

ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 31 № 4 2024

Новосибирск
Издательство Института математики

УТОЧНЁННЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ АЛГОРИТМОВ УПАКОВКИ 2-ГИСТОГРАММ В ПОЛОСУ

С. А. Назаренко

Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: s.nazarenko@ngs.nsu.ru

Аннотация. Рассматривается NP-трудная задача, в которой требуется упаковать гистограммы из двух столбиков в полосу минимальной длины единичной высоты. Высота каждого столбика положительная и не превосходит 1. Эта задача, называемая в англоязычной литературе Two-Bar Charts Packing Problem, является обобщением задачи упаковки в контейнеры и задачи двумерной векторной упаковки. Доказываются уточнённые оценки точности и трудоёмкости для некоторых ранее разработанных приближённых полиномиальных алгоритмов для Two-Bar Charts Packing Problem и её частных случаев. Показана достижимость этих оценок. Кроме того, рассматривается задача упаковки неограниченного числа гистограмм k различных типов. При этом оценивается не длина упаковки, а её плотность, и предлагается полиномиальный алгоритм решения последней задачи в случае $k = \text{const}$. Ил. 12, библиогр. 26.

Ключевые слова: гистограмма, упаковка в полосу, NP-трудная задача, априорная оценка, достижимость.

Введение

Задача упаковки гистограмм в полосу (bar charts packing problem, ВСРР) возникла при оптимизации инвестиционного портфеля в нефтегазовой сфере [1]. Предположим, что территория месторождения разбита на кластеры, для каждого из которых известен проект его разработки. Проект характеризуется, в частности, ежегодными объёмами добычи нефти. Таким образом, если известен год начала проекта, то известны и объёмы добычи в первый и все последующие годы реализации проекта. График добычи нефти по каждому проекту может быть представлен

в виде гистограммы, в которой высота столбика соответствует объёму добычи в соответствующий год. Необходимо определить год запуска каждого проекта, чтобы общее время выполнения всех проектов было минимально, а ежегодный объём добычи не превышал заданного значения, обусловленного, например, пропускной способностью трубопровода.

Описанная проблема сводится к поиску упаковки гистограмм в часть полубесконечной полосы минимальной длины. Ранее исследовался частный случай задачи, называемый 2-BCPP, когда каждая гистограмма состоит из двух столбиков. Для удобства будем обозначать гистограмму с двумя столбиками через 2-Г. Задача 2-BCPP впервые сформулирована в [2], а затем изучена в [3–7]. Пусть имеется полубесконечная горизонтальная полоса единичной высоты и множество, состоящее из n 2-Г. Разобьём полосу на одинаковые ячейки единичной высоты и ширины. Все столбики гистограмм имеют единичную ширину и положительную высоту, не превышающую 1. В допустимой упаковке столбики каждой гистограммы могут перемещаться по вертикали, но неразрывны по горизонтали, и их нельзя переставлять местами. Более того, в допустимой упаковке сумма высот столбиков, попавших в одну ячейку, не превосходит 1. Задача 2-BCPP заключается в нахождении допустимой упаковки n 2-Г в минимальное число ячеек. На рис. 1 представлен пример допустимой упаковки трёх гистограмм в 4 ячейки, т. е. длина упаковки равна 4.

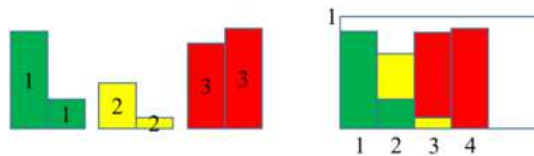


Рис. 1. Пример допустимой упаковки трёх 2-Г

Похожими задачами, которые хорошо изучены на данный момент и которые обобщает задача 2-BCPP, являются задача упаковки в контейнеры (bin packing problem, BPP) [8–16] и задача двумерной векторной упаковки (two-dimensional vector packing problem, 2-DVPP) [17–20].

В классической одномерной задаче упаковки в контейнеры BPP задано множество предметов L , размер каждого предмета, а также множество одинаковых контейнеров единичной ёмкости. Требуется разместить все предметы в минимальное число контейнеров. BPP является частным случаем задачи 2-BCPP, когда каждая 2-Г состоит из столбиков одинаковой высоты. Если $P \neq NP$, то задача BPP $(\frac{3}{2} - \varepsilon)$ -неаппроксимируема для любого $\varepsilon > 0$ [8, 9]. Как показано в [10], $\frac{3}{2}$ -приближённое решение может быть найдено алгоритмом First Fit Decreasing (FFD). В алгоритме FFD

предметы сначала нумеруются в порядке невозрастания размеров, затем просматриваются в порядке нумерации, и текущий предмет кладётся в первый контейнер, куда он помещается. В 2007 г. доказано, что алгоритм FFD использует не более $\frac{11}{9} \text{OPT}(L) + \frac{6}{9}$ контейнеров, где $\text{OPT}(L)$ — минимальное число контейнеров для упаковки предметов множества L , и найден пример достижимости этой оценки [11]. Модифицированная версия алгоритма FFD (modified first fit decreasing, MFFD) группирует предметы по размеру и пакует отдельно предметы разных групп. Джонсон и Гэри, построившие алгоритм MFFD, показали, что он использует не более $\frac{71}{60} \text{OPT}(L) + \frac{31}{6}$ контейнеров [12]. В дальнейшем аддитивная константа уменьшена до 1 [13]. В [14] для задачи ВРР предложена асимптотическая полиномиальная аппроксимационная схема (APTAS) и показано, что для любого $\varepsilon > 0$ существует алгоритм линейной трудоёмкости, который использует не более $(1 + \varepsilon) \text{OPT}(L)$ контейнеров. Также для задачи ВРР построена асимптотическая вполне полиномиальная аппроксимационная схема [15] и аддитивный приближённый алгоритм, который строит упаковку длины не более $\text{OPT}(L) + O(\log \text{OPT}(L))$ [16].

Задача 2-DVPP представляет собой обобщение задачи ВРР и частный случай 2-BCPP. В этом случае каждая пара 2-Г может располагаться в контейнере одна над другой. При этом предметы и контейнеры характеризуются двумя параметрами. Требуется упаковать все предметы в минимальное число контейнеров, не нарушая ограничений по обоим параметрам. В 2003 г. представлен 2-приближённый алгоритм для 2-DVPP, трудоёмкость которого равна $O(n \log n)$ [17]. Подробный обзор приближённых алгоритмов для 2-DVPP можно найти в [18]. Лучший алгоритм строит $(\frac{3}{2} + \varepsilon)$ -приближённое решение для любого $\varepsilon > 0$ [19]. В 1997 г. доказано, что не существует схемы APTAS для задачи 2-DVPP, если $P \neq NP$ [20].

С другой стороны, 2-BCPP является частным случаем задачи построения расписания для выполнения проектов с ограниченным однородным возобновляемым ресурсом (resource-constrained project scheduling problem, RCPSP) [21]. В 2-BCPP каждый проект состоит из двух работ единичной длительности, которые выполняются одна за другой без прерывания. Такой проект можно представить в виде 2-Г, в которой высота столбика соответствует величине потребляемого возобновляемого ресурса. Требуется определить момент начала каждого проекта таким образом, чтобы выполнить все проекты за минимальное время, учитывая ограничение на ресурс. Задача RCPSP NP-трудна, и для неё не известны полиномиальные алгоритмы с гарантированными оценками точности. Как правило, для построения приближённого решения разрабатываются эвристические алгоритмы, и проводится их апостериорный анализ [22–25].

Задача 2-ВСРР достаточно новая и рассматривается в небольшом числе работ [2–7, 26]. В [2] предложен алгоритм линейной трудоёмкости, который строит упаковку длины не более $2 \text{OPT} + 1$, где OPT — минимальная длина упаковки 2-Г. В [3–5] исследовались частные случаи задачи 2-ВСРР, когда каждая 2-Г содержит хотя бы один столбик выше $\frac{1}{2}$ и — дополнительно — когда все 2-Г либо невозрастающие, либо неубывающие. В [3] предлагаются два полиномиальных $\frac{3}{2}$ -приближённых алгоритма для решения этих задач. Авторы статьи [5] доказали, что 2-ВСРР, когда каждая 2-Г содержит столбик высоты более $\frac{1}{2}$, остаётся NP-трудной в сильном смысле. В этой же работе предложен алгоритм трудоёмкости $O(n^{2.5})$, который строит упаковку длины не более $\frac{4}{3} \text{OPT} + \frac{4}{3}$. В [6] предложен алгоритм трудоёмкости $O(n \log n)$ для поиска линейно упорядоченной упаковки, в которой первые столбики всех 2-Г находятся в разных ячейках длины не более $\text{OPT} + 1$. В [7] рассматриваются классы задач, которые являются как обобщениями 2-ВСРР, так и её частными случаями. Используя известные алгоритмы, авторы находят верхнюю и нижнюю границы значения целевой функции для задачи 2-ВСРР, а также предлагают две модели целочисленного линейного программирования и проводят численный эксперимент на шести различных базах данных. В [26] исследуется задача упаковки гистограмм, состоящих из трёх столбиков. Предлагается алгоритм линейной трудоёмкости, который строит упаковку длины не более $3 \text{OPT} + 2$. Если каждая гистограмма содержит столбик выше $\frac{1}{2}$, то доказано, что задача остаётся NP-трудной.

