ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 32 № 1 2025

Новосибирск
Издательство Института математики

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2025. Т. 32, № 1. С. 122–144

УДК 519.17 DOI: 10.33048/daio.2025.32.804

О ЧИСЛЕ ВЕЧНОГО ДОМИНИРОВАНИЯ ПЛАНАРНЫХ ГРАФОВ ДИАМЕТРА 2

Д. С. Талецкий

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Большая Печёрская, 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия
E-mail: `dmitalmail@gmail.com`

Аннотация. *Вечным доминирующим множеством* графа называется доминирующее множество D, на котором располагается первоначально мобильная охрана (не более одного охранника может находиться в каждой вершине). Для любой бесконечной последовательности атак на вершины графа множество D может быть модифицировано путём передвижения охранника со смежной вершины в атакуемую вершину (предполагается, что атакуемая вершина не была занята охранником во время атаки). Конфигурация охранников должна после каждой атаки и движения охранника образовывать доминирующее множество. *Числом вечного доминирования* графа называется мощность его наименьшего вечного доминирующего множества. Доказано, что число вечного доминирования каждого планарного графа диаметра 2 равно числу его кликового покрытия. Ил. 5, библиогр. 10.

Ключевые слова: доминирующее множество, вечное доминирующее множество, число вечного доминирования, планарный граф.

Введение

Множество D вершин графа называется *доминирующим*, если каждая вершина не из D смежна хотя бы с одной вершиной из D. Доминирующее множество D_0 называется *вечным доминирующим* в графе G, если для любого набора вершин $v_1, \dots, v_k \in V(G)$ найдутся доминирующие множества $D_1, \dots, D_k$ и вершины $u_0 \in D_0$, $u_1 \in D_1$, …, $u_{k-1} \in D_{k-1}$ такие, что $D_{i+1} = (D_i \setminus \{u_i\}) \cup \{v_{i+1}\}$ при всех $i \in \overline{0, k-1}$. *Числом вечного доминирования* $\gamma^\infty(G)$ графа G называется мощность его наименьшего вечного доминирующего множества.

Элементы вечного доминирующего множества обычно представляются в виде охранников, расположенных в вершинах графа (не более одного охранника в каждой вершине) и способных отразить последовательность атак на незанятые вершины сколь угодно большой длины. Предполагается, что после каждой атаки ровно один охранник перемещается по ребру в соседнюю атакованную вершину, а остальные охранники остаются на своих местах. Отметим, что существует и другая модель вечного доминирования (известная как «m-вечное доминирование»), в которой после каждой атаки на одну из вершин все охранники могут переместиться по ребру в соседнюю вершину. Рассмотрение этой модели выходит за рамки данной работы.

Впервые вечные доминирующие множества были рассмотрены в [1] в 2004 г. В [2] получены значения чисел вечного доминирования для графов из некоторых классов. В [3] доказано неравенство $\gamma^\infty(G) \leqslant \binom{\alpha(G)}{2}$ (здесь через $\alpha(G)$ обозначается число независимости графа G), а в [4] приведены примеры графов, для которых $\gamma^\infty(G) = \binom{\alpha(G)}{2}$. В работе [5] доказано неравенство $\gamma^\infty(G \boxtimes H) \geqslant \alpha(G)\gamma^\infty(H)$, где через $G \boxtimes H$ обозначается сильное произведение графов G и H. Статья [6] и книга [7] содержат подробный обзор результатов, связанных с вечным доминированием в графах.

Числом доминирования $\gamma(G)$ называется мощность наименьшего доминирующего множества графа G, а *числом кликового покрытия* $\theta(G)$ — наименьшее число клик, на которые можно разбить множество вершин этого графа. Как известно, число кликового покрытия графа равно хроматическому числу его дополнения. В работе [1] впервые упоминается тривиальное соотношение

$$\gamma(G) \leqslant \alpha(G) \leqslant \gamma^\infty(G) \leqslant \theta(G).$$

В самом деле, для отражения последовательности атак, состоящей из вершин некоторого наибольшего независимого множества G, требуется $\alpha(G)$ охранников, откуда $\alpha(G) \leqslant \gamma^\infty(G)$. С другой стороны, вершины графа G можно разбить на $\theta(G)$ клик, для защиты каждой из которых достаточно одного охранника, откуда $\gamma^\infty(G) \leqslant \theta(G)$.

Класс графов, для которых $\gamma^\infty(G) = \theta(G)$, оказался довольно обширным и уже долгое время привлекает внимание исследователей. Будем обозначать этот класс через $\mathcal{MD}$ (от англ. maximum demand). Известно, что все последовательно-параллельные (а значит, и все внешнепланарные) графы входят в $\mathcal{MD}$ [8] и существуют графы без треугольников, не входящие в $\mathcal{MD}$ [2]. Поскольку для любого совершенного графа G верно $\alpha(G) = \theta(G)$, все такие графы входят в $\mathcal{MD}$. В [9] доказано, что класс $\mathcal{MD}$ содержит бесконечное число графов H таких, что прямое произведение $H \square K_2$ не входит в $\mathcal{MD}$. В недавней работе [10] найдены минимальные по числу вершин графы G_1 и G_2, не входящие в $\mathcal{MD}$ (рис. 1).

Эти графы содержат по 10 вершин и непланарные, причём

$$3 = \gamma^\infty(G_1) = \gamma^\infty(G_2) < \theta(G_1) = \theta(G_2) = 4.$$

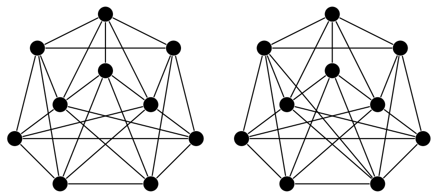

Рис. 1. Графы G_1 и G_2

Гипотеза о принадлежности классу $\mathcal{MD}$ всех планарных графов на сегодняшний день остаётся открытой. В настоящей работе доказано, что этому классу принадлежат все планарные графы диаметра 2.

1. Терминология и обозначения

Как обычно, через $V(G)$, $E(G)$ и $v(G)$ обозначаются множество вершин, множество рёбер и число вершин графа G соответственно. Через $N(v)$, $N[v]$, $\deg(v)$ и $d(u,v)$ обозначаются открытая окрестность, замкнутая окрестность, степень вершины v и длина кратчайшего пути между вершинами u и v соответственно (предполагается, что рассматриваемый граф ясен из контекста). *Диаметр* $d(G)$ связного графа G определяется равенством $d(G) = \max\limits_{u,v \in V(G)} d(u,v)$. Простой цикл с k вершинами называется *k-циклом.* Граф называется (вершинно) *k-связным*, если он имеет более k вершин и остаётся связным после удаления из него любых $k-1$ вершин. Пусть $u \in S \subset V(G)$, тогда *S-приватной окрестностью* вершины u называется множество $pn[u,S]$ вершин $w \in V(G)$ таких, что $N[w] \cap S = \{u\}$.

Граф называется *планарным*, если существует его укладка на плоскости без пересечений рёбер не по вершинам; изображение планарного графа на плоскости без пересечений рёбер называется *плоским* графом. Будем предполагать, что все рассматриваемые планарные графы уложены на плоскости. Через $\mathcal{PL}_2$ будем обозначать класс планарных графов диаметра 2.

Пусть плоский граф G содержит цикл C. Через $\mathrm{int}(C)$ (соответственно $\mathrm{ext}(C)$) обозначим множество вершин, находящихся в части плоскости, ограниченной C (соответственно в части плоскости, не ограниченной C). Назовём цикл *разделяющим*, если оба этих множества непусты. Заметим, что если $d(G) = 2$, то каждая вершина из $\mathrm{int}(C)$ имеет общего соседа в C с каждой вершиной из $\mathrm{ext}(C)$. Будем говорить, что разделяющий цикл C

отделяет множество $A \subset V(G)$, если одно из множеств $\mathrm{int}(C)$ и $\mathrm{ext}(C)$ совпадает с A. Если $A = \{a\}$, то будем говорить, что цикл C отделяет вершину a.

Напомним, что *числом кликового покрытия* $\theta(G)$ графа G называется наименьшее число клик, на которое можно разбить множество $V(G)$. *Наименьшим кликовым покрытием* (НКП) $\mathcal{C}$ графа G называется произвольное разбиение множества $V(G)$ на $\theta(G)$ клик. Будем называть НКП графа *u-отделимым*, если оно содержит клику, состоящую из единственной вершины $u \in V(G)$.

Назовём *критическим* наименьший по числу вершин граф $G \in \mathcal{PL}_2$ такой, что $\gamma^{\infty}(G) < \theta(G)$. Цель дальнейших рассуждений — доказать, что критических графов не существует.

2. Предварительные результаты

Следующий факт, установленный в [10], будет часто использоваться в работе для сокращения перебора.

Лемма 1. *Пусть граф G планарен. Тогда*
1) *если $v(G) < 12$, то $G \in \mathcal{MD}$;*
2) *если $v(G) < 14$ и G вершинно 3-связен, то $G \in \mathcal{MD}$.*

Докажем три простых свойства критических графов, которые также будут применяться в дальнейших рассуждениях.

