

ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 32 № 2 2025

Новосибирск
Издательство Института математики

ЦЕЛОЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ С УСЛОВИЯМИ
ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ
СУММАРНОГО ВЗВЕШЕННОГО ВРЕМЕНИ
ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ ОДНИМ ПРИБОРОМ

Р. Ю. Симанчёв^{1,2,а}, И. В. Уразова^{1,б}

¹ Омский гос. университет им. Ф. М. Достоевского,
пр. Мира, 55а, 644077 Омск, Россия

² Омский научный центр СО РАН,
пр. Карла Маркса, 15, 644024 Омск, Россия
E-mail: ^аosiman@rambler.ru, ^бurazovainn@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается следующая задача теории расписаний. Требования обслуживаются одним прибором. Для каждого требования определены положительный вес и момент ожидания, до которого включительно оно недоступно для обработки. Длительности обслуживания одинаковы. В обслуживании разрешены прерывания. Время предполагается дискретным. Необходимо найти расписание обслуживания требований, минимизирующее взвешенную сумму моментов окончания обработки требований. Сложностной статус задачи на сегодня не известен. В работе представлена новая модель булева линейного программирования для данной задачи, включающая в себя некоторые необходимые условия оптимальности расписаний. Эти условия представлены в виде линейных неравенств. В результате проведённого вычислительного эксперимента замечено, что модель выдаёт целочисленное решение даже без наложения условий целочисленности на переменные. Табл. 3, ил. 2, библиогр. 10.

Ключевые слова: расписание, целочисленная модель, условие оптимальности.

Введение

Рассматривается задача минимизации взвешенной суммы моментов окончания обслуживания множества требований одним прибором. Задача формулируется следующим образом. На одном приборе необходимо обслужить n требований. В каждый момент прибор обслуживает не более одного требования. Множество всех требований обозначим через V .

Для каждого требования $i \in V$ заданы следующие характеристики: момент поступления $r_i \geq 0$ — момент времени, до которого включительно требование i недоступно для обработки; продолжительность обслуживания $p_i = p > 0$; $w_i \geq 0$ — вес требования. В обслуживании требований разрешены прерывания. Все характеристики целочисленны, в силу чего время будем считать дискретным.

Расписанием обслуживания требований будем называть $(0, 1)$ -вектор x с координатами x_{ik} , $i \in V$, $k = 1, 2, \dots$, которые определяются правилами: $x_{ik} = 1$, если в момент времени k требование i находится в обработке, в противном случае $x_{ik} = 0$. Введём величину $C_i(x) = \max\{k \in D \mid x_{ik} = 1\}$ — момент завершения обработки требования i в расписании x . Рассматриваемая задача заключается в нахождении расписания, минимизирующего взвешенную сумму моментов окончания обработки требований.

В стандартной системе обозначений [1] эта задача может быть записана как $1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i C_i$.

В обзоре [2] представлено большое число целочисленных моделей для различных задач теории расписаний, в том числе для одного прибора. Мы работаем с целочисленной моделью, впервые предложенной в работе [3]. Модель имеет наглядную интерпретацию с точки зрения теории графов. Кроме того, данная модель легко проецируется на ряд других задач построения расписаний с прерываниями на одном приборе, среди которых есть полиномиально разрешимые, NP-трудные задачи и задачи с открытым статусом сложности, например:

$$\begin{aligned} &1|pmtn; r_i| \sum C_i, \quad 1|pmtn; r_i| \sum w_i C_i, \\ &1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i T_i, \quad 1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum T_i, \\ &1|pmtn; r_i| \sum w_i U_i, \quad 1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i U_i. \end{aligned}$$

Все эти задачи упомянуты в [4]. Что касается рассматриваемой нами формулировки задачи, т. е. $1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i C_i$, то в настоящее время её сложностной статус неизвестен [4].

Так как число требований конечно, можно ввести в рассмотрение некоторый общий директивный срок d , достаточный для того, чтобы все требования были обслужены. При этом будем использовать обозначение $D = \{1, 2, \dots, d\}$. При такой договорённости расписание x удобно представлять в виде таблицы размера $n \times d$, в которой каждая строка соответствует требованию $i \in V$, а каждый столбец — моменту времени $k \in D$. Всякий столбец этой таблицы, не содержащий единиц, назовём *пустым*.

Отметим, что при $d > np$ упомянутая таблица будет иметь по крайней мере один пустой столбец. В этом случае очевидно, что задача разбивается на серию подзадач, удовлетворяющих условию $d = np$, из оптимальных решений которых естественным образом склеивается оптимальное решение исходной задачи. В связи с этим, без ограничения общности, будем далее полагать, что $d = np$.