Результатами данной работы являются уточнённые оценки для ранее разработанных алгоритмов как для общего, так и для частных случаев задачи 2-ВСРР. Найдены примеры достижимости оценок. Для частного случая, когда высота каждого столбика не превышает $h \leq \frac{1}{2}$, предлагается алгоритм A_h линейной трудоёмкости, который строит упаковку длины не более $\frac{1}{1-h} \text{OPT} + 2$. Приводится пример асимптотической достижимости этой оценки. Кроме того, рассматривается задача упаковки неограниченного числа 2-Г, принадлежащих к одному из $k = \text{const}$ типов. В этой задаче необходимо найти упаковку максимальной плотности. Для этого разработан алгоритм K , который строит оптимальную упаковку с трудоёмкостью $O(v_k^3)$, где v_k — верхняя оценка на число вариантов заполнения одной ячейки первыми столбиками 2-Г k типов.

1. Постановка задачи

Пусть заданы горизонтальная полубесконечная (ограниченная слева) полоса единичной высоты и множество гистограмм S , $|S| = n$, состоящих из двух столбиков. Для каждой 2-Г $i \in S$ обозначим высоту первого

(левого) столбика через $a_i \in (0, 1]$, а высоту второго (правого) — через $b_i \in (0, 1]$. Разобьём полосу на одинаковые прямоугольники единичной высоты и ширины, которые назовём *ячейками*, и пронумеруем их натуральными числами, начиная с левого края полосы.

Определение 1. 2-Г i *невозрастающая (неубывающая)*, если $a_i \geq b_i$ ($a_i \leq b_i$).

Определение 2. Упаковкой множества гистограмм S назовём функцию $p: S \rightarrow \mathbb{Z}^+$, которая каждой гистограмме i ставит в соответствие целое число $p(i)$, соответствующее номеру ячейки полосы, в которую попадает её первый столбик. Таким образом, в упаковке p столбики 2-Г i занимают ячейки $p(i)$ и $p(i) + 1$.

Определение 3. Упаковка *допустима*, если сумма высот столбиков, попавших в каждую ячейку полосы, не превосходит 1.

Далее рассматриваются только допустимые упаковки.

Определение 4. Длиной $L(p)$ упаковки p назовём число ячеек полосы, в которых расположен хотя бы один столбик.

Можно считать, что любая упаковка p начинается с первой ячейки и в каждой из $L(p)$ ячеек находится хотя бы один столбик. Если это не так, то всю упаковку или её часть можно сдвинуть влево.

Задача 2-ВСРР состоит в построении допустимой упаковки множества гистограмм S минимальной длины (т. е. с использованием минимального числа ячеек).

Впервые задача 2-ВСРР сформулирована в виде задачи булева линейного программирования в [2]. Ниже повторим эту формулировку для удобства читателя. Введём переменные

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если первый столбик 2-Г } i \text{ находится в ячейке } j, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{если ячейка } j \text{ содержит хотя бы один столбик,} \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда 2-ВСРР запишется в следующем виде:

$$\sum_j y_j \rightarrow \min_{x_{ij}, y_j \in \{0,1\}}, \quad (1)$$

$$\sum_j x_{ij} = 1, \quad i \in S, \quad (2)$$

$$\sum_i a_i x_{ij} + \sum_k b_k x_{kj-1} \leq y_j, \quad 1 \leq j \leq L(p). \quad (3)$$

Целевая функция (1) — это число ячеек, занятых хотя бы одним столбиком. Условия (2) гарантируют, что все 2-Г из множества S упакованы в полосу. Из неравенств (3) следует, что в каждой ячейке сумма высот столбиков не превышает высоты полосы.

2. Уточнённые оценки

2.1. Алгоритм A .

Жадный алгоритм G . В [2] предложен жадный алгоритм GA трудоёмкости $O(n^2)$, который используется в качестве процедуры в алгоритме A [2]. В настоящей работе предлагается использовать другую версию жадного алгоритма, которая называется G [1]. Применение этого алгоритма на втором этапе алгоритма A позволит реализовать его с меньшей трудоёмкостью. Работа G заключается в следующем. Пусть P — произвольно упорядоченное множество элементов из S . Первый элемент из P размещается в ячейках 1 и 2 и удаляется из P . Удалённые из P элементы уже упакованы, и они в дальнейшем не перемещаются. Далее выполняется следующая типовая процедура. Для первой гистограммы из P ищется самое левое положение, не нарушающее допустимости упаковки, и порядка 2-Г. Тем самым для произвольной 2-Г j справедливы неравенства $p(j) \geq p(i)$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, j-1\}$ (см. рис. 1). Расположение гистограммы в упаковке фиксируется, а сама 2-Г удаляется из P . Алгоритм останавливается, когда $P = \emptyset$. Трудоёмкость G равна $O(n)$.

Очевидно, что в зависимости от порядка гистограмм в множестве P алгоритм G может строить разные решения.

Уточнённая оценка точности для алгоритма A .

Определение 5. 2-Г назовём *большой*, если хотя бы один её столбик выше $\frac{1}{2}$. Также *большим* назовём сам столбик выше $\frac{1}{2}$; иначе он *маленький*.

Напомним алгоритм A для решения задачи 2-BCPP из [2]. Он состоит из трёх этапов. Первый подготовительный этап заключается в объединении гистограмм таким образом, чтобы по возможности каждая 2-Г стала большой. Для этого пара гистограмм i и j , у которых $a_i, b_i, a_j, b_j \leq \frac{1}{2}$, объединяются в одну новую 2-Г с высотой столбиков $a_i + a_j$ и $b_i + b_j$. В результате множество гистограмм S преобразуется: из него удаляются две гистограммы i и j и добавляется одна новая 2-Г. За один просмотр гистограмм у всех 2-Г, кроме, возможно, одной, хотя бы один столбик станет большим. На втором этапе алгоритма обновлённое множество 2-Г разбивается на два подмножества S_1 и S_2 . В S_1 помещаются невозрастающие, а в S_2 — неубывающие гистограммы (рис. 2b). Множество элементов

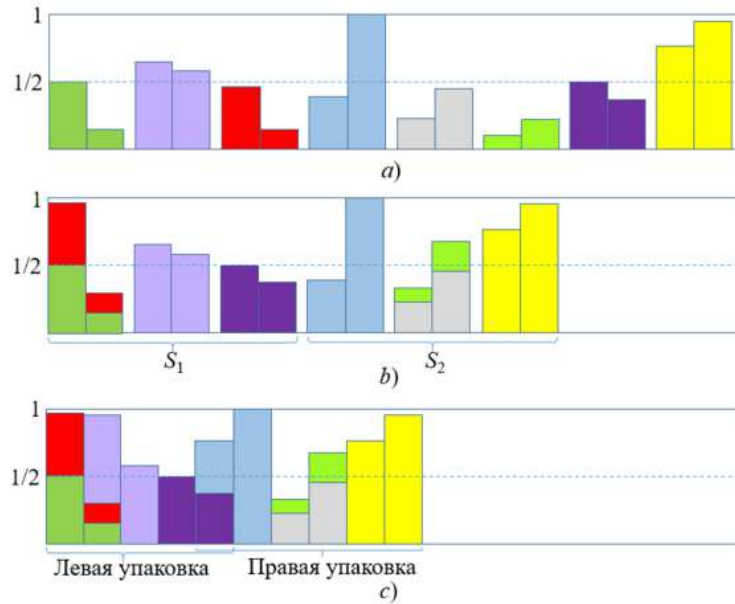


Рис. 2. Иллюстрация работы алгоритма A : а) множество S ; б) множества объединённых гистограмм; в) упаковка, построенная алгоритмом A

из S_1 пакуется с помощью алгоритма G слева направо, а множество элементов из S_2 пакуется аналогом алгоритма G справа налево. Отметим, что для упаковки множеств S_1 и S_2 в [2] использовался алгоритм GA квадратичной трудоёмкости. Получаются две упаковки: левая и правая. На третьем этапе алгоритма A правая упаковка элементов множества S_2 сдвигается максимально влево без нарушения допустимости упаковки (рис. 2с).

