

ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 32 № 2 2025

Новосибирск
Издательство Института математики

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПО ЧИСЛУ ОТКРЫТЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ГРАФАХ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ РЕБЕР

А. В. Пяткин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: artem@math.nsc.ru

Аннотация. Открытым треугольником (ОТ) в неориентированном графе называется индуцированный подграф из трёх вершин ровно с двумя рёбрами. Рассматривается класс графов, в котором числа вершин и рёбер отличаются на фиксированную константу s . Получена полная характеристика экстремальных по числу ОТ графов в таком классе с не менее чем $s + 7$ вершинами. Ил. 1, библиогр. 12.

Ключевые слова: открытый треугольник, индуцированный подграф, разреженный граф.

Введение

Задача подсчёта в ориентированном графе числа различных ориентированных трёхвершинных подграфов (так называемый триадный переверч) возникает в социологии при анализе сбалансированности социальной сети, а также её однородности, транзитивности и склонности к кластеризации [1–3]. Это обуславливает интерес к более общей задаче подсчёта количества заданных порождённых подграфов в графе [5–7] как в ориентированном, так и в неориентированном случае. В частности, важно находить графы с наибольшим числом тех или иных подграфов. Такие графы будем называть *экстремальными*.

Для неориентированного графа минимальными по числу вершин нетривиальными подграфами являются трёхвершинные подграфы с одним или двумя рёбрами. Первые оценки на число таких подграфов в n -вершинном графе были получены в работах [8, 9]. Поскольку трёхвершинные подграфы с 1 и 2 рёбрами являются дополнениями друг друга, задачи поиска экстремальных графов для этих подграфов эквивалентны, поэтому достаточно рассматривать только случай двух рёбер. Для этого случая в [10] доказана единственность экстремального графа G при фиксированном числе вершин n , а именно $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$. В той же работе [10]

поставлена задача поиска экстремальных графов с фиксированным числом вершин n и рёбер m . Нетрудно заметить, что при $m < n$ единственным таким графом является $G = K_{1,m} \cup (n - m - 1)K_1$. В [11] получена полная характеристика экстремальных графов при $n = m$. Оказалось, что за исключением случая $n = m = 6$ экстремальный граф всегда единственный. В частности, при $n \geq 7$ он получается добавлением одного ребра к звезде $K_{1,n-1}$. В работе [12] последний результат обобщён для $m = n + c$, а именно доказано, что при $n \geq 4c + 7$ единственный экстремальный граф получается добавлением всесмежной вершины к графу $(n - c - 3)K_1 \cup K_{1,c+1}$.

В настоящей статье устанавливается структура экстремальных графов для случая $m = n + c$ при $n \geq c + 7$. Во-первых, показано, что граф из [12] единственный экстремальный при $n \geq 3c + 7$, и тем самым получен ответ на вопрос, сформулированный там же в [12]. Во-вторых, описывается новый граф, который является единственным экстремальным при $c + 7 \leq n \leq 3n + 5$. При $n = 3n + 6$ оба эти графа экстремальны. Хотя ход доказательства экстремальности этих графов следует той же канве, что и в [12], усиление результата потребовало разработки новых инструментов, которые представляют интерес сами по себе и могут быть полезны и для дальнейших исследований.

В разд. 1 доказывается ряд вспомогательных результатов, включая ключевую теорему 1, которая интересна и сама по себе. В разд. 2 доказывается основной результат работы, а именно описывается структура экстремальных графов при $n \geq c + 7$. В заключении даются некоторые комментарии к работе.

1. Вспомогательные результаты

В этом разделе будет доказан ряд вспомогательных утверждений, в том числе теорема, играющая ключевую роль при выводе основного результата.

Открытым треугольником (ОТ) в неориентированном графе называется индуцированный подграф из трёх вершин и двух рёбер, т. е. путь длины 2, соединяющий две несмежные вершины. *Центром* ОТ назовём вершину, имеющую в нём степень 2. Для целых чисел $a \leq b$ под *интервалом* будем понимать множество $[a, b] = \{a, a + 1, \dots, b\}$. Для произвольной вершины v через $N(v)$ обозначим множество её соседей и положим $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Тогда $d(v) = |N(v)|$ называется *степенью вершины* v , а $\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$. Через $\Delta_2(G)$ обозначим число ОТ в графе G . Графы с наибольшим числом ОТ при заданных n и m далее будем называть *экстремальными*. Имеет место следующая простая верхняя оценка на $\Delta_2(G)$.