Ясно, что введённые выше расписания являются целочисленными решениями следующей системы ограничений:

$$\sum_{k \in D} x_{ik} = p, \quad i \in V, \quad (1)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ik} = 1, \quad k \in D, \quad (2)$$

$$x_{ik} \geq 0, \quad i \in V, k = r_i + 1, r_i + 2, \dots, d, \quad (3)$$

$$x_{ik} = 0, \quad i \in V, k = 1, 2, \dots, r_i. \quad (4)$$

Полиэдр, задаваемый условиями (1)–(4), по сути дела является многогранником транспортной задачи с целыми правыми частями и, следовательно, целочисленный.

Как уже отмечалось, в теории расписаний рассматривается большое число задач на рассматриваемом множестве расписаний. Эти задачи отличаются различной структурой целевых функций. Мы рассматриваем задачу минимизации функции

$$f(x) = \sum_{i \in V} w_i C_i(x) \quad (5)$$

на множестве вершин полиэдра (1)–(4). Отметим, что эта задача не является задачей целочисленного линейного программирования, так как её целевая функция нелинейна. Эта трудность типична для большинства задач теории расписаний при использовании аппарата целочисленного линейного программирования.

Для дальнейшего изложения нам понадобятся следующие понятия и обозначения.

Пусть G — обыкновенный граф. Если i и j — смежные вершины графа G , то для обозначения ребра между ними будем использовать запись ij . Степень вершины i графа G обозначим через $d_G(i)$. Граф H является подграфом графа G ($H \subset G$), если множества вершин и рёбер графа H являются подмножествами вершин и рёбер графа G соответственно. Для графов G_1 и G_2 запись $G_1 \cup G_2$ означает граф, полученный теоретико-множественным объединением множеств вершин и множеств

рёбер этого графа. Многогранником в конечномерном евклидовом пространстве будем называть выпуклую оболочку конечного множества точек, полиэдром — множество решений конечной системы линейных уравнений и неравенств, если оно ограничено. Полиэдр, содержащий данный многогранник, будем называть полиэдральной релаксацией многогранника.

В настоящей работе описан специальный подход к построению линейной целевой функции для задачи $1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i C_i$, основанный на графовом представлении и переходе от него к полиэдральной постановке. В разд. 1 даются графовая и полиэдральная постановки рассматриваемой задачи. Разд. 2 посвящён описанию некоторых свойств оптимальных расписаний в терминах линейных неравенств и, как следствие, получению новой ЦЛП-модели задачи. В заключении обсуждаются некоторые сопутствующие результаты, связанные с численным экспериментом на предложенной ЦЛП-модели.

1. Графовое описание множества расписаний и полиэдральная постановка задачи

Перейдём к описанию множества расписаний в терминах теории графов. Эта конструкция впервые была описана в [3] и далее получила своё развитие в [5, 6]. Рассмотрим три множества вершин: V — множество требований, D — множество моментов времени, в которые обслуживаются требования, Y — дубликат множества V (это вспомогательное множество, с помощью которого будут подсчитываться моменты окончания обслуживания требований). При этом для множеств V и Y порядок элементов несуществен, а множество $D = \{1, 2, \dots, d\}$ упорядочено. Так как множества V и Y по сути идентичны, в случаях, когда будет иметься в виду принадлежность элемента i множеств V и Y одновременно, будем использовать запись $i \in V = Y$. Пусть $G_1 = (V, D; E_1)$ — полный двудольный граф с долями V и D и множеством рёбер $E_1 = \{ik \mid i \in V, k \in D\}$; $G_2 = (Y, D; E_2)$ — полный двудольный граф с долями Y и D и множеством рёбер $E_2 = \{ik \mid i \in Y, k \in D\}$. Сформируем граф $G = G_1 \cup G_2$. В графе G определим семейство подграфов $\mathcal{H}$ по следующему правилу. Подграф $H \subset G$, $H = H_1 \cup H_2$, $H_1 \subset G_1$, $H_2 \subset G_2$, принадлежит семейству $\mathcal{H}$ (называется *расписанием*), если выполняются следующие три условия:

- (6) $d_{H_1}(i) = p$ для $i \in V$;
- (7) если $i \in V$, то $d_{H_1}(k) = 0$ при $k = 1, 2, \dots, r_i$ и $d_{H_1}(k) \leq 1$ при $k = r_i + 1, r_i + 2, \dots, d$;
- (8) для $i \in V = Y$ и $k \in D$ включение $ik \in EH_2$ имеет место тогда и только тогда, когда существует момент времени $l \in D$, $l \geq k$, такой, что $il \in EH_1$.

