

ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 32 № 1 2025

Новосибирск
Издательство Института математики

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ, ПОРОЖДАЮЩИЕ ВСЕ ГРАФЫ КОАЛИЦИОННЫХ РАЗБИЕНИЙ ЦИКЛОВ

А. Н. Глебов^а, А. А. Добрынин^б

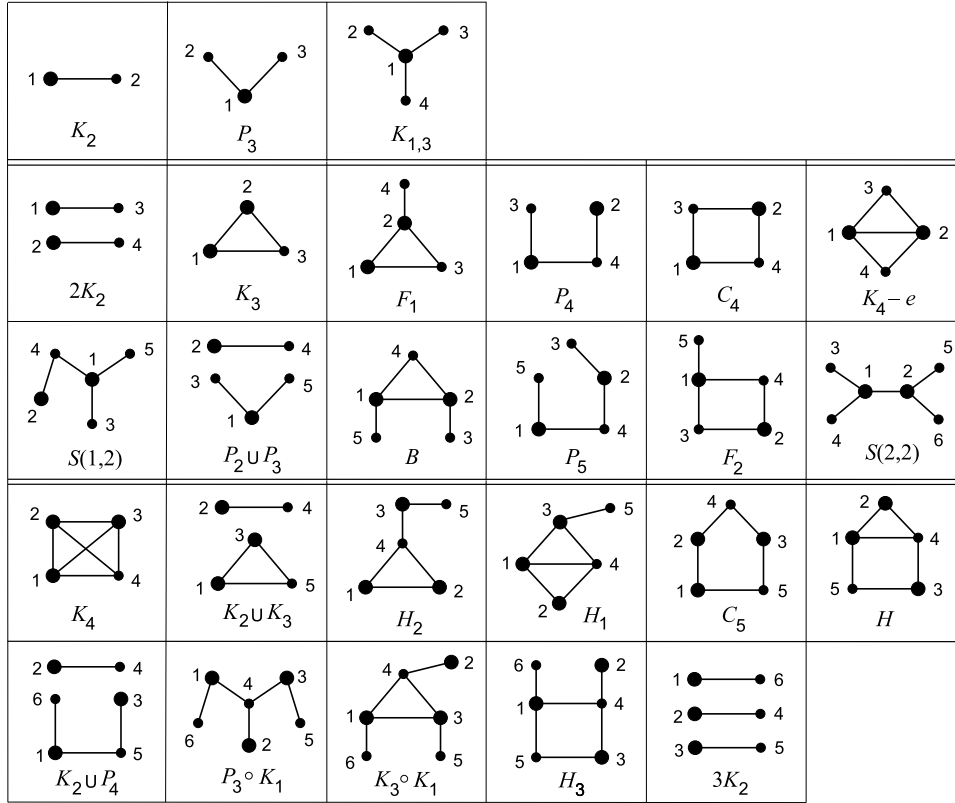
Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: ^аangle@math.nsc.ru, ^бdobr@math.nsc.ru

Аннотация. *Коалицией* в графе G называется пара непересекающихся и недоминирующих подмножеств его вершин $V_1, V_2 \subset V(G)$ таких, что объединение $V_1 \cup V_2$ является доминирующим множеством. В коалиционном разбиении $\pi(G) = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ каждое недоминирующее множество V_i входит в некоторую коалицию с другим множеством этого разбиения, а если V_i доминирующее, то оно одновершинное. Коалиционное разбиение вершин графа G порождает граф коалиций $CG(G, \pi)$, в котором вершины соответствуют множествам разбиения и две вершины смежны, если соответствующие множества образуют коалицию. Известно, что в совокупности все простые циклы порядка более трёх порождают 26 графов коалиций с числом вершин не более шести. Универсальный цикл порождает все такие графы. В работе показано, что только циклы C_{3k} при $k \geq 5$ универсальны. Табл. 4, ил. 1, библиогр. 25.

Ключевые слова: граф, доминирующее множество, коалиционное разбиение, граф коалиций.

Введение

Рассматриваются обыкновенные графы G с множеством вершин $V(G)$. Множество вершин $S \subseteq V(G)$ *доминирующее*, если каждая вершина $v \in V(G) \setminus S$ смежна хотя бы с одной вершиной из S . *Числом доминирования* $\gamma(G)$ графа G называется мощность его наименьшего доминирующего множества. Теория доминирования является большой и хорошо изученной областью теории графов, имеющей многочисленные приложения. Подробные сведения и библиографию по доминированию в графах можно найти в книгах [1–6]. В 2020 г. в работе [7] введено понятие


 Рис. 1. Все графы коалиций, порождаемые циклом C_n при $n \geq 4$

коалиции в графах, отражающее способность нескольких недоминирующих подмножеств вершин графа образовывать доминирующие множества. В работе рассматриваются коалиции, образованные парами подмножеств вершин графа.