Лемма 2. *Если граф $G \in \mathcal{PL}_2$ критический, то для любой вершины $w \in V(G)$ существует w-отделимое НКП G.*

Доказательство. Рассмотрим граф $G - w$, полученный из G удалением вершины w. Хорошо известно, что $\gamma^{\infty}(G - w) \leqslant \gamma^{\infty}(G)$ (действительно, если некоторое множество охранников может отразить любую последовательность атак на вершины множества $V(G)$, то оно может отразить и любую последовательность атак на вершины множества $V(G) \setminus \{w\}$). Поскольку G критический, $\gamma^{\infty}(G - w) = \theta(G - w) < \theta(G)$. Тогда для любого НКП $\mathcal{C}$ графа $G - w$ семейство $\mathcal{C} \cup \{\{w\}\}$ является w-отделимым НКП графа G. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если граф $G \in \mathcal{PL}_2$ содержит вершины x, y такие, что $N[x] \subseteq N[y]$, то G не критический.*

Доказательство. Предположим, что G критический. Рассмотрим некоторое y-отделимое НКП $\mathcal{C}$ графа G и его клику $Cl_x \in \mathcal{C}$, содержащую вершину x. Тогда множество $Cl_x \cup \{y\}$ тоже является кликой, что невозможно в силу минимальности $\mathcal{C}$; противоречие. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если граф $G \in \mathcal{PL}_2$ не содержит разделяющих 3-циклов и для некоторой вершины $w \in V(G)$ верно $\deg(w) \geqslant v(G) - 4$, то G не критический.*

Доказательство. Предположим, что G критический, и рассмотрим некоторое его w-отделимое НКП $\mathcal{C}$. Поскольку G планарен и не содержит разделяющих 3-циклов, все клики $\mathcal{C}$ содержат не более 3 вершин. Тогда из условия $v(G) \geqslant 12$ следует, что $\theta(G - w) \geqslant 4$ и $\theta(G) \geqslant 5$. Так как $\mathcal{C}$ содержит хотя бы 4 клики, не содержащие w, хотя бы в одной из них все вершины смежны с w, что противоречит минимальности $\mathcal{C}$. Лемма 4 доказана.

3. Разделяющие 3-циклы

Лемма 5. *Если в графе $G \in \mathcal{PL}_2$ содержится разделяющий 3-цикл $C = u_1u_2u_3$, то G не критический.*

Доказательство. Напомним, что из условия $d(G) = 2$ следует, что каждая вершина множества $\mathrm{int}(C) \cup \mathrm{ext}(C)$ смежна хотя бы с одной вершиной цикла C. Рассмотрим 3 случая.

Случай 1. Найдётся вершина $v_1 \in \mathrm{int}(C) \cup \mathrm{ext}(C)$, смежная ровно с одной вершиной C (можем считать без ограничения общности, что $u_1v_1 \in E(G)$ и $v_1 \in \mathrm{int}(C)$). Тогда для любой вершины $x \in \mathrm{ext}(C)$ верно $xu_1 \in E(G)$, откуда $N[x] \subseteq N[u_1]$; противоречие по лемме 3.

Случай 2. Найдётся вершина w, смежная со всеми вершинами C (без ограничения общности считаем, что $w \in \mathrm{int}(C)$). Если $\deg(w) = 3$, то $N[w] \subseteq N[u_1]$; противоречие по лемме 3. Иначе хотя бы один из 3-циклов u_1u_2w, u_2u_3w, u_1u_3w (считаем, что u_1u_2w) разделяющий и найдётся вершина $y \in \mathrm{int}(u_1u_2w)$. Из предыдущего случая вытекает, что каждая вершина множества $\mathrm{int}(u_1u_2w)$ смежна с обеими вершинами u_1 и u_2. Таким образом, $N[y] \subseteq N[u_1]$; противоречие по лемме 3.

Случай 3. Каждая вершина множества $\mathrm{int}(C) \cup \mathrm{ext}(C)$ смежна ровно с двумя вершинами цикла C. В силу симметрии можем считать, что $\mathrm{int}(C) \geqslant 4$ и найдутся вершины $v_1, v_2 \in \mathrm{int}(C)$, смежные с u_1 и u_2. Тогда либо $v_1 \in \mathrm{int}(u_1u_2v_2)$, либо $v_2 \in \mathrm{int}(u_1u_2v_1)$ (пусть, например, $v_1 \in \mathrm{int}(u_1u_2v_2)$). Каждая вершина множества $N(v_1) \setminus \{u_1, u_2\}$ смежна с обеими вершинами u_1 и u_2, откуда $N[v_1] \subseteq N[u_1]$; противоречие по лемме 3. Лемма 5 доказана.

4. Разделяющие 4-циклы

Во всех утверждениях этого пункта рассматривается граф $G \in \mathcal{PL}_2$ и его разделяющий 4-цикл $C = u_1u_2u_3u_4$. Предполагается, что G не содержит разделяющих 3-циклов. Через $\mathrm{int}^*(C)$ обозначим подмножество вершин $\operatorname{int}(C)$, смежных с единственной парой соседних вершин C. Будем обозначать через $u_{a,b}$ вершину $\operatorname{int}^*(C)$, смежную с вершинами u_a и u_b цикла C. Заметим, что в силу отсутствия разделяющих 3-циклов в G каждая такая вершина единственна, откуда $|\operatorname{int}^*(C)| \leqslant 4$.

Лемма 6. *Если каждая вершина множества* $\operatorname{int}(C) \cup \operatorname{ext}(C)$ *смежна хотя бы с двумя вершинами* C, *то* G *не критический.*

Доказательство. Предположим, что G критический. По лемме 1 имеем $v(G) \geqslant 12$. Тогда без ограничения общности можем считать, что $|\operatorname{int}(C)| \geqslant 4$. Рассмотрим 4 случая.

Случай 1. Найдётся вершина $x \in \operatorname{int}(C)$, смежная со всеми вершинами C. Поскольку $|\operatorname{int}(C)| \geqslant 4$, хотя бы один из циклов u_1u_2x, u_2u_3x, u_3u_4x, u_4u_1x разделяющий; противоречие по предыдущей лемме.

Случай 2. Найдётся вершина $x \in \operatorname{int}(C)$, смежная ровно с тремя вершинами C. В силу симметрии считаем, что $xu_4 \notin E(G)$. Рассмотрим два подслучая.

Случай 2.1. Все вершины множества $\operatorname{int}(C) \setminus \{x\}$ смежны с u_1. Рассмотрим некоторое u_1-отделимое НКП $\mathcal{C}$ графа G. Поскольку G планарен и $|\operatorname{int}(C)| \geqslant 4$, найдётся клика $Cl \in \mathcal{C}$, содержащая хотя бы одну вершину из $\operatorname{int}(C)$ и не содержащая вершину u_3. Тогда $Cl \cup \{u_1\}$ тоже клика, что противоречит минимальности $\mathcal{C}$.

Случай 2.2. Найдётся вершина $w \in \operatorname{int}(C) \setminus \{x\}$, не смежная с u_1. Тогда w смежна с u_3 и u_4. Без ограничения общности считаем, что найдётся также вершина $w' \in \operatorname{int}(C)$, не смежная с u_3, но смежная с u_1 и u_4 (если это не так, то все вершины $\operatorname{int}(C) \setminus \{x\}$ смежны с u_3; тогда переименуем вершины и применим рассуждения случая 2.1). Поскольку G не содержит разделяющих 3-циклов и $|\operatorname{int}(G)| \geqslant 4$, найдётся также вершина $w'' \in \operatorname{int}(C)$, смежная с u_1 и u_3, но не смежная с u_4. Поскольку $\deg(u_1) \leqslant v(G) - 5$ по лемме 4, в $\operatorname{ext}(C)$ найдутся хотя бы две вершины, не смежные с u_1, которые в силу равенства $d(G) = 2$ обе смежны с u_3 и u_4 (чтобы иметь общего соседа с w'' и w' соответственно), но тогда G содержит 3-цикл; противоречие по лемме 5.

Случай 3. Все вершины множества $\operatorname{int}(C)$ смежны ровно с двумя вершинами C. Поскольку G планарен, можем считать без ограничения общности, что никакая вершина из $\operatorname{int}(G)$ не смежна одновременно с вершинами u_2 и u_4. Рассмотрим несколько случаев в зависимости от мощности множества $\operatorname{int}^*(C)$.

Случай 3.1: $|\operatorname{int}^*(C)| = 4$.

Случай 3.1.1: $\operatorname{int}(C) = \operatorname{int}^*(C)$. Тогда $v(G) = 12$ и $|\operatorname{ext}(C)| = 4$. Предполагаем, что каждая вершина $\operatorname{ext}(C)$ смежна ровно с двумя вершинами C (иначе применим рассуждения случаев 1 и 2 этой леммы).

Тогда каждая вершина $\mathrm{ext}(C)$ смежна с двумя противоположными вершинами C, а поскольку G планарен, то либо все вершины $\mathrm{ext}(C)$ смежны с u_1 и u_3, либо все они смежны с u_2 и u_4, откуда $\max\{\deg(u_1), \deg(u_2)\} = v(G) - 4$; противоречие по лемме 4.

Случай 3.1.2: $\mathrm{int}(C) \neq \mathrm{int}^*(C)$. Тогда найдётся некоторая вершина $x \in \mathrm{int}(C)$, смежная с u_1 и u_3. По лемме 4 множество $\mathrm{ext}(C)$ содержит вершину y, не смежную с u_1, и вершину z, не смежную с u_3 (эти вершины различны, поскольку они должны иметь общего соседа с x). Так как $d(G) = 2$, то $u_2y, u_2z, u_4y, u_4z \in E(G)$. Тогда из отсутствия в G разделяющих 3-циклов следует, что никакая вершина множества $\mathrm{ext}(C) \setminus \{y, z\}$ не может быть смежна с вершинами u_1 и u_3, откуда $|\,\mathrm{ext}(C)| = 2$ и $|\,\mathrm{int}(C)| \geqslant 6$. Таким образом, найдётся вершина $x' \in \mathrm{int}(C) \setminus \mathrm{int}^*(C)$, отличная от x и смежная с u_1 и u_3. Тогда вершина x не является общим соседом вершин $u_{1,2}$ и $u_{3,4}$. Так как $u_{1,2} \in \mathrm{int}(u_1u_2u_3x)$ и $u_{3,4} \in \mathrm{int}(u_3u_4u_1x)$, то $d(u_{1,2}, u_{3,4}) > 2$; противоречие.

Случай 3.2: $|\,\mathrm{int}^*(C)| = 3$. Считаем без ограничения общности, что $\mathrm{int}^*(C) = \{u_{1,2}, u_{2,3}, u_{1,4}\}$. Тогда множество $\mathrm{int}(C) \setminus \mathrm{int}^*(C)$ содержит хотя бы одну вершину w, смежную с u_1 и u_3. По лемме 4 $\deg(u_1) \leqslant v(G) - 5$. Тогда найдутся вершины $y, z \in \mathrm{ext}(G)$, не смежные с u_1. Поскольку $d(G) = 2$, вершины y, z смежны с u_2, u_3, u_4, чтобы иметь общих соседей с вершинами $u_{1,2}, w, u_{1,4}$ соответственно, что противоречит планарности G.