Утверждение 1. Если граф G имеет максимальную степень Δ и содержит m рёбер, то $\Delta_2(G) \leq m(\Delta - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $f(e)$ число ОТ, содержащих ребро $e = xy$. Нетрудно заметить, что $f(e) \leq d(x) + d(y) - 2$. Поскольку каждый ОТ содержит ровно два ребра, имеем

$$\Delta_2(G) \leq \sum_{e \in E} f(e)/2 \leq m(2\Delta - 2)/2 = m(\Delta - 1),$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что оценка достигается на однородных графах степени Δ без треугольников. Вообще, если граф G не содержит треугольников, то выполняется формула

$$\Delta_2(G) = \sum_{v \in V} \binom{d(v)}{2}, \quad (1)$$

получаемая подсчётом ОТ с центром в каждой вершине.

В работе [11] доказана

Лемма 1 [11]. Пусть G является экстремальным графом на n вершинах с m рёбрами. Тогда

- 1) не более чем одна компонента связности графа G может иметь рёбра;
- 2) если $m \geq n$ и граф G имеет k изолированных вершин и одну связную компоненту C , то либо степень всех вершин в C не меньше $k + 2$, либо для некоторого единственного $d \leq k + 1$ компонента C содержит одну или несколько вершин степени d , смежных с d попарно несмежными вершинами максимальной степени Δ , а степени всех остальных вершин в C (если они есть) лежат в интервале $[k + 2, \Delta - 1]$.

Из второй части леммы 1 очевидно вытекает

Следствие 1. Пусть $m \geq n$ и экстремальный граф G имеет вершины степеней d_1 и d_2 , причём $d_1 > d_2 \geq 1$. Тогда G содержит не более $d_1 - 2$ изолированных вершин.

Докажем ещё одну оценку для числа изолированных вершин в экстремальных графах определённого типа.

Лемма 2. Пусть граф $G = K_{k+1, \Delta} \cup sK_1$ экстремальный с параметрами $n = (\Delta + k + 1 + s)$ и $m = (k + 1)\Delta$, где $k \geq 1$. Тогда $s \leq 2k - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в графе G произвольную вершину x степени $k + 1$ и обозначим через $y_1, \dots, y_{k+1}$ и $z_1, \dots, z_s$ вершины степеней Δ и 0 соответственно. Пусть $G' = G \setminus \{xy_1, \dots, xy_{k+1}\}$, а $G'' = G' \cup$

$\{y_{k+1}z_1, \dots, y_{k+1}z_k\}$. Нетрудно заметить, что $\Delta_2(G') = \Delta_2(G) - \binom{k}{2} - k - k(\Delta - 1)$, а $\Delta_2(G'') = \Delta_2(G') + \binom{k}{2} + k\Delta = \Delta_2(G)$. Граф G экстремальный, а G'' имеет то же число вершин, рёбер и ОТ, что и G . Значит, G'' тоже экстремальный. Поскольку в нём есть вершины степеней 1 и $k+1$, а также $s - k$ изолированных вершин, по следствию 1 получаем $s \leq 2k - 1$. Лемма 2 доказана.

Пусть заданы целые неотрицательные числа $m > n > D \geq 2$. Назовём граф $G = (V, E)$ *хорошим*, если выполняются следующие условия:

$$|V(G)| = n, \quad |E(G)| = m, \quad \Delta(G) \leq D, \quad m = kD + l, \\ \text{где } k \in [0, D - 1], \quad l \in [1, D], \quad n \geq k + D + 1. \quad (2)$$

Другими словами, чтобы граф G был хорошим, при делении m на D с ненулевым остатком (т. е. при $m = kD$ считаем, что частное равно $k - 1$, а остаток равен D) частное и остаток должны удовлетворять условиям (2), где m — это число рёбер графа G , а D — фиксированное число, являющееся верхней оценкой его максимальной степени.

Обозначим через $f(n, k, l, D)$ максимальное число ОТ среди хороших графов с такими параметрами. Основным результатом этого раздела является

$$\textbf{Теорема 1.} \quad f(n, k, l, D) = k\binom{D}{2} + D\binom{k}{2} + lk + \binom{l}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сразу следует из лемм 3 и 4 ниже. Отметим также, что вырожденный случай $k = 0$ можно не рассматривать, поскольку тогда $m = l \leq D$ и, очевидно, экстремальный граф представляет собой звезду $K_{1,m}$ с $n - m - 1$ изолированными вершинами, для которой теорема верна. Теорема 1 доказана.

