ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 32 № 2 2025

Новосибирск
Издательство Института математики

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель–июнь 2025. Т. 32, № 2. С. 30–53

УДК 519.1 DOI: 10.33048/daio.2025.32.823

ЛОКАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВХОДЯЩИМИ ПОТОКАМИ В РЕГУЛЯРНЫХ РЕСУРСНЫХ СЕТЯХ С МАЛЫМ РЕСУРСОМ

А. В. Евсеенко[a], *В. А. Скороходов*[b]

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича
Южного федерального университета,
ул. Мильчакова, 8а, 344090 Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: [a]aevseenko@sfedu.ru, [b]vaskorohodov@sfedu.ru

Аннотация. Работа посвящена решению задачи локального управления входящими потоками в регулярных ресурсных сетях с малым ресурсом. Для таких сетей указано множество управляемых вершин. Задача локального управления состоит в определении таких пропускных способностей дуг, входящих в управляемые вершины, что единственное предельное состояние регулярной ресурсной сети Q^* наиболее близко к заранее заданному состоянию Q'. Получены условия недостижимости предельного состояния, совпадающего с заданным состоянием Q'. Рассмотрены различные конфигурации ресурсных сетей относительно распределения управляемых вершин в них. Показано, что если условия недостижимости предельного состояния не выполняются, то всегда найдётся такой набор пропускных способностей дуг, входящих в управляемые вершины, для которого предельное состояние Q^* равно заданному состоянию Q'. Ил. 2, библиогр. 21.

Ключевые слова: потоки в сетях, ресурсная сеть, предельное состояние, предельный поток, управление потоками.

Введение

Исследование поточных сетей началось в середине прошлого века в работах Форда и Фалкерсона с задачи определения величины максимально возможного потока по модели сети железнодорожного транспорта. Алгоритм её решения с обоснованием описан в работе [1], а формулировка теоремы о максимальном потоке нашла своё отражение в [2]. Дальнейшее развитие методов решения потоковых задач описано, например, в [3], где рассмотрены графы с выигрышами.

Другие исследования были посвящены вопросам перераспределения и доставки товаров от поставщиков до потребителей. Подробный обзор истории развития методов их решения приведён в статье [4]. В частности, методы решения статических потоковых задач с использованием развёртки были применены для решения динамических потоковых задач. Например, в [5] приводится алгоритм, реализующий данный подход.

С другой стороны, ряд авторов отмечает сходство динамических потоковых задач с задачами на графах с нестандартной достижимостью. Так, например, в [6] описываются модифицированные алгоритмы прорыва для поиска максимального динамического потока, а также различные варианты решения с помощью вспомогательного графа.

О. П. Кузнецов и Л. Ю. Жилякова в [7–10] предложили новую потоковую модель — ресурсную сеть. Ресурсная сеть — это ориентированная сильно связная сеть без источника и стока. Для каждой дуги ресурсной сети задана пропускная способность. Для каждой вершины ресурсной сети в каждый момент времени определяется количество ресурса, находящегося в это вершине в каждый момент времени. Ресурсная сеть работает в дискретном времени путём перераспределения ресурса между смежными вершинами согласно определённым правилам. При этом так же, как и в классическом случае, величина потока, проходящего по дуге в каждый момент времени, не может превышать величины её пропускной способности.

Авторы [11] решают задачу поиска начального состояния ресурсной сети по известному текущему состоянию с учётом нелинейности перераспределения ресурса. Помимо этого, в [12, 13] исследуются ресурсные сети с «жадными» вершинами, а в [14] — ресурсные сети, в которых каждая пара смежных вершин соединена двумя противоположно направленными дугами. Кроме того, в статье [15] исследуются неоднородные цепи Маркова, порождённые ресурсными сетями. Авторы [16] рассматривают возможность реализуемости предельных потоков в ресурсных сетях в виде потоков в классических сетях.

Одним из актуальных вопросов рассматриваемых для ресурсных сетей является задача локального управления потоком. Она состоит в нахождении таких значений пропускных способностей для выделенного подмножества дуг, при которых её предельное состояние окажется наиболее близким к заданному.

