два набора данных: в первой строке стартовое

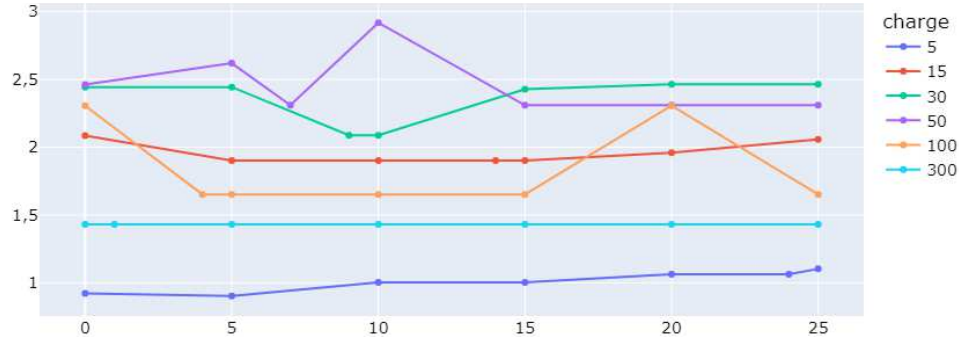

Рис. 1. Абсолютное отклонение от числа открытых предприятий в стартовом размещении на наборе данных FLPr-100-100-09 ($V = 30\%$, критерий px)

размещение предприятий y выбрано случайно, а во второй — жадным способом. Для критерия px характерен почти монотонный рост относительного уклонения с ростом стоимости открытия. Для других критериев картина совершенно другая. Отметим также, что выбор стартового размещения жадным или случайным образом практически не влияет на итоговый результат.

На рис. 1 для критерия px и различных стоимостей открытия предприятий представлены графики зависимости абсолютного отклонения от числа открытых жадной стратегией предприятий в стартовом размещении с уровнем порога 30%. Такая картина встречается крайне редко, лишь на некоторых примерах.

Часто возникает ситуация, когда при r, равном оптимальному или близкому к оптимальному числу предприятий, алгоритм VND спускается в далеко не самый лучший локальный оптимум. Если r сильно больше

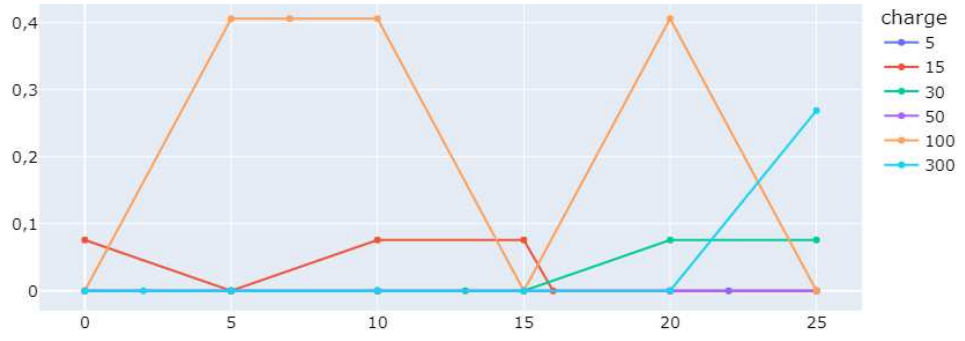

Рис. 2. Абсолютное отклонение от числа открытых предприятий в стартовом размещении на наборе данных FLPr-40-100-05 ($V = 70\%$, критерий rho)

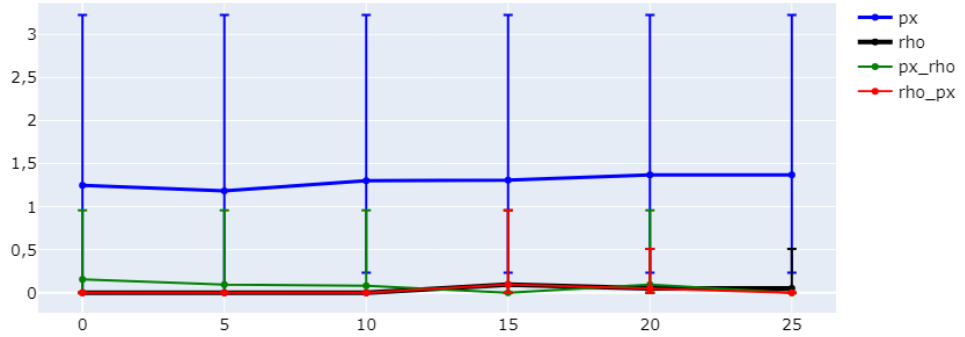

Рис. 3. Относительное отклонение от числа открытых предприятий в стартовом размещении на группе тестов FLPr-40-100 ($V = 70\%$, charge $= 30$)

или сильно меньше этого числа, то алгоритм спускается в оптимальное решение, как на рис. 2 для charge $= 100$, где оптимальное число предприятий равно 7. Для charge $= 15$ оптимальное число предприятий равно 16. При $r = 15$ алгоритм не находит оптимального решения, но если откроем ещё одно предприятие, то придём к оптимуму (рис. 2). Странность результатов заключается в том, что стартовое размещение определяется жадным образом, а значит, при $r \in \{15, 16\}$ первые 15 предприятий одни и те же. Такая картина характерна для всех критериев.