Нам потребуются известные свойства биномиальных коэффициентов, легко проверяемые непосредственно:

$$\binom{a+b}{2} - \binom{b}{2} = \binom{a}{2} + ab, \quad \binom{a-b}{2} + \binom{b}{2} = \binom{a}{2} - ab + b^2, \quad (3)$$

в частности,

$$\binom{a+1}{2} = \binom{a}{2} + a, \quad \binom{a-1}{2} = \binom{a}{2} - a + 1. \quad (4)$$

$$\textbf{Лемма 3.} \quad f(n, k, l, D) \geq k\binom{\Delta}{2} + D\binom{k}{2} + lk + \binom{l}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим хороший граф, в котором число ОТ не меньше, чем указано в лемме 3. Рассмотрим полный двудольный граф $K_{k,D}$ и добавим к нему вершину, смежную с l вершинами степени k , а также $n - D - k - 1$ изолированных вершин. Обозначим полученный

граф через $G(n, k, l, D)$. Например, на рис. 1 изображён граф $G(n, 2, 2, 5)$ при $n \geq 8$.

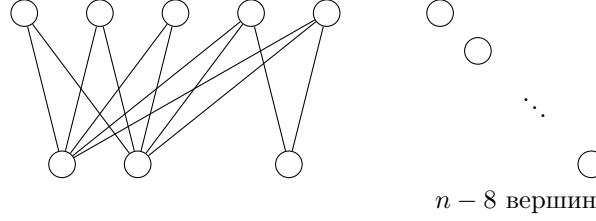


Рис. 1. Граф $G(n, 2, 2, 5)$ при $n \geq 8$

По формулам (1) и (4) имеем

$$\begin{aligned} f(n, k, l, D) &\geq \Delta_2(G(n, k, l, D)) = \\ &= k \binom{D}{2} + (D - l) \binom{k}{2} + l \binom{k+1}{2} + \binom{l}{2} = \\ &= k \binom{D}{2} + D \binom{k}{2} + lk + \binom{l}{2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. $f(n, k, l, D) \leq k \binom{D}{2} + D \binom{k}{2} + lk + \binom{l}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по D . При $D = 2$ по условию (2) имеем $m \in \{3, 4\}$ и максимальное число ОТ (2 или 4 соответственно) достигается на пути длины 3 или цикле длины 4, поэтому выполняются требуемые неравенства $f(n, 1, 1, 2) \leq 2$ и $f(n, 1, 2, 2) \leq 4$.

Пусть теперь $D \geq 3$ и лемма верна при всех $D' < D$. Положим $A = k \binom{D}{2} + D \binom{k}{2} + lk + \binom{l}{2}$ и предположим, что существуют хорошие графы, содержащие больше чем A ОТ. Среди всех таких графов выберем граф с наименьшим числом вершин и обозначим его через G . Рассмотрим два случая.

СЛУЧАЙ 1: $\Delta(G) = D$. Обозначим через x произвольную вершину степени D и положим $G' = G \setminus x$. Тогда в G содержится не более $\binom{D}{2}$ ОТ с центром в вершине x , не более $m - D$ ОТ, в которых x имеет степень 1, и не более $\Delta_2(G')$ ОТ, не содержащих x . Поскольку граф G' хороший с параметрами $n - 1, k - 1, l, D$, по определению f имеем $\Delta_2(G') \leq f(n - 1, k - 1, l, D)$, а по выбору G для графа G' лемма 4 верна. Значит, учитывая (4), получаем

$$\Delta_2(G) \leq \binom{D}{2} + kD + l - D + (k - 1) \binom{D}{2} + D \binom{k - 1}{2} +$$

$$+ l(k-1) + \binom{l}{2} = k \binom{D}{2} + D \binom{k}{2} + lk + \binom{l}{2} = A;$$

противоречие.

СЛУЧАЙ 2: $\Delta(G) \leq D-1$. Рассмотрим три подслучая.

ПОДСЛУЧАЙ 2.1: $k = D-1$. Имеем

$$\begin{aligned} A &= (D-1) \binom{D}{2} + D \binom{D-1}{2} + l(D-1) + \binom{l}{2} = \\ &= D^3 - \frac{5}{2}D^2 + lD + \frac{3}{2}D + \frac{l^2 - 3l}{2}, \end{aligned}$$

но по утверждению 1

$$\begin{aligned} \Delta_2(G) &\leq m(\Delta(G) - 1) \leq (D^2 - D + l)(D - 2) = \\ &= D^3 - 3D^2 + Dl + 2D - 2l = A - \frac{D^2 - D + l^2 + l}{2} < A, \end{aligned}$$

поскольку $D \geq 3$ и $l \geq 0$.