Теорема 1. Алгоритм A с трудоёмкостью $O(n)$ строит 2-приближённое решение для задачи 2-BCPP, и эта оценка достижима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [2] доказано, что в результате работы алгоритма A плотность упаковки всех ячеек, кроме, возможно, одной, больше $\frac{1}{2}$. Таким образом, алгоритм строит упаковку для 2-BCPP, длина которой не более $2 \text{OPT} + 1$. Оценка на длину построенной упаковки остаётся справедливой, если на втором этапе упаковка элементов множеств S_1 и S_2 осуществляется алгоритмом G . Доказательство этого утверждения совпадает с доказательством теоремы 1 из [2], если заменить алгоритм GA на G .

Обозначим через b высоту последнего столбика в левой упаковке, а через a — высоту первого столбика в правой упаковке. Кроме того, пусть

$X = \sum_{i \in S} a_i$, $Y = \sum_{i \in S} b_i$, а $L_A(n)$ — длина упаковки, построенной алгоритмом A . Так как после сдвига правой упаковки максимально влево, в худшем случае плотность всех ячеек кроме одной больше $\frac{1}{2}$, справедливы неравенства

$$\frac{X + Y}{L_A(n) - 1} > \frac{X + Y - a - b}{L_A(n) - 1} > \frac{1}{2}.$$

Помимо этого, очевидно, что $\text{OPT} \geq X + Y$, откуда получаем

$$\frac{\text{OPT}}{L_A(n) - 1} > \frac{1}{2}$$

или $L_A(n) < 2\text{OPT} + 1$. Однако, так как длина упаковки — это целое число, окончательно имеем $L_A(n) \leq 2\text{OPT}$.

Первый этап алгоритма A может быть реализован с трудоёмкостью $O(n)$ следующим образом. Положим $M = \emptyset$. Просматриваем гистограммы в порядке нумерации. Если у очередной 2-Г первый столбик большой и больше второго, то помещаем её в множество S_1 . Если у очередной 2-Г второй столбик большой и больше первого, то помещаем её в множество S_2 . Если оба столбика маленькие и $M = \emptyset$, то помещаем текущую гистограмму в M и продолжаем просмотр. Если оба столбика маленькие и $M \neq \emptyset$, то объединяем текущую гистограмму с гистограммой, находящейся в M . Если полученная новая объединённая гистограмма имеет хотя бы один столбик больше $\frac{1}{2}$, то исключаем её из M и помещаем в S_1 , если её первый столбик больше второго, иначе помещаем её в S_2 . Если же после объединения текущей гистограммы с гистограммой из M получается новая гистограмма, в которой оба столбика маленькие, то оставляем новую объединённую гистограмму в M и переходим к рассмотрению следующей гистограммы из P . Таким образом, в результате одного просмотра всех гистограмм будут сформированы множества S_1 и S_2 .

На втором этапе с помощью алгоритма G независимо строятся упаковки гистограмм из множеств S_1 и S_2 . На каждом шаге алгоритма G к уже построенной упаковке добавляется одна гистограмма. В силу того, что большие 2-Г невозрастающие (неубывающие) в соответствующих упаковках, в каждой ячейке упаковок множеств S_1 и S_2 могут находиться не более двух столбиков. Значит, для произвольной гистограммы f достаточно проверить выполнение неравенства $a_f + b_{f-1} \leq 1$ для определения её лучшего допустимого положения. Если неравенство выполняется, то первый столбик 2-Г f размещается в последней непустой

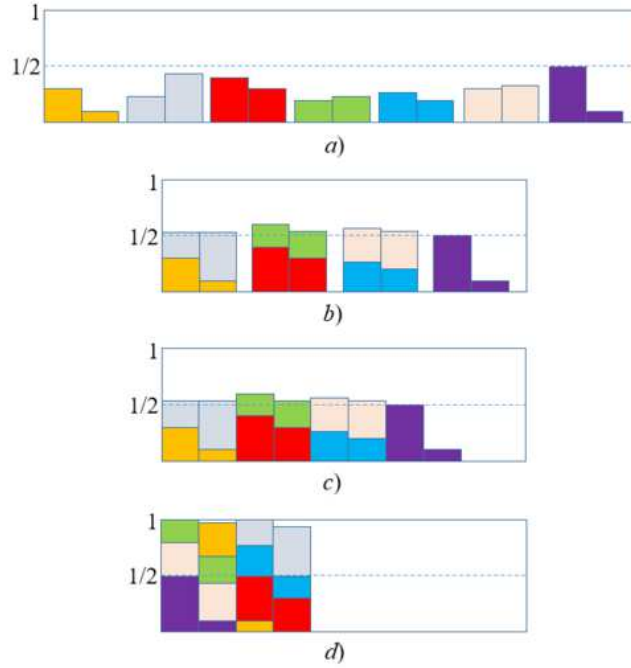


Рис. 3. Пример достижимости оценки $L_A(n) = 2 \text{ OPT}$: а) множество S ; б) множество S^* объединённых невозрастающих 2-Г; в) упаковка, построенная алгоритмом A ; г) оптимальная упаковка

ячейке упаковки, иначе — в первой пустой ячейке. Таким образом, трудоёмкость процесса нахождения лучшего положения для текущей гистограммы ограничена величиной $O(1)$. Число шагов алгоритма G не превосходит n . Следовательно, трудоёмкость второго этапа алгоритма равна $O(n)$. Трудоёмкость третьего этапа равна $O(1)$. Таким образом, трудоёмкость алгоритма A равна $O(n)$.

Рассмотрим следующий пример (рис. 3а). Пусть $|S| = 7$ и гистограммы имеют следующие высоты столбиков: $a_1 = 0,3$, $b_1 = 0,1$, $a_2 = \frac{7}{30}$, $b_2 = \frac{13}{30}$, $a_3 = 0,4$, $b_3 = 0,3$, $a_4 = 0,2$, $b_4 = \frac{7}{30}$, $a_5 = \frac{4}{15}$, $b_5 = 0,2$, $a_6 = 0,3$, $b_6 = \frac{1}{3}$, $a_7 = 0,5$, $b_7 = 0,1$. На первом этапе алгоритм A просматривает 2-Г в порядке нумерации и объединяет их, пока все они, кроме последней, не станут большими. В результате объединяются 2-Г 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, формируя новый обновлённый список гистограмм S^* , где $a_1^* = 0,3 + \frac{7}{30} = \frac{8}{15}$, $b_1^* = 0,1 + \frac{13}{30} = \frac{8}{15}$, $a_2^* = 0,6$, $b_2^* = \frac{8}{15}$, $a_3^* = \frac{17}{30}$, $b_3^* = \frac{8}{15}$, $a_4^* = 0,5$, $b_4^* = 0,1$ (рис. 3б).

Все 2-Г в S^* невозрастающие, поэтому правая упаковка пуста. На втором этапе 2-Г пакуются алгоритмом G . Первая 2-Г размещается в ячейках 1 и 2 и удаляется из S^* . Так как для второй 2-Г сумма $a_2^* + b_1^* = \frac{17}{15}$ больше единицы, алгоритм для неё ставит в соответствие ячейку полосы с номером 3 и удаляет её из S^* . Аналогично алгоритм для третьей и четвёртой 2-Г ставит в соответствие ячейки полосы с номерами 5 и 7 соответственно и завершает свою работу (рис. 3с). Длина построенной упаковки $L_A(n) = 8$. Однако 2-Г из множества S могут быть упакованы оптимально в четыре ячейки (рис. 3d). При этом сумма высот столбиков в первой ячейке равна $0,5 + 0,3 + 0,2 = 1$, во второй ячейке $0,1 + \frac{1}{3} + \frac{7}{30} + 0,3 = \frac{29}{30}$, в третьей ячейке $0,1 + 0,4 + \frac{4}{15} + \frac{7}{30} = 1$, а в последней ячейке оптимальной упаковки $0,3 + 0,2 + \frac{13}{30} = \frac{28}{30}$. Таким образом, в рассмотренном примере $L_A(n) = 2 \text{ OPT}$. Теорема 1 доказана.

После первого этапа алгоритма A несколько гистограмм объединяются в одну гистограмму, что уменьшает число допустимых упаковок. Кроме того, длина упаковки, строящейся алгоритмом G , существенно зависит от порядка элементов в списке P . В [2] проведён следующий численный эксперимент. Для оценки влияния процедуры объединения столбиков в алгоритме A реализован алгоритм, который назовём A_h , состоящий только из второго и третьего этапов алгоритма A . Алгоритм A_h за один просмотр разбивает все гистограммы на два множества — невозрастающих и неубывающих 2-Г. При этом соответствующие множества S_1 и S_2 содержат произвольные 2-Г (в алгоритме A после первого этапа эти множества содержали большие 2-Г). Затем алгоритм A_h строит левую и правую упаковки с помощью алгоритма G и сдвигает правую упаковку максимально влево, не нарушая допустимости.