На рис. 1 приведён фрагмент такого графа $H \in \mathcal{H}$ для вершины $i = 3$.

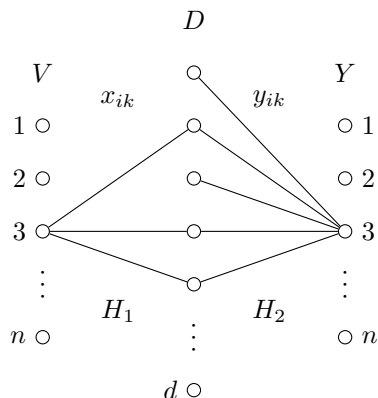


Рис. 1. Фрагмент графа $H \in \mathcal{H}$ для $i = 3$

Если $H = H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}$, то в силу (6) и (7) включение $ik \in EH_1$ означает, что в момент $k \in D$ требование $i \in V$ и только оно находится в обработке, а условие (8) гарантирует, что вершина $i \in Y$ будет соединена рёбрами со всеми вершинами множества $\{1, 2, \dots, C_i\} \subseteq D$. Таким образом, подграф $H_1 \subset H$ задаёт расписание обслуживания требований, а степени вершин $i \in Y$ относительно подграфа $H_2 \subset H$ суть моменты окончания обслуживания.

Данная конструкция позволяет сформулировать рассматриваемую задачу (5) в виде

$$\min \left\{ \sum_{i \in Y} w_i d_{H_2}(i) \mid H = H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H} \right\}. \quad (9)$$

Построим модель булева линейного программирования для задачи (9). Пусть $R^E = R^{E_1} \times R^{E_2}$ — пространство, ассоциированное с множеством рёбер графа G . Иными словами, R^E — это пространство вектор-столбцов, компоненты которых индексированы элементами множества $E = E_1 \cup E_2$. Оси координат в R^{E_1} будем именовать x_{ik} , в R^{E_2} — y_{ik} . Пусть $H \in \mathcal{H}$. Вектором инциденций подграфа $H = H_1 \cup H_2$ назовём вектор $(x^{H_1}, y^{H_2}) \in R^{E_1} \times R^{E_2}$ с координатами

$$x_{ik}^{H_1} = \begin{cases} 1, & \text{если } ik \in EH_1, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad i \in V, k \in D,$$

$$y_{ik}^{H_2} = \begin{cases} 1, & \text{если } ik \in EH_2, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad i \in Y, k \in D.$$

Теперь с множеством расписаний $\mathcal{H}$ можно связать многогранник

$$P_{\mathcal{H}} = \text{conv}\{(x^{H_1}, y^{H_2}) \in R^E \mid H = H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}\}.$$

В работах [3, 6] доказана

Теорема 1. Подграф $H = H_1 \cup H_2 \subset G$ принадлежит семейству $\mathcal{H}$ (является расписанием) тогда и только тогда, когда его вектор инцидентий $(x^{H_1}, y^{H_2}) \in R^E$ является целочисленной точкой полиэдра, задаваемого ограничениями (1)–(4) и ограничениями

$$\sum_{l=k}^d x_{il} \leq y_{ik}, \quad i \in V = Y, k \in D, \quad (10)$$

$$y_{ik} \leq \sum_{l=k}^d x_{il}, \quad i \in V = Y, k \in D, \quad (11)$$

$$y_{ik} \leq 1, \quad i \in Y, k \in D. \quad (12)$$

Полиэдр, задаваемый ограничениями (1)–(4), (10)–(12), обозначим через $M_{\mathcal{H}}$. Из теоремы 1 следует, что $P_{\mathcal{H}} \subseteq M_{\mathcal{H}}$, т. е. $M_{\mathcal{H}}$ является полиэдральной релаксацией многогранника $P_{\mathcal{H}}$. Более того, так как $M_{\mathcal{H}}$ и $P_{\mathcal{H}}$ лежат в единичном кубе, можем сформулировать следствие из теоремы 2.

Следствие 1. Множество вершин многогранника $P_{\mathcal{H}}$ совпадает множеством целочисленных точек пространства R^E , принадлежащих полиэдру $M_{\mathcal{H}}$.