ПОДСЛУЧАЙ 2.2: $k \leq D-2$ и $l+k \leq D-1$. Тогда

$$m = kD + l = k(D-1) + l + k,$$

т. е. G удовлетворяет условиям (2) для $D' = D-1$, $k' = k$, $l' = l+k$. По индукции и формулам (3) и (4) получаем

$$\begin{aligned} \Delta_2(G) &\leq f(n, k, l+k, D-1) \leq \\ &\leq k \binom{D-1}{2} + (D-1) \binom{k}{2} + (l+k)k + \binom{l+k}{2} = \\ &= k \binom{D}{2} - k(D-1) + D \binom{k}{2} - \binom{k}{2} + k^2 + lk + \binom{l}{2} + \binom{k}{2} + lk = \\ &= k \binom{D}{2} + D \binom{k}{2} + lk + \binom{l}{2} + k^2 + lk - kD + k \leq A, \end{aligned}$$

поскольку $k(k+l+1-D) \leq 0$.

ПОДСЛУЧАЙ 2.3: $k \leq D-2$ и $l+k \geq D$. Тогда

$$m = kD + l = (k+1)(D-1) + l + k + 1 - D,$$

т. е. G удовлетворяет условиям (2) для $D' = D-1$, $k' = k+1$, $l' = l+k+1-D$. По индукции имеем

$$\begin{aligned} \Delta_2(G) &\leq f(n, k+1, l+k+1-D, D-1) \leq \\ &\leq (k+1) \binom{D-1}{2} + (D-1) \binom{k+1}{2} + l'(k+1) + \binom{l'}{2}. \quad (5) \end{aligned}$$

Заметим, что по формуле (4) получаем

$$\begin{aligned} (k+1)\binom{D-1}{2} + (D-1)\binom{k+1}{2} &= \\ &= (k+1)\left(\binom{D}{2} - D + 1\right) + (D-1)\left(\binom{k}{2} + k\right) \\ &= k\binom{D}{2} + D\binom{k}{2} + \binom{D}{2} - \binom{k}{2} - D + 1. \end{aligned}$$

С другой стороны, из формулы (3) вытекает

$$\begin{aligned} \binom{l+k+1-D}{2} - \binom{k}{2} + \binom{D}{2} &= \binom{l+1-D}{2} + \binom{D}{2} + \\ &+ (l+1-D)k = \binom{l+1}{2} - (l+1)D + D^2 + kl + k - kD = \\ &= \binom{l}{2} + l - l'D + kl + k. \end{aligned}$$

Подставляя в (5), получим

$$\begin{aligned} \Delta_2(G) &\leq k\binom{D}{2} + D\binom{k}{2} - D + 1 + l'(k+1) + \binom{l}{2} + \\ &+ l - l'D + kl + k = A + l'(k+2-D) \leq A, \end{aligned}$$

поскольку $l' \geq 0$ и $k+2 \leq D$. Лемма 4 доказана.

Отметим также, что граф $G(n, k, l, D)$ не является единственным хорошим графом, где достигается оценка из теоремы 1. Более того, экстремальный граф может даже не содержать вершины степени D . Например, при $n = 8$, $m = 12$, $D = 5$ (т. е. $k = l = 2$) максимальное число ОТ, равное 30, содержат как граф $G(8, 2, 2, 5)$, так и $K_{3,4} \cup K_1$.

2. Основной результат

Обозначим через G экстремальный граф на n вершинах с $m = n + c$ рёбрами, где $c \geq 1$. В [12] доказана

Лемма 5 [12]. Если экстремальный граф G_0 имеет вершину v степени $n-1$ (всесмежную вершину), то $G_0 \setminus \{v\} = (n-c-3)K_1 \cup K_{1,c+1}$ и имеет место формула $\Delta_2(G) = (n^2 - 3n + c^2 - c)/2$.

Сначала покажем, что граф G_0 из леммы 5 экстремальный в случае $n \geq 3c + 7$, улучшая тем самым результат теоремы 1 из [12].

Теорема 2. Если граф $G = (V, E)$ содержит $|V| = n \geq 3c + 7$ вершин и $|E| = m = n + c$ рёбер, то $\Delta_2(G) \leq (n^2 - 3n + c^2 - c)/2$, причём в этих условиях граф G_0 из леммы 5 единственный экстремальный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in V$ — вершина максимальной степени Δ в графе G . Случай $\Delta = n - 1$ разобран в лемме 5. Рассмотрим остальные варианты.