Определяют два вида управления ресурсным потоком: управление «вперёд» и управление «назад». В первом случае управляемыми дугами являются все исходящие из вершин выделенного подмножества вершин, называемого множеством управляемых вершин ресурсной сети, а во втором — все входящие в вершины множества управляемых вершин.

Ряд работ посвящён решению задачи локального управления вперёд ресурсным потоком. Так, в [17] проведено исследование этой задачи для регулярных ресурсных сетей с малым ресурсом, получен критерий достижимости в ресурсной сети предельного состояния, равного заданному.

Цель настоящей работы состоит в получении аналогичного критерия для регулярных ресурсных сетей с малым ресурсом в случае управления назад.

1. Основные понятия и определения

Определение 1. *Ресурсной сетью* называют ориентированную сеть $G(X,U)$ без источников и стоков, в которой для каждой дуги $(x,y) \in X^2$ указана пропускная способность $r_{xy} \geqslant 0$, а для каждой вершины $x \in X$ в произвольный момент времени $t \in \mathbb{N}_0$ — количество ресурса $q_x(t) \geqslant 0$.

Ресурсная сеть работает по шагам (тактам). В начале каждого такта весь ресурс находится только в вершинах. В промежутках между началами тактов он или некоторая его часть переходит от одних вершин по исходящим из них дугам смежным вершинам. При этом переход осуществляется по определённым правилам, которые удовлетворяют двум перечисленным ниже условиям работы ресурсной сети.

1. Замкнутость. Ресурс ни в какой вершине сети не добавляется извне и не исчезает.

2. Неразрывность. Ресурс, входящий в вершину, добавляется, а выходящий из вершины — вычитается из ресурса данной вершины.

Определение 2. Пусть $G(X,U)$ — некоторая ресурсная сеть, $X = \{x_i\}_{i=1}^n$. Выберем произвольный шаг $t \in \mathbb{N}_0$. Тогда вектор-функция

$$Q(t) = (q_{x_1}(t),\ q_{x_2}(t), \ldots, q_{x_n}(t))$$

называется *состоянием* ресурсной сети на шаге t.

Здесь каждая координата $q_{x_i}(t)$, $i \in \overline{1,n}$, означает количество ресурса, находящегося в вершине $x_i \in X$ в момент $t \in \mathbb{N}_0$. В частности, $Q(0)$ означает состояние $G(X,U)$ в начальный момент времени.

Пусть $q_x(t)$ — количество ресурса в некоторой вершине $x \in X$ в произвольный момент времени $t \in \mathbb{N}_0$. Воспользуемся условием неразрывности. В рамках одного шага из данной вершины убудет некоторое количество ресурса по исходящим и поступит определённое количество ресурса по входящим дугам. Тогда $q_x(t+1)$ определяется соотношением

$$q_x(t+1) = q_x(t) - \sum_{y \in \Gamma(x)} F_{xy}(t) + \sum_{z \in \Gamma^-(x)} F_{zx}(t), \tag{1}$$

где $\Gamma(x) = \{y \in X \mid (x,y) \in U\}$ и $\Gamma^-(x) = \{y \in X \mid (y,x) \in U\}$ (см. [18]).

В уравнении (1) функция $F_{xy}(t)$ представляет собой величину потока ресурса, проходящего по дуге $(x,y) \in U$ на шаге t, и определяется равенством

$$F_{xy}(t) = \begin{cases} r_{xy}, & \text{если } q_x(t) > \sum\limits_{z\in\Gamma(x)} r_{xz}, \\ \dfrac{r_{xy}}{\sum\limits_{z\in\Gamma(x)} r_{xz}} \cdot q_x(t), & \text{если } q_x(t) \leqslant \sum\limits_{z\in\Gamma(x)} r_{xz}. \end{cases} \tag{2}$$

В первой строке правила (2) рассматривается случай с избытком ресурса в исходящей вершине x, а во второй — с его недостатком относительно суммарной пропускной способности исходящих дуг.