Теперь задачу (9) можно сформулировать как задачу булева программирования вида

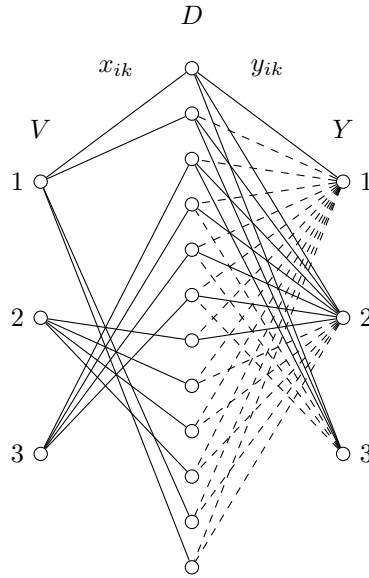
$$\min \left\{ g(x, y) = \sum_{i \in Y} \sum_{k=1}^d w_i y_{ik} \mid (x, y) \in M_{\mathcal{H}} \cap Z^E \right\}, \quad (13)$$

где Z^E — целочисленная решётка пространства R^E .

Таблица 1

Значения переменных y_{ik} для точки, изображённой на рис. 2

$i \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	0,75	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,25
2	1	1	1	1	1	1	1	0,75	0,5	0,25	0	0
3	1	1	1	0,75	0,5	0,25	0	0	0	0	0	0

Рис. 2. Пример нецелочисленной вершины полиэдра $M_{\mathcal{H}}$

Пример на рис. 2 показывает, что полиэдр $M_{\mathcal{H}}$ имеет также нецелочисленные вершины, т. е. включение $P_{\mathcal{H}} \subset M_{\mathcal{H}}$ строгое. Вершина полиэдра $M_{\mathcal{H}}$ приведена в графовом виде. Здесь $n = 3$, $p = 4$, $d = 12$, $r = (0, 2, 2)$. Сплошной линией изображены переменные, по которым точка $(x, y) \in M_{\mathcal{H}}$ имеет значение 1, штриховой — нецелочисленные переменные. В табл. 1 приведены значения для каждой переменной y_{ik} . Этот пример получен применением симплекс-метода к полиэдру (1)–(4), (10)–(12) (вид целевой функции значения не имеет).

2. Целочисленная модель с условиями оптимальности

Среди всех расписаний семейства $\mathcal{H}$ выделим подсемейство $\mathcal{H}^*$ оптимальных расписаний задачи $1|pmtn; p_i = p; r_i | \sum w_i C_i$, т. е. семейство всех таких подграфов $H^* = H_1^* \cup H_2^* \in \mathcal{H}$, что $g(x^{H_1^*}, y^{H_2^*}) \leq g(x^{H_1}, y^{H_2})$ для любого $H = H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}$.

Изучению структурных свойств оптимальных расписаний посвящены, например, работы [7–10]. В частности, в [10] сформулирована следующая теорема. Для расписания $x \in \Sigma_d$ через $S_i(x)$ обозначим момент начала обработки требования $i \in V$, т. е. $S_i(x) = \min\{k \in D \mid x_{ik} = 1\}$.

Теорема 2 [10]. Если $S_i(x) < S_j(x)$ при любом оптимальном расписании $x \in \Sigma_d$, то выполняется либо $C_i(x) < S_j(x)$, либо $C_i(x) > C_j(x)$ для всех $i, j \in V$.

Пользуясь теоремой 2, докажем следующую теорему, также упомянутую в [5].

Теорема 3. В оптимальном расписании различные моменты обработки любого из требований не сравнимы по модулю p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть расписание $x \in \Sigma_d$ оптимально. Выберем произвольно требование $i \in V$ и обозначим через $k_1, k_2, \dots, k_p$ моменты его обработки. Предположим, что найдутся такие $s, t \in \{1, 2, \dots, p\}$, что $k_t = k_s + lp$. В таблице, соответствующей расписанию x , между столбцами k_s и k_t имеется $pl - 1$ непустых столбцов. Это означает, что найдётся требование $j \in V$, моменты обработки которого располагаются как левее, так и правее столбца k_t . Пусть $m_1, m_2, \dots, m_p$ — моменты обработки требования j . При этом будем полагать, что $m_\alpha < k_t < m_{\alpha+1} \leq m_p$. Рассмотрим два случая.

Таблица 2

Фрагмент расписания x из доказательства теоремы 3 для случая $k_1 < m_1$

	...	m_α	...	k_t	...	m_p	...	k_p	...
i	...		...	1	...		...	1	...
j	...	1	...		...	1	...		...

Если $k_1 < m_1$, то по теореме 2 имеем $m_p < k_p$. Фрагмент расписания x , соответствующий этому случаю, представлен в табл. 2. В этой ситуации можем единицу из клетки (i, k_t) перенести в клетку (i, m_p) , а единицу из клетки (j, m_p) перенести в клетку (j, k_t) . Значение целевой функции при этом уменьшится. Следовательно, расписание x не будет оптимальным.