СЛУЧАЙ 1. Пусть $(n + c)/2 \leq \Delta \leq n - 2$. Сначала оценим сверху максимальное число ОТ в графе G . Очевидно, что граф G содержит не более $\binom{\Delta}{2}$ ОТ с центром x , причём равенство достигается только в случае, когда $N(x)$ независимо. Также имеется не более $m - \Delta$ ОТ, в которых вершина x имеет степень 1, причём равенство достигается только в случае, когда каждое из $m - \Delta$ рёбер, неинцидентных x , имеет ровно один конец в $N(x)$. Наконец, $\Delta_2(G \setminus \{x\}) \leq \binom{m - \Delta}{2}$, и равенство достигается только в случае, когда граф $G \setminus \{x\}$ содержит в качестве подграфа звезду $K_{1, m - \Delta}$. Поскольку $m - \Delta \leq \Delta$, все три условия достижения равенства выполняются для графа $G(n, 1, m - \Delta, \Delta)$. Так как этот граф содержит вершины степени 2, из следствия 1 получаем, что либо в G нет изолированных вершин (тогда $\Delta = n - 2$), либо в G нет вершин степени 1 (тогда $\Delta = (n + c)/2$).

Если $\Delta = n - 2$, то при $n \geq 3c + 7$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta_2(G) &\leq \binom{n - 2}{2} + c + 2 + \binom{c + 2}{2} = \\ &= \frac{n^2 - 5n + c^2 + 5c + 12}{2} < \frac{n^2 - 3n + c^2 - c}{2}, \end{aligned}$$

а если $\Delta = (n + c)/2$, то

$$\begin{aligned} \Delta_2(G) &= 2 \binom{(n + c)/2}{2} + \frac{n + c}{2} = \frac{n^2 + 2cn + c^2}{4} = \\ &= \frac{n^2 - 3n + c^2 - c}{2} - \frac{n^2 - 2cn + c^2 - 6n - 2c}{4}. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} n^2 - 2cn + c^2 - 6n - 2c &= n(n - 2c - 6) + c^2 - 2c \geq \\ &\geq (3c + 7)(c + 1) + c^2 - 2c > 0, \end{aligned}$$

так что получаем $\Delta_2(G) < (n^2 - 3n + c^2 - c)/2$.

СЛУЧАЙ 2. Пусть $(3n - c)/7 \leq \Delta < (n + c)/2$. Оценим $\Delta_2(G)$ сверху так же, как и в случае 1:

$$\Delta_2(G) < \binom{\Delta}{2} + n + c - \Delta + \binom{n + c - \Delta}{2}.$$

Отметим, что неравенство строгое, поскольку все три условия достижения равенства из предыдущего случая выполниться не могут. Действительно, из неравенства $\Delta < m - \Delta$ и независимости $N(x)$ следует, что либо граф $G \setminus x$ не содержит звезды $K_{1, m-\Delta}$, либо хотя бы одно из её рёбер не имеет вершин в $N(x)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta_2(G) &< \frac{n^2 + c^2 + 2\Delta^2 + 2nc - 2n\Delta - 2c\Delta + n + c - 2\Delta}{2} = \\ &= \frac{n^2 - 3n + c^2 - c}{2} - \frac{2n\Delta - 2nc + 2c\Delta - 2\Delta^2 - 4n + 2\Delta - 2c}{2}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} n - \Delta - 1 &= \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} - \Delta\right) - 1 > \frac{3c+7}{2} - \frac{c}{2} - 1 = c + \frac{5}{2}, \\ \Delta - c - 2 &\geq \frac{3n - c - 7c - 14}{7} \geq \frac{9c + 21 - 8c - 14}{7} = 1 + \frac{c}{7}. \end{aligned}$$

Из целочисленности имеем $n - \Delta - 1 \geq c + 3$ и $\Delta - c - 2 \geq 2$. Значит,

$$\begin{aligned} n\Delta - nc - 2n - \Delta^2 + c\Delta + \Delta - c &= \\ &= (n - \Delta - 1)(\Delta - c - 2) - 2c - 2 \geq 2(c + 3) - 2c - 2 = 4 > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\Delta_2(G) < (n^2 - 3n + c^2 - c)/2$.

СЛУЧАЙ 3. Пусть $\Delta \leq (3n - c - 1)/7$. По утверждению 1 имеем

$$\begin{aligned} \Delta_2(G) &\leq m(\Delta - 1) \leq \frac{(n + c)(3n - c - 8)}{7} = \\ &= \frac{3n^2 + 2nc - c^2 - 8n - 8c}{7} = \frac{n^2 - 3n + c^2 - c}{2} - \\ &\quad - \frac{n^2 - 4nc - 5n + 9c^2 + 9c}{14}. \end{aligned}$$

Однако при $n \geq 3c + 7$ получаем

$$n^2 - 4nc - 5n + 9c^2 + 9c = (n - 2c)(n - 2c - 5) + 5c^2 - c > 0,$$

а следовательно, $\Delta_2(G) < (n^2 - 3n + c^2 - c)/2$. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим случай $n \in [c + 7, 3c + 6]$. Оказывается, при таких n экстремальным будет граф $G(n, 1, c + 2, n - 2)$, встретившийся в случае 1 доказательства теоремы 2.