Случай 3.3: $|\,\mathrm{int}^*(C)| = 2$. Считаем без ограничения общности, что $u_{1,2} \in \mathrm{int}^*(C)$. Поскольку $\mathrm{int}(G)$ содержит хотя бы одну вершину, смежную с u_1 и u_3, каждая вершина $\mathrm{ext}(C)$, не смежная с u_1, должна быть смежна с вершинами u_2 и u_3. Так как G не содержит разделяющих 3-циклов, каждое из множеств $\mathrm{ext}(C)$ и $\mathrm{int}(C)$ содержит не более одной вершины, не смежной с u_1, откуда $\deg(u_1) \geqslant v(G) - 4$; противоречие по лемме 4.

Случай 3.4: $|\,\mathrm{int}^*(C)| \leqslant 1$. Без ограничения общности считаем, что $\mathrm{int}^*(C)$ не содержит вершин, не смежных с u_1. Тогда $\mathrm{int}(C)$ тоже не содержит таких вершин, и можем применить рассуждения случая 2.1. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Если* $\min\{\mathrm{int}(G), \mathrm{ext}(G)\} \geqslant 2$, *то* G *не критический.*

Доказательство. Пусть G критический. Рассмотрим 3 случая.

Случай 1: $\min\{\mathrm{int}(G), \mathrm{ext}(G)\} \geqslant 3$. По лемме 6 без ограничения общности можем считать, что найдётся вершина $x \in \mathrm{ext}(G)$, смежная с единственной вершиной C (например с u_1). Тогда каждая вершина множества $\mathrm{int}(G)$ смежна с u_1 (и, следовательно, смежна также с u_3 по лемме 3). Поскольку G планарен и $\mathrm{int}(G) \geqslant 3$, найдутся несмежные вершины $y, z \in \mathrm{int}(C)$. Рассмотрим u_1-отделимое НКП $\mathcal{C}$ графа G. Обозначим через $Cl_y, Cl_z \in \mathcal{C}$ клики такие, что $y \in Cl_y$ и $z \in Cl_z$. Если $u_3 \notin Cl_y$, то множество $Cl_y \cup \{u_1\}$ является кликой, иначе множество $Cl_z \cup \{u_1\}$ является кликой; противоречие.

При рассмотрении оставшихся случаев можем считать без ограничения общности, что $\mathrm{ext}(G) = \{x, y\}$ и G содержит вершину, смежную с единственной вершиной C (например с u_1). Заметим, что такая вершина принадлежит $\mathrm{int}(C)$, поскольку в противном случае все вершины $\mathrm{int}(C)$ смежны с u_1, откуда $\deg(u_1) \geqslant v(G) - 4$, что невозможно по лемме 4. Тогда обе вершины x и y смежны с u_1 и, следовательно, с u_3. Так как G не содержит разделяющих 3-циклов, то также можем считать, что $xu_4, yu_2 \notin E(G)$.

Случай 2: $\min\{\deg(x), \deg(y)\} < 4$. Считаем, что $\deg(x) < 4$. Если $xy \in E(G)$ (соответственно $xu_2 \in E(G)$), то $N[x] \subseteq N[y]$ (соответственно $N[x] \subseteq N[u_2]$); противоречие по лемме 3. Если $xy \notin E(G)$ и $\deg(y) = 3$, то $yu_4 \in E(G)$ и $N[y] \subseteq N[u_4]$; снова противоречие по лемме 3. Если же $\deg(x) = \deg(y) = 2$, то рассмотрим некоторое u_1-отделимое НКП $\mathcal{C}$ графа G. Найдётся клика $Cl \in \mathcal{C}$, содержащая одну из вершин x, y и не содержащая вершину u_3. Тогда Cl состоит из единственной вершины, смежной с u_1, и множество $Cl \cup \{u_1\}$ — тоже клика; противоречие.

Случай 3: $\deg(x) = \deg(y) = 4$. Таким образом, $N(x) = \{u_1, u_2, u_3, y\}$ и $N(y) = \{u_1, u_3, u_4, x\}$.

Случай 3.1. Найдётся вершина $w \in \mathrm{int}(G)$, смежная с двумя противоположными вершинами C. Если $wu_1, wu_3 \in E(G)$ (соответственно $wu_2, wu_4 \in E(G)$), то $\max\{\mathrm{int}(u_1u_2u_3w), \mathrm{int}(u_3u_4u_1w)\} \geqslant 3$ (соответственно $\max\{\mathrm{int}(u_2u_3u_4w), \mathrm{int}(u_4u_1u_2w)\} \geqslant 3$) по лемме 1. Переименуем вершины графа и применим рассуждения случая 1 этой леммы.

При рассмотрении случаев 3.2 и 3.3 предполагаем, что каждая вершина множества $\mathrm{int}(G) \setminus \mathrm{int}^*(G)$ смежна ровно с одной вершиной C, тогда $\deg(u_2), \deg(u_4) \leqslant 5$.

Случай 3.2: $\min\{\deg(u_2), \deg(u_4)\} \leqslant 4$. В силу симметрии можно считать, что $\deg(u_2) \leqslant 4$ и у вершин u_2 и u_3 отсутствует общий сосед в $\mathrm{int}(C)$. Тогда либо $\deg(u_2) = 3$, либо $\deg(u_2) = 4$ и вершины u_1 и u_2 имеют общего соседа в $\mathrm{int}(C)$. Рассмотрим u_1-отделимое МСР графа G и его клики Cl_y и Cl_{u_2}, содержащие вершины y и u_2 соответственно (эти клики не могут совпадать, поскольку $yu_2 \notin E(G)$). Если $u_3 \in Cl_{u_2}$, то множество $Cl_y \cup \{u_1\}$ — клика, иначе множество $Cl_{u_2} \cup \{u_1\}$ — клика; противоречие.

Случай 3.3: $\deg(u_2) = \deg(u_4) = 5$ и, таким образом, $|\mathrm{int}^*(C)| = 4$. Если $u_{1,2}u_{1,4} \in E(G)$ или $u_{2,3}u_{3,4} \in E(G)$, то из отсутствия разделяющих

3-циклов в G следует, что $\max\{\deg(u_1), \deg(u_3)\} = v(G) - 4$; противоречие. Таким образом, $u_{1,2}u_{1,4}, u_{2,3}u_{3,4} \notin G$, откуда $u_{1,2}u_{3,4}, u_{2,3}u_{1,4} \notin E(G)$ (если, например, $u_{1,2}u_{3,4} \in E(G)$, то $d(u_{2,3}, u_{1,4}) > 2$). Тогда вершины $u_{2,3}$ и $u_{1,4}$ имеют общего соседа $w \in \mathrm{int}(C) \setminus \mathrm{int}^*(C)$, который также единственно возможный общий сосед вершин $u_{1,2}$ и $u_{3,4}$. В силу симметрии можно считать, что $wu_1 \in E(G)$; тогда 3-циклы $u_1u_{1,2}w$ и $u_1u_{1,4}w$ не разделяющие. Поскольку $\deg(u_2) = \deg(u_4) = 5$, то 4-циклы $u_2u_{2,3}wu_{1,2}$ и $u_4u_{1,4}wu_{3,4}$ также не разделяющие. Если $|\,\mathrm{int}(wu_{2,3}u_3u_{3,4})| \geqslant 3$, то применим рассуждения случая 1 этой леммы. Если же $|\,\mathrm{int}(wu_{2,3}u_3u_{3,4})| \leqslant 2$, то рассмотрим 3 варианта.

Случай 3.3.1: $\mathrm{int}(u_3u_{2,3}wu_{3,4}) = \varnothing$. Тогда $v(G) = 11$; противоречие по лемме 1.

Случай 3.3.2. Цикл $u_3u_{2,3}wu_{3,4}$ отделяет множество $\{x', y'\} \subset V(G)$. Из случая 2 этой леммы следует, что $\deg(x') = \deg(y') = 4$, при этом $x'u_3, y'u_3 \in E(G)$, откуда $x'w, y'w \in E(G)$. Легко проверить, что граф G 3-связный, при этом $v(G) = 13$; противоречие по лемме 1.

Случай 3.3.3. Цикл $u_3u_{2,3}wu_{3,4}$ отделяет вершину $z \in V(G)$. Тогда $zu_3 \in E(G)$, откуда $zw \in E(G)$ по лемме 3. Если $\deg(z) = 4$, то граф G 3-связный; противоречие по лемме 1. Если $\deg(z) = 3$, то имеем либо $N[z] \subseteq N[u_{2,3}]$, либо $N[z] \subseteq N[u_{3,4}]$; противоречие по лемме 3.

Пусть $\deg(z) = 2$. Поскольку $\mathrm{int}(u_1u_2u_{2,3}w) = u_{1,2}$, а по лемме 3 включение $N[u_{1,2}] \subseteq N[u_1]$ невозможно, то $u_{1,2}u_{2,3} \in E(G)$. Аналогично $u_{1,4}u_{3,4} \in E(G)$. Покажем, что $\theta(G) = 5$. Неравенство $\theta(G) \geqslant 5$ вытекает из того факта, что G не содержит разделяющих 3-циклов (и, следовательно, подграфов K_4), а вершина z не принадлежит ни одному 3-циклу. С другой стороны, множество $V(G)$ легко разбить на 5 клик (рис. 2), откуда и следует требуемое равенство. Поскольку множество $\{x, u_{2,3}, u_{3,4}, z\}$ независимое, то $4 = \alpha(G) \leqslant \gamma^\infty(G)$.