Таблица 3

Фрагмент расписания x из доказательства теоремы 3 для случая $m_1 < k_1$

	...	m_α	...	k_t	...	k_p	...	m_p	...
i	...		...	1	...	1	...		...
j	...	1	...		...		...	1	...

Если же $m_1 < k_1$, то вновь по теореме 2 имеем $k_p < m_p$. Соответствующий фрагмент расписания x представлен в табл. 3. Вновь переносим единицы: из клетки (i, k_p) в клетку (i, m_α) , а из клетки (j, m_α) в клетку (j, k_p) . Значение целевой функции вновь уменьшится, что вновь противоречит оптимальности расписания x . Теорема 3 доказана.

Следствием теоремы 3 и условия (6) в терминах пространства $R^E = R^{E_1} \times R^{E_2}$ являются равенства

$$\sum_{s=0}^{n-1} x_{i(m+sp)} = 1, \quad i \in V, m = 1, \dots, p, \quad (14)$$

которым удовлетворяют все оптимальные расписания задачи. При этом нетрудно привести примеры расписаний, удовлетворяющих ограничениям (14), но не являющихся оптимальными.

Наряду с полиэдром $M_{\mathcal{H}}$, заданным ограничениями (1)–(4), (10)–(12), в пространстве $R^E = R^{E_1} \times R^{E_2}$ определим ещё один полиэдр, учитывающий свойство оптимальных расписаний (14):

$$\sum_{i \in V} x_{ik} = 1, \quad k = 1, \dots, d, \quad (2)$$

$$x_{ik} \geq 0, \quad i \in V, k = r_i + 1, r_i + 2, \dots, d, \quad (3)$$

$$x_{ik} = 0, \quad i \in V, k = 1, 2, \dots, r_i, \quad (4)$$

$$y_{ik} \leq 1, \quad i \in V, k = 1, \dots, d, \quad (12)$$

$$\sum_{s=0}^{n-1} x_{i(m+sp)} = 1, \quad i \in V, m = 1, \dots, p, \quad (14)$$

$$\sum_{l=s}^{n-1} x_{i(m+lp)} \leq y_{i(m+sp)}, \quad i \in V, m = 1, \dots, p, s = 0, 1, \dots, n-1, \quad (15)$$

$$y_{i(k-1)} \geq y_{ik}, \quad i \in V, k = 2, 3, \dots, d, \quad (16)$$

Обозначим этот полиэдр через $Q_{\mathcal{H}}$. Вместе с задачей (13) рассмотрим новую задачу булева программирования

$$\min \left\{ g(x, y) = \sum_{i \in Y} \sum_{k=1}^d w_i y_{ik} \mid (x, y) \in Q_{\mathcal{H}} \cap Z^E \right\}. \quad (17)$$

Нас будет интересовать взаимосвязь оптимальных решений задач (13) и (17). Обратим внимание, что обе эти задачи имеют одну и ту же целевую функцию, но отличаются релаксационными полиэдрами. Докажем, что множества оптимальных решений задач (13) и (17) совпадают. Это позволит для решения исходной задачи $1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i C_i$ вместо полиэдра $M_{\mathcal{H}}$ использовать также полиэдр $Q_{\mathcal{H}}$.

Лемма 1. Если целочисленная точка $(\bar{x}, \bar{y})$ является оптимальным решением задачи (17), то она принадлежит полиэдру $M_{\mathcal{H}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $(\bar{x}, \bar{y})$ является решением задачи (17), то $(\bar{x}, \bar{y}) \in Q_{\mathcal{H}}$.

Для доказательства того, что $(\bar{x}, \bar{y}) \in M_{\mathcal{H}}$, достаточно показать, что эта точка удовлетворяет всем ограничениям (1)–(4), (10)–(12). Так как часть ограничений полиэдров $M_{\mathcal{H}}$ и $Q_{\mathcal{H}}$ совпадает, доказательства требует только выполнение ограничений (1), (10) и (11) для точки $(\bar{x}, \bar{y})$.

Ограничение (1) при каждом фиксированном i следует из ограничений (14) суммированием по $m = 1, 2, \dots, p$.