Теорема 3. Если граф $G = (V, E)$ содержит $|V| = n \in [c + 7, 3c + 6]$ вершин и $|E| = m = n + c$ рёбер, то $\Delta_2(G) \leq (n^2 - 5n + c^2 + 5c + 12)/2$. В этих условиях граф $G_1 = G(n, 1, c + 2, n - 2)$ экстремальный, а в случае $n \leq 3c + 5$ — единственный экстремальный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in V$ — вершина максимальной степени Δ в графе G . Рассмотрим несколько случаев.

СЛУЧАЙ 1. Если $\Delta = n - 1$, то при $n \in [c + 7, 3c + 6]$ по лемме 5 имеем

$$\Delta_2(G) \leq \frac{n^2 - 3n + c^2 - c}{2} \leq \frac{n^2 - 5n + c^2 + 5c + 12}{2},$$

причём равенство достигается только в случае $n = 3c + 6$.

СЛУЧАЙ 2. Если $(n + c)/2 \leq \Delta \leq n - 2$, то, как и в случае 1 доказательства теоремы 2, имеем два возможных кандидата на роль экстремального графа, а именно $G_1 = G(n, 1, c + 2, n - 2)$ и $G_2 = K_{2, (n+c)/2} \cup sK_1$, где $s = (n - c)/2 - 2$. При этом

$$\begin{aligned} \Delta_2(G_1) - \Delta_2(G_2) &= \frac{n^2 - 5n + c^2 + 5c + 12}{2} - \frac{n^2 + 2cn + c^2}{4} = \\ &= \frac{(n - c - 4)(n - c - 6)}{4} > 0, \end{aligned}$$

а значит, экстремальным будет только граф $G_1 = G(n, 1, c + 2, n - 2)$.

СЛУЧАЙ 3. Пусть $c + 3 \leq \Delta < (n + c)/2$. Аналогично случаю 2 из доказательства теоремы 2 имеем

$$\begin{aligned} \Delta_2(G_1) - \Delta_2(G) &> \frac{n^2 - 5n + c^2 + 5c + 12}{2} - \\ &- \frac{n^2 + c^2 + 2\Delta^2 + 2nc - 2n\Delta - 2c\Delta + n + c - 2\Delta}{2} = \\ &= n\Delta + c\Delta - cn - \Delta^2 - 3n + 2c + \Delta + 6 = \\ &= (n - \Delta - 2)(\Delta - c - 3) \geq 0, \end{aligned}$$

т. е. граф G не экстремальный.

СЛУЧАЙ 4. Пусть $(c + 6)/2 \leq \Delta \leq c + 2$. Докажем, что в этом случае граф G должен быть хорошим для $D = \Delta$. Действительно, предположим, что $m = k\Delta + l$, где $l \in [1, \Delta]$. Если $k \geq \Delta$, то $4c + 6 \geq m > \Delta^2 \geq c^2/4 + 3c + 9$, откуда $c^2 - 4c + 12 < 0$; противоречие. Если $n \leq k + \Delta$, то $c + 7 \leq n \leq k + c + 2$, а значит, $k \geq 5$. Однако, с другой стороны, $k\Delta + l = m = n + c \leq k + \Delta + c$ и, следовательно,

$$\Delta \leq \frac{c + k - l}{k - 1} < \frac{c}{2} + 3$$

даже при $k \geq 3$; противоречие. Значит, граф G удовлетворяет условиям (2). Тогда из лемм 3 и 4 вытекает, что $\Delta_2(G) \leq \Delta_2(G(n, k, l, \Delta))$. Покажем, что граф $G_3 = G(n, k, l, \Delta)$ не может быть экстремальным.

Если $l < \Delta$, то G_3 содержит $n - \Delta - k - 1$ изолированных вершин, а также одновременно вершины степеней k и $k+1$. Тогда по следствию 1 имеем $n - \Delta - k - 1 \leq k - 1$, т. е. $n \leq 2k + \Delta$. Значит, $c + 7 \leq n \leq 2k + c + 2$, откуда в виду целочисленности имеем $k \geq 3$. Поскольку $k\Delta + l = m = n + c \leq 2k + \Delta + c$, получаем

$$\Delta \leq \frac{c + 2k - l}{k - 1} = \frac{c}{k - 1} + 2 + \frac{2 - l}{k - 1} < \frac{c}{2} + 3$$

при $k \geq 3$ и $l \geq 1$.