Пусть V_1 и V_2 — два непересекающихся подмножества вершин графа G . Эти подмножества образуют *коалицию* в G , если ни одно из них не является доминирующим, но их объединение $V_1 \cup V_2$ будет доминирующим. Разбиение $\pi(G) = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ вершин графа G называется *коалиционным*, если для каждого недоминирующего множества из π существует другое множество из π , образующее с ним коалицию, а каждое доминирующее множество из π одновершинное. Максимальное число подмножеств в коалиционном разбиении графа G называется его *коалиционным числом* и обозначается через $C(G)$. Математическое понятие коалиции возникло как модель описания организации групп людей для достижения своих целей. Пусть, например, парламент состоит

Таблица 1

Число попарно неизоморфных графов коалиций,
порождаемых циклом C_n , $8 \leq n \leq 18$

Цикл	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	C_{17}	C_{18}
Число графов	17	19	17	17	25	17	17	26	17	17	26

Таблица 2

Число графов коалиций, порождаемых циклом C_n , $n \in \{9, 12, 15, 18\}$

$CG(C_n)$	C_9	C_{12}	C_{15}	C_{18}	$CG(C_n)$	C_9	C_{12}	C_{15}	C_{18}
K_2	54	711	7 740	75 927	$S(2, 2)$	9	216	3 645	52 074
P_3	873	32 400	1 007 625	28 366 308	$K_2 \cup P_4$	—	114	3 960	91 089
$K_{1,3}$	450	29 668	1 494 235	63 580 626	$P_2 \cup P_3$	—	59	865	8 844
K_3	573	17 856	448 285	10 236 134	$K_2 \cup K_3$	—	—	16	180
$2K_2$	243	19 890	1 232 520	62 902 353	C_5	18	216	2 040	16 182
P_4	1 278	65 070	2 572 200	88 237 314	P_5	18	312	3 690	37 806
F_1	639	27 138	813 665	20 963 358	H_2	—	48	480	3 222
C_4	171	5 166	124 590	2 693 505	H_1	—	12	90	450
$K_4 - e$	198	4 116	70 995	1 113 054	H	9	123	1 540	16 849
$S(1, 2)$	180	8 388	307 020	9 656 142	$3K_2$	9	120	1 095	8 397
B	342	12 084	359 550	9 696 120	$P_3 \circ K_1$	9	84	615	3 897
K_4	72	1 950	38 445	667 629	$K_3 \circ K_1$	—	4	35	198
F_2	27	972	21 525	386 118	H_3	—	12	90	450

из нескольких партий, каждая из которых не в состоянии добиться желаемого результата (провести какой-либо закон и т. п.), в то время как коалиция двух или нескольких партий даёт возможность сделать это [8]. Коалиции в графах, основанные на доминировании с дополнительными свойствами (тотальное, связное, сильное, независимое доминирование и др.), изучались в [9–16].

Картину образования коалиций в графе G можно характеризовать графами коалиций, которые строятся по разбиениям множества его вершин [17]. Если π — некоторое разбиение $V(G)$, то оно рассматривается в качестве множества вершин графа коалиций $CG(G, \pi)$, при этом две вершины смежны в $CG(G, \pi)$, если соответствующие множества разбиения π образуют коалицию в G .

Вопросы нахождения коалиционных чисел и описания графов коалиций для различных классов графов изучались в [18–25]. В частности, доказано, что простые цепи в совокупности порождают 18 графов коалиций, три из которых существуют только для цепей малой длины,