Докажем, что для точки $(\bar{x}, \bar{y})$ выполняются ограничения (10). Возьмём произвольно $i \in V = Y$ и $k = m_* + s_*p$ (подходящие $m_* \in \{1, 2, \dots, p\}$ и $s_* \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ существуют для любого $k \in \{1, 2, \dots, d\}$). Суммируя (15) и пользуясь ограничениями (16), получаем требуемое:

$$\begin{aligned} \sum_{l=k}^d \bar{x}_{il} &= \sum_{m=1}^p \sum_{l=s_*}^{n-1} \bar{x}_{i(m_*+m+lp)} \leq \sum_{m=1}^p \bar{y}_{i(m_*+m+s_*p)} \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^p \bar{y}_{i(m_*+s_*p)} = \sum_{m=1}^p \bar{y}_{ik} = p\bar{y}_{ik}. \end{aligned}$$

Остаётся доказать, что точка $(\bar{x}, \bar{y})$ удовлетворяет ограничениям (11). Если $\bar{y}_{ik} = 0$, то (11) выполняется в силу неотрицательности $\bar{x}_{il}$, $i \in V$, $l \in \{k, k+1, \dots, d\}$.

Пусть $\bar{y}_{ik} = 1$. Если $\sum_{l=k}^d \bar{x}_{il} \geq 1$, доказывать нечего. Предположим, что

$\sum_{l=k}^d \bar{x}_{il} = 0$. В силу (16) упорядоченный набор переменных $\bar{y}_{i1}, \bar{y}_{i2}, \dots, \bar{y}_{id}$ разбивается на две части: сначала идёт последовательность единиц, затем — последовательность нулей. Обозначим через $\bar{y}_{it} = 1$ последнюю единицу в строке $i \in Y$ таблицы $\bar{y} = (\bar{y}_{ik})_{i \in V, k=1,2,\dots,d}$. Ясно, в частности, что $k \leq t$. Сформируем новую точку $(\bar{x}, \tilde{y})$, занулив в $\bar{y}$ ровно одну координату $\bar{y}_{it}$. Покажем, что $(\bar{x}, \tilde{y}) \in Q_{\mathcal{H}}$. Ограничения (2)–(4) и (14) для точки $(\bar{x}, \tilde{y})$ выполняются, так как координаты x_{ik} не менялись. Выполнение ограничений (12) также очевидно. Ограничения (16) выполняются в силу того, что $\bar{y}_{it} = 1$ — последняя единица в строке $i \in Y$ таблицы $\bar{y}$. Наконец, выполнение ограничений (15) следует из предположения, что $\sum_{l=k}^d \bar{x}_{il} = 0$, т. е. $\bar{x}_{ik} = \bar{x}_{i(k+1)} = \dots = \bar{x}_{id} = 0$. Тем самым $(\bar{x}, \tilde{y}) \in Q_{\mathcal{H}}$.

Однако легко заметить, что при этом в силу структуры целевой функции задачи (17) получаем неравенство $g(\bar{x}, \tilde{y}) < g(\bar{x}, \bar{y})$, что противоречит оптимальности точки $(\bar{x}, \bar{y})$ для задачи (17). Следовательно, предположение о том, что $\sum_{l=k}^d \bar{x}_{il} = 0$ при $\bar{y}_{ik} = 1$, неверно. Таким образом, ограничения (11) для точки $(\bar{x}, \bar{y})$ также выполняются. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$ является оптимальным решением задачи (13), то она принадлежит полиэдру $Q_{\mathcal{H}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$ принадлежит полиэдру $M_{\mathcal{H}}$, она удовлетворяет всем ограничениям (1)–(4), (10)–(12), поэтому остаётся доказать, что точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$ удовлетворяет ограничениям (14)–(16).

Если нарушается какое-либо из ограничений (14), то в оптимальном расписании $\tilde{x}$ найдётся требование, в обработке которого есть моменты времени, сравнимые по модулю p . Это противоречит теореме 3. Значит, точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$ удовлетворяет ограничениям (14).

Перейдём к ограничениям (16). Если для некоторых $i \in V$ и $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ имеем неравенство $\tilde{y}_{i(k-1)} < \tilde{y}_{ik}$, то очевидно, что $\tilde{y}_{i(k-1)} = 0$ и $\tilde{y}_{ik} = 1$. В этом случае в силу (10) имеем $\sum_{l=k-1}^d \tilde{x}_{il} = 0$ и, как следствие, $\sum_{l=k}^d \tilde{x}_{il} = 0$, но тогда из (11) следует, что $\tilde{y}_{ik} = 0$; противоречие. Значит, ограничения (16) также выполняются для точки $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Наконец, рассмотрим ограничения (15) для точки $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Возьмём произвольно $i \in V = Y$ и $k = m_* + s_*p \in \{1, 2, \dots, d\}$. Если $\tilde{y}_{ik} = 1$, то, пользуясь (14), получим

$$\sum_{l=s_*}^{n-1} \tilde{x}_{i(m_*+lp)} \leq \sum_{l=0}^{n-1} \tilde{x}_{i(m_*+lp)} = 1 = \tilde{y}_{ik}.$$