2.2. Упаковка маленьких гистограмм. Через $2\text{-BCPP}|h$ обозначим частный случай задачи 2-BCPP, когда высота обоих столбиков каждой гистограммы не превосходит $h \leq \frac{1}{2}$, и докажем следующую теорему.

Теорема 2. Для задачи $2\text{-BCPP}|h$ алгоритм A_h с трудоёмкостью $O(n)$ строит упаковку длины не более $\frac{1}{1-h} \text{ OPT} + 2$, и эта оценка асимптотически достижима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть высота всех столбиков не превосходит h . Сначала A_h строит левую упаковку невозрастающих гистограмм, размещая 2-Г одну над другой в первых двух ячейках, пока возможно. После этого возможны два случая:

- 1) во вторую ячейку не помещается первый столбик очередной 2-Г;
- 2) во вторую ячейку можно поместить первый столбик очередной 2-Г.

В первом случае плотность упаковки первых двух ячеек больше $1 - h$. Во втором случае в результате дальнейшей работы алгоритма во вторую

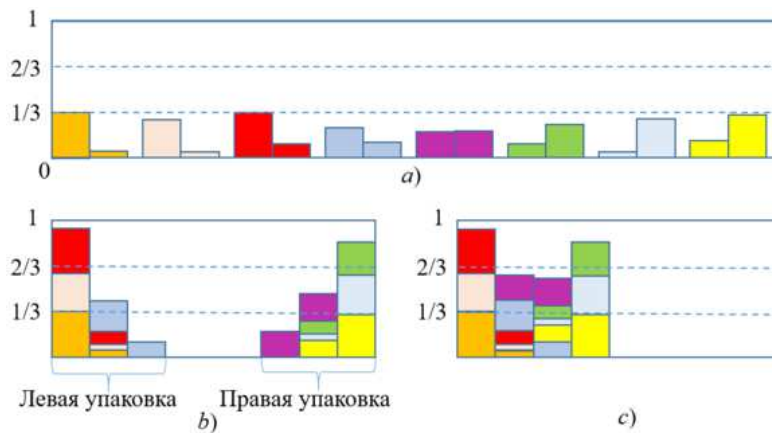


Рис. 4. Пример работы алгоритма A_h при $h = \frac{1}{3}$: а) множество 2-Г; б) левая и правая упаковки; в) упаковка, построенная алгоритмом A_h

ячейку попадают первые столбики других 2-Г, пока незаполненное пространство ячейки не станет меньше h . Значит, и в этом случае плотность первых двух ячеек больше $1 - h$.

Далее A_h аналогично заполняет следующие ячейки. При размещении последней гистограммы в левой упаковке ячейки, в которые попадут её столбики, могут иметь плотность не более $1 - h$ (рис. 4б). Таким образом, в каждой ячейке левой упаковки, кроме, возможно, двух последних, плотность больше $1 - h$.

Правая упаковка неубывающих гистограмм строится аналогичным способом зеркально (справа налево), обеспечивая плотность всех ячеек правой упаковки, кроме, возможно, первых двух, больше $1 - h$.

На последнем этапе алгоритма A_h правая упаковка сдвигается максимально влево, не нарушая допустимости упаковки. Обозначим через a_1 и b_1 суммарную высоту столбиков в предпоследней и последней ячейках левой упаковки соответственно, а через a_2 и b_2 — суммарную высоту столбиков во второй и первой ячейках правой упаковки соответственно. После сдвига правой упаковки максимально влево получим один из следующих случаев:

- 1) $b_1 + b_2 > 1$;
- 2) $a_1 + b_2 \leq 1$, $b_1 + a_2 \leq 1$;
- 3) $b_1 + b_2 \leq 1$.

В первом случае левая и правая упаковки не могут объединиться ни в одной ячейке. Это означает, что совокупная плотность последней ячейки левой упаковки и первой ячейки правой упаковки больше $\frac{1}{2}$. Однако в силу неубывания и невозрастания гистограмм в разных упаковках

предпоследняя ячейка левой упаковки и вторая ячейка правой упаковки также имеют совокупную плотность больше $\frac{1}{2}$. Таким образом, четыре ячейки получившейся упаковки имеют плотность больше $\frac{1}{2}$, а все остальные ячейки имеют плотность более $1 - h$, что даёт оценку $\frac{1}{1-h} \text{OPT} + 2$.

Во втором случае упаковки объединились в двух ячейках, плотность которых может быть менее $1 - h$. Плотность же всех остальных ячеек, кроме общих двух, более $1 - h$, что также позволяет оценить длину упаковки как $\frac{1}{1-h} \text{OPT} + 2$.

В третьем случае упаковки объединились только в одной ячейке. Без ограничения общности положим, что упаковки нельзя объединить в двух ячейках из-за невыполнения неравенства $a_1 + b_2 \leq 1$. Тогда общая ячейка двух упаковок и ячейка с предыдущим номером имеют совокупную плотность больше $\frac{1}{2}$. Плотность ячейки со следующим номером после общей ячейки может быть менее $1 - h$. Плотность же всех остальных ячеек более $1 - h$, что также даёт оценку $\frac{1}{1-h} \text{OPT} + 2$. Оценка $\frac{1}{1-h} \text{OPT} + 2$ получена во всех рассмотренных случаях.

В результате одного просмотра всех гистограмм будут сформированы множества S_1 и S_2 . Затем строится упаковка элементов множеств S_1 и S_2 с помощью алгоритма G . На каждом шаге алгоритма G к уже построенной упаковке добавляется одна гистограмма. Трудоёмкость процесса нахождения лучшего положения для текущей гистограммы ограничена функцией $O(1)$. Число шагов алгоритма G не более n . Следовательно, трудоёмкость построения левой и правой упаковки равна $O(n)$. Трудоёмкость сдвига правой упаковки равна $O(1)$. Таким образом, алгоритм A_h имеет трудоёмкость, равную $O(n)$.

Рассмотрим следующий пример. Пусть 1 (высота полосы) делится на h без остатка. Имеем $\frac{3}{h}$ гистограмм, из которых $\frac{2}{h} - 1$ невозрастающие с высотами столбиков $a_i = \frac{h}{2}$, $b_i = \frac{h}{2} - \varepsilon$, $i \in \{1, 2, \dots, \frac{2}{h} - 1\}$, $\frac{1}{h}$ невозрастающие с высотами столбиков $a_i = h$, $b_i = h$, $i \in \{\frac{2}{h}, \frac{2}{h} + 1, \dots, \frac{3}{h} - 1\}$, и одна неубывающая с высотами столбиков $a_{3/h} = \frac{h}{2}$, $b_{3/h} = \frac{h}{2} + \varepsilon(\frac{2}{h} - 1)$. Для любого $0 < \varepsilon < \frac{h^2}{4-2h}$ выполняются неравенства $0 < \varepsilon(\frac{2}{h} - 1) < \frac{h}{2}$. Значит, после размещения алгоритмом первых $\frac{2}{h} - 1$ гистограмм незанятым окажется пространство $\frac{h}{2}$ в первой ячейке, более $\frac{h}{2}$ и менее h — во второй. Затем будут упакованы $\frac{1}{h}$ невозрастающих гистограмм с высотой обоих столбиков h , начиная с третьей ячейки, так как размещение хотя бы одной ещё не упакованной невозрастающей 2-Г в первых двух ячейках нарушит допустимость. Заметим, что после сдвига правой упаковки, состоящей из единственной неубывающей 2-Г, общих ячеек у левой и правой упаковок нет. Длина приближённой упаковки, построенной

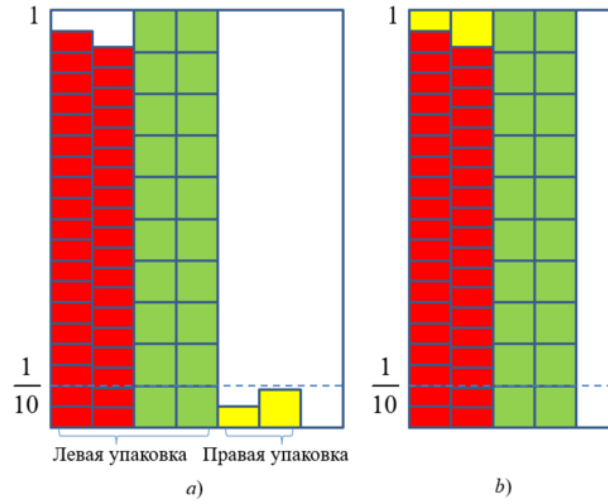


Рис. 5. Пример асимптотической достижимости оценки для алгоритма A_h , $h = 0,1$, $\varepsilon = 0,002$: а) упаковка, построенная алгоритмом A_h ; б) оптимальная упаковка

алгоритмом A_h для данного примера, равна $L_{A_h}(n) = 6$ (рис. 5а). Оптимальным образом гистограммы упаковываются в 4 ячейки (рис. 5б). Таким образом, при $h \rightarrow 0$ достигается оценка $\text{OPT} + 2$ на длину упаковки, построенной алгоритмом. Теорема 2 доказана.