Если $l = \Delta$, то $G_3 = K_{k+1, \Delta} \cup sK_1$, где $s = n - \Delta - k - 1$. Тогда $n \leq 3k + \Delta$ по лемме 2. Следовательно, $c + 7 \leq n \leq 3k + c + 2$, а значит, $k \geq 2$. С другой стороны, $(k + 1)\Delta = m = n + c \leq 3k + \Delta + c$, откуда $\Delta \leq 3 + c/k < c/2 + 3$ при $k \geq 3$. Осталось рассмотреть случай $k = 2$, т. е. $G_3 = K_{3, \Delta} \cup sK_1$ и $n + c = m = 3\Delta$. По формуле (1) получаем

$$\begin{aligned} \Delta_2(G_3) &= 3 \binom{\Delta}{2} + \Delta \binom{3}{2} = \frac{3\Delta(\Delta + 1)}{2} = \frac{(n + c)(n + c + 3)}{6} = \\ &= \frac{n^2 + 2nc + c^2 + 3n + 3c}{6} = \frac{n^2 - 5n + c^2 + 5c + 12}{2} - \\ &\quad - \frac{2n^2 - 2nc + 2c^2 - 18n + 12c + 36}{6}. \end{aligned}$$

Поскольку при $n \geq c + 7$

$$n^2 - nc + c^2 - 9n + 6c + 18 = (n - 2)(n - c - 7) + c^2 + 4c + 4 > 0,$$

то $\Delta_2(G_3) < \Delta_2(G_1)$, т. е. граф G_3 не экстремальный.

СЛУЧАЙ 5. Если $\Delta \leq (c + 5)/2$, то по утверждению 1 имеем

$$\begin{aligned} \Delta_2(G) &\leq m(\Delta - 1) \leq \frac{(n + c)(c + 3)}{2} = \frac{nc + c^2 + 3n + 3c}{2} = \\ &= \frac{n^2 - 5n + c^2 + 5c + 12}{2} - \frac{n^2 - nc - 8n + 2c + 12}{2}. \end{aligned}$$

Однако при $n \geq c + 7$

$$n^2 - nc - 8n + 2c + 12 = (n - 1)(n - c - 7) + c + 5 > 0,$$

а значит, граф G не может быть экстремальным. Теорема 3 доказана.

Из доказательств теорем 2 и 3 следует, что единственными экстремальными графами при $n \geq 3c + 7$ и $n \in [c + 7, 3c + 5]$ являются графы G_0

и G_1 соответственно. При $n = 3c + 6$ оба этих графа экстремальны, поскольку $\Delta_2(G_0) = \Delta_2(G_1) = 5c^2 + 13c + 9$, а других экстремальных графов нет.

Заключение

В работе найдена характеристика экстремальных по числу ОТ графов с n вершинами и $m = n + c$ рёбрами для $n \geq c + 7$. Доказано, что при $n \neq 3c + 6$ такой граф единствен и совпадает либо с G_0 из леммы 5 при $n \geq 3n + 7$, либо с G_1 из теоремы 3 при $n \in [c + 7, 3c + 5]$. В случае $n = 3c + 6$ оба этих графа экстремальны, причём других экстремальных графов нет. В качестве направлений дальнейших исследований можно предложить охарактеризовать экстремальные по числу ОТ n -вершинные графы с числом рёбер, равным $m = an + b$.

Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева (проект № FWNF-2022-0019). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. **Johnsen E. C.** Structure and process: Agreement models for friendship formation // Soc. Networks. 1986. V. 8, No. 3. P. 257–306.
2. **Moody J.** Matrix methods for calculating the triad census // Soc. Netw. 1998. V. 20, No. 4. P. 291–299.
3. **Wasserman S., Faust K.** Social network analysis: Methods and applications. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1994. 826 p. (Struct. Anal. Soc. Sci.; V. 8). DOI: 10.1017/cbo9780511815478.
4. **Batagelj V., Mrvar A.** A subquadratic triad census algorithm for large sparse networks with small maximum degree // Soc. Netw. 2001. V. 23, No. 3. P. 237–243.
5. **Milo R., Shen-Orr S., Itzkovitz S., Kashtan N., Chklovskii D., Alon U.** Network motifs: Simple building blocks of complex networks // Science. 2002. V. 298. P. 824–827.
6. **Robins G.** A tutorial on methods for the modeling and analysis of social network data // J. Math. Psychol. 2013. V. 57. P. 261–274.
7. **Schank T., Wagner D.** Finding, counting and listing all triangles in large graphs, an experimental study // Experimental and efficient algorithms. Proc. 4th Int. Workshop WEA 2005 (Santorini Island, Greece, May 10–13, 2005). Heidelberg: Springer, 2005. P. 606–609. (Lect. Notes Comp. Sci.; V. 3503). DOI: 10.1007/11427186_54.

