

ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 31 № 4 2024

Новосибирск
Издательство Института математики

АЛГОРИТМ ПОИСКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КАЛЕНДАРНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ НА ПРОИЗВОДСТВЕ

*Н. П. Савенкова^{1, a}, А. Ю. Мокин^{1, 2, b},
А. А. Дряженков^{1, 2, c}, Л. А. Артемьева^{1, 2, d}*

¹Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, стр. 52, 119991 Москва, Россия

²Московский Центр фундаментальной и прикладной математики,
Ленинские горы, 1, 119991 Москва, Россия

E-mail: ^ansavenkova@cs.msu.su, ^bmknandrew@mail.ru,
^candrja@yandex.ru, ^dartemieva.luda@gmail.com

Аннотация. Предлагается математическая модель производства, на котором происходит переработка сырья. Производство состоит из установок, обрабатывающих сырьё, резервуаров для его хранения, а также из узлов смешения. В предположении, что каждая из перерабатывающих установок может работать в одном из двух известных режимов, а переключение с одного режима на другой может осуществляться не более одного раза, ставится задача поиска оптимальной мощности выработки продукции на каждой из установок, а также времени переключения установок с одного режима работы на другой, обеспечивающих выполнение заданного плана выработки окончательной продукции. Полученная задача представляет собой задачу дискретной оптимизации. Предлагается метод её решения, включающий переход к выпуклой постановке, а также алгоритм дискретизации полученного управления. Табл. 2, ил. 4, библиогр. 13.

Ключевые слова: календарное планирование, материальный баланс, оптимальное управление, дискретная оптимизация, квадратичное программирование.

Введение

Производственная схема нефтеперерабатывающего завода в большинстве случаев содержит до тысячи различных технологических объектов:

© Н. П. Савенкова, А. Ю. Мокин, А. А. Дряженков, Л. А. Артемьева, 2024

резервуары для хранения сырья, промежуточной продукции и продукции для отгрузки, манифолды, перераспределяющие продукцию между узлами предприятия, различные установки, обрабатывающие продукцию согласно predetermined рецептам. Все технологические объекты объединены развитой инфраструктурой, обеспечивающей доставку сырья и продукции от одного узла к другому. В настоящей работе рассматривается одна из ключевых задач производства — календарное планирование [1–4], в которой необходимо найти мощность каждой установки и время переключения установок с одного режима работы на другой, обеспечивающие выполнение заданного плана выработки окончательной продукции для продажи. Важной особенностью рассматриваемой в работе модели является возможность не более одного переключения режима работы на установках.

В настоящий момент времени к наиболее распространённым подходам для решения задачи календарного планирования можно отнести [5, 6]: методы, в основе которых лежит решение оптимизационных задач, методы статистического моделирования, методы, использующие имитационное моделирование, эвристические методы. Подходы, связанные с имитационным моделированием, включают в себя построение модели рассматриваемого производства, определение её параметров и дальнейшее использование этой модели с целью нахождения переменных, отражающих функционирование производства [7]. В методах статистического моделирования применяют случайное последовательное улучшение имеющегося расписания путём выбора в каждом из последовательно разыгрываемых множеств возможных расписаний лучшего расписания и запоминания рекордного из них. Такие методы позволяют получать приближённые календарные планы, однако их точность сложно оценить, а также сложно гарантировать оптимальность полученного решения.

В случае же использования оптимизационных методов поиск оптимального распределения сырья по резервуарам и установкам, выбор оптимальных режимов работы установок осуществляется за счёт решения задачи математического программирования. В большинстве случаев такие задачи целочисленные [7, 8]. В связи с этим многие существующие на текущий момент подходы к решению таких задач требуют перебора большого числа возможных стратегий, либо же приводят к задачам оптимизации большой размерности [9], что осложняет применение данного подхода для реального внедрения на производстве. В данной работе полученная модель представляет собой задачу оптимального управления [10], которую также можно привести к нелинейной дискретной задаче оптимизации. В настоящей работе предлагается подход к решению задачи календарного планирования, основанный на её сведении к выпуклой задаче оптимизации. Это даёт возможность избежать наличия

локальных минимумов в задаче оптимизации, а также позволяет для её решения применять методы, позволяющие избежать полного перебора возможных стратегий.

1. Математическая модель производства

В основе предлагаемой математической модели управления производством находится ориентированный граф G с множеством вершин $V = \{1, 2, \dots, N\}$, в котором каждой вершине $i \in V$ соответствует тот или иной технологический объект (обрабатывающая сырьё установка, резервуар, узел смешения и пр.). Рёбрам графа G соответствуют элементы инфраструктуры предприятия, обеспечивающие перемещение промежуточной продукции между технологическими объектами (трубопроводы, транспортные линии и пр.). Каждое ребро $(i, j) \in V^2$ графа G характеризуется величиной потока $q_{ij}(t)$, зависящей от времени t . Положительное значение потока означает перемещение продукции в направлении, определяемом ориентацией ребра.

В модели учитываются три типа вершин графа: установки — объекты, на которых происходит обработка промежуточной продукции, резервуары — объекты, в которых хранится промежуточная продукция, и манифолды — объекты, играющие роль распределительных узлов в инфраструктуре предприятия. Обозначим через U , R и M подмножества вершин графа G , которым соответствуют установки предприятия, резервуары и манифолды соответственно.