На рис. 3 и 4 для различных критериев представлены средние, максимальные и минимальные значения относительного отклонения по всей группе тестовых примеров FLPr-40-100 в зависимости от числа открытых жадным способом предприятий в стартовом размещении. Отличие в том, что на рис. 4 для наглядности исключены графики для критерия px. Заметно, что критерий px показывает себя хуже остальных, что характерно

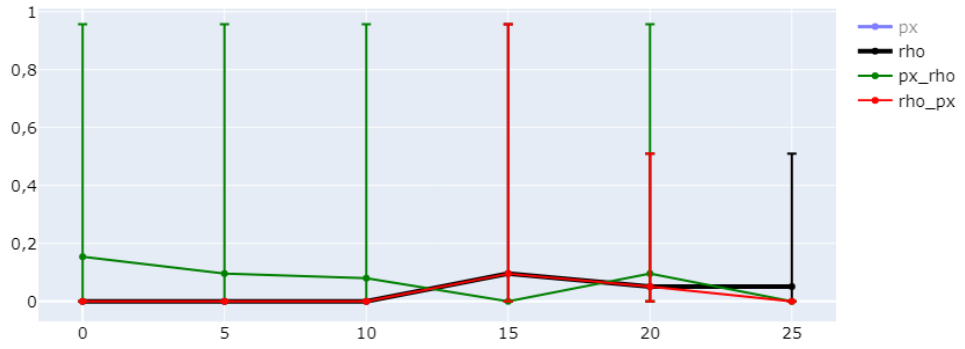

Рис. 4. Относительное отклонение от числа открытых предприятий в стартовом размещении на группе тестов FLPr-40-100 ($V = 70\%$, charge $= 30$)

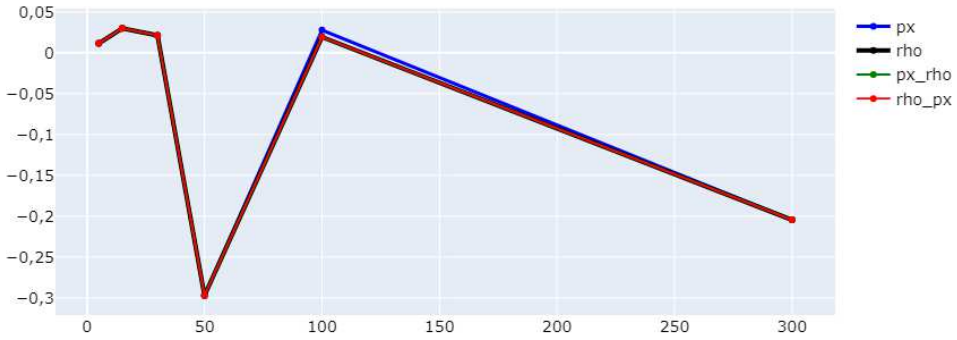

Рис. 5. Абсолютное отклонение от стоимости открытия предприятия на наборе данных gen-100-100-3 с уровнем порога 70%

для всей группы примеров FLPr. Эффективность каждого из оставшихся критериев зависит от числа предприятий в стартовом размещении.

Ещё одна интересная закономерность представлена на рис. 5. Практически на всех примерах групп gen наблюдается одна и та же картина зависимости абсолютного и относительного уклонений от стоимости открытия предприятий, почти идентичная для всех критериев. Для примеров FLPr такая зависимость лишь отчасти прослеживается для всех критериев, кроме px. Нередко встречается картина зависимости, как на рис. 6. Критерий px на этих примерах ведёт себя крайне непредсказуемо, и в сравнении с другими критериями часто наблюдается прямо противоположная картина.