2.3. Уточнённая оценка точности для алгоритма M . В работе [3] впервые предложен алгоритм M . Приведём его краткое описание для решения задачи 2-ВСРР в случае, когда каждая 2-Г большая и невозрастающая.

Определение 6. Две 2-Г образуют t -объединение, если t ячеек упаковки содержат столбики обеих 2-Г.

Пусть каждая 2-Г большая и невозрастающая. Тогда в каждой ячейке может находиться не более двух столбиков, а две 2-Г могут образовать только 1-объединение. Очевидно, что n 2-Г до упаковки занимают $2n$ ячеек полосы. Каждое 1-объединение уменьшает длину упаковки на 1.

По множеству гистограмм S построим граф $G_1 = (V_1, E_1)$, в котором вершины соответствуют гистограммам, $|V_1| = |S| = n$, при этом $(i, j) \in E_1$, если 2-Г i и j могут образовать 1-объединение. На первом шаге алгоритма M в графе G_1 строится максимальное паросочетание мощности m_1 . Результатом являются $n - m_1$ 2- и 3-Г, которые соответствуют

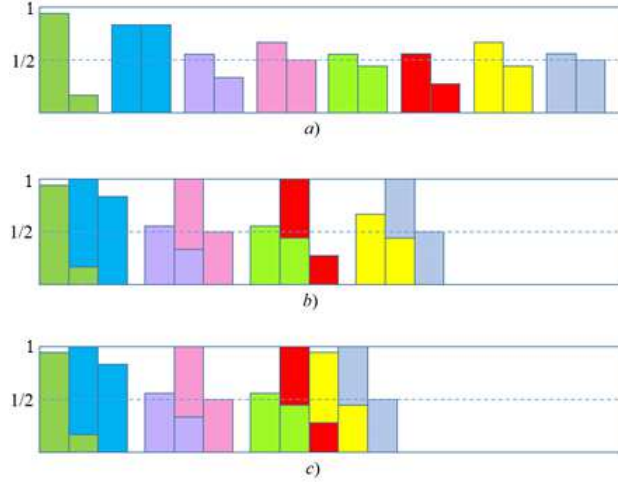


Рис. 6. Пример работы алгоритма M : а) множество больших невозрастающих 2- Γ ; б) первое паросочетание, $m_1 = 4$; в) второе паросочетание, $m_2 = 1$

множеству вершин V_2 нового графа $G_2 = (V_2, E_2)$. В графе G_2 имеется ребро (i, j) , если гистограммы i и j могут образовать 1-объединение. На произвольном шаге k строится очередное максимальное паросочетание мощности m_k в соответствующем графе G_k . Алгоритм останавливается, если следующий граф G_{k+1} пустой, $E_{k+1} = \emptyset$. На рис. 6 изображён пример работы алгоритма M .

Если в графе G_{k+1} нет рёбер, то длина упаковки, построенной алгоритмом M , равна

$$L_M(n) = 2n - m_1 - m_2 - \dots - m_k. \quad (4)$$

В [3] доказано, что оптимальную упаковку можно также построить путём последовательного нахождения паросочетаний. Пусть в оптимальной упаковке на шаге k строится паросочетание мощности m_k^* . Тогда длина оптимальной упаковки равна

$$\text{ОПТ} = 2n - m_1^* - m_2^* - \dots - m_q^*, \quad q \geq 1. \quad (5)$$

Кроме того, в [3] приводится доказательство неравенств

$$m_2^* + \dots + m_q^* \leq m_1^* \leq m_1, \quad (6)$$

а также того факта, что алгоритм M строит $3/2$ -приближённое решение для задачи 2-ВСПР, если все 2- Γ большие невозрастающие. Оказывается, эту оценку можно уменьшить, что показано в следующей теореме.

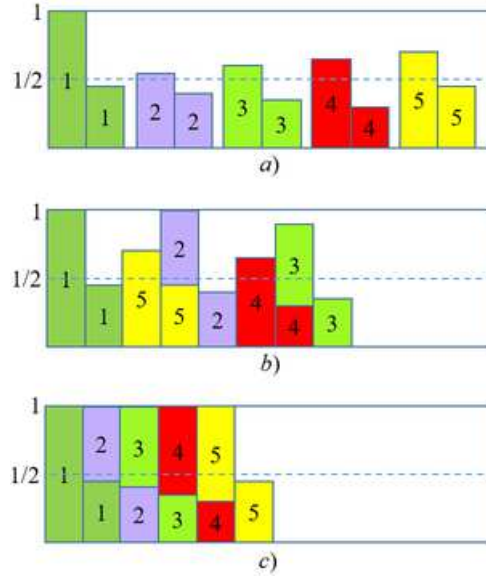


Рис. 7. Пример достижимости $L_M(n) = \frac{3}{2} \text{OPT} - 1$: a) множество S ; b) упаковка, построенная алгоритмом M ; c) оптимальная упаковка.

Теорема 3. Если все 2-Г большие и невозрастающие, то для 2-ВСРР алгоритм M строит упаковку, длина которой не превосходит $\frac{3}{2} \text{OPT} - 1$, и эта оценка достижима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (4)–(6) следует, что $L_M(n) \leq 2n - m_1$, $\text{OPT} \geq 2n - 2m_1$, или $m_1 \geq n - \frac{1}{2} \text{OPT}$. Тогда

$$L_M(n) \leq 2n - m_1 \leq \frac{1}{2} \text{OPT} + n.$$

Очевидно, что n больших неубывающих 2-Г могут образовать не более $n - 1$ 1-объединений. Значит, $\text{OPT} \geq 2n - (n - 1) = n + 1$. Окончательно имеем

$$L_M(n) \leq \frac{1}{2} \text{OPT} + n \leq \frac{3}{2} \text{OPT} - 1.$$

Рассмотрим следующий пример. Пусть $|S| = 5$ и гистограммы имеют следующие высоты столбиков: $a_1 = 1$, $b_1 = 0,45$, $a_2 = 0,55$, $b_2 = 0,4$, $a_3 = 0,6$, $b_3 = 0,35$, $a_4 = 0,65$, $b_4 = 0,3$, $a_5 = 0,7$, $b_5 = 0,45$ (рис. 7a). Очевидно, что мощность первого паросочетания m_1 не более 2, так как множество S состоит из пяти 2-Г. Если в первом паросочетании, построенном алгоритмом, 1-объединение образуют 2-Г 2 и 5, 3 и 4, то другие 1-объединения невозможны, и алгоритм останавливается. Длина приближённой упаковки $L_M(n) = 8$ (рис. 7b). Оптимальная упаковка может

быть получена, если 2-Г последовательно 1-объединятся в порядке нумерации, её длина $\text{OPT} = 6$ (рис. 7с). Таким образом, $L_M(n) = \frac{3}{2} \text{OPT} - 1$. Теорема 3 доказана.

3. Упаковка 2-Г ограниченного числа типов

Пусть имеется неограниченное число 2-Г, которые принадлежат к одному из k типов, $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$. В частности, если $k = 1$, то все 2-Г одинаковые. Так как гистограмм бесконечно много, длина упаковки не имеет смысла, поэтому будем оценивать её плотность. Если $k = \text{const}$, то число различных комбинаций заполнения каждой ячейки конечно. Следовательно, в любой упаковке рано или поздно встретится ячейка, комбинация первых столбиков 2-Г в которой уже встречалась в некоторой ячейке с меньшим номером (рис. 8). Очевидно, что если упаковка строится детерминированным алгоритмом, то начиная с этой ячейки в упаковке будет бесконечно повторяться заполнение некоторой последовательности ячеек. Такую последовательность назовём *регулярной частью* упаковки.

Определение 7. В каждой упаковке бесконечного числа 2-Г k типов встречается последовательность ячеек, в которой первая и последняя ячейки заполнены одинаковой комбинацией первых столбиков 2-Г. *Регулярной частью* упаковки назовём первую такую последовательность без последней ячейки.

Задача 2-BCPP $|k$ состоит в построении допустимой упаковки неограниченного числа 2-Г k типов максимальной плотности.