Потоки, входящие и исходящие из каждой вершины графа, связаны между собой уравнениями. В представленной модели рассматриваются уравнения трёх видов: соотношения материального баланса, соотношения материального баланса с накоплением продукции и уравнения рецептов производства [11]. Каждой вершине графа соответствует некоторый набор уравнений. Их вид определяется типом вершины.

Пусть $q_{ki}(t)$, $k \in P_i \subset V$, — потоки, входящие в вершину $i \in V$, а потоки, исходящие из неё, обозначим через $q_{ik}(t)$, $k \in Q_i \subset V$. Уравнение материального баланса для вершины i означает равенство суммы входящих и исходящих потоков и имеет вид

$$\sum_{k \in P_i} q_{ki}(t) = \sum_{k \in Q_i} q_{ik}(t), \quad i \in U \cup M. \quad (1)$$

Тем самым требуется, чтобы равенства (1) выполнялись на всех установках и манифолдах производства.

Предположим, что на объекте производства, которому соответствует вершина $i \in R$, происходит накопление промежуточной продукции (рис. 1). Обозначим через $x_i(t)$ количество этой продукции в момент времени t . Тогда уравнение материального баланса с накоплением для

вершины i имеет вид

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{k \in P_i} q_{ki}(t) - \sum_{k \in Q_i} q_{ik}(t), \quad i \in R, \quad (2)$$

где $\dot{x}_i(t)$ — производная функции $x_i(t)$.

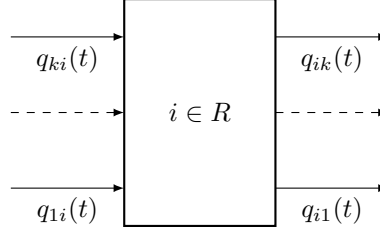


Рис. 1. Резервуар

Под уравнениями рецепта производства в вершине $i \in U$ понимается пропорциональная зависимость между каждым входящим (исходящим) потоком и суммарным входящим (исходящим) потоком этой вершины, т. е. имеют место соотношения

$$q_{ki} = \alpha_{ki} \sum_{s \in P_i} q_{si}, \quad k \in P_i, \quad q_{ik} = \beta_{ik} \sum_{s \in Q_i} q_{is}, \quad k \in Q_i, \quad i \in U, \quad (3)$$

где коэффициенты $\alpha_{ki}, \beta_{ik} \geq 0$ зависят, вообще говоря, от времени t .

Просуммировав по номеру k каждое из равенств (3), получаем

$$\sum_{k \in P_i} \alpha_{ki} = 1, \quad \sum_{k \in Q_i} \beta_{ik} = 1, \quad i \in U. \quad (4)$$

В дальнейшем будем считать эти равенства заведомо выполненными.

Из соотношений баланса (1) следует, что суммарный входящий поток равен суммарному исходящему потоку, поэтому уравнения рецептов (3) принимают вид

$$q_{ki} = \alpha_{ki} W_i, \quad k \in P_i, \quad q_{ik} = \beta_{ik} W_i, \quad k \in Q_i, \quad i \in U, \quad (5)$$

где $W_i = W_i(t)$ — суммарный поток установки в момент времени t . Заметим, что из равенств (4), (5) следует (1) для $i \in U$, поэтому от соотношений материального баланса на установках можно отказаться и оставить равенства (1) только для $i \in M$.

В настоящей модели допускается наличие не более двух режимов работы каждой установки $i \in U$, т. е. существование одного или двух рецептов функционирования. Рецепт характеризуется некоторым набором постоянных величин $\alpha_{ki}, k \in P_i$, и $\beta_{ik}, k \in Q_i$. Множество U распадается на два подмножества $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$, где $U^{(1)}$ — множество установок, имеющих только один рецепт работы, а $U^{(2)}$ — множество установок, имеющих

два рецепта и допускающих их переключение. Тем самым коэффициенты α_{ki} , $k \in P_i$, и β_{ik} , $k \in P_i$, в равенствах (5) являются известными постоянными величинами при всех $i \in U^{(1)}$. В случае двух режимов соотношения (5) для произвольного $i \in U^{(2)}$ принимают вид

$$q_{ki} = (s_i \alpha_{ki}^{(1)} + (1 - s_i) \alpha_{ki}^{(2)}) W_i, \quad q_{ik} = (s_i \beta_{ik}^{(1)} + (1 - s_i) \beta_{ik}^{(2)}) W_i, \quad (6)$$

где $\alpha_{ki}^{(1)}$, $\alpha_{ki}^{(2)}$, $\beta_{ik}^{(1)}$, $\beta_{ik}^{(2)}$ — известные постоянные величины, весовая функция $s_i = s_i(t)$ отвечает за выбор рецепта и равняется в каждый момент времени нулю или единице.

Управление установкой заключается в выборе её мощности работы $W_i(t)$ из допустимого диапазона $[W_{\min}^{(i)}, W_{\max}^{(i)}]$, а также в выборе режима работы $s_i(t) \in \{0, 1\}$ (при наличии двух рецептов). Цель управления состоит в том, чтобы к заданному моменту времени T выполнить план производства, т. е. накопить в резервуарах необходимое количество продукции. При этом предполагается, что время T невелико и план может быть выполнен с одним переключением установок или вовсе без переключений.

В множестве рёбер графа производства G выделим рёбра, не инцидентные ни одной установке, и обозначим их через $y_1, y_2, \dots, y_m$. Рёбра, инцидентные ровно одной установке, обозначим через $g_1, g_2, \dots, g_l$. Наличие рёбер, инцидентных двум установкам, в настоящей модели исключается.