Таблица 3

 Число графов коалиций, порождаемых циклом C_n , $8 \leq n \leq 18$, $3 \nmid n$

$CG(C_n)$	C_8	C_{10}	C_{11}	C_{13}	C_{14}	C_{16}	C_{17}
K_2	20	130	308	1 599	3 542	16 716	35 768
P_3	24	2 940	9 878	103 220	324 632	3 090 976	9 399 742
$K_{1,3}$	96	1 760	7 623	111 176	414 946	5 285 496	18 477 708
K_3	84	1 910	5 951	53 235	155 526	1 281 880	3 634 141
$2K_2$	38	1 025	4 565	80 184	317 891	4 643 930	17 221 340
P_4	88	4 760	17 930	224 952	767 760	8 449 216	27 452 688
F_1	204	2 490	8 525	87 256	268 926	2 439 404	7 180 069
C_4	48	560	1 716	15 210	43 820	350 336	975 256
$K_4 - e$	40	650	1 287	11 440	25 928	182 576	434 690
$S(1, 2)$	40	425	2 585	25 064	102 816	946 824	3 288 752
B	48	920	3 168	34 229	112 742	1 038 080	3 243 277
K_4	48	260	1 232	5 967	21 497	110 480	333 744
F_2	16	150	451	3 081	9 289	57 752	163 829
$S(2, 2)$	8	10	154	364	2 198	7 232	28 458
$K_2 \cup P_4$	4	15	110	546	2 324	13 416	44 217
$P_2 \cup P_3$	7	50	77	364	672	2 787	5 474
$K_2 \cup K_3$	8	3	44	26	210	168	935

а цепь P_{10} является наименьшей цепью, порождающей все остальные 15 графов коалиций, т. е. является универсальной цепью. Простые циклы C_n с числом вершин $n \geq 4$ порождают в точности 26 графов коалиций, порядок которых не превосходит шести [18, 19]. На рис. 1 приводятся диаграммы этих графов, обозначенных K_2 , P_3 , P_4 , P_5 , $2K_2$, K_3 , C_4 , C_5 , $K_{1,3}$, F_1 и F_2 , $K_4 - e$, K_4 , $P_2 \cup P_3$, $K_2 \cup K_3$, H , $S(1, 2)$, $S(2, 2)$, B , H_1 , H_2 , H_3 , $3K_2$, $K_2 \cup P_4$, $P_3 \circ K_1$ и $K_3 \circ K_1$. Простой цикл называется *универсальным*, если он порождает все указанные графы. Вопрос о существовании универсальных циклов сформулирован в [19]. В табл. 1–3 приводятся полученные нами с помощью компьютерных вычислений данные о числе графов коалиций для цикла C_n с числом вершин $8 \leq n \leq 18$, которые показывают, что циклы C_{15} и C_{18} универсальны. В настоящей работе докажем, что только цикл C_{3k} универсальный, где $k \geq 5$.

1. Основной результат

Докажем сначала, что простые циклы с числом вершин, не кратным трём, не могут быть универсальными.

Утверждение 1. Циклы C_{3k-2} и C_{3k-1} не универсальны для любого $k \geq 4$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что несвязный граф $3K_2$ не может быть графом, порождаемым коалиционными разбиениями вершин простых циклов C_{3k-2} и C_{3k-1} . Пусть, напротив, $3K_2$ является графом коалиций некоторого коалиционного разбиения такого цикла $\pi = \{V_1, V_2, \dots, V_6\}$. Без потери общности предположим, что множества V_{2i-1} и V_{2i} для каждого $i \in \{1, 2, 3\}$ образуют коалиции. Известно, что для чисел доминирования циклов выполняется равенство $\gamma(C_{3k-2}) = \gamma(C_{3k-1}) = k$. Тогда для всех i мощность каждой коалиции $|V_{2i-1} \cup V_{2i}| \geq k$ и, следовательно, $\sum_{i=1}^3 |V_{2i-1} \cup V_{2i}| = \sum_{i=1}^6 |V_i| \geq 3k$. В силу того, что π является разбиением множества вершин цикла, имеем $\sum_{i=1}^6 |V_i| \in \{3k-2, 3k-1\}$. Из полученного противоречия следует, что множество графов коалиций циклов C_{3k-2} и C_{3k-1} не может содержать граф $3K_2$. Утверждение 1 доказано.

Для универсальности цикла с числом вершин не менее 15 достаточно, чтобы его порядок делился на 3.

Утверждение 2. Цикл C_{3k} универсальный для любого $k \geq 5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вершины циклов имеют последовательную нумерацию, начиная с вершины 1. Коалиционные разбиения вершин цикла C_{3k} , порождающие графы на рис. 1, будут получены добавлением новых вершин в множества разбиений цикла C_{15} из табл. 4. Все графы коалиций на рис. 1 имеют наименьшие вершинные покрытия мощности не более 3, которые изображены большими вершинами. Тогда любая коалиция будет содержать множество, соответствующее хотя бы одной вершине из вершинного покрытия графа коалиций. Обозначим вершины такого покрытия через v_1, v_2 и v_3 (вершины могут совпадать), а соответствующие им множества коалиционного разбиения через V_1, V_2 и V_3 соответственно. Для получения коалиционных разбиений цикла C_{15+3t} , $t \geq 1$, к множествам V_1, V_2 и V_3 цикла C_{15} будем добавлять $3t$ новых вершин, сохраняя тем самым графы коалиций. Рассмотрим три случая в зависимости от мощности вершинного покрытия. Для более удобной проверки доминирования при изображении фрагмента цикла вместо номеров его вершин используем номера соответствующих множеств коалиционных разбиений.