Если же $\tilde{y}_{ik} = 0$, то в силу (10) имеем

$$\sum_{l=s_*}^d \tilde{x}_{i(m_*+lp)} \leq \sum_{l=k}^d \tilde{x}_{il} = 0 = \tilde{y}_{i(m_*+s_*p)}.$$

В обоих случаях ограничения (15) выполняются. Лемма 2 доказана.

Следствием лемм 1 и 2 является совпадение множеств оптимальных решений задач (13) и (17).

Теорема 4. Целочисленная точка является оптимальным решением задачи (13) тогда и только тогда, когда она является оптимальным решением задачи (17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если точка $(\bar{x}, \bar{y})$ является оптимальным решением задачи (17), то по лемме 1 имеем $(\bar{x}, \bar{y}) \in Q_{\mathcal{H}} \cap M_{\mathcal{H}}$. Предположим, что оптимальным решением задачи (13) является отличная от $(\bar{x}, \bar{y})$ точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$ и при этом $g((\tilde{x}, \tilde{y})) < g((\bar{x}, \bar{y}))$. Так как точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$ оптимальна в (13), по лемме 2 она принадлежит полиэдру $Q_{\mathcal{H}}$ и, следовательно, $(\bar{x}, \bar{y})$ не оптимальна в задаче (17); противоречие.

Обратная импликация доказывается аналогично. Теорема 4 доказана.

Заключение

В работе в терминах теории графов построены новые модели, формализующие задачу минимизации общего взвешенного времени окончания обслуживания множества требований на одной машине. Принципиальной особенностью предложенных в данной работе моделей является то, что в них множество всех расписаний трактуется как семейство подграфов некоторого специального графа. Как следствие, получаем богатый арсенал возможностей для анализа комбинаторной структуры задачи, который существенно расширяется при использовании полиэдральных свойств соответствующего многогранника.

Получена полиэдральная релаксация многогранника оптимальных расписаний. В качестве сопутствующего результата отметим, что при проведении вычислительного эксперимента на новой модели среди более тысячи задач с различными входными данными целочисленность оптимального решения достигалась без требования целочисленности переменных. Рассмотрены примеры с $n = 10, 20 \dots, 200$ и $p = 3, 4, 10, 15, 20$. На каждую комбинацию параметров n и p было решено по 10 задач с различными значениями $r_i, w_i, i \in V$. Найти дробное решение соответствующей задачи линейного программирования на данный момент не удалось.

Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках государственного задания Омского научного центра СО РАН (проекта № 121022000112–2). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., Shmoys D. B. Sequencing and scheduling: Algorithms and complexity // Logistics of production and inventory. Amsterdam: North-Holland, 1993. P. 445–522. (Handb. Oper. Res. Manag. Sci.; V. 4).
2. Blazewicz J., Dror D., Weglarz J. Mathematical programming formulations for machine scheduling: A survey // Eur. J. Oper. Res. 1991. V. 51, No. 3. P. 283–300.
3. Симанчёв Р. Ю., Шерешик Н. Ю. Целочисленные модели обслуживания требований одним прибором с прерываниями // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 4. С. 89–101.
4. Brucker P., Knust S. Complexity results for scheduling problems. Osnabrück: Osnabrück Univ., 2009. URL: mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class (accessed: July 9, 2025).

5. **Шерешик Н. Ю.** Релаксации многогранника оптимальных расписаний обслуживания требований одним прибором с прерываниями // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 6. С. 78–90.
6. **Simanchev R. Yu., Urazova I. V.** Integer models for the total weighted tardiness problem on a single machine // Mathematical optimization theory and operations research: Recent trends. Rev. Sel. Pap. 22nd Int. Conf. (Yekaterinburg, Russia, July 2–8, 2023). Cham: Springer, 2023. P. 176–187. (Commun. Comput. Inf. Sci.; V. 1881). DOI: 10.1007/978-3-031-43257-6_14.
7. **Smith W. E.** Various optimizers for single-stage production // Nav. Res. Logist. Q. 1956. V. 3, No. 1–2. P. 59–66.
8. **Sauer N., Stone M.** Preemptive scheduling // Algorithms and order. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1989. P. 307–323. (NATO Sci. Ser. C; V. 255).
9. **Баптист Ф., Карлье Ж., Кононов А. В., Керан М., Севастьянов С. В., Свириденко М.** Структурные свойства оптимальных расписаний с прерыванием операций // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 1. С. 3–36.
10. **Лазарев А. А., Кварацхелия А. Г.** Свойства оптимальных расписаний задачи теории расписаний минимизации суммарного взвешенного момента окончания для одного прибора // Автоматика и телемеханика. 2010. № 10. С. 80–89.