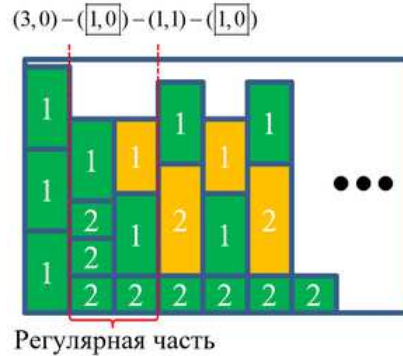


Рис. 8. Пример регулярной части в упаковке 2-Г двух типов

3.1. 2-Г одного типа. В этом случае $k = 1$. В [1] доказано следующее утверждение. Если задан порядок упаковки невозрастающих (неубывающих) гистограмм, то жадный алгоритм G (или его аналог, пакующий

гистограммы справа налево) строит упаковку минимальной длины. Воспользуемся этим утверждением. Так как 2-Г принадлежат к единственному типу, все они либо неубывающие, либо невозрастающие. Кроме того, можно считать, что для упаковки одинаковых 2-Г задан любой порядок. Таким образом, справедливо

Утверждение 1. *Если все 2-Г одного типа, то алгоритм G строит упаковку максимальной плотности для задачи 2-BCPP[1].*

3.2. 2-Г $k \geq 2$ типов. Рассмотрим случай $k = 2$ и затем обобщим результат. Имеем неограниченное число 2-Г двух типов с высотами столбиков a_1, b_1 и a_2, b_2 соответственно. Обозначим через s_1 и s_2 число 2-Г первого и второго типов соответственно, которые могут 2-объединиться, не нарушая допустимости, т. е. $s_1 = \lfloor \max^{-1}\{a_1, b_1\} \rfloor$, $s_2 = \lfloor \max^{-1}\{a_2, b_2\} \rfloor$. Предположим, что $s_1, s_2 \geq 1$, иначе либо ни одна 2-Г не может быть упакована в полосу, либо получим случай, рассмотренный в п. 3.1. Обозначим через x_i (y_i) число первых столбиков 2-Г первого (второго) типа в ячейке i . Будем присваивать код (x_i, y_i) каждому варианту заполнения ячейки i . Число допустимых комбинаций x_i и y_i ограничено величиной $v = (s_1 + 1)(s_2 + 1)$. Так как гистограммы состоят из двух столбиков, каждому коду (x_i, y_i) соответствует величина $h_{x_i, y_i} = b_1 x_i + b_2 y_i$, отражающая сумму высот столбиков, которые попадут в следующую ячейку. Любая упаковка может быть представлена последовательностью кодов до нахождения регулярной части.

Определение 8. *Доминирующей упаковкой для кода (x_i, y_i) назовём последовательность кодов, оканчивающуюся на (x_i, y_i) , с максимальной плотностью.*

В этом пункте предлагается алгоритм K для решения 2-BCPP[2]. Работа алгоритма заключается в последовательном нахождении доминирующей упаковки для каждого кода заполнения текущей ячейки. Сначала алгоритм K рассматривает всевозможные коды заполнения первой ячейки (x_1, y_1) , $x_1 \in \{0, 1, \dots, s_1\}$, $y_1 \in \{0, 1, \dots, s_2\}$. Если для очередного кода нарушается допустимость в первой или второй ячейке, то алгоритм удаляет код. Затем для каждого значения h_{x_1, y_1} находятся все допустимые комбинации заполнения второй ячейки (x_2, y_2) . Заметим, что в третьей ячейке всегда будет высота h_{x_2, y_2} , которая уже появлялась во второй ячейке при каких-то значениях x_1 и y_1 . Из последовательностей кодов, оканчивающихся на (x_2, y_2) , выбирается доминирующая упаковка (рис. 9). Если среди доминирующих упаковок встречается повторение кода в последовательности или последним является код $(0, 0)$,

то соответствующая упаковка с найденной регулярной частью запоминается. Для остальных доминирующих упаковок рассматриваются всевозможные (x_3, y_3) (рис. 10) и т. д., пока для очередной ячейки во всех доминирующих упаковках не будет найдена регулярная часть (рис. 11). Затем все упаковки, в которых была найдена регулярная часть, сравниваются, и выбирается упаковка с максимальной плотностью (рис. 12).

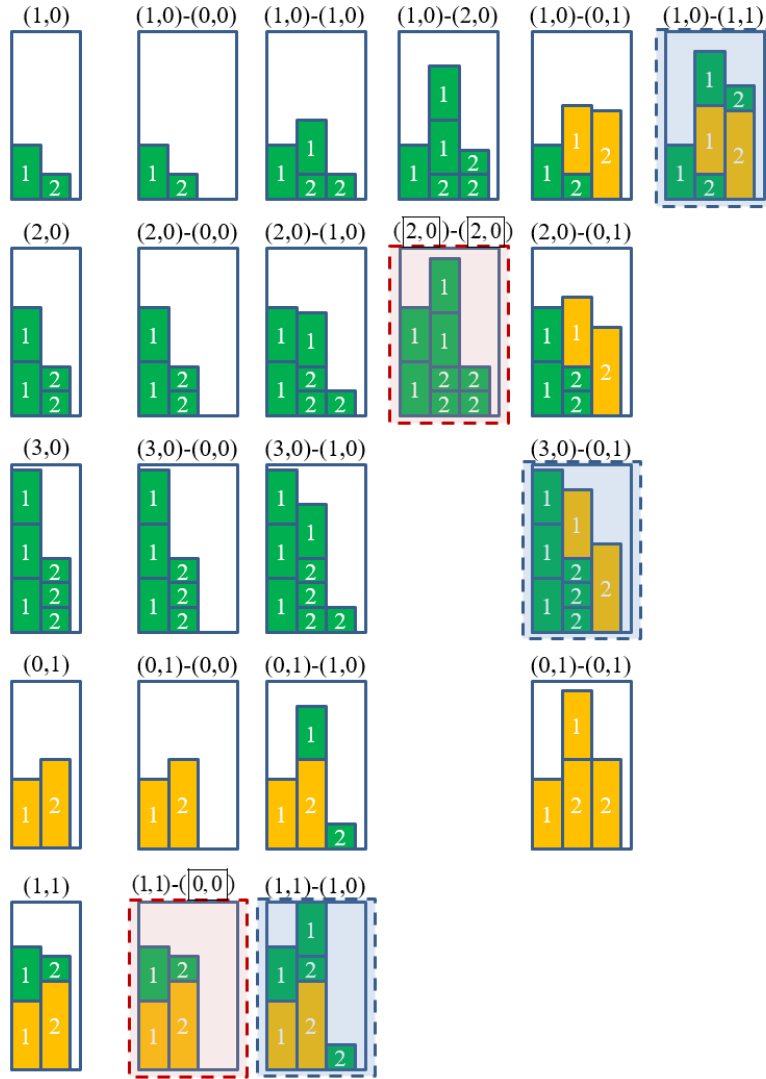


Рис. 9. Пример нахождения доминирующих упаковок для всех комбинаций заполнения второй ячейки

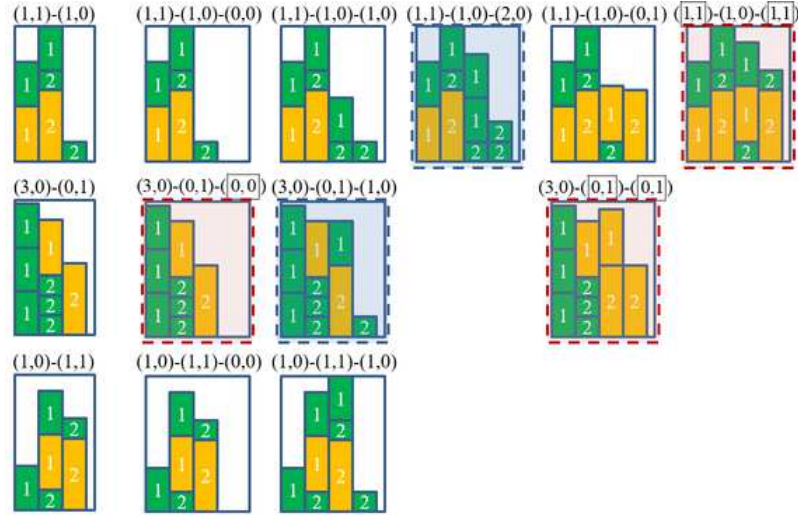


Рис. 10. Пример нахождения доминирующих упаковок для всех комбинаций заполнения третьей ячейки