СЛУЧАЙ 1. Три графа коалиций имеют вершинное покрытие мощности 1 (вершина $v_1 = 1$ в графах верхнего ряда на рис. 1), т. е. каждая коалиция будет включать множество V_1 . Согласно табл. 4 смежные вершины 1 и 2 цикла C_{15} принадлежат множеству V_1 в коалиционных разбиениях этих графов. Тогда все вставляемые в цикл C_{15} новые вершины

Таблица 4

 Разбиения вершин цикла C_{15} , порождающие все графы коалиций

$CG(C_{15})$	Разбиение множества $V(C_{15}) = V_1 \cup V_2 \cup \dots$	Рёбра $CG(C_{15})$
K_2	$\{1, 2, \dots, 12\}, \{13, 14, 15\}$	1-2
P_3	$\{1, 2, \dots, 12\}, \{13, 15\}, \{14\}$	1-2; 1-3
$K_{1,3}$	$\{1, 2, \dots, 12\}, \{13\}, \{14\}, \{15\}$	1-2; 1-3; 1-4
K_3	$\{1, 2, 5, 7, 9, 11\}, \{3, 13, 14\}, \{4, 6, 8, 10, 12, 15\}$	1-2,3; 2-3
$2K_2$	$\{1, 2, 5, 10, 11\}, \{3, 12\}, \{4, 8, 13, 14\}, \{6, 7, 9, 15\}$	1-3; 2-4
P_4	$\{1, 2, 5, 10, 11, 14\}, \{3, 12, 15\}, \{4, 8\}, \{6, 7, 9, 13\}$	1-3,4; 2-4
F_1	$\{1, 2, 5, 8, 10, 11\}, \{3, 12, 15\}, \{4, 14\}, \{6, 7, 9, 13\}$	1-2,3,4; 2-4
C_4	$\{1, 2, 5, 8, 11\}, \{3, 9, 15\}, \{4, 7, 12, 14\}, \{6, 10, 13\}$	1-3,4; 2-3,4
$K_4 - e$	$\{1, 2, 5, 8, 11\}, \{3, 9, 12, 15\}, \{4, 7, 14\}, \{6, 10, 13\}$	1-2,3,4; 2-3,4
K_4	$\{1, 4, 7, 10\}, \{2, 8, 11, 14\}, \{3, 6, 13\}, \{5, 9, 12, 15\}$	1-2,3,4; 2-3,4; 3-4
$P_2 \cup P_3$	$\{1, 2, 5, 8, 11\}, \{3, 15\}, \{4, 14\}, \{6, 9, 12\}, \{7, 10, 13\}$	1-3,5; 2-4
$S(1, 2)$	$\{1, 2, 5, 8, 11\}, \{3\}, \{4, 14\}, \{6, 9, 12, 15\}, \{7, 10, 13\}$	1-3,4,5; 2-4
P_5	$\{1, 2, 5, 8, 13\}, \{3, 9, 14, 15\}, \{4, 7, 12\}, \{6, 11\}, \{10\}$	1-4,5; 2-3,4
B	$\{1, 2, 5, 8\}, \{3, 9, 12, 15\}, \{4, 7\}, \{6, 11, 14\}, \{10, 13\}$	1-2,4,5; 2-3,4
F_2	$\{1, 2, 5, 8, 14\}, \{3, 15\}, \{4, 7, 10, 13\}, \{6, 9, 12\}, \{11\}$	1-3,4,5; 2-3,4
C_5	$\{1, 4, 13\}, \{2, 7, 10\}, \{3, 8, 15\}, \{5, 11, 14\}, \{6, 9, 12\}$	1-2,5; 2-4; 3-4,5
$K_2 \cup K_3$	$\{1, 4, 7, 10\}, \{2, 14\}, \{3, 13\}, \{5, 8, 11\}, \{6, 9, 12, 15\}$	1-3,5; 2-4; 3-5
H_2	$\{1, 4, 7, 10\}, \{2, 13\}, \{3, 15\}, \{5, 8, 11, 14\}, \{6, 9, 12\}$	1-2,4; 2-4; 3-4,5
H_1	$\{1, 4, 7, 10\}, \{2, 13\}, \{3, 12, 15\}, \{5, 8, 11, 14\}, \{6, 9\}$	1-2,3,4; 2-4; 3-4,5
H	$\{1, 4, 7, 13\}, \{2, 10\}, \{3, 15\}, \{5, 8, 11, 14\}, \{6, 9, 12\}$	1-2,4,5; 2-4; 3-4,5
$S(2, 2)$	$\{1, 2, 5, 8, 13, 14\}, \{3, 9, 12, 15\}, \{4, 7\}, \{6\}, \{10\}, \{11\}$	1-2,5,6; 2-3,4
$3K_2$	$\{1, 4, 7, 10\}, \{2, 14\}, \{3, 15\}, \{5, 8, 11\}, \{6, 9, 12\}, \{13\}$	1-6; 2-4; 3-5
$K_2 \cup P_4$	$\{1, 4, 7, 10\}, \{2, 14\}, \{3\}, \{5, 8, 11\}, \{6, 9, 12, 15\}, \{13\}$	1-5,6; 2-4; 3-5
$P_3 \circ K_1$	$\{1, 4, 7, 10\}, \{2\}, \{3, 15\}, \{5, 8, 11, 14\}, \{6, 9, 12\}, \{13\}$	1-4,6; 2-4; 3-4,5
$K_3 \circ K_1$	$\{1, 4, 7, 10\}, \{2\}, \{3, 12, 15\}, \{5, 8, 11, 14\}, \{6, 9\}, \{13\}$	1-3,4,6; 2-4; 3-4,5
H_3	$\{1, 4, 7, 13\}, \{2\}, \{3, 15\}, \{5, 8, 11, 14\}, \{6, 9, 12\}, \{10\}$	1-4,5,6; 2-4; 3-4,5