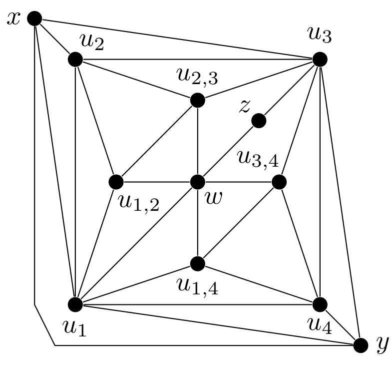

Рис. 2. Структура графа в случае 3.3.3

Предположим, что $\gamma^\infty(G) = 4$. Тогда любое независимое множество G мощности 4 будет вечным доминирующим и хотя бы один из охранников множества $\{x, u_{2,3}, u_{3,4}, z\}$ может отразить атаку на вершину u_3 таким образом, чтобы полученное множество тоже было вечным доминирующим. Легко проверить, что из множеств $\{u_3, u_{2,3}, u_{3,4}, z\}$, $\{x, u_3, u_{3,4}, z\}$, $\{x, u_{2,3}, u_3, z\}$ и $\{x, u_{2,3}, u_{3,4}, u_3\}$ доминирующее только последнее. Значит, оно способно отразить атаку на вершину u_2 таким образом, чтобы хотя бы одно из множеств $\{x, u_{2,3}, u_{3,4}, u_2\}$, $\{u_2, u_{2,3}, u_{3,4}, u_3\}$ и $\{x, u_2, u_{3,4}, u_3\}$ тоже было вечным доминирующим. Однако первое из этих трёх множеств не доминирующее, а второе (соответственно третье) перестаёт быть доминирующим после отражения атаки любым возможным способом на вершину y (соответственно вершину u_4). Полученное противоречие означает, что $\gamma^\infty(G) > 4$ и G не критический. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Если C отделяет вершину x степени не более 3, то G не критический.*

Доказательство. Предположим, что G критический. Без ограничения общности можем считать, что $\operatorname{ext}(G) = \{x\}$ и $xu_1 \in E(G)$. Тогда $xu_3 \in E(G)$ по лемме 3. Если $\deg(x) = 3$, то либо $N[x] \subseteq N[u_2]$, либо $N[x] \subseteq N[u_4]$; противоречие по лемме 3. Пусть $\deg(x) = 2$. По лемме 6 найдётся вершина $v_1 \in \operatorname{int}(C)$, смежная с единственной вершиной C (например с u_1). Рассмотрим 2 случая.

Случай 1. Найдётся вершина $w \in \operatorname{int}(C)$, смежная как минимум с тремя вершинами C. Так как G не содержит разделяющих 3-циклов и $|\operatorname{int}(C)| \geqslant 4$, то w смежна ровно с 3 вершинами C, и случай $wu_3 \notin E(G)$ невозможен. Если $wu_2 \notin E(G)$ (соответственно $wu_4 \notin E(G)$), то имеем $N[u_4] \subseteq N[w]$ (соответственно $N[u_2] \subseteq N[w]$); противоречие по лемме 3. Если же $wu_1 \notin E(G)$, то каждая вершина $\operatorname{int}(C) \setminus \{w\}$ смежна с u_1 (чтобы иметь общего соседа с x), откуда $\deg(u_1) = v(G) - 3$; противоречие по лемме 4.

Случай 2. Каждая вершина множества $\operatorname{int}(C)$ смежна не более, чем с двумя вершинами цикла C. Поскольку каждая вершина $\operatorname{int}(C)$, смежная с одной из вершин u_2 или u_4, смежна также с одной из вершин u_1 или u_3 (чтобы иметь общего соседа с x), то $\deg(u_2), \deg(u_4) \leqslant 4$.

Случай 2.1: $\min\{\deg(u_2), \deg(u_4)\} \leqslant 3$ (пусть $\deg(u_2) \leqslant 3$). Считаем без ограничения общности, что вершины u_2 и u_3 не имеют общего соседа в $\operatorname{int}(C)$. Рассмотрим некоторое u_1-отделимое НКП $\mathcal{C}$ графа G. Так как $\mathcal{C}$ минимально, то $\{x\} \notin \mathcal{C}$; тогда $\{u_3, x\} \in \mathcal{C}$. Рассмотрим клику $Cl \in \mathcal{C}$, содержащую вершину u_2. Тогда либо $Cl = \{u_2\}$, либо $Cl = \{u_2, u_{1,2}\}$. Таким образом, множество $Cl \cup \{u_1\}$ тоже клика; противоречие.

Случай 2.2: $\deg(u_2) = \deg(u_4) = 4$. Тогда $|\operatorname{int}^*(C)| = 4$. Заметим, что $u_{1,2}u_{1,4} \notin E(G)$ (в противном случае цикл $u_1u_{1,2}u_{1,4}$ разделяющий). Кроме того, $u_{2,3}u_{3,4} \notin E(G)$, поскольку $\deg(u_1) \leqslant v(G) - 5$. Следовательно, пары вершин $u_{1,2}, u_{3,4}$ и $u_{2,3}, u_{1,4}$ не имеют общих соседей в $\operatorname{int}^*(C)$, но тогда все вершины $\operatorname{int}^*(C)$ смежны с некоторой вершиной $w \notin \operatorname{int}^*(C)$. Так как $\deg(u_2) = \deg(u_4) = 4$, циклы $u_2u_{2,3}wu_{1,2}$ и $u_4u_{1,4}wu_{3,4}$ не разделяющие. Поскольку G не содержит разделяющих 3-циклов, то $wu_3 \in E(G)$. Тогда цикл $u_3u_{2,3}wu_{2,3}$ также не разделяющий. Из лемм 6 и 7 получаем, что $\operatorname{int}(u_1u_{1,2}wu_{1,4}) = v_1$, откуда $v(G) = 11$; противоречие по лемме 1. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Граф G не критический.*

Доказательство. Пусть G критический. В силу лемм 6–8 можем считать без ограничения общности, что $\operatorname{ext}(C) = \{x\}$ и $\deg(x) = 4$. Заметим, что из леммы 3 следует неравенство $\deg(u_i) \geqslant 4$ при всех $i \in \overline{1,4}$.

Случай 1. Найдётся вершина $w \in \operatorname{int}(C)$, смежная с противоположными вершинами цикла C (например с u_1 и u_3). По леммам 6–8 имеем

$$|\operatorname{int}(u_1u_2u_3w)| + |\operatorname{int}(u_1wu_3u_4)| \leqslant 2,$$

откуда $v(G) \leqslant 8$; противоречие по лемме 1.

При рассмотрении оставшихся случаев предполагаем, что каждая вершина множества $\operatorname{int}(C) \setminus \operatorname{int}^*(C)$ смежна ровно с одной вершиной C.

Случай 2: $|\operatorname{int}^*(C)| = 4$. Заметим, что $u_{1,2}u_{3,4}, u_{2,3}u_{1,4} \notin E(G)$, иначе $v(G) < 12$ по леммам 6–8. Возможны следующие случаи.

Случай 2.1. Вершины $u_{2,3}$ и $u_{1,4}$ имеют общего соседа в $\operatorname{int}^*(C)$ (без ограничения общности считаем, что это $u_{3,4}$). Если $u_{1,2}u_{2,3} \in E(G)$ или $u_{1,2}u_{1,4} \in E(G)$, то из отсутствия в G разделяющих 3-циклов следует, что $\max\{\deg(u_1), \deg(u_2)\} \geqslant v(G) - 4$; противоречие. Иначе найдётся общий сосед $w \notin \operatorname{int}^*(C)$ вершин $u_{1,2}$ и $u_{3,4}$. В силу симметрии можем положить, что $wu_1 \in E(G)$. Поскольку $v(G) \geqslant 12$, в графе G найдутся вершины $v_2, v_2' \in \operatorname{int}(u_2u_{1,2}vu_{3,4}u_{2,3}) \cap pn[u_2, C]$. Обе эти вершины смежны с $u_{3,4}$, чтобы иметь общего соседа с u_4. Тогда

$$\max\{|\operatorname{int}(u_2u_3u_{3,4}v_2)|,\ |\operatorname{int}(u_2u_3u_{3,4}v_2')|\} \geqslant 2;$$

противоречие по леммам 6–8.

Случай 2.2. Вершины $u_{2,3}$ и $u_{1,4}$ имеют общего соседа $w \notin \operatorname{int}^*(C)$. Предполагаем, что w также является общим соседом вершин $u_{1,2}$ и $u_{3,4}$ (иначе эти вершины имеют общего соседа в $\operatorname{int}^*(C)$, а тогда применим рассуждения случая 2.1). В силу симметрии положим, что $u_1w \in E(G)$. По леммам 6–8 имеем

$$\max\{|\operatorname{int}(u_2u_{2,3}wu_{1,2})|,\ |\operatorname{int}(u_3u_{2,3}wu_{3,4})|,\ |\operatorname{int}(u_4u_{2,3}wu_{3,4})|\} \leqslant 1.$$

Таким образом, $v(G) \leqslant 13$. При этом если $v(G) \in \{12, 13\}$, то каждый из циклов $u_2u_{1,2}wu_{2,3}$, $u_3u_{2,3}wu_{3,4}$ и $u_4u_{3,4}wu_{1,4}$ либо не разделяющий, либо отделяет единственную вершину степени 4 (иное невозможно по леммам 6–8). Тогда, как нетрудно проверить, граф G 3-связен (рис. 3); противоречие по лемме 1.

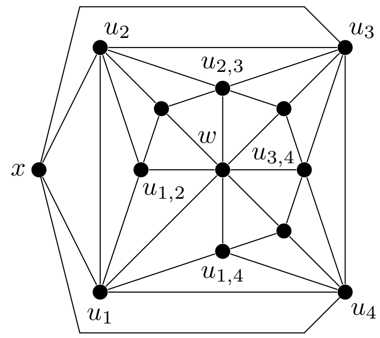

Рис. 3. Структура графа в случае 2.2 при $v(G) = 13$

Случай 3: $|\operatorname{int}^*(C)| = 3$. Без ограничения общности считаем, что $\operatorname{int}^*(C) = \{u_{1,2}, u_{2,3}, u_{1,4}\}$.