Симанчёв Руслан Юрьевич
Уразова Инна Владимировна

Статья поступила
15 ноября 2024 г.
После доработки —
17 декабря 2024 г.
Принята к публикации
22 марта 2025 г.

AN INTEGER MODEL WITH OPTIMALITY CONDITIONS
FOR THE TOTAL WEIGHTED TARDINESS PROBLEM
ON A SINGLE MACHINER. Yu. Simanchev^{1,2, a} and I. V. Urazova^{1, b}¹ Dostoevsky Omsk State University,
55a Mir Avenue, 644077 Omsk, Russia² Omsk Scientific Center of SB RAS,
15 Karl Marx Avenue, 644024 Omsk, RussiaE-mail: ^aosiman@rambler.ru, ^burazovainn@mail.ru

Abstract. The paper considers the following problem of scheduling theory. Jobs are serviced by a single machine. For each job, a positive weight and a release date are defined. The service durations are the same. Interruptions are allowed during service. Time is assumed to be discrete. It is necessary to find a schedule for servicing jobs that minimizes the weighted sum of end times of job processing. The complexity of the problem is currently unknown. This paper presents a new Boolean linear programming model for this problem, which includes certain necessary conditions for schedule optimality. These conditions are represented as linear inequalities. As a result of a computational experiment, it is noted that the model yields an integer solution even without imposing conditions on the variables to be integer. Tab. 3, illustr. 2, bibliogr. 10.

Keywords: schedule, integer model, optimality condition.

References

1. E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan, and D. B. Shmoys, Sequencing and scheduling: Algorithms and complexity, in *Logistics of Production and Inventory*, (North-Holland, Amsterdam, 1993), pp. 445–522 (Handb. Oper. Res. Manag. Sci., Vol. 4).
2. J. Blazewicz, D. Dror, and J. Weglarz, Mathematical programming formulations for machine scheduling: A survey, *Eur. J. Oper. Res.* **51** (3), 283–300 (1991).

3. **R. Yu. Simanchev** and **N. Yu. Shereshik**, Integer models for the interrupt-oriented services of jobs by single machine, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **21** (4), 89–101 (2014) [Russian].
4. **P. Brucker** and **S. Knust**, Complexity results for scheduling problems (Osnabrück Univ., Osnabrück, 2009), URL: mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class (accessed: July 9, 2025).
5. **N. Yu. Shereshik**, Relaxations for the polyhedron of optimal schedules for the problem of interrupt-oriented service of jobs with a single machine, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **22** (6), 78–90 (2015) [Russian].
6. **R. Yu. Simanchev** and **I. V. Urazova**, Integer models for the total weighted tardiness problem on a single machine, in *Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends* (Rev. Sel. Pap. 22nd Int. Conf., Yekaterinburg, Russia, July 2–8, 2023) (Springer, Cham, 2023), pp. 176–187 (Commun. Comput. Inf. Sci., Vol. 1881), DOI: 10.1007/978-3-031-43257-6_14.
7. **W. E. Smith**, Various optimizers for single-stage production, *Nav. Res. Logist. Q.* **3** (1–2), 59–66 (1956).
8. **N. Sauer** and **M. Stone**, Preemptive scheduling, in *Algorithms and Order*, (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989), pp. 307–323 (NATO Sci. Ser. C, Vol. 255).
9. **P. Baptiste**, **J. Carlier**, **A. V. Kononov**, **M. Queyranne**, **S. V. Sevastyanov**, and **M. Sviridenko**, Structural properties of optimal schedules with preemption, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **16** (1), 3–36 (2009) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **4** (4), 455–474 (2010)].
10. **A. A. Lazarev** and **A. G. Kvaratskheliya**, Properties of optimal schedules for the minimization total weighted completion time in preemptive equal-length job with release dates scheduling problem on a single machine, *Avtom. Telemekh.*, No. 10, 80–89 (2010) [Russian] [*Autom. Remote Control* **71** (10), 2085–2092 (2010)].

Ruslan Yu. Simanchev
Inna V. Urazova

Received November 15, 2024
Revised December 17, 2024
Accepted March 22, 2025