добавим только к множеству V_1 . Фрагмент $\dots - 1 - 1 - \dots$ (соответствующий вершинам 1 и 2) цикла C_{15} после добавления t троек вершин перейдёт во фрагмент цикла C_{15+3t} как показано ниже:

$$\dots - 1 - 1 - \dots \rightarrow \dots - 1 - (1 - 1 - 1)^t - 1 - \dots$$

Очевидно, что пополненное множество V_1 будет образовывать в цикле C_{15+3t} такие же коалиции, как и исходное V_1 в графе C_{15} .

СЛУЧАЙ 2. Вершинное покрытие мощности 2 имеют 12 графов коалиций (вершины $v_1 = 1$ и $v_2 = 2$ в графах второго и третьего рядов

на рис. 1). Каждая коалиция будет содержать хотя бы одно из множеств V_1 или V_2 . Смежные вершины 1 и 2 цикла C_{15} принадлежат множеству V_1 в коалиционных разбиениях всех этих графов (см. табл. 4). Тогда новые вершины, добавляемые в множества V_1 и V_2 графа C_{15} , можно разместить в цикле C_{15+3t} следующим образом:

$$\dots - 1 - 1 - \dots \rightarrow \dots - 1 - (1 - 2 - 1)^t - 1 - \dots$$

Так как все вершины указанного справа фрагмента цикла C_{15+3t} доминируются вершинами пополненных множеств V_1 и V_2 , все графы коалиций, порождаемые циклами C_{15} и C_{15+3t} , будут совпадать.

СЛУЧАЙ 3. Вершинное покрытие мощности 3 имеют 11 графов коалиций (вершины $v_1 = 1$, $v_2 = 2$ и $v_3 = 3$ в графах из двух последних рядов на рис. 1). Каждая коалиция будет содержать хотя бы одно из множеств V_1 , V_2 или V_3 . Как видно из табл. 4, смежные вершины 1 и 2 цикла C_{15} принадлежат множествам V_1 и V_2 в коалиционных разбиениях этих графов. Тем самым новые вершины, добавляемые в множества V_1 , V_2 и V_3 , можно расположить в цикле C_{15+3t} следующим способом:

$$\dots - 1 - 2 - \dots \rightarrow \dots - 1 - (2 - 3 - 1)^t - 2 - \dots$$

Легко проверить, что все вершины фрагмента C_{15+3t} при любом $t \geq 1$ доминируются вершинами пополненных множеств V_1 , V_2 и V_3 , а это влечёт совпадение графов коалиций для C_{15} и C_{15+3t} .