2. Постановка задачи управления производством

Пусть E^n — евклидово пространство размерности n . Скалярное произведение векторов $a = (a^1, \dots, a^n)$, $b = (b^1, \dots, b^n) \in E^n$ записываем в виде $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^n a^i b^i$, норма вектора a определяется равенством

$$\|a\| = \left(\sum_{i=1}^n (a^i)^2 \right)^{1/2}.$$

Обозначим через $L_2^r[0, T]$ лебегово пространство вектор-функций $u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$ с координатами $u^i(t)$, интегрируемыми по Лебегу вместе со своими квадратами на отрезке $[0, T]$. Скалярное произведение в пространстве $L_2^r[0, T]$ имеет вид

$$\langle u, v \rangle = \int_0^T \sum_{i=1}^r u^i(t) v^i(t) dt,$$

а норма вектор-функции $u(t)$ —

$$\|u(t)\| = \left(\int_0^T \sum_{i=1}^r (u^i(t))^2 dt \right)^{1/2}.$$

Занумеруем произвольным образом от 1 до n все резервуары графа производства и положим $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in L_2^n[0, T]$, где $x_i(t)$ — запас продукции в i -м резервуаре. Пусть $y(t) \in L_2^m[0, T]$ — вектор потоков, не инцидентных установкам, а $g(t) \in L_2^l[0, T]$ — вектор потоков, инцидентных установкам производства.

Процесс планового производства нефтепродуктов к моменту времени T от начала производства описывается следующей задачей оптимального управления:

$$\dot{x}(t) = A_1 y(t) + C_1 g(t), \quad 0 < t < T, \quad x(0) = x_0, \quad (7)$$

$$x(t) \in X, \quad y(t) \in Y, \quad 0 < t < T, \quad (8)$$

$$A_2 y(t) + C_2 g(t) = 0, \quad 0 < t < T, \quad (9)$$

$$\|Zx(T) - z_T\|^2 \rightarrow \min, \quad (10)$$

где T — финальный момент времени, x_0 — начальное состояние резервуаров, $z_T \in \mathbb{E}^p$ — желаемое финальное состояние, матрицы $A_1 \in \mathbb{E}^{n \times m}$, $C_1 \in \mathbb{E}^{n \times l}$, $A_2 \in \mathbb{E}^{r \times m}$, $C_2 \in \mathbb{E}^{r \times l}$, $Z \in \mathbb{E}^{p \times n}$ заданы и заполняются по графу производства. Под решением задачи (7) будем понимать абсолютно непрерывную функцию $x(t)$, удовлетворяющую уравнению (7) почти всюду [10].

Дифференциальные уравнения (7) представляют собой уравнения баланса для совокупности резервуаров графа, т. е. являются векторной формой записи уравнений типа (2). Следующие после дифференциальных уравнений r однородных линейных алгебраических уравнений (9) описывают уравнения баланса на манифолдах и являются векторной формой записи соотношений (1). Вектор z_T задан и является вектором плановых значений продукции, которые должны быть запасены к моменту времени T . Его размерность p равна количеству резервуаров графа, для которых задан план производства. Матрица Z состоит из нулей и единиц и получается из матрицы $(I|0)$ размера $p \times n$ перестановкой столбцов, где I — единичная матрица порядка p , 0 — нулевая матрица размера $p \times (n - p)$.

Задающие ограничения на резервуары и потоки множества X и Y являются ограниченными параллелепипедами со сторонами, параллельными осям координат:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq x \leq x_2\}, \quad Y = \{y \in \mathbb{R}^m \mid y_1 \leq y \leq y_2\}.$$

Компоненты вектора $g(t)$ согласно формулам (5), (6) выражаются через функции управления мощностями установок $W_i(t)$, $i \in U$, и функции выбора режимов работы установок $s_i(t)$, $i \in U^{(2)}$. При этом

$$W_{\min}^{(i)} \leq W_i(t) \leq W_{\max}^{(i)}, \quad 0 \leq t \leq T, \quad i \in U,$$

а функции $s_i(t)$, $i \in U^{(2)}$, кусочно постоянные:

$$s_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t < t^{(i)}, \\ 0 & \text{при } t^{(i)} \leq t \leq T, \end{cases} \quad (11)$$

где $t^{(i)}$ — момент переключения режима работы установки $i \in U^{(2)}$.

3. Замена переменных. Овыпукленная модель

Задача (7)–(10) представляет собой задачу оптимального управления с фазовыми ограничениями, в которой роль управлений играют функции $W_i = W_i(t)$, $i \in U$, и $s_i = s_i(t)$, $i \in U^{(2)}$. В роли фазовых переменных выступают функции $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. В силу квадратичной зависимости (6) потоков, инцидентных установкам, от управлений динамическая система (7) нелинейна. Для её сведения к выпуклой системе будем предполагать, что $s_i(t) \in [0, 1]$, $i \in U^{(2)}$, а для её линеаризации сделаем следующую замену: для всех установок, на которых имеется один рецепт, положим

$$w_i(t) = W_i(t), \quad i \in U^{(1)}. \quad (12)$$

Для всех установок с двумя рецептами положим

$$w_i^1(t) = s_i(t)W_i(t), \quad w_i^2(t) = (1 - s_i(t))W_i(t), \quad i \in U^{(2)}. \quad (13)$$