8. **Goodman A. W.** On sets of acquaintances and strangers at any party // Am. Math. Mon. 1959. V. 66, No. 9. P. 778–783. DOI: 10.1080/00029890.1959.11989408.
9. **Sauvé L.** On chromatic graphs // Am. Math. Mon. 1961. V. 68, No. 2. P. 107–111. DOI: 10.1080/00029890.1961.11989632.
10. **Pyatkin A. V., Lykhovyd E., Butenko S. I.** The maximum number of induced open triangles in graphs of a given order // Optim. Lett. 2019. V. 13, No. 8. P. 1927–1935. DOI: 10.1007/s11590-018-1330-2.
11. **Пяткин А. В., Чёрных О. И.** О максимальном числе открытых треугольников в графах с одинаковым числом вершин и рёбер // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2022. Т. 29, № 1. С. 46–55.
12. **Пяткин А. В.** О максимальном числе открытых треугольников в графах с малым числом рёбер // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2024. Т. 31, № 3. С. 134–142.

Пяткин Артём Валерьевич

Статья поступила

19 марта 2025 г.

После доработки —

26 марта 2025 г.

Принята к публикации

22 апреля 2025 г.

ON GRAPHS WITH SMALL NUMBER OF EDGES HAVING EXTREMAL NUMBER OF OPEN TRIANGLES

A. V. Pyatkin

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptuyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: artem@math.nsc.ru

Abstract. In an undirected graph, a 3-vertex induced subgraph with exactly two edges is called an open triangle (OT). We consider the class of graphs in which the numbers of vertices and edges differ by a fixed constant c . The complete characterization of extremal OT graphs in this class with at least $c + 7$ vertices is obtained. Illustr. 1, bibliogr. 12.

Keywords: open triangle, induced subgraph, sparse graph.

References

1. **E. C. Johnsen**, Structure and process: Agreement models for friendship formation, *Soc. Netw.* **8** (3), 257–306 (1986).
2. **J. Moody**, Matrix methods for calculating the triad census, *Soc. Netw.* **20** (4), 291–299 (1998).
3. **S. Wasserman** and **K. Faust**, *Social Network Analysis: Methods and Applications* (Camb. Univ. Press, Cambridge, 1994) (Struct. Anal. Soc. Sci., Vol. 8), DOI: 10.1017/cbo9780511815478.
4. **V. Batagelj** and **A. Mrvar**, A subquadratic triad census algorithm for large sparse networks with small maximum degree, *Soc. Netw.* **23** (3), 237–243 (2001).
5. **R. Milo**, **S. Shen-Orr**, **S. Itzkovitz**, **N. Kashtan**, **D. Chklovskii**, and **U. Alon**, Network motifs: Simple building blocks of complex networks, *Science* **298**, 824–827 (2002).
6. **G. Robins**, A tutorial on methods for the modeling and analysis of social network data, *J. Math. Psychol.* **57**, 261–274 (2013).
7. **T. Schank** and **D. Wagner**, Finding, counting and listing all triangles in large graphs, an experimental study, in *Experimental and Efficient Algorithms* (Proc. 4th Int. Workshop WEA 2005, Santorini Island, Greece, May 10–13, 2005) (Springer, Heidelberg, 2005), pp. 606–609 (Lect. Notes Comp. Sci., Vol. 3503), DOI: 10.1007/11427186_54.

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **19** (2) (2025).

-
8. **A. W. Goodman**, On sets of acquaintances and strangers at any party, *Am. Math. Mon.* **66** (9), 778–783 (1959), DOI: 10.1080/00029890.1959.11989408.
 9. **L. Sauvé**, On chromatic graphs, *Am. Math. Mon.* **68** (2), 107–111 (1961), DOI: 10.1080/00029890.1961.11989632.
 10. **A. V. Pyatkin**, **E. Lykhovyd**, and **S. I. Butenko**, The maximum number of induced open triangles in graphs of a given order, *Optim. Lett.* **13** (8), 1927–1935 (2019), DOI: 10.1007/s11590-018-1330-2.
 11. **A. V. Pyatkin** and **O. I. Chernykh**, On the maximum number of open triangles in graphs with the same number of vertices and edges, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **29** (1), 46–55 (2022) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **16** (1), 116–121 (2022)].
 12. **A. V. Pyatkin**, On the maximum number of open triangles in graphs with few edges, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **31** (3), 134–142 (2024) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **18** (3), 516–520 (2024)].

Artyom V. Pyatkin

Received March 19, 2025

Revised March 26, 2025

Accepted April 22, 2025