Случай 3.1. Вершина $u_{1,2}$ является общим соседом вершин $u_{2,3}$ и $u_{1,4}$. Из условия $v(G) \geqslant 12$ следует, что $|\operatorname{int}(u_3u_4u_{1,4}u_{1,2}u_{2,3})| \geqslant 4$. При этом каждая вершина $\operatorname{int}(u_3u_4u_{1,4}u_{1,2}u_{2,3})$ не принадлежит $\operatorname{int}^*(G)$ и, таким образом, смежна ровно с одной из вершин u_3 и u_4. По лемме 1 имеем $\deg(u_{1,2}) \leqslant v(G) - 5$, поэтому найдётся вершина $w \in \operatorname{int}(u_3u_4u_{1,4}u_{1,2}u_{2,3})$, не смежная с $u_{1,2}$. В силу симметрии считаем, что $wu_3 \in E(G)$. Тогда из условия $d(u_1, w) \leqslant 2$ следует, что $wu_{1,4} \in E(G)$. По лемме 8 получаем, что $\operatorname{int}(u_3u_4u_{1,4}w) = \varnothing$, так что $\deg(u_4) = 4$ и $\deg(u_3) = v(G) - 4$; противоречие по лемме 1.

Случай 3.2. Вершина $u_{1,2}$ не является общим соседом вершин $u_{2,3}$ и $u_{1,4}$. Поскольку $v(G) \geqslant 12$, вершины $u_{2,3}$ и $u_{1,4}$ не смежны, так что они имеют общего соседа $w \in \operatorname{int}(C) \setminus \operatorname{int}^*(C)$, смежного ровно с одной из вершин C. Рассмотрим два подслучая.

Случай 3.2.1: $wu_1 \in E(G)$ или $wu_2 \in E(G)$ (в силу симметрии считаем, что $wu_1 \in E(G)$). По леммам 6–8 имеем $\operatorname{int}(u_1u_2u_{2,3}w) = \{u_{1,2}\}$ и $u_{1,2}w, u_{1,2}u_{2,3} \in E(G)$. Поскольку $v(G) \geqslant 12$, то $|\operatorname{int}(u_3u_4u_{1,4}wu_{2,3})| \geqslant 3$. Далее возможны две конфигурации.

Случай 3.2.1.1. Найдётся вершина $w' \in \operatorname{int}(u_3u_4u_{1,4}wu_{2,3})$, смежная с вершиной u_4, а также с $u_{2,3}$ (чтобы иметь общего соседа с u_2). Тогда $\operatorname{int}(u_3u_4w'u_{2,3}) = \varnothing$ и найдётся вершина $w'' \in \operatorname{int}(u_4u_{1,4}wu_{2,3}w')$, смежная с вершинами u_4 и $u_{2,3}$. Таким образом, $w' \in \operatorname{int}(u_3u_4w''u_{2,3})$ и $w'u_3 \notin E(G)$; противоречие по леммам 6–8.

Случай 3.2.1.2. Все вершины $\operatorname{int}(u_3u_4u_{1,4}wu_{2,3})$ смежны с вершиной u_3. Если все эти вершины также смежны с w, то найдётся вершина $w' \in \operatorname{int}(u_3u_4u_{1,4}wu_{2,3})$ такая, что $|\operatorname{int}(wu_{2,3}u_3w')| > 1$; противоречие. Иначе найдётся не смежная с w вершина $w'' \in \operatorname{int}(u_3u_4u_{1,4}wu_{2,3})$, которая смежна с вершинами $u_{2,3}$ и $u_{1,4}$ (чтобы иметь общих соседей с вершинами $u_{1,2}$ и u_1 соответственно). Тогда по леммам 6–8 получаем, что $\operatorname{int}(u_3u_4u_{1,4}w'') = \varnothing$, откуда $|\operatorname{int}(u_3u_4u_{1,4}wu_{2,3})| = 1$; противоречие.

Случай 3.2.2: $wu_3 \in E(G)$ или $wu_4 \in E(G)$ (в силу симметрии считаем, что $wu_3 \in E(G)$). Тогда цикл $u_3u_4u_{1,4}w$ не разделяющий, откуда $\deg(u_3) = 5$ и $\deg(u_4) = 4$. Поскольку $\deg(u_1) \leqslant v(G) - 5$ по лемме 4, то найдётся вершина $v_2 \in pn[u_2, C]$. Из условия $d(v_2, u_4) \leqslant 2$ следует, что $v_2u_{1,4} \in E(G)$. Тогда по леммам 6–8 имеем $\operatorname{int}(u_1u_2v_2u_{1,4}) = \{u_{1,2}\}$ и $u_{1,2}u_{1,4} \in E(G)$, откуда $\deg(u_1) = 5$ и $\deg(u_2) = v(G) - 4$; противоречие по лемме 1.

Случай 4: $|\operatorname{int}^*(C)| = 2$. В силу симметрии считаем, что $u_{1,2} \in E(G)$. Тогда либо $u_{1,4} \in E(G)$, либо $u_{3,4} \in E(G)$.

Случай 4.1: $\operatorname{int}^*(C) = \{u_{1,2}, u_{3,4}\}$. Если $u_{1,2}u_{3,4} \in E(G)$, то

$$|\operatorname{int}(u_2u_3u_{3,4}u_{1,2})| + |\operatorname{int}(u_1u_4u_{3,4}u_{1,2})| \leqslant 2,$$

откуда $v(G) \leqslant 9$; противоречие по лемме 1. Если же $u_{1,2}u_{3,4} \notin E(G)$, то некоторая вершина $w \in \operatorname{int}(C) \setminus \operatorname{int}^*(C)$ является их общим соседом. В силу симметрии считаем, что $u_1w \in E(G)$. Тогда по леммам 6–8 имеем $\operatorname{int}(u_1wu_{3,4}u_4) = \varnothing$ и $\deg(u_4) = 4$. Если $\deg(u_2) = 4$, то $\deg(u_3) = v(G) - 4$; противоречие. Иначе в G найдётся вершина $v_2 \in pn[u_2, C]$. Так как $d(v_2, u_4) \leqslant 2$, то $v_2u_{3,4} \in E(G)$. Тогда по леммам 6–8 получаем, что $\operatorname{int}(u_2u_3u_{3,4}v_2) = \varnothing$, откуда $\deg(u_3) = 4$ и $\deg(u_2) = v(G) - 4$; противоречие по лемме 1.

Случай 4.2: $\operatorname{int}^*(C) = \{u_{1,2}, u_{1,4}\}$. Так как $\deg(u_3) \geqslant 4$, найдётся $v_3 \in pn[u_3, C]$.

Случай 4.2.1. Если $v_3u_{1,2}, v_3u_{1,4} \in E(G)$, имеем

$$|\operatorname{int}(u_1u_{1,2}v_3u_{1,4})| + |\operatorname{int}(u_2u_3v_3u_{1,2})| + |\operatorname{int}(u_3u_4u_{1,4}v_3)| \leqslant 3,$$

откуда $v(G) < 12$; противоречие по лемме 1.

Случай 4.2.2: $v_3u_{1,2} \in E(G)$ и $v_3u_{1,4} \notin E(G)$ (в силу симметрии случай $v_3u_{1,2} \notin E(G)$ и $v_3u_{1,4} \in E(G)$ рассматривается аналогично). В силу лемм 6–8 получаем, что $\operatorname{int}(u_2u_3v_3u_{1,2}) = \varnothing$, откуда $\deg(u_2) = 4$. Если $\deg(u_4) \geqslant 5$, то найдётся вершина $v_4 \in pn[u_4, C]$, а из условия $d(u_2, v_4) \leqslant 2$ следует, что $u_{1,2}v_4 \in E(G)$. Тогда $\operatorname{int}(u_1u_{1,2}v_4u_4) = \{u_{1,4}\}$ из лемм 6–8 и $u_{1,2}u_{1,4} \in E(G)$. Поскольку $\deg(u_{1,2}) \leqslant v(G) - 5$, найдётся вершина

$w \in \mathrm{int}(u_3u_4v_4u_{1,2}v_3)$, не смежная с $u_{1,2}$, но тогда, как нетрудно видеть, $\max\{d(w,u_1),\ d(w,u_2)\} > 2$; противоречие.

Пусть теперь $\deg(u_4) = 4$. Поскольку включение $N[u_{1,4}] \subseteq N[u_1]$ невозможно по лемме 3, то найдётся вершина $v_3' \in pn[u_3, C]$, смежная с $u_{1,4}$ (из случая 4.2.1 вытекает, что v_3' отлична от v_3 и не смежна с $u_{1,2}$). Из условия $\deg(u_1) \leqslant v(G) - 5$ следует, что в графе G имеется вершина $v_3'' \in pn[u_3, C]$, отличная от v_3 и v_3', при этом $v_3'' \in \mathrm{int}(u_1u_{1,2}v_3u_3v_3'u_{1,4})$. Кроме того, $u_{1,2}v_3''$, $u_{1,4}v_3'' \notin E(G)$ (если, например, $u_{1,2}v_3'' \in E(G)$, то получим $v_3 \in \mathrm{int}(u_2u_3v_3''u_{1,2})$ и $u_2v_3 \notin E(G)$, что противоречит леммам 6–8). Тогда u_1 и v_3'' имеют общего соседа $v_1 \in pn[u_1, C]$, при этом вершина v_1 является единственным возможным общим соседом пар вершин $v_3, u_{1,4}$ и $v_3', u_{1,2}$ (рис. 4). По леммам 6–8 получаем, что $\mathrm{int}(u_3v_3v_1v_3') = \{v_3''\}$, откуда $v(G) = 11$; противоречие по лемме 1.

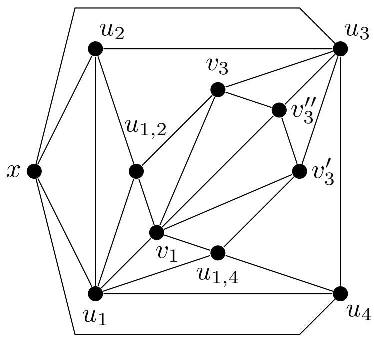

Рис. 4. Структура графа в случае 4.2.2

Случай 4.2.3. Если $v_3u_{1,2}, v_3u_{1,4} \notin E(G)$, то имеется общий сосед $v_1 \in pn[u_1, C]$ вершин u_1 и v_3. Поскольку включение $N[u_{1,2}] \subseteq N[u_1]$ невозможно по лемме 3, найдётся вершина $w \in N(u_{1,2}) \setminus N(u_1)$, причём $w \in \mathrm{int}(u_1u_2u_3v_3v_1)$. Тогда u_3 является единственным возможным соседом вершин w и u_4. Следовательно, можем применить рассуждения случая 4.2.2, рассматривая вершину w вместо v_3.