В этом случае управление установкой будет заключаться в выборе управляющих параметров $w_i(t)$, $i \in U^{(1)}$, и $w_i^1(t)$, $w_i^2(t)$, $i \in U^{(2)}$, из допустимого диапазона, который представляет собой отрезок $[W_{\min}^{(i)}, W_{\max}^{(i)}]$ для всех управляющих параметров, инцидентных установкам с одним рецептом. Для установок с двумя рецептами имеют место следующие ограничения на управляющие параметры:

$$W_{\min}^{(i)} \leq w_i^1(t) + w_i^2(t) \leq W_{\max}^{(i)}.$$

С учётом новых обозначений равенства (6) принимают вид

$$q_{ki} = \alpha_{ki}^{(1)} w_i^1(t) + \alpha_{ki}^{(2)} w_i^2(t), \quad q_{ik} = \beta_{ki}^{(1)} w_i^1(t) + \beta_{ki}^{(2)} w_i^2(t).$$

Составим из функций $w_i(t)$, $i \in U^{(1)}$, и $w_i^1(t)$, $w_i^2(t)$, $i \in U^{(2)}$, определённых согласно (12) и (13), вектор-функцию $u(t)$, которую примем за управление. Итоговая задача оптимального управления формально

будет иметь тот же вид, что и в (7)–(10), однако благодаря приведённой выше замене данную задачу можно будет интерпретировать как выпуклую задачу оптимизации. Решая полученную задачу минимизации с ограничениями, можно найти управление как непрерывную функцию, зависящую от времени. Это связано с технической необходимостью перехода от исходной задачи с дискретным управлением к задаче в непрерывной форме. Однако в силу неединственности решения задачи оптимизации восстановление по полученному управлению его дискретного аналога без дополнительной информации может быть затруднительным. В этом случае для решения задачи календарного планирования при наличии не более одного переключения на установках предлагается воспользоваться подходом, связанным с регуляризацией исходной задачи [10], а именно: заменить целевой функционал (10) на

$$J_{\text{reg}}(u) = \|Zx(T) - z_T\|^2 + \alpha \langle c, u \rangle,$$

где

$$\langle c, u \rangle = \sum_{i \in U^{(2)}} \int_0^T (tw_i^1(t) + (T-t)w_i^2(t)) dt,$$

$\alpha > 0$ — некоторая фиксированная малая величина.

При $\alpha \rightarrow 0$ решение регуляризованной задачи сходится к решению исходной задачи, а такой вид минимизируемой функции позволяет учесть особенность дискретного вида управления. Далее полученную задачу минимизации с ограничениями предлагается решать методом внутренней точки [12], который относится к наиболее успешным на текущий момент методам решения задач оптимизации большой размерности при наличии ограничений [13].

4. Переход к дискретному управлению

От полученного непрерывного управления необходимо перейти к дискретному, в котором в любой момент времени $t \in [0, T]$ каждая установка работает в одном и только одном режиме.

Рассмотрим произвольную установку $i \in U^{(2)}$, допускающую переключение режимов. Пусть к моменту времени $t \in [0, T]$ она вырабатывает следующее количество продукции в первом и втором режимах соответственно:

$$M_i^1(t) = \int_0^t w_i^1(p) dp, \quad M_i^2(t) = \int_0^t w_i^2(p) dp.$$

В частности, $M_i^1(T)$ и $M_i^2(T)$ — общий объём продукции, выработанный установкой $i \in U$ в первом и втором режимах за весь интервал времени $[0, T]$. Величина $M_i^1(t)/M_i^1(T)$ представляет собой долю продукции, выработанную в первом режиме к моменту времени t , а разность $1 - M_i^2(t)/M_i^2(T)$ равна доле продукции второго режима, которую предстоит выработать за интервал времени $[t, T]$.

Для перехода к дискретному управлению вычислим время переключения режимов $t = t_i^*$ на установке $i \in U$ из соотношения

$$\frac{M_i^1(t)}{M_i^1(T)} = 1 - \frac{M_i^2(t)}{M_i^2(T)},$$

т. е. из равенства

$$\frac{1}{M_i^1(T)} \int_0^t w_i^1(p) dp + \frac{1}{M_i^2(T)} \int_0^t w_i^2(p) dp = 1.$$

В силу монотонности левой части данного уравнения по переменной t время переключения определено однозначно.

В дальнейшем будем считать, что при $0 \leq t < t_i^*$ установка $i \in U^{(2)}$ работает в первом режиме, при $t_i^* \leq t \leq T$ — во втором. Тем самым функция $s_i(t)$, обеспечивающая переключение режимов, определяется однозначно равенством (11), в котором $t^{(i)} = t_i^*$.

Определив функцию переключения режимов на всех установках, допускающих переключение, необходимо вычислить новые значения потоков продукции и запасов резервуаров, удовлетворяющих всем ограничениям задачи календарного планирования. Для этого следует заново минимизировать квадратичный целевой функционал J_{reg} с ограничениями (7)–(9). Принципиальное отличие от ранее решённой задачи (7)–(10) заключается в том, что функции $s_i(t)$ уже выбраны и потоки q_{ki} , q_{ik} , инцидентные установкам с переключением режимов, согласно формулам (6) зависят только от мощностей $W_i = W_i(t)$. Иначе говоря, требуется решить задачу (7)–(10), в которой минимизация целевого функционала происходит только за счёт выбора мощностей установок из допустимого диапазона значений. Эта задача выпуклая и может быть решена стандартными методами решения задач квадратичного программирования (см. [1]).