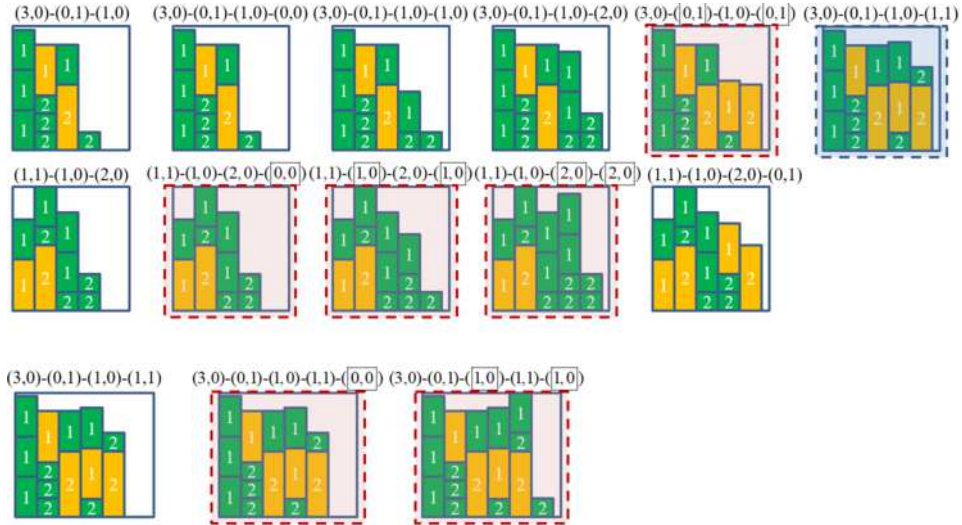
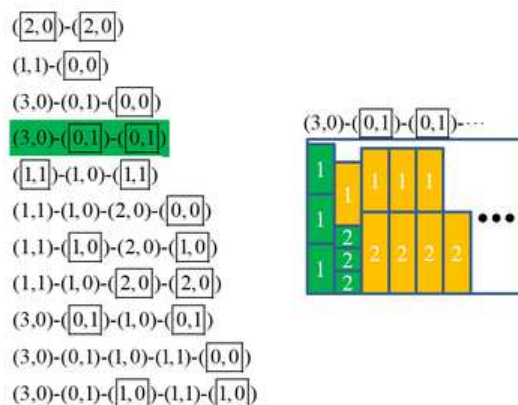


Рис. 11. Пример нахождения доминирующих упаковок для всех комбинаций заполнения четвёртой и пятой ячеек

На рис. 9–11 в упаковках, выделенных красной штриховой линией, имеется регулярная часть (код в прямоугольнике); упаковки, выделенные синей штриховой линией, доминирующие без регулярной части.



Теорема 4. Алгоритм K строит упаковку максимальной плотности с трудоёмкостью $O(v^3)$ для задачи 2-BCPP|2.

В ходе работы алгоритма ищется одна доминирующая упаковка для каждого кода заполнения текущей ячейки. Число возможных кодов заполнения каждой ячейки не более $O(v)$. Для каждого кода рассматриваются не более $O(v)$ вариантов упаковки. Следовательно, трудоёмкость нахождения всех доминирующих упаковок для одной ячейки равняется $O(v^2)$. Количество итераций не более $O(v)$, так как далее гарантированно встретится повторение кода в последовательности. Таким образом, трудоёмкость алгоритма K равна $O(v^3)$. Теорема 4 доказана.

Замечание 1. Алгоритм K может быть применён для нахождения точного решения задачи 2-BCPP $|k$ для любого $k \geq 2$, $k \in \mathbb{N}$. При этом число допустимых комбинаций первых столбиков 2-Г k типов ограничено числом $v_k = (s_1 + 1)(s_2 + 1) \dots (s_k + 1)$. Трудоемкость алгоритма, когда имеется k типов 2-Г, равна $O(v_k^3)$.

Заключение

Рассмотрена задача упаковки гистограмм, состоящих из двух столбиков, в полосу минимальной длины. Предложены уточнённые априорные оценки точности для ранее разработанных приближённых алгоритмов. Показана достижимость этих оценок. Кроме того, впервые исследовался частный случай задачи 2-ВСРР, когда высота обоих столбиков каждой гистограммы не превосходит h . Доказано, что алгоритм A_h с трудоёмкостью $O(n)$ строит упаковку для этого частного случая задачи длины не более $\frac{1}{1-h} \text{OPT} + 2$, где OPT — минимальная длина упаковки. Приведён пример асимптотической достижимости этой оценки.

Кроме того, впервые рассматривается задача упаковки неограниченного числа 2-Г, принадлежащих к одному из k типов. Предложен алгоритм, строящий оптимальную упаковку для этой задачи, трудоёмкость которого равна $O(v_k^3)$, где v_k — верхняя оценка на число вариантов заполнения одной ячейки первыми столбиками 2-Г k типов, которые не нарушают допустимости упаковки.

Автор выражает благодарность А. И. Ерзину за ценные советы и конструктивную помощь в представлении результатов.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт бюджета Новосибирского государственного университета. Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. **Erzin A. I., Plotnikov R. V., Korobkin A. P., Melidi G. E., Nazarenko S. A.** Optimal investment in the development of oil and gas field // Mathematical optimization theory and operations research. Rev. Sel. Pap. 19th Int. Conf. MOTOR 2020 (Novosibirsk, Russia, July 6–10, 2020). Cham: Springer, 2020. P. 336–349. (Commun. Comput. Inf. Sci.; V. 1275).
2. **Erzin A. I., Melidi G. E., Nazarenko S. A., Plotnikov R. V.** Two-bar charts packing problem // Optim. Lett. 2021. V. 15, No. 6. P. 1955–1971.
3. **Erzin A. I., Melidi G. E., Nazarenko S. A., Plotnikov R. V.** A 3/2-approximation for big two-bar charts packing // J. Comb. Optim. 2021. V. 42, No. 1. P. 71–84.

4. **Erzin A. I., Melidi G. E., Nazarenko S. A., Plotnikov R. V.** A posteriori analysis of the algorithms for two-bar charts packing problem // Advances in optimization and applications. Rev. Sel. Pap. 12th Int. Conf. OPTIMA 2021 (Petrovac, Montenegro, Sep. 27–Oct. 1, 2021). Cham: Springer, 2021. P. 201–216. (Commun. Comput. Inf. Sci.; V. 1514.)
5. **Erzin A. I., Kononov A. V., Melidi G. E., Nazarenko S. A.** A $4/3 \times \text{OPT} + 2/3$ approximation for big two-bar charts packing problem // J. Math. Sci. 2023. V. 269, No. 6. P. 813–823.
6. **Erzin A. I., Kononov A. V., Nazarenko S. A., Sharankhaev K. I.** An $O(n \log n)$ -time algorithm for linearly ordered packing of 2-bar charts into $\text{OPT} + 1$ bins // Mathematical optimization theory and operations research. Rev. Sel. Pap. 22th Int. Conf. MOTOR 2023 (Yekaterinburg, Russia, July 2–8, 2023). Cham: Springer, 2023. P. 122–133. (Commun. Comput. Inf. Sci.; V. 1881).
7. **Barkel M., Delorme M.** Arcflow formulations and constraint generation frameworks for the two bar charts packing problem // INFORMS J. Comput. 2023. V. 35, No. 2. P. 475–494.
8. **Garey M. R., Johnson D. S.** Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness. San Francisco: Freeman, 1979. 340 p.
9. **Vazirani V. V.** Approximation algorithms. Heidelberg: Springer, 2001. 396 p.
10. **Simchi-Levi D.** New worst-case results for the bin-packing problem // Nav. Res. Logist. 1994. V. 41, No. 4. P. 579–585.
11. **Dósa G.** The tight bound of first fit decreasing bin-packing algorithm is $\text{FFD}(I) \leq 11/9 \text{OPT}(I) + 6/9$ // Combinatorics, algorithms, probabilistic and experimental methodologies. Rev. Sel. Pap. 1st Int. Symp. (Hangzhou, China, Apr. 7–9, 2007). Heidelberg: Springer, 2007. P. 1–11. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 4614).
12. **Johnson D. S., Garey M. R.** A $71/60$ theorem for bin packing // J. Complex. 1985. V. 1, No. 1. P. 65–106.
13. **Yue M., Zhang L.** A simple proof of the inequality $\text{MFFD}(L) \leq 71/60 \times \text{OPT}(L) + 1$ for the MFFD bin-packing algorithm // Acta Math. Appl. Sin. 1995. V. 11, No. 3. P. 318–330.
14. **Fernandez de la Vega W., Lueker G. S.** Bin packing can be solved within $1 + \epsilon$ in linear time // Combinatorica. 1981. V. 1. P. 349–355.
15. **Karmarkar N., Karp R. M.** An efficient approximation scheme for the one dimensional bin-packing problem // 23rd Annu. Symp. Foundations of Computer Science (Chicago, USA, Nov. 3–5, 1982). Piscataway: IEEE, 1982. P. 312–320.
16. **Hoberg R., Rothvoss T.** A logarithmic additive integrality gap for bin packing // Proc. 28th Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms (Barcelona, Spain, Jan. 16–19, 2017). Philadelphia, PA: SIAM, 2017. P. 2616–2625.
17. **Kellerer H., Kotov V.** An approximation algorithm with absolute worst-case performance ratio 2 for two-dimensional vector packing // Oper. Res. Lett. 2003. V. 31. P. 35–41.