Таким образом, для любого $t \geq 0$ к циклу C_{15} всегда можно добавить $3t$ вершин с сохранением коалиционных разбиений из табл. 4, что обеспечивает порождение циклом C_{15+3t} всех графов коалиций, т. е. универсальность цикла C_{15+3t} . Утверждение 2 доказано.

Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева (проект № FWNF-2022-0017).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Литература

1. Haynes T. W., Hedetniemi S. T., Slater P. J. Fundamentals of domination in graphs. New York: Marcel Dekker, 1998. 464 p. (Pure Appl. Math.; V. 208). DOI: 10.1201/9781482246582.
2. Du D.-Z., Wan P.-J. Connected dominating set: Theory and applications. New York: Springer, 2012. 206 p. (Springer Optim. Appl.; V. 77). DOI: 10.1007/978-1-4614-5242-3.

3. **Henning M. A., Yeo A.** Total domination in graphs. New York: Springer, 2013. 178 p. DOI: 10.1007/978-1-4614-6525-6.
4. Topics in domination in graphs. Cham: Springer, 2020. 546 p. (Dev. Math.; V. 64). DOI: 10.1007/978-3-030-51117-3.
5. Structures of domination in graphs. Cham: Springer, 2021. 536 p. (Dev. Math.; V. 66). DOI: 10.1007/978-3-030-58892-2.
6. Domination in graphs: Core concepts. Cham: Springer, 2023. 644 p. DOI: 10.1007/978-3-031-09496-5.
7. **Haynes T. W., Hedetniemi J. T., Hedetniemi S. T., McRae A. A., Mohan R.** Introduction to coalitions in graphs // AKCE Int. J. Graphs Comb. 2020. V. 17, No. 2. P. 653–659. DOI: 10.1080/09728600.2020.1832874.
8. **Fisher St. D., Hobolt S. B.** Coalition government and electoral accountability // Electoral Stud. 2010. V. 29, No. 3. P. 358–369. DOI: 10.1016/j.electstud.2010.03.003.
9. **Alikhani S., Bakhshesh D., Golmohammadi H.** Total coalitions in graphs // Quaest. Math. 2024. V. 47, No. 11. P. 2283–2294. DOI: 10.2989/16073606.2024.2365365.
10. **Alikhani S., Bakhshesh D., Golmohammadi H., Konstantinova E. V.** Connected coalitions in graphs // Discuss. Math. Graph Theory. 2024. V. 44, No. 4. P. 1551–1566. DOI: 10.7151/dmgt.2509.
11. **Alikhani S., Bakhshesh D., Golmohammadi H., Klavžar S.** On independent coalition in graphs and independent coalition graphs // Discuss. Math. Graph Theory. 2025. V. 45, No. 2. P. 533–544. DOI: 10.7151/dmgt.2543.
12. **Golmohammadi H., Alikhani S., Ghanbari N., Takhonov I. I., Abaturon A.** Strong coalitions in graphs. Ithaca, NY: Cornell Univ., 2024. 12 p. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv:2404.11575). DOI: 10.48550/arXiv.2404.11575.
13. **Samadzadeh M. R., Mojdeh D. A.** Independent coalition in graphs: Existence and characterization // Ars Math. Contemp. 2024. V. 24, No. 3. Article ID P3.09. 17 p. DOI: 10.26493/1855-3974.3113.6f7.
14. **Brešar B., Henning M. A., Klavžar S., Rall D. F.** Domination games played on graphs. Cham: Springer, 2021. 122 p. DOI: 10.1007/978-3-030-69087-8.
15. **Bakhshesh D., Henning M. A.** The minmin coalition number in graphs // Aequat. Math. 2024. V. 99. P. 223–236. DOI: 10.1007/s00010-024-01045-5.
16. **Bednarz P., Pirga M.** On proper 2-dominating sets in graphs // Symmetry. 2024. V. 16, No. 3. Article ID 296. 10 p. DOI: 10.3390/sym16030296.
17. **Haynes T. W., Hedetniemi J. T., Hedetniemi S. T., McRae A. A., Mohan R.** Coalition graphs // Commun. Comb. Optim. 2023. V. 8, No. 2. P. 423–430. DOI: 10.22049/CCO.2022.27916.1394.
18. **Bakhshesh D., Henning M. A., Pradhan D.** On the coalition number of trees // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 2023. V. 46. Article ID 95. 14 p. DOI: 10.1007/s40840-023-01492-4.