5. Пример задачи календарного планирования

На рис. 2 представлен граф производства, включающий четыре установки Y_i , $i = 1, \dots, 4$, семь узлов смешения продукции (I)–(VII) и семь

резервуаров накопления и хранения продукции R_i , $i = 1, \dots, 7$. Подписанными стрелками на графе отмечены входящие и выходящие потоки продукции.

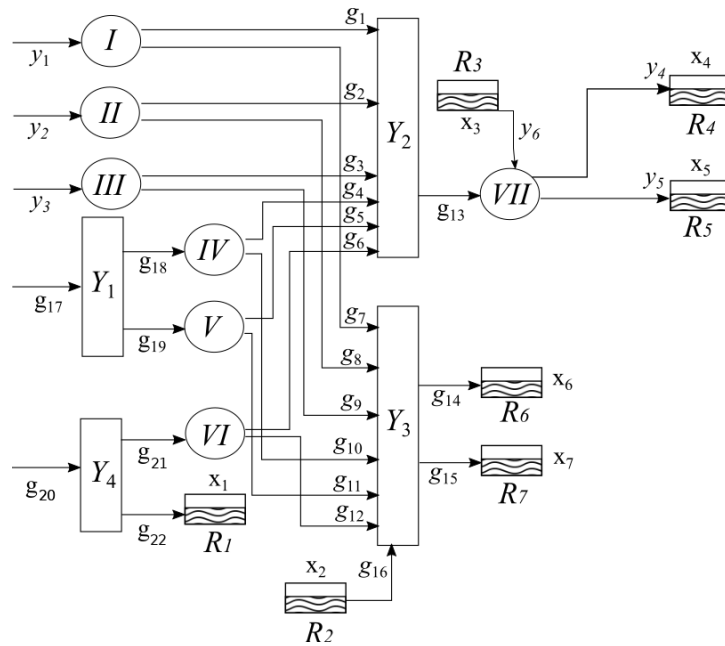


Рис. 2. Фрагмент графа предприятия

Отличительной особенностью этого графа является то, что среди четырёх установок первые три имеют изменяющиеся со временем потоки, а на четвёртой установке все потоки стационарны. Для всех потоков и резервуаров заданы диапазоны изменения их величин. Известны период времени $[0, T]$, на котором ведётся планирование, и плановый объём некоторых видов продукции за этот период, а также начальное значение запасов во всех резервуарах. На каждой установке заданы рецепты режимов работы.

Требуется определить мощности установок и их моменты переключений с одного режима работы на другой с целью выполнения плана производства разных видов продукции на заданном отрезке времени (календарное планирование).

Установки Y_1 , Y_2 и Y_3 могут работать в одном из двух режимов, суммарный поток, проходящий через установку, нефиксирован, а режим установки Y_4 неизменен, и суммарный поток, проходящий через установку, фиксирован и равен $W_4 = 0,96$.

Рассмотрим рецепты, заданные на установках. Начнём с первой установки. Суммарный поток на этой установке обозначим через $W_1(t) = w_1^1(t) + w_1^2(t)$. Известно, что $2,25 \leq W_1(t) \leq 2,35$. Тогда в первом режиме на этой установке

$$g_{17}(t) = 1 \cdot w_1^1(t), \quad g_{18}(t) = 1 \cdot w_1^1(t), \quad g_{19}(t) = 0 \cdot w_1^1(t),$$

а во втором

$$g_{17}(t) = 1 \cdot w_1^2(t), \quad g_{18}(t) = 0,4815 \cdot w_1^2(t), \quad g_{19}(t) = 0,5185 \cdot w_1^2(t).$$

За суммарную производительность второй установки примем $W_2(t) = w_2^1(t) + w_2^2(t)$. Тогда в первом режиме на второй установке

$$\begin{aligned} g_{13}(t) &= 1 \cdot w_2^1(t), \quad g_1(t) = 0,6592 \cdot w_2^1(t), \quad g_2(t) = 0,07 \cdot w_2^1(t), \\ g_3(t) &= 0,1008 \cdot w_2^1(t), \quad g_4(t) = 0,17 \cdot w_2^1(t), \\ g_5(t) &= 0 \cdot w_2^1(t), \quad g_6(t) = 0 \cdot w_2^1(t), \end{aligned}$$

во втором режиме на второй установке

$$\begin{aligned} g_{13}(t) &= 1 \cdot w_2^2(t), \quad g_1(t) = 0,7333 \cdot w_2^2(t), \quad g_2(t) = 0,0383 \cdot w_2^2(t), \\ g_3(t) &= 0,0583 \cdot w_2^2(t), \quad g_4(t) = 0,1204 \cdot w_2^2(t), \\ g_5(t) &= 0,0366 \cdot w_2^2(t), \quad g_6(t) = 0,0131 \cdot w_2^2(t). \end{aligned}$$

Аналогично в первом режиме на третьей установке с суммарной производительностью $W_3(t) = w_3^1(t) + w_3^2(t)$ имеем

$$\begin{aligned} g_{14}(t) &= 1 \cdot w_3^1(t), \quad g_{15}(t) = 0 \cdot w_3^1(t), \quad g_7(t) = 0,5268 \cdot w_3^1(t), \\ g_8(t) &= 0,0534 \cdot w_3^1(t), \quad g_9(t) = 0,0453 \cdot w_3^1(t), \quad g_{10}(t) = 0,3341 \cdot w_3^1(t), \\ g_{11}(t) &= 0 \cdot w_3^1(t), \quad g_{12}(t) = 0,0404 \cdot w_3^1(t), \quad g_{16}(t) = 0 \cdot w_3^1(t), \end{aligned}$$