Случай 5: $|\,\mathrm{int}^*(C)| = 1$. В силу симметрии можем считать, что $\mathrm{int}^*(C) = \{u_{1,2}\}$. Поскольку $\deg(u_3)$, $\deg(u_4) \geqslant 4$, найдутся вершины $v_3 \in pn[u_3, C]$ и $v_4 \in pn[u_4, C]$. Предположим, что $v_4u_{1,2} \notin E(G)$ (случай $v_3u_{1,2} \notin E(G)$ рассматривается аналогично). Тогда у вершин v_4 и u_2 найдётся общий сосед $v_2 \in pn[u_2, C]$, откуда $d(u_1, v_3) > 2$; противоречие.

Пусть теперь $v_3u_{1,2}$, $v_4u_{1,2} \in E(G)$. Поскольку $\deg(u_{1,2}) \leqslant v(G) - 5$, найдётся вершина $w' \in \mathrm{int}(C)$, не смежная с $u_{1,2}$. По леммам 6–8 имеем $\mathrm{int}(u_2u_3v_3u_{1,2}) = \mathrm{int}(u_1u_4v_4u_{1,2}) = \varnothing$, так что $w' \in \mathrm{int}(v_3u_3u_4v_4u_{1,2})$. Тогда либо $w'u_3 \in E(G)$ и $d(w', u_1) > 2$, либо $w'u_4 \in E(G)$ и $d(w', u_2) > 2$; противоречие.

Случай 6: $\mathrm{int}^*(C) = \varnothing$. Напомним, что $\deg(u_i) \geqslant 4$, а значит, найдётся вершина $v_i \in pn[u_i, C]$ для любого $i \in \overline{1,4}$. Поскольку $d(G) = 2$, вершина v_1 смежна с некоторой вершиной $v_3' \in pn[u_3, C]$ (которая может совпадать с v_3). Тогда $d(u_2, v_4) > 2$; противоречие. Лемма 9 доказана.

5. Разделяющие 5-циклы

Лемма 10. *Если в графе $G \in \mathcal{PL}_2$ содержится разделяющий 5-цикл $C = u_1u_2u_3u_4u_5$, то G не критический.*

Доказательство. Пусть G критический. Из лемм 5–9 следует, что G не содержит разделяющих $\{3,4\}$-циклов, поэтому C является порождённым 5-циклом. Назовём вершину множества $\mathrm{int}(C) \cup \mathrm{ext}(C)$ *хордальной*, если она смежна с парой несмежных вершин C. Обозначим через c_{int} и c_{ext} число хордальных вершин в множествах $\mathrm{int}(C)$ и $\mathrm{ext}(C)$ соответственно. Без ограничения общности считаем, что $c_{\mathrm{int}} \geqslant c_{\mathrm{ext}}$, а если $c_{\mathrm{int}} = c_{\mathrm{ext}}$, то $|\,\mathrm{int}(C)| \geqslant 4$, так как $v(G) \geqslant 12$. Рассмотрим 6 случаев в зависимости от значений величин c_{int} и c_{ext}.

Случай 1: $c_{\mathrm{int}} \geqslant 3$. Рассмотрим две хордальные вершины x и y подграфа $\mathrm{int}(C)$. В силу симметрии можно считать, что $u_1x, u_3x \in E(G)$. Если u_1y, $u_3y \in E(G)$, то хотя бы один из 4-циклов $u_1u_2u_3x$ и $u_1u_2u_3y$ разделяющий; противоречие. Иначе, поскольку G планарен, вершина y смежна ровно с одной из вершин u_1 и u_3. Если, например, $u_3y \in E(G)$, то $u_5y \in E(G)$. Так как $c_{\mathrm{int}} \geqslant 3$, то $\mathrm{int}(C)$ содержит хордальную вершину z, отличную от x и y, а это невозможно, поскольку G планарен и не содержит разделяющих 4-циклов; противоречие.

При рассмотрении случаев 2–4 можем считать без ограничения общности, что найдутся хордальные вершины $x, y \in \mathrm{int}(C)$ такие, что xu_1, xu_3, yu_3, $yu_5 \in E(G)$. Обозначим через C' цикл $u_1xu_3yu_5$.

Случай 2: $c_{\mathrm{int}} = c_{\mathrm{ext}} = 2$. Так как циклы $u_1u_2u_3x$ и $u_3u_4u_5y$ не разделяющие, то $|\,\mathrm{int}(C')| \geqslant 2$. Обозначим через a и b хордальные вершины из $\mathrm{ext}(C)$. Поскольку G планарен и не содержит разделяющих $\{3,4\}$-циклов, вершины a и b имеют единственного общего соседа u_m среди вершин C. Если $m \in \{1,3,5\}$, то, как нетрудно проверить, хотя бы одна из вершин a, b образует разделяющий 4-цикл с одной из вершин x, y; противоречие. Пусть теперь $m \in \{2,4\}$. В силу симметрии можем считать, что $m = 2$ и u_5a, $u_4b \in E(G)$. Поскольку $u_5b \notin E(G)$, каждая вершина из $\mathrm{int}(C')$ смежна с u_3 (чтобы иметь общего соседа с b) и с одной из вершин u_1 и u_5 (чтобы иметь общего соседа с a). Тогда каждая вершина $\mathrm{int}(C')$ хордальная, откуда $c_{\mathrm{int}} \geqslant 4$; противоречие.

Случай 3: $c_{\mathrm{int}} = 2$, $c_{\mathrm{ext}} = 1$. Обозначим через z единственную хордальную вершину $\mathrm{ext}(C)$.

Случай 3.1: $u_3z \in E(G)$. Так как G не содержит разделяющих 4-циклов, то $zu_1, zu_5 \notin E(G)$. Поскольку z хордальная, то $zu_2, zu_4 \in E(G)$. Если множество $\mathrm{int}(C')$ непусто, то каждая его вершина смежна с u_3 (чтобы иметь общего соседа с z) и при этом не смежна с u_1 и u_5. Тогда для каждой вершины $w \in \mathrm{int}(C')$ верно включение $N[w] \subseteq N[u_3]$; противоречие.

Таким образом, $\mathrm{int}(C) = \{x, y\}$ и $|\,\mathrm{ext}(C) \setminus \{z\}| \geqslant 4$. Поскольку 3-циклы u_2u_3z и u_3u_4z не разделяющие, вершины множества $\mathrm{ext}(C) \setminus \{z\}$ не смежны с u_3. При этом все они не хордальные и должны иметь общего соседа с каждой из вершин x и y. Следовательно, все вершины $\mathrm{ext}(C) \setminus \{z\}$ смежны с u_1 и u_5, но тогда G содержит разделяющий 3-цикл; противоречие.

Случай 3.2: $u_3z \notin E(G)$ и $u_2z, u_4z \in E(G)$, при этом хотя бы одно из рёбер u_1z и u_5z принадлежит $E(G)$ (в силу симметрии считаем, что $u_1z \in E(G)$). Так как ни один из циклов u_1u_2z, $u_1u_5u_4z$, $u_2u_3u_4z$ не разделяющий, то $\mathrm{ext}(C) = \{z\}$, так что $|\,\mathrm{int}(C')| \geqslant 4$. Если $u_5z \notin E(G)$, то все вершины $\mathrm{int}(C')$ смежны с u_1, поэтому $\deg(u_1) = v(G) - 4$; противоречие. Если же $u_5z \in E(G)$, то считаем в силу симметрии, что $\mathrm{int}(C')$ содержит хотя бы две вершины, смежные с u_1. Каждая из этих вершин смежна либо с y, либо с u_5, но тогда G содержит разделяющий $\{3, 4\}$-цикл; противоречие.

Случай 3.3: u_2z, $u_4z \in E(G)$ и u_1z, u_3z, $u_5z \notin E(G)$. Тогда множество $\mathrm{int}(C')$ пусто, поскольку никакая его вершина не может иметь общего соседа с z, откуда $|\,\mathrm{ext}(C)| \geqslant 5$. Поскольку цикл $u_2u_3u_4z$ не является разделяющим и xu_5, $yu_1 \notin E(G)$, каждая вершина подграфа $\mathrm{ext}(C) \setminus \{z\}$ смежна хотя бы с одной из вершин u_1, u_2 и хотя бы с одной из вершин u_4, u_5 (чтобы иметь общих соседей с вершинами x и y). Так как вершины множества $\mathrm{ext}(C) \setminus \{z\}$ не хордальные, каждая из них смежна с вершинами u_1 и u_5. Значит, граф G содержит разделяющий 3-цикл; противоречие.

Случай 3.4: $u_3z \notin E(G)$ и хотя бы одно из рёбер u_4z и u_2z не входит в $E(G)$ (в силу симметрии считаем, что $u_4z \notin E(G)$). Тогда u_2z, $u_5z \in E(G)$. Если $\mathrm{ext}(C) = \{z\}$, то $|\,\mathrm{int}(C')| \geqslant 4$ и, применяя рассуждения случая 3.2, нетрудно проверить, что G содержит разделяющий $\{3, 4\}$-цикл, что невозможно. В противном случае найдётся вершина $a \in \mathrm{ext}(C) \setminus \{z\}$. Поскольку цикл $u_1u_2zu_5$ не разделяющий, то $au_1 \notin E(G)$. Тогда $au_3 \in E(G)$, так как вершина a не хордальная и должна иметь общего соседа с обеими вершинами x и y. Аналогично каждая вершина множества $\mathrm{ext}(C) \setminus \{z, a\}$ не хордальная и смежна с u_3. Из условия $\deg(u_3) < v(G) - 4$ следует, что найдётся вершина $b \in \mathrm{int}(C')$, не смежная с u_3. Так как au_1, $au_5 \notin E(G)$, то $d(a, b) > 2$; противоречие.