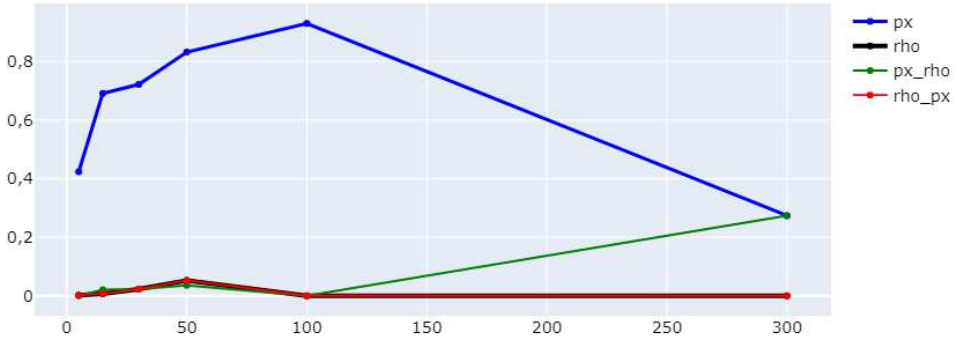

Рис. 6. Абсолютное отклонение от стоимости открытия предприятия на наборе данных FLPr-100-100-09 с уровнем порога 50%

Заключение

В работе рассмотрена проблема пороговой устойчивости при размещении производства и дискриминационном ценообразовании. Предложенный для её решения алгоритм, основанный на спуске с чередующимися окрестностями, даже в своей худшей реализации показывает результаты с относительным отклонением не более 3% в среднем для любой группы тестов, в лучшей реализации — 0,15%. Наибольшее относительное отклонение на отдельном примере достигает 19%. Причиной этому служит относительно небольшое значение оптимального радиуса пороговой устойчивости для данного примера.

Для задач пороговой устойчивости впервые была исследована идея чередования критериев максимизации радиуса пороговой устойчивости и оптимизации целевой функции исходной задачи в итерационных эвристических алгоритмах, позволяющая получать рекордные результаты.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт Российского научного фонда (проект № 23–21–00424). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Литература

1. **Ben-Tal A., Nemirovski A.** Robust optimization — Methodology and applications // Math. Program. Ser. B. 2002. V. 92, No. 3. P. 453–480.
2. **Carrizosa E., Nickel S.** Robust facility location // Math. Methods Oper. Res. 2003. V. 58, No. 2. P. 331–349.
3. **Carrizosa E., Ushakov A., Vasilyev I.** Threshold robustness in discrete facility location problems: A bi-objective approach // Optim. Lett. 2015. V. 9, No. 7. P. 1297–1314.
4. **Hanjoul P., Hansen P., Peeters D., Thisse J.-F.** Uncapacitated plant location under alternative spatial price policies // Manage. Sci. 1990. V. 36, No. 1. P. 41–57. DOI: 10.1287/mnsc.36.1.41.
5. **Panin A. A., Plyasunov A. V.** The multilevel facility location and pricing problems: The computational complexity and the stability analysis // Optim. Lett. 2023. V. 17, No. 6. P. 1295–1315. DOI: 10.1007/s11590-022-01924-3.
6. **Vodyan M. E., Panin A. A., Plyasunov A. V.** Metaheuristics for finding the stability radius in the bilevel facility location and uniform pricing problem // Proc. 19th Int. Asian School-Seminar Optimization Problems of Complex Systems (Novosibirsk, Russia, Aug. 14–22, 2023). Piscataway: IEEE, 2023. P. 130–135. DOI: 10.1109/OPCS59592.2023.10275325.

7. **Panin A. A., Plyasunov A. V.** Stability analysis for pricing // Mathematical optimization theory and operations research. Rev. Sel. Pap. 19th Int. Conf. (Novosibirsk, Russia, July 6–10, 2020). Cham: Springer, 2020. P. 57–69. (Commun. Comput. Inf. Sci.; V. 1275). DOI: 10.1007/978-3-030-58657-7_7.
8. **Diakova Z. S., Kochetov Yu. A.** A double VNS heuristic for the facility location and pricing problem // Electron. Notes Discrete Math. 2012. V. 39. P. 29–34. DOI: 10.1016/j.endm.2012.10.005.
9. **Кочетов Ю. А., Панин А. А., Плясунов А. В.** Сравнение метаэвристик для решения двухуровневой задачи размещения предприятий и фабричного ценообразования // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 3. С. 36–54.
10. **Кочетов Ю. А., Младенович Н., Хансен П.** Локальный поиск с чередующимися окрестностями // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2003. Т. 10, № 1. С. 11–43.
11. **Плясунов А. В., Панин А. А.** Задача ценообразования. Часть 2. Вычислительная сложность // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 6. С. 56–71.
12. **Береснев В. Л., Кочетов Ю. А., Пащенко М. Г.** [и др.]. Дискретные задачи размещения. Библиотека тестовых задач. Новосибирск: ИМ СО РАН, 2021. URL: math.nsc.ru/AP/benchmarks (дата обращения: 1.11.2024).