19. Haynes T. W., Hedetniemi J. T., Hedetniemi S. T., McRae A. A., Mohan R. Coalition graphs of paths, cycles, and trees // Discuss. Math. Graph Theory. 2023. V. 43, No. 4. P. 931–946. DOI: 10.7151/dmgt.2416.
20. Haynes T. W., Hedetniemi J. T., Hedetniemi S. T., McRae A. A., Mohan R. Upper bounds on the coalition number // Australas. J. Comb. 2021. V. 80, No. 3. P. 442–453.
21. Alikhani S., Golmohammadi H., Konstantinova E. V. Coalition of cubic graphs of order at most 10 // Commun. Comb. Optim. 2024. V. 9, No. 3. P. 437–450. DOI: 10.22049/cco.2023.28328.1507.
22. Dobrynin A. A., Golmohammadi H. On cubic graphs having the maximum coalition number // Сиб. электрон. мат. изв. 2024. Т. 21, № 1. С. 356–362. DOI: 10.33048/semi.2024.21.027.
23. Golmohammadi H. Total coalitions of cubic graphs of order at most 10 // Commun. Comb. Optim. 2024. V. 10, No. 3. P. 601–615. DOI: 10.22049/cco.2024.29015.1813.
24. Haynes T. W., Hedetniemi J. T., Hedetniemi S. T., McRae A. A., Mohan R. Self-coalition graphs // Opuscula Math. 2023. V. 43, No. 2. P. 173–183. DOI: 10.7494/opmath.2023.43.2.173.
25. Bakhshesh D., Henning M. A., Pradhan D. Singleton coalition graph chains // Comput. Appl. Math. 2024. V. 43. Article ID 85. 22 p. DOI: 10.1007/s40314-023-02588-0.

Глебов Алексей Николаевич
Добрынин Андрей Алексеевич

Статья поступила
11 июля 2024 г.
После доработки —
16 августа 2024 г.
Принята к публикации
22 сентября 2024 г.

UNIVERSAL CYCLES THAT GENERATE ALL GRAPHS OF COALITION PARTITIONS IN CYCLES

A. N. Glebov^a and A. A. Dobrynin^b

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptuyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: ^aangle@math.nsc.ru, ^bdobr@math.nsc.ru

Abstract. A *coalition* in a graph G is a pair of disjoint nondominating subsets of its vertices $V_1, V_2 \subset V(G)$ such that $V_1 \cup V_2$ is a dominating set. In the coalition partition $\pi(G) = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$, every nondominating set V_i is included in some coalition and if V_i is dominating, then it is a single-vertex set. A coalition partition of vertices of a graph G generates a coalition graph $CG(G, \pi)$ whose vertices correspond to the partition sets, while two vertices are adjacent if the corresponding sets form a coalition. It is well known that all simple cycles of order greater than three generate in total 26 coalition graphs of order at most six. A universal cycle generates all such graphs. It is shown that only the cycles C_{3k} , $k \geq 5$, are universal. Tab. 4, illustr. 1, bibliogr. 25.

Keywords: graph, dominating set, coalition partition, coalition graph.

References

1. T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs* (Marcel Dekker, New York, 1998) (Pure Appl. Math., Vol. 208), DOI: 10.1201/9781482246582.
2. D.-Z. Du and P.-J. Wan, *Connected Dominating Set: Theory and Applications* (Springer, New York, 2012) (Springer Optim. Appl., Vol. 77), DOI: 10.1007/978-1-4614-5242-3.
3. M. A. Henning and A. Yeo, *Total Domination in Graphs* (Springer, New York, 2013), DOI: 10.1007/978-1-4614-6525-6.
4. *Topics in Domination in Graphs* (Springer, Cham, 2020) (Dev. Math., Vol. 64), DOI: 10.1007/978-3-030-51117-3.
5. *Structures of Domination in Graphs* (Springer, Cham, 2021) (Dev. Math., Vol. 66), DOI: 10.1007/978-3-030-58892-2.

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **19** (1), 33–39 (2025), DOI: 10.1134/S199047892501003X.