Случай 4: $c_{\text{int}} = 2$, $c_{\text{ext}} = 0$. Если ни одна вершина множества $\text{ext}(C)$ не смежна с u_3, то все они смежны с u_1 и u_5 (чтобы иметь общего соседа с обеими вершинами x и y). Поскольку граф G не содержит разделяющих 3-циклов, $\text{ext}(C)$ состоит из единственной вершины z и $N[z] \subseteq N[u_1]$; противоречие по лемме 4. Если же найдётся вершина $w \in \text{ext}(C)$, смежная с u_3, то все вершины $\text{int}(C')$ смежны с u_3, чтобы иметь общего соседа с w. По лемме 4 $\text{ext}(C)$ содержит хотя бы две вершины, не смежные с u_3. Эти вершины смежны с вершинами u_1 и u_5, но тогда G содержит разделяющий 3-цикл; противоречие.

Случай 5: $c_{\text{int}} = 1$. Обозначим через x единственную хордальную вершину $\text{int}(C)$.

Случай 5.1: $\text{int}(C) = \{x\}$. Так как $|\,\text{ext}(C)| \geqslant |\,\text{int}(C)|$, предполагаем, что $c_{\text{ext}} = 0$. Без ограничения общности можем считать, что найдётся вершина $v_1 \in \text{ext}(C)$, для которой $u_1v_1 \in E(G)$ и v_1u_3, v_1u_4, $v_1u_5 \notin E(G)$. Тогда найдётся вершина $v_4 \in \text{ext}(G)$ такая, что $v_4u_4, v_4v_1 \in E(G)$. Поскольку вершина v_4 не хордальная, то $u_1v_4, u_2v_4 \notin E(G)$.

Случай 5.1.1: $v_1u_2, v_4u_3, v_4u_5 \notin E(G)$. Так как $d(v_1, u_3) \leqslant 2$, найдётся вершина $v_3 \in \text{ext}(C)$ такая, что v_1v_3, $u_3v_3 \in E(G)$. Если $u_2v_3 \notin E(G)$, то $d(v_4, u_2) > 2$. Если же $u_2v_3 \in E(G)$, то $v_3u_4 \notin E(G)$ и $d(v_3, u_5) > 2$; противоречие.

Случай 5.1.2: $v_1u_2 \in E(G)$ и v_4u_3, $v_4u_5 \notin E(G)$. Нетрудно видеть, что любая вершина множества $\text{ext}(C) \setminus \{v_1, v_4\}$ смежна с u_4, иначе она не имеет общего соседа хотя бы с одной из вершин u_3 и u_5. При этом вершина u_4 является единственно возможным общим соседом v_4 и x. Таким образом, $\deg(u_4) = v(G) - 4$; противоречие по лемме 4.

Случай 5.1.3: $v_1u_2 \in E(G)$ и либо $v_4u_3 \in E(G)$, либо $v_4u_5 \in E(G)$ (в силу симметрии достаточно рассмотреть случай $v_4u_3 \in E(G)$). Положим $C'' = u_1v_1v_4u_4u_5$ и рассмотрим $w \in \text{int}(C'')$. Если $wu_5 \in E(G)$, то w смежна хотя бы с одной из вершин u_1, v_1 (чтобы иметь общего соседа с вершиной u_2), и хотя бы с одной из вершин u_4, v_4 (чтобы иметь общего соседа с u_3). Поскольку G планарен, не содержит разделяющих $\{3, 4\}$-циклов, а вершина w не хордальная, то $\text{int}(C'') = \{w\}$ и $v(G) < 12$; противоречие по лемме 1.

Таким образом, каждая вершина $\text{int}(C'')$ смежна ровно с одной из вершин u_1 и u_4 и не смежна с u_5. В силу симметрии можно считать, что $|pn[u_1, C]| \geqslant |pn[u_4, C]|$. Тогда найдутся вершины $w_1, w_2 \in pn[u_1, C]$, которые должны иметь общего соседа с u_3. Тем самым w_1v_4, $w_2v_4 \in E(G)$ и хотя бы один из 4-циклов $u_1v_1v_4w_1$ и $u_1v_1v_4w_2$ разделяющий; противоречие.

При рассмотрении случаев 5.2 и 5.3 можем считать без ограничения общности, что хордальная вершина $x \in \mathrm{int}(C)$ смежна с u_1 и u_3. Обозначим через C''' цикл $u_1xu_3u_4u_5$. Так как $\mathrm{int}(u_1u_2u_3x) = \varnothing$, то $\mathrm{int}(C''') \neq \varnothing$ (иное уже разобрано в случае 5.1).

Случай 5.2. Каждая вершина множества $\mathrm{int}(C''')$ смежна с x.

Случай 5.2.1: $|\mathrm{int}(C''')| \geqslant 3$. Либо в $\mathrm{int}(C''')$ найдутся хотя бы две вершины, смежные хотя бы с одной из вершин множества $\{u_1, u_5\}$, либо найдутся хотя бы две вершины, смежные хотя бы с одной из вершин множества $\{u_3, u_4\}$. Следовательно, G содержит разделяющий $\{3,4\}$-цикл; противоречие.

При рассмотрении случаев 5.2.2 и 5.2.3 предполагаем, что $|\mathrm{int}(C)| \leqslant 3$ и тем самым $c_{\mathrm{ext}} = 0$.

Случай 5.2.2: $\mathrm{int}(C''') = \{y, z\}$. Поскольку G не содержит разделяющих $\{3,4\}$-циклов, считаем без ограничения общности, что yu_1, yu_5, zu_3, $zu_4 \notin E(G)$. Рассмотрим некоторую вершину $w \in \mathrm{ext}(C)$, которая по предположению не хордальная. Так как $xu_4, xu_5 \notin E(G)$, хотя бы с одной из вершин x, y, z вершина w не имеет общего соседа; противоречие.

Случай 5.2.3: $\mathrm{int}(C''') = \{y\}$. Если $yu_1 \in E(G)$ (соответственно $yu_3 \in E(G)$), то $N[y] \subseteq N[u_1]$ (соответственно $N[y] \subseteq N[u_3]$), так как вершина y не хордальная; противоречие. Если же $yu_1, yu_3 \notin E(G)$, то каждая вершина из $\mathrm{ext}(C)$ смежна хотя бы с одной из вершин u_4 и u_5, а также хотя бы с одной из вершин u_1, u_2, u_3 (чтобы иметь общего соседа с x и y). Поскольку G не содержит разделяющих 3-циклов, а $\mathrm{ext}(C)$ не содержит хордальных вершин, то $|\mathrm{ext}(C)| \leqslant 2$ и $v(G) < 12$; противоречие.

Случай 5.3. Найдётся вершина $y \in \mathrm{int}(C''')$, не смежная с x. Поскольку $d(u_2, y) \leqslant 2$, вершина y смежна ровно с одной из вершин u_1 и u_3 (в силу симметрии считаем, что $yu_1 \in E(G)$). Так как y не хордальная, имеем $yu_4 \notin E(G)$ и найдётся вершина $z \in \mathrm{int}(C''')$ такая, что $yz, u_3z \in E(G)$. Поскольку вершины y и z не хордальные, получаем yu_4, $zu_5 \notin E(G)$. Тогда все вершины множества $\mathrm{ext}(C)$ смежны с двумя несмежными вершинами C (так как они должны иметь общих соседей с каждой из вершин x, y, z). Таким образом, $\mathrm{ext}(C)$ состоит из единственной хордальной вершины (обозначим её через w) и $|\mathrm{int}(C''')| \geqslant 5$. Рассмотрим 4 варианта в зависимости от того, смежна ли вершина w с вершинами u_1 и u_3.

Случай 5.3.1. Если wu_1, $wu_3 \in E(G)$, то граф G содержит разделяющий 4-цикл wu_1xu_3; противоречие.

Случай 5.3.2. Если $wu_3 \in E(G)$ и $wu_1 \notin E(G)$, то каждая вершина $\mathrm{int}(u_1xu_3zy)$ смежна с u_3 (чтобы иметь общего соседа с w), а u_5 является общим соседом вершин y и w. Поскольку $\deg(u_3) \leqslant v(G) - 5$, найдётся вершина $a \in \operatorname{int}(u_3u_4u_5yz)$ такая, что $au_3 \notin E(G)$, но тогда $d(a, u_2) > 2$; противоречие.

Случай 5.3.3. Если $wu_1 \in E(G)$ и $wu_3 \notin E(G)$, то каждая вершина $\operatorname{int}(u_1xu_3zy)$ смежна с u_1, а u_4 является общим соседом вершин z и w. Поскольку $\deg(u_1) \leqslant v(G)-5$, найдётся вершина $a' \in \operatorname{int}(u_1u_5u_4zy)$ такая, что $a'u_1 \notin E(G)$, но тогда $d(a', u_2) > 2$; противоречие.

Случай 5.3.4. Если $wu_1, wu_3 \notin E(G)$, то вершины u_2, u_4, u_5 являются единственными возможными общими соседями вершины w в парах с вершинами x, y, z соответственно. Поскольку $v(G) \geqslant 12$ и G не содержит разделяющих $\{3,4\}$-циклов, множество $\operatorname{int}(u_1xu_3zy)$ непусто, но никакая его вершина не может иметь общего соседа с вершиной w; противоречие.

Случай 6: $c_{\text{int}} = c_{\text{ext}} = 0$. В силу симметрии считаем, что $|\operatorname{int}(C)| \geqslant 4$ и найдётся вершина $v_1 \in \operatorname{int}(C) \cap N(u_1)$ такая, что $v_1u_5 \notin E(G)$.

Случай 6.1. Если $v_1u_2 \notin E(G)$, то каждая вершина $w \in \operatorname{ext}(C)$ смежна с u_1 и не является хордальной, откуда $N[w] \subseteq N[u_1]$; противоречие по лемме 3.