а во втором режиме на третьей установке

$$\begin{aligned} g_{14}(t) &= 0 \cdot w_3^2(t), \quad g_{15}(t) = 1 \cdot w_3^2(t), \quad g_7(t) = 0 \cdot w_3^2(t), \\ g_8(t) &= 0,2219 \cdot w_3^2(t), \quad g_9(t) = 0,2383 \cdot w_3^2(t), \quad g_{10}(t) = 0 \cdot w_3^2(t), \\ g_{11}(t) &= 0,5078 \cdot w_3^2(t), \quad g_{12}(t) = 0 \cdot w_3^2(t), \quad g_{16}(t) = 0,032 \cdot w_3^2(t). \end{aligned}$$

Четвёртая установка имеет постоянную производительность $W_4(t) = w_4(t) = 0,96$ и постоянно работает в следующем режиме:

$$\begin{aligned} g_{22} &= 0,877 \cdot w_4 = 0,877 \cdot 0,96 = 0,84192, \\ g_{21} &= 0,123 \cdot w_4 = 0,11808, \quad g_{20} = 1 \cdot w_4 = 0,96. \end{aligned}$$

Также предполагаются заданными ограничения на входящие потоки в первые три узла смешения:

$$6,6 \leq y_1 \leq 6,9, \quad 0,7 \leq y_2 \leq 0,73, \quad 0,9 \leq y_3 \leq 0,95.$$

В начальный момент времени все установки работают в первом режиме (каждая в своём). Дифференциальные уравнения из (1) имеют для этого примера вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0,84192, & \dot{x}_2 &= -g_{16}, & \dot{x}_3 &= -y_6, \\ \dot{x}_4 &= y_4, & \dot{x}_5 &= y_5, & \dot{x}_6 &= g_{14}, & \dot{x}_7 &= g_{15}.\end{aligned}$$

Алгебраические уравнения, возникающие из-за наличия узлов смешения, имеют вид

$$\begin{aligned}y_1 - g_1 - g_7 &= 0, & y_2 - g_2 - g_8 &= 0, \\ y_3 - g_3 - g_9 &= 0, & g_{18} - g_{10} - g_4 &= 0, \\ g_{19} - g_{11} - g_5 &= 0, & 0,11808 - g_{12} - g_6 &= 0, \\ 0,9998y_5 - (g_{13} - y_4) &= 0, & g_{13} + y_6 - y_4 - y_5 &= 0.\end{aligned}$$

По плану производства количество продукции типов 1, 4, 5, 6, 7 за весь период планирования равно 7,57728, 34,94, 42,55, 11,7, 8,5 соответственно.

Таблица 1

**Результаты расчётов количества
выработанной продукции**

Тип	1	4	5	6	7
Количество	7,5573	34,9330	42,5430	11,6974	8,4941

К рассматриваемому примеру применён предложенный выше метод решения задачи календарного планирования. В табл. 1 представлены результаты расчётов плановых величин. Из таблицы видно, что максимальная погрешность их вычисления не превосходит 0,02.

Несложно показать, что в описанном примере аналитическое решение единственно и точное время переключения установок 1, 2, 3 совпадает и равно 4. В табл. 2 представлены полученное в результате расчётов время переключения на сетках с разным числом узлов τ . Из таблицы следует, что отклонение расчётного времени переключения от точных значений уменьшается с ростом τ .

Таблица 2

**Время переключения каждой из установок
при разных значениях числа узлов τ по времени**

τ	Установка 1	Установка 2	Установка 3
45	3,9	4,1	3,9
90	3,95	4,05	3,95
180	3,975	4,025	3,975

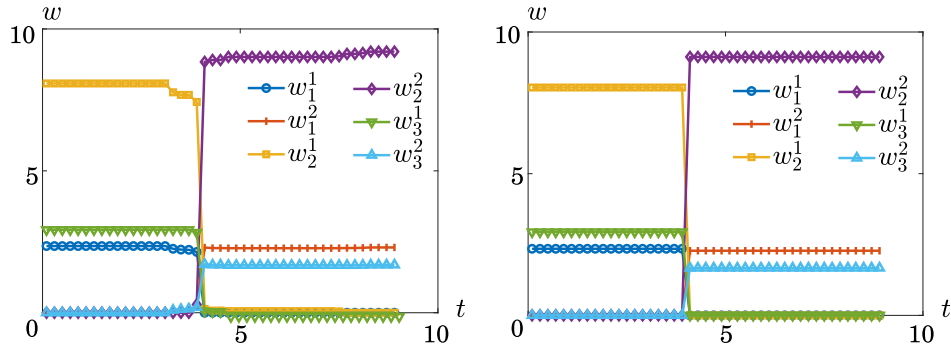


Рис. 3. Производительность установок до дискретизации управления (слева) и после дискретизации управления (справа)

Графики производительности установок в зависимости от времени изображены на рис. 3.