Панин Артём Александрович
Пискеева Дарья Алексеевна
Плясунов Александр Владимирович

Статья поступила
8 мая 2024 г.
После доработки —
15 мая 2024 г.
Принята к публикации
22 июня 2024 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2024. Vol. 31, No. 4. P. 116–133

UDC 519.8 DOI: 10.33048/daio.2024.31.801

VARIABLE NEIGHBORHOOD DESCENT FOR FINDING THE THRESHOLD STABILITY RADIUS IN THE FACILITY LOCATION AND DISCRIMINATORY PRICING PROBLEM

A. A. Panin[a], *D. A. Piskeeva*[b], and *A. V. Plyasunov*[c]

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: [a] aapanin1988@gmail.com,
[b] d.piskeeva@g.nsu.ru, [c] apljas@math.nsc.ru

Abstract. A new threshold stability problem in the context of facility location and discriminatory pricing is considered. In the statement of facility location and pricing problem, the company decides to open facilities and assign prices to each customer at each facility. The implementation of discriminatory pricing leads to a scenario where each customer is compelled to expend the maximum amount of their available financial resources, thereby ensuring the maximum revenue for the company. In the threshold stability problem, the available financial resources or budget of each consumer is a parameter with a known expected value. The objective is to maximize the deviation of the parameters from the expected value, provided that the company's income remains above a given threshold.

An algorithm based on variable neighborhood descent (VND) is proposed to solve the threshold stability problem. Numerical investigation of the algorithm is carried out on known instances and randomly generated ones. Various ways of constructing the starting facility location and different criteria for comparing the location vectors are analyzed. Tab. 3, illustr. 6, bibliogr. 12.

Keywords: threshold stability, location and pricing, variable neighborhood descent.

References

1. **A. Ben-Tal** and **A. Nemirovski,** Robust optimization — Methodology and applications, *Math. Program., Ser. B,* **92** (3), 453–480 (2002).

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **18** (4), 789–800 (2024), DOI: 10.1134/S1990478924040136.

2. **E. Carrizosa** and **S. Nickel,** Robust facility location, *Math. Methods Oper. Res.* **58** (2), 331–349 (2003).
3. **E. Carrizosa, A. Ushakov,** and **I. Vasilyev,** Threshold robustness in discrete facility location problems: A bi-objective approach, *Optim. Lett.* **9** (7), 1297–1314 (2015).
4. **P. Hanjoul, P. Hansen, D. Peeters,** and **J.-F. Thisse,** Uncapacitated plant location under alternative spatial price policies, *Manage. Sci.* **36** (1), 41–57 (1990), DOI: 10.1287/mnsc.36.1.41.
5. **A. A. Panin** and **A. V. Plyasunov,** The multilevel facility location and pricing problems: The computational complexity and the stability analysis, *Optim. Lett.* **17** (6), 1295–1315 (2023), DOI: 10.1007/s11590-022-01924-3.
6. **M. E. Vodyan, A. A. Panin,** and **A. V. Plyasunov,** Metaheuristics for finding the stability radius in the bilevel facility location and uniform pricing problem, in *Proc. 19th Int. Asian School-Seminar Optimization Problems of Complex Systems, Novosibirsk, Russia, Aug. 14–22, 2023* (IEEE, Piscataway, 2023), pp. 130–135, DOI: 10.1109/OPCS59592.2023.10275325.
7. **A. A. Panin** and **A. V. Plyasunov,** Stability analysis for pricing, in *Mathematical Optimization Theory and Operations Research* (Rev. Sel. Pap. 19th Int. Conf., Novosibirsk, Russia, July 6–10, 2020) (Springer, Cham, 2020), pp. 57–69 (Commun. Comput. Inf. Sci., Vol. 1275), DOI: 10.1007/978-3-030-58657-7.
8. **Z. S. Diakova** and **Yu. A. Kochetov,** A double VNS heuristic for the facility location and pricing problem, *Electron. Notes Discrete Math.* **39**, 29–34 (2012), DOI: 10.1016/j.endm.2012.10.005.
9. **Yu. A. Kochetov, A. A. Panin,** and **A. V. Plyasunov,** Comparison of metaheuristics for the bilevel facility location and mill pricing problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **22** (3), 36–54 (2015) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **9** (3), 392–401 (2015)].
10. **Yu. A. Kochetov, N. Mladenović,** and **P. Hansen,** Local search with alternating neighborhoods, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2,* **10** (1), 11–43 (2003) [Russian].
11. **A. V. Plyasunov** and **A. A. Panin,** The pricing problem. Part II: Computational complexity, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **19** (6), 56–71 (2012) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **7** (3), 420–430 (2013), DOI: 10.1134/S1990478913030150].
12. **V. L. Beresnev, Yu. A. Kochetov, M. G. Pashchenko,** [et al.]. *Discrete Location Problems. Benchmark Library* (Inst. Mat. SO RAN, Novosibirsk, 2021), URL: math.nsc.ru/AP/benchmarks/english.html (accessed: Nov. 1, 2024).

Artyom A. Panin
Darya A. Piskeeva
Aleksandr V. Plyasunov

Received May 8, 2024
Revised May 15, 2024
Accepted June 22, 2024