Случай 6.2. Если $v_1u_2 \in E(G)$, рассмотрим общего соседа v_4 вершин v_1 и u_4. Так как каждая вершина $\operatorname{ext}(C)$ должна иметь общего соседа с v_1 и v_4, то либо $v_4u_3 \in E(G)$, либо $v_4u_5 \in E(G)$ (в силу симметрии считаем, что $v_4u_3 \in E(G)$). Тогда каждая вершина $\operatorname{ext}(C)$ смежна с вершинами u_2 и u_3, а поскольку G не содержит разделяющих 3-циклов, то такая вершина единственна; обозначим её через w. Тем самым $N[w] \subseteq N[u_2]$; противоречие по лемме 3. Лемма 10 доказана.

6. Основной результат

Теорема 1. *Каждый планарный граф диаметра* 2 *принадлежит* $\mathcal{MD}$.

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда найдётся критический граф G, который по леммам 5–10 не содержит разделяющих $\{3,4,5\}$-циклов. Рассмотрим вершину $u \in V(G)$ максимальной степени и положим $N(u) = \{u_1, \ldots, u_s\}$ (поскольку $v(G) \geqslant 12$ и $d(G) = 2$, то $s \geqslant 4$). Предполагаем, что вершины $u_1, \ldots, u_s$ расположены на плоскости по часовой стрелке (тогда из отсутствия 3-циклов в G следует, что если $u_iu_j \in E(G)$, то $|i-j| \in \{1, s-1\}$). Выберем произвольную вершину $w \in N(u_1) \setminus N(u)$ (она существует по лемме 3). Рассмотрим три случая.

Случай 1. Вершины w и u_4 не смежны и имеют общего соседа u_k. Если $k = 2$ (соответственно $k = 3$), то цикл uu_2u_4 (соответственно uu_1wu_3) разделяющий; противоречие. Если же $k > 4$, то $k = s = 5$ (в противном случае цикл $uu_1wu_ku_4$ разделяющий), при этом $u_5u_2, u_5u_3 \notin E(G)$.

Если w смежна с u_2 (соответственно с u_3), то цикл uu_2wu_5 (соответственно uu_3wu_5) разделяющий. Иначе вершины u_3 и w имеют общего соседа $x \notin N[u]$, а цикл uu_1wxu_3 разделяющий; противоречие.

Случай 2. Несмежные вершины w, u_4 имеют общего соседа $x \notin N(u)$. Поскольку цикл uu_1wxu_4 не разделяющий, то $s = 4$. Легко проверить, что если хотя бы одна из вершин u_2, u_3 смежна с одной из вершин w, x, то G содержит $\{4, 5\}$-разделяющий цикл. В противном случае у вершин u_3 и w найдётся общий сосед $y \notin N[u] \cup \{x\}$, и цикл uu_1wyu_3 будет разделяющим; противоречие.

Случай 3. Вершины w и u_4 смежны. Можем считать, что все вершины множества $N(u_1)\setminus N(u)$ смежны с u_4 (если это не так, то переименуем вершины и применим рассуждения одного из предыдущих случаев). Так как G не содержит разделяющих 4-циклов, то $s = 4$ и в силу симметрии можно считать, что все вершины множества $N(u_4) \setminus N(u)$ смежны с u_1. Поскольку цикл uu_1wu_4 не разделяющий, то

$$N(u_1) \setminus N(u) = N(u_4) \setminus N(u) = \{w\}.$$

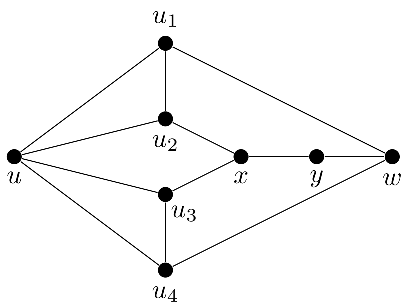

Рис. 5. Структура графа в случае 3

Если $\min\{\deg(u_1), \deg(u_4)\} = 2$, то каждая вершина из $V(G) \setminus N[u]$ смежна с w (чтобы иметь общего соседа с u_1 и u_4). Отсюда следует, что $\deg(w) \geqslant v(G) - 4$; противоречие по лемме 4. Тем самым $\deg(u_1) = \deg(u_4) = 3$ и u_1u_2, $u_3u_4 \in E(G)$, при этом u_2w, $u_3w \notin E(G)$, иначе G содержит разделяющий 4-цикл. Поскольку $\deg(w) \leqslant v(G) - 5$, найдётся вершина $x \notin N[u]$ такая, что $xw \notin E(G)$. Тогда u_2 (соответственно u_3) является единственно возможным соседом вершин x и u_1 (соответственно x и u_4). Кроме того, вершины x и w имеют общего соседа $y \in V(G) \setminus N[u]$. Поскольку циклы uu_1wu_4, uu_2xu_3, u_1u_2xyw и u_4u_3xyw не разделяющие (рис. 5), то $v(G) = 8$; противоречие по лемме 1. Теорема 1 доказана.

Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики». Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. **Burger A. P., Cockayne E. J., Grundlingh W. R., Mynhardt C. M., van Vuuren J., Winterbach W.** Infinite order domination in graphs // J. Comb. Math. Comb. Comput. 2004. V. 50. P. 179–194.
2. **Goddard W., Hedetniemi S. M., Hedetniemi S. T.** Eternal security in graphs // J. Comb. Math. Comb. Comput. 2005. V. 52. P. 169–180.
3. **Klostermeyer W. F., MacGillivray G.** Eternal security in graphs of fixed independence number // J. Comb. Math. Comb. Comput. 2007. V. 63. P. 97–101.
4. **Goldwasser J. L., Klostermeyer W. F.** Tight bounds for eternal dominating sets in graphs // Discrete Math. 2008. V. 308, No. 12. P. 2589–2593.
5. **Driscoll K., Klostermeyer W. F., Krop E., Magnant C., Taylor P.** On eternal domination and Vizing-type inequalities // AKCE Int. J. Graphs Comb. 2020. V. 17, No. 1. P. 1–5.
6. **Klostermeyer W., Mynhardt C.** Protecting a graph with mobile guards // Appl. Anal. Discrete Math. 2016. V. 10. P. 1–29.
7. Topics in domination in graphs. Cham: Springer, 2020. 546 p. (Dev. Math.; V. 64).
8. **Anderson M., Barrientos C., Brigham R., Carrington J., Vitray R., Yellen J.** Maximum-demand graphs for eternal security // J. Comb. Math. Comb. Comput. 2007. V. 61. P. 111–128.
9. **Krim-Yee A., Seamone B., Virgile V.** Eternal domination on prisms of graphs // Discrete Appl. Math. 2019. V. 283. P. 734–736.
10. **MacGillivray G., Mynhardt C. M., Virgile V.** Eternal domination and clique covering // Electron. J. Graph Theory Appl. 2022. V. 10, No. 2. P. 603–624.

Талецкий Дмитрий Сергеевич

Статья поступила
26 июня 2024 г.

После доработки —
14 августа 2024 г.

Принята к публикации
22 сентября 2024 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2025. Vol. 32, No. 1. P. 122–144

UDC 519.17 DOI: 10.33048/daio.2025.32.804

ON THE ETERNAL DOMINATION NUMBER OF PLANAR GRAPHS WITH DIAMETER 2

D. S. Taletskii

National Research University "Higher School of Economics",
25/12 Bolshaya Pechyorskaya Street, 603155 Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: `dmitalmail@gmail.com`

Abstract. An *eternal dominating set* in a graph is a dominating set D on which mobile guards are initially located (at most one guard is allowed on any vertex). For any infinite sequence of attacks occurring sequentially at vertices, the set D can be modified by moving the guard from an adjacent vertex to the attacked vertex, provided the attacked vertex has no guard on it at the time it is attacked. The configuration of guards after each attack must induce a dominating set. The *eternal domination number* of a graph is the cardinality of its minimum eternal dominating set. We prove that the eternal domination number of any planar graph of diameter 2 is equal to its clique covering number. Illustr. 5, bibliogr. 10.

Keywords: dominating set, eternal domination set, eternal domination number, planar graph.

References

1. **A. P. Burger, E. J. Cockayne, W. R. Grundlingh, C. M. Mynhardt, J. van Vuuren,** and **W. Winterbach,** Infinite order domination in graphs, *J. Comb. Math. Comb. Comput.* **50**, 179–194 (2004).
2. **W. Goddard, S. M. Hedetniemi,** and **S. T. Hedetniemi,** Eternal security in graphs, *J. Comb. Math. Comb. Comput.* **52**, 169–180 (2005).
3. **W. F. Klostermeyer** and **G. MacGillivray,** Eternal security in graphs of fixed independence number, *J. Comb. Math. Comb. Comput.* **63**, 97–101 (2007).
4. **J. L. Goldwasser** and **W. F. Klostermeyer,** Tight bounds for eternal dominating sets in graphs, *Discrete Math.* **308** (12), 2589–2593 (2008).

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **19** (1), 142–156 (2025), DOI: 10.1134/S1990478925010120.

5. **K. Driscoll, W. F. Klostermeyer, E. Krop, C. Magnant,** and **P. Taylor,** On eternal domination and Vizing-type inequalities, *AKCE Int. J. Graphs Comb.* **17** (1), 1–5 (2020).
6. **W. Klostermeyer** and **C. Mynhardt,** Protecting a graph with mobile guards, *Appl. Anal. Discrete Math.* **10**, 1–29 (2016).
7. *Topics in Domination in Graphs* (Springer, Cham, 2020) (Dev. Math., Vol. 64).
8. **M. Anderson, C. Barrientos, R. Brigham, J. Carrington, R. Vitray,** and **J. Yellen,** Maximum-demand graphs for eternal security, *J. Comb. Math. Comb. Comput.* **61**, 111–128 (2007).
9. **A. Krim-Yee, B. Seamone,** and **V. Virgile,** Eternal domination on prisms of graphs, *Discrete Appl. Math.* **283**, 734–736 (2019).
10. **G. MacGillivray, C. M. Mynhardt,** and **V. Virgile,** Eternal domination and clique covering, *Electron. J. Graph Theory Appl.* **10** (2), 603–624 (2022).

Dmitry S. Taletskii

Received June 26, 2024
Revised August 14, 2024
Accepted September 22, 2024