Нетрудно видеть, что графики производительности установок слева (до дискретизации) не могут быть использованы для управления производством. Действительно, в интервале времени $t \in (3, 4)$ вторая установка одновременно работает в двух режимах, что не может быть реализовано на практике. После дискретизации (графики справа) управление имеет ярко выраженный вид «ступенек», что соответствует реальному режиму работы установок.

На рис. 4 представлены графики запасов в резервуарах: слева — для резервуаров 2 и 3, справа — для остальных. Отметим, что значения запасов в резервуарах до дискретизации отличаются от их значений после дискретизации незначительно.

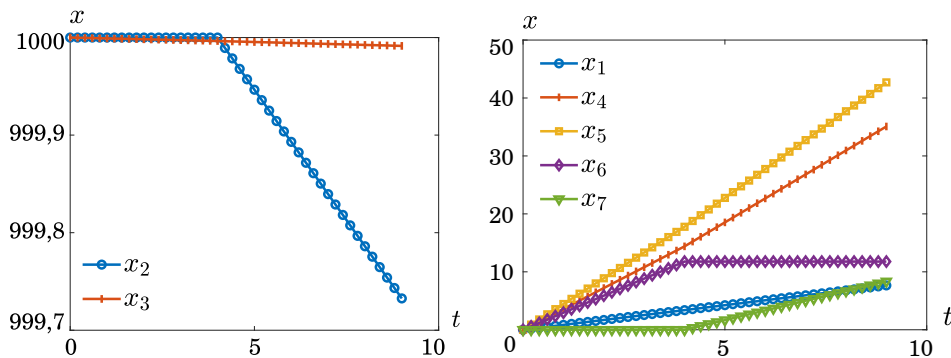


Рис. 4. Графики запасов в резервуарах после дискретизации

Заключение

В работе предложен оригинальный подход к решению задачи календарного планирования, в рамках которого предлагается исходную задачу дискретной оптимизации привести к выпуклой задаче непрерывной минимизации, а затем вернуться к решению дискретной задачи с помощью специально разработанного алгоритма. Отметим, что такой подход позволяет использовать разработанный на текущий момент аппарат для решения задач оптимизации [10, 13].

Предложенный в работе пример является участком нефтеперерабатывающего завода. Решение, представленное на рис. 3, 4, получено в результате расчётов на однопроцессорном компьютере в однопоточном режиме. Весь завод состоит более чем из тысячи объектов. Возможно применение алгоритма к расчёту календарного плана всего производства без потери точности вычислений, что потребует увеличения расчётного времени и, как следствие, переход к параллельным вычислениям на многопроцессорных комплексах.

Метод внутренней точки, использованный для получения календарного плана, является одношаговым итерационным алгоритмом условной минимизации. Как во всяком итерационном алгоритме, распараллеливанию подлежат вычисления внутри итерации, связанные с умножением матриц, умножением матрицы на вектор и т. п. Расчётное время напрямую зависит от числа итераций, необходимых для достижения требуемой точности. Число итераций, в свою очередь, зависит от выбора итерационных параметров и начального приближения.

Заметим, что время расчёта также зависит от выбора шага сетки по времени на отрезке $[0, T]$. Вычисления на грубых сетках требуют значительно меньше времени, чем на сетках с мелким шагом, поэтому при построении календарного плана имеет смысл проводить расчёты на сгущающихся сетках: сначала выполнить расчёт на грубой сетке и взять его результаты в качестве начального приближения для дальнейших вычислений.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт бюджетов организаций, указанных авторами на первой странице статьи. Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Литература

1. **Смирнов А. Н.** Объёмное календарное планирование — основа оперативного управления // Вестн. Санкт-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. 2005. № 1–2. С. 161–170.
2. **Смирнов А. Н.** Математическая модель объёмного календарного планирования технологически зависимых операций // Автоматика и телемеханика. 1985. № 10. С. 108–115.
3. **Дудников Е. Е., Цодиков Ю. М.** Типовые задачи оперативного управления непрерывным производством. М.: Энергия, 1979. 272 с.
4. **Кувыкин В. И.** Оптимальное планирование и анализ моделей непрерывного производства // Автоматизация в промышленности. 2015. № 8. С. 161–170.
5. **Антамошкина Е. А., Шарыпова К. В.** Эвристический алгоритм составления расписаний дискретных производств // Информатика и системы управления. 2010. Т. 23, № 1. С. 67–73.
6. **Левин В. И.** Некоторые мысли о теории расписаний // Вестн. Тамбов. гос. техн. ун-та. 2005. Т. 11. № 2. С. 341–347.
7. **Шайдуллин Р. А., Хохлов А. С., Проказина М. В.** Имитационные модели в комплексе календарного планирования НПЗ // Автоматизация в промышленности. 2012. № 10. С. 15–21.
8. **Kaneva O. N., Zykina A. V., Volodchenko M. M.** The problem of mixed integer programming for optimal schedule of petroleum products manufacturing // Proc. Workshop Applied Mathematics and Fundamental Computer Science (Omsk, Russia, Apr. 24–29, 2021). Aachen: RWTH Aachen Univ., 2021. Paper ID 2. 7 p. (CEUR Workshop Proc.; Vol. 2928). URL: ceur-ws.org/vol-2928/paper2.pdf (accessed: Oct. 1, 2024).
9. **Прилуцкий М. Х.** Многокритериальное распределение однородного ресурса с иерархических системах // Автоматика и телемеханика. 1996. № 2. С. 139–146.
10. **Васильев Ф. П.** Методы оптимизации. В 2-х кн. М.: МЦНМО, 2011. 624 с.; 434 с.
11. **Савенкова Н. П., Артемьева Л. А., Лапонин В. С., Мокин А. Ю., Дряженков А. А.** Математическое моделирование сведения материальных балансов // Деловой журн. Neftegaz.RU. 2018. № 4. С. 91.
12. **Евтушенко Ю. Г.** Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. М.: Наука, 1982. 412 с.
13. **Nocedal J., Wright S. J.** Numerical optimization. New York: Springer, 2006. 664 p.