18. Christensen H. I., Khanb A., Pokutta S., Tetali P. Approximation and online algorithms for multidimensional bin packing: A survey // *Comput. Sci. Rev.* 2017. V. 24. P. 63–79.
19. Bansal N., Eliáš M., Khan A. Improved approximation for vector bin packing // *Proc. 27th Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms* (Arlington, VA, USA, Jan. 10–12, 2016). Philadelphia, PA: SIAM, 2016. P. 1561–1579.
20. Woeginger G. J. There is no asymptotic PTAS for two-dimensional vector packing // *Inf. Process. Lett.* 1997. V. 64, No. 6. P. 293–297.
21. Brucker P., Knust S. *Complex scheduling*. Heidelberg: Springer, 2006. 286 p.
22. Goncharov E. N. A greedy heuristic approach for the resource-constrained project scheduling problem // *Stud. Inform. Univers.* 2011. V. 9, No. 3. P. 79–90.
23. Гончаров Е. Н. Стохастический жадный алгоритм для задачи календарного планирования с ограниченными ресурсами // *Дискрет. анализ и исслед. операций*. 2014. Т. 21, № 3. С. 11–24.
24. Hartmann S. A self-adapting genetic algorithm for project scheduling under resource constraints // *Nav. Res. Logist.* 2002. V. 49. P. 433–448.
25. Kolisch R., Hartmann S. Experimental investigation of heuristics for resource-constrained project scheduling: An update // *Eur. J. Oper. Res.* 2006. V. 174. P. 23–37.
26. Erzin A. I., Sharankhaev K. I. Three-bar charts packing problem // *Commun. Comput. Inf. Sci.* 2023. V. 1739. P. 61–75.

Назаренко Степан Андреевич

Статья поступила
15 декабря 2023 г.
После доработки —
23 апреля 2024 г.
Принята к публикации
22 июня 2024 г.

UPDATED ESTIMATES FOR ALGORITHMS
FOR PACKING 2-BAR CHARTS IN A STRIP

S. A. Nazarenko

Novosibirsk State University,
2 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: s.nazarenko@g.nsu.ru

Abstract. We consider a two-bar charts packing problem in which it is necessary to pack bar charts consisting of two bars in a unit-height strip of minimum length. Each bar has a height of at most 1 and unit length. The problem under consideration is NP-hard and generalizes the bin packing problem and two-dimensional vector packing problem. This paper proves updated accuracy estimates and time complexity for several previously developed polynomial approximation algorithms for the two-bar charts packing problem and particular cases of the problem. We show the attainability of the estimates. Furthermore, we consider a problem of packing an unlimited number of bar charts belonging to k different types and propose a polynomial algorithm to solve the problem in case $k = \text{const}$. Illustr. 12, bibliogr. 26.

Keywords: bar chart, strip packing, NP-hard problem, a priori estimate, attainability.

References

1. A. I. Erzin, R. V. Plotnikov, A. P. Korobkin, G. E. Melidi, and S. A. Nazarenko, Optimal investment in the development of oil and gas field, in *Mathematical Optimization Theory and Operations Research* (Rev. Sel. Pap. 19th Int. Conf. MOTOR 2020, Novosibirsk, Russia, July 6–10, 2020) (Springer, Cham, 2020), pp. 336–349 (Commun. Comput. Inf. Sci., Vol. 1275).
2. A. I. Erzin, G. E. Melidi, S. A. Nazarenko, and R. V. Plotnikov, Two-bar charts packing problem, *Optim. Lett.* **15** (6), 1955–1971 (2021).
3. A. I. Erzin, G. E. Melidi, S. A. Nazarenko, and R. V. Plotnikov, A $3/2$ -approximation for big two-bar charts packing, *J. Comb. Optim.* **42** (1), 71–84 (2021).

4. **A. I. Erzin, G. E. Melidi, S. A. Nazarenko, and R. V. Plotnikov**, A posteriori analysis of the algorithms for two-bar charts packing problem, in *Advances in Optimization and Applications* (Rev. Sel. Pap. 12th Int. Conf. OPTIMA 2021, Petrovac, Montenegro, Sep. 27–Oct. 1, 2021) (Springer, Cham, 2021), pp. 201–216 (Commun. Comput. Inf. Sci., Vol. 1514.)
5. **A. I. Erzin, A. V. Kononov, G. E. Melidi, and S. A. Nazarenko**, A $4/3 \times \text{OPT} + 2/3$ approximation for big two-bar charts packing problem, *J. Math. Sci.* **269** (6), 813–823 (2023).
6. **A. I. Erzin, A. V. Kononov, S. A. Nazarenko, and K. I. Sharankhaev**, An $O(n \log n)$ -time algorithm for linearly ordered packing of 2-bar charts into $\text{OPT} + 1$ bins, in *Mathematical Optimization Theory and Operations Research* (Rev. Sel. Pap. 22th Int. Conf. MOTOR 2023, Yekaterinburg, Russia, July 2–8, 2023) (Springer, Cham, 2023), pp. 122–133 (Commun. Comput. Inf. Sci., Vol. 1881).
7. **M. Barkel and M. Delorme**, Arcflow formulations and constraint generation frameworks for the two bar charts packing problem, *INFORMS J. Comput.* **35** (2), 475–494 (2023).
8. **M. R. Garey and D. S. Johnson**, *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness* (Freeman, San Francisco, 1979).
9. **V. V. Vazirani**, *Approximation Algorithms* (Springer, Heidelberg, 2001).
10. **D. Simchi-Levi**, New worst-case results for the bin-packing problem, *Nav. Res. Logist.* **41** (4), 579–585 (1994).
11. **G. Dósa**, The tight bound of first fit decreasing bin-packing algorithm is $\text{FFD}(I) \leq 11/9 \text{OPT}(I) + 6/9$, in *Combinatorics, Algorithms, Probabilistic and Experimental Methodologies* (Rev. Sel. Pap. 1st Int. Symp., Hangzhou, China, Apr. 7–9, 2007) (Springer, Heidelberg, 2007), pp. 1–11 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 4614).
12. **D. S. Johnson and M. R. Garey**, A $71/60$ theorem for bin packing, *J. Complex.* **1** (1), 65–106 (1985).
13. **M. Yue and L. Zhang**, A simple proof of the inequality $\text{MFFD}(L) \leq 71/60 \times \text{OPT}(L) + 1$ for the MFFD bin-packing algorithm, *Acta Math. Appl. Sin.* **11** (3), 318–330 (1995).
14. **W. Fernandez de la Vega and G. S. Lueker**, Bin packing can be solved within $1 + \varepsilon$ in linear time, *Combinatorica* **1**, 349–355 (1981).
15. **N. Karmarkar and R. M. Karp**, An efficient approximation scheme for the one dimensional bin-packing problem, in *23rd Annu. Symp. Foundations of Computer Science, Chicago, USA, Nov. 3–5, 1982* (IEEE, Piscataway, 1982), pp. 312–320.
16. **R. Hoberg and T. Rothvos**, A logarithmic additive integrality gap for bin packing, in *Proc. 28th Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms, Barcelona, Spain, Jan. 16–19, 2017* (SIAM, Philadelphia, PA, 2017), pp. 2616–2625.
17. **H. Kellerer and V. Kotov**, An approximation algorithm with absolute worst-case performance ratio 2 for two-dimensional vector packing, *Oper. Res. Lett.* **31**, 35–41 (2003).

18. **H. I. Christensen, A. Khanb, S. Pokutta, and P. Tetali**, Approximation and online algorithms for multidimensional bin packing: A survey, *Comput. Sci. Rev.* **24**, 63–79 (2017).
19. **N. Bansal, M. Eliáš, and A. Khan**, Improved approximation for vector bin packing, in *Proc. 27th Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms, Arlington, VA, USA, Jan. 10–12, 2016* (SIAM, Philadelphia, PA, 2016), pp. 1561–1579.
20. **G. J. Woeginger**, There is no asymptotic PTAS for two-dimensional vector packing, *Inf. Process. Lett.* **64** (6), 293–297 (1997).
21. **P. Brucker and S. Knust**, *Complex Scheduling* (Springer, Heidelberg, 2006).
22. **E. N. Goncharov**, A greedy heuristic approach for the resource-constrained project scheduling problem, *Stud. Inform. Univers.* **9** (3), 79–90 (2011).
23. **E. N. Goncharov**, A stochastic greedy algorithm for the resource-constrained project scheduling problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **21** (3), 11–24 (2014) [Russian].
24. **S. Hartmann**, A self-adapting genetic algorithm for project scheduling under resource constraints, *Nav. Res. Logist.* **49**, 433–448 (2002).
25. **R. Kolisch and S. Hartmann**, Experimental investigation of heuristics for resource-constrained project scheduling: An update, *Eur. J. Oper. Res.* **174**, 23–37 (2006).
26. **A. I. Erzin and K. I. Sharankhaev**, Three-bar charts packing problem, *Commun. Comput. Inf. Sci.* **1739**, 61–75 (2023).

Stepan A. Nazarenko

Received December 15, 2023

Revised April 23, 2024

Accepted June 22, 2024