6. *Domination in Graphs: Core Concepts* (Springer, Cham, 2023), DOI: 10.1007/978-3-031-09496-5.
7. **T. W. Haynes, J. T. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, A. A. McRae,** and **R. Mohan**, Introduction to coalitions in graphs, *AKCE Int. J. Graphs Comb.* **17** (2), 653–659 (2020), DOI: 10.1080/09728600.2020.1832874.
8. **St. D. Fisher** and **S. B. Hobolt**, Coalition government and electoral accountability, *Electoral Stud.* **29** (3), 358–369 (2010), DOI: 10.1016/j.electstud.2010.03.003.
9. **S. Alikhani, D. Bakhshesh,** and **H. Golmohammadi**, Total coalitions in graphs, *Quaest. Math.* **47** (11), 2283–2294 (2024), DOI: 10.2989/16073606.2024.2365365.
10. **S. Alikhani, D. Bakhshesh, H. Golmohammadi,** and **E. V. Konstantinova**, Connected coalitions in graphs, *Discuss. Math. Graph Theory.* **44** (4), 1551–1566 (2024), DOI: 10.7151/dmgt.2509.
11. **S. Alikhani, D. Bakhshesh, H. Golmohammadi,** and **S. Klavžar**, On independent coalition in graphs and independent coalition graphs, *Discuss. Math. Graph Theory* **45** (2), 533–544 (2025), DOI: 10.7151/dmgt.2543.
12. **H. Golmohammadi, S. Alikhani, N. Ghanbari, I. I. Takhonov,** and **A. Abaturov**, Strong coalitions in graphs (Cornell Univ., Ithaca, NY, 2024) (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:2404.11575), DOI: 10.48550/arXiv.2404.11575.
13. **M. R. Samadzadeh** and **D. A. Mojdeh**, Independent coalition in graphs: Existence and characterization, *Ars Math. Contemp.* **24** (3), ID P3.09 (2024), DOI: 10.26493/1855-3974.3113.6f7.
14. **B. Brešar, M. A. Henning, S. Klavžar,** and **D. F. Rall**, *Domination Games Played on Graphs* (Springer, Cham, 2021), DOI: 10.1007/978-3-030-69087-8.
15. **D. Bakhshesh** and **M. A. Henning**, The minmin coalition number in graphs, *Aequat. Math.* **99**, 223–236 (2024), DOI: 10.1007/s00010-024-01045-5.
16. **P. Bednarz** and **M. Pirga**, On proper 2-dominating sets in graphs, *Symmetry* **16** (3), ID 296 (2024), DOI: 10.3390/sym16030296.
17. **T. W. Haynes, J. T. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, A. A. McRae,** and **R. Mohan**, Coalition graphs, *Commun. Comb. Optim.* **8** (2), 423–430 (2023), DOI: 10.22049/CCO.2022.27916.1394.
18. **D. Bakhshesh, M. A. Henning,** and **D. Pradhan**, On the coalition number of trees, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* **46**, ID 95 (2023), DOI: 10.1007/s40840-023-01492-4.
19. **T. W. Haynes, J. T. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, A. A. McRae,** and **R. Mohan**, Coalition graphs of paths, cycles, and trees, *Discuss. Math. Graph Theory.* **43** (4), 931–946 (2023), DOI: 10.7151/dmgt.2416.
20. **T. W. Haynes, J. T. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, A. A. McRae,** and **R. Mohan**, Upper bounds on the coalition number, *Australas. J. Comb.* **80** (3), 442–453 (2021).

-
21. **S. Alikhani, H. Golmohammadi, and E. V. Konstantinova**, Coalition of cubic graphs of order at most 10, *Commun. Comb. Optim.* **9** (3), 437–450 (2024), DOI: 10.22049/cco.2023.28328.1507.
 22. **A. A. Dobrynin and H. Golmohammadi**, On cubic graphs having the maximum coalition number, *Sib. Elektron. Mat. Izv.* **21** (1), 356–362 (2024), DOI: 10.33048/semi.2024.21.027.
 23. **H. Golmohammadi**, Total coalitions of cubic graphs of order at most 10, *Commun. Comb. Optim.* **10** (3), 601–615 (2024), DOI: 10.22049/cco.2024.29015.1813.
 24. **T. W. Haynes, J. T. Hedetniemi, S. T. Hedetniemi, A. A. McRae, and R. Mohan**, Self-coalition graphs, *Opuscula Math.* **43** (2), 173–183 (2023), DOI: 10.7494/opmath.2023.43.2.173.
 25. **D. Bakhshesh, M. A. Henning, and D. Pradhan**, Singleton coalition graph chains, *Comput. Appl. Math.* **43**, ID 85 (2024), DOI: 10.1007/s40314-023-02588-0.

Aleksey N. Glebov
Andrey A. Dobrynin

Received July 11, 2024
Revised August 16, 2024
Accepted September 22, 2024