Савенкова Надежда Петровна
Мокин Андрей Юрьевич
Дряженков Андрей Александрович
Артемьева Людмила Анатольевна

Статья поступила
22 марта 2024 г.
После доработки —
27 апреля 2024 г.
Принята к публикации
22 июня 2024 г.

AN ALGORITHM TO SEARCH A SOLUTION
TO THE PRODUCTION SCHEDULING PROBLEM

N. P. Savenkova^{1, a}, *A. Yu. Mokin*^{1, 2, b},
A. A. Dryazhenkov^{1, 2, c}, and *L. A. Artemyeva*^{1, 2, d}

¹Lomonosov Moscow State University,
1 Bld. 52 Leninskie Gory, 119991 Moscow, Russia

²Moscow Centre of Fundamental and Applied Mathematics,
1 Leninskie Gory, 119991 Moscow, Russia

E-mail: ^a*nsavenkova@cs.msu.su*, ^b*mknandrew@mail.ru*,
^c*andrja@yandex.ru*, ^d*artemieva.luda@gmail.com*

Abstract. A mathematical model of raw materials processing is proposed. The production consists of units processing raw materials, storage tanks, and mixing units. The processing units are assumed to operate in one of two known modes. Switching from one mode to another can be carried out no more than once. The problem of finding the optimal capacity of production at each of units, as well as the time of switching units from one operating mode to another is formulated in a form of discrete optimization problem. The solution of this problem should ensure an achievement of the specified production plan. A method for its solution is proposed, including a transition to a convex statement, as well as an algorithm for discretizing the obtained control. Tab. 2, illustr. 4, bibliogr. 13.

Keywords: task scheduling, material balance, optimal control, discrete optimization, quadratic programming.

References

1. **A. N. Smirnov**, Three-dimensional scheduling — The basis for operational management, *Vestn. Sankt-Peterburg. Univ., Ser. 10*, No. 1–2, 161–170 (2005) [Russian].
2. **A. N. Smirnov**, Mathematical model of three-dimensional scheduling of technologically linked activities, *Autom. Telemekh.*, No. 10, 108–115 (1985) [Russian] [*Autom. Remote Control* **46**, 1297–1303 (1985)].

3. **E. E. Dudnikov** and **Yu. M. Tsodikov**, *Typical Tasks in Operational Management of Continuous Production* (Ehnergiya, Moscow, 1979) [Russian].
4. **V. I. Kuvykin**, Optimal scheduling and analysis of continuous production models, *Avtom. Prom.*, No. 8, 161–170 (2015) [Russian].
5. **E. A. Antamoshkina** and **K. V. Sharypova**, Heuristic algorithm for scheduling discrete production, *Inform. Sist. Upr.* **23** (1), 67–73 (2010) [Russian].
6. **V. I. Levin**, Some thoughts on scheduling theory, *Vestn. Tambov. Gos. Tekh. Univ.* **11** (2), 341–347 (2005) [Russian].
7. **R. A. Shaidullin**, **A. S. Khokhlov**, and **M. V. Prokazina**, Simulation models in the complex of oil refinery scheduling, *Avtom. Prom.*, No. 10, 15–21 (2012) [Russian].
8. **O. N. Kaneva**, **A. V. Zykina**, and **M. M. Volodchenko**, The problem of mixed integer programming for optimal schedule of petroleum products manufacturing, in *Proc. Workshop Applied Mathematics and Fundamental Computer Science, Omsk, Russia, Apr. 24–29, 2021* (RWTH Aachen Univ., Aachen, 2021), ID 2 (CEUR Workshop Proc., V. 2928), URL: ceur-ws.org/vol-2928/paper2.pdf (accessed: Oct. 1, 2024).
9. **M. Kh. Prilutskii**, Multicriteria distribution of a homogeneous resource in hierarchical systems, *Avtom. Telemekh.*, No. 2, 139–146 (1996) [Russian] [*Autom. Remote Control* **57** (2), Pt. 2, 266–271 (1996)].
10. **F. P. Vasilyev**, *Optimization Methods*, in 2 books (MTsNMO, Moscow, 2011) [Russian].
11. **N. P. Savenkova**, **L. A. Artemyeva**, **V. S. Laponin**, **A. Yu. Mokin**, and **A. A. Dryazhenkov**, Mathematical modeling of material balances, *Bus. Zh. Neftegaz.RU*, No. 4, 91 (2018) [Russian].
12. **Yu. G. Evtushenko**, *Methods for Solution of Extremal Problems and Its Application in Optimization Systems* (Nauka, Moscow, 1982) [Russian].
13. **J. Nocedal** and **S. J. Wright**, *Numerical optimization* (Springer, New York, 2006).

Nadezhda P. Savenkova
 Andrey Yu. Mokin
 Andrey A. Dryazhenkov
 Lyudmila A. Artemyeva

Received March 22, 2024
 Revised April 27, 2024
 Accepted June 22, 2024