Замечание 1. Как следует из определения 1, а также из условий и правил работы ресурсной сети, для $F_{xy}(t)$ в общем случае справедлива оценка

$$0 \leqslant F_{xy}(t) \leqslant r_{xy}.$$

В [19] правила (1) и (2) записаны в операторной форме, позволяющей по состоянию на шаге с номером $t \in \mathbb{N}_0$ получить состояние на шаге $t+1$. При этом авторами [19] рассматриваются динамические ресурсные сети, пропускные способности дуг которых могут изменяться на каждом новом шаге. В рамках настоящей работы исследуются ресурсные сети с постоянными пропускными способностями, для изучения которых достаточно использовать краткую форму записи, имеющую вид

$$Q(t+1) = \mathcal{A}(Q(t)).$$

Обозначим через W общее количество ресурса, находящегося в ресурсной сети $G(X,U)$ на шаге $t=0$. Тогда в силу условия замкнутости справедливы равенства

$$W = \sum_{x\in X} q_x(t), \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Приведём ряд определений, которые будут использованы нами далее.

Определение 3. Состояние ресурсной сети Q^* называется *устойчивым*, если $Q^* = \mathcal{A}(Q^*)$.

Определение 4. Состояние Q^* ресурсной сети $G(X,U)$ *асимптотически достижимо из состояния* $Q(0)$, если для любых $x \in X$, $\varepsilon > 0$ найдётся момент $t_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ такой, что $|q^*_x - q_x(t)| < \varepsilon$ для любого $t > t_\varepsilon$.

Определение 5. Состояние Q^* называется *предельным*, если оно либо устойчиво и существует такой момент времени t, что $Q^* = Q(t)$, либо асимптотически достижимо из состояния $Q(0)$.

Определение 6. *Расстоянием между состояниями* Q_1 и Q_2 ресурсной сети $G(X, U)$ называется величина

$$\rho(Q_1, Q_2) = \sum_{x \in X} \left| q_x^1 - q_x^2 \right|. \tag{3}$$

Далее будем рассматривать только ресурсные сети, представляющие собой сильно связные графы. В таком случае каждой ресурсной сети с указанной топологией будет соответствовать эргодическая цепь Маркова, поэтому ресурсные сети указанного вида также называют эргодическими [20].

Определение 7. Эргодическая ресурсная сеть называется *регулярной*, если НОД длин всех её циклов равен единице.

В монографии [20] введены в рассмотрение множества вершин

$$Z^+(t) = \left\{ x \in X \mid q_x(t) > \sum_{y \in \Gamma(x)} r_{xy} \right\},$$

$$Z^-(t) = \left\{ x \in X \mid q_x(t) \leqslant \sum_{y \in \Gamma(x)} r_{xy} \right\}.$$

Другими словами, каждая вершина множества $Z^+(t)$ в момент времени t работает по правилу 1 в (2), т. е. отдаёт часть своего текущего ресурса по инцидентным ей дугам. Каждая вершина множества $Z^-(t)$ в момент времени t работает по правилу 2 из (2), т. е. отдаёт весь свой текущий ресурс.

Определение 8. Говорят, что *вершина x переходит в зону Z^-*, если существует момент времени t' такой, что $x \in Z^-(t)$ для всех $t \geqslant t'$.

Определение 9. *Пороговым значением* для ресурсной сети G называется такая величина T, для которой если $W \leqslant T$, то все вершины ресурсной сети G перейдут в зону Z^-. В противном случае $Z^+(t) \neq \varnothing$ для каждого момента времени t.

В работе [7] доказано существование порогового значения для произвольной регулярной сети, а в статье [21] описан метод его нахождения.

Определение 10. Пусть $G(X, U)$ — ресурсная сеть. Ресурс суммарной величины W в сети G называется *малым*, если $W \leqslant T$.

Для регулярных ресурсных сетей с малым ресурсом имеет место

Теорема 1 [20, теорема 3.1]. *Пусть G — регулярная сеть с произвольным малым ресурсом W. Тогда для любого начального ресурса $Q(0)$ вектор предельного состояния Q^* существует и единствен.*

2. Задача локального управления входящим потоком малого ресурса

Пусть $G(X, U)$ — регулярная ресурсная сеть, в которой выделено подмножество вершин $S \subset X$, называемых *управляемыми*. Через $N = X \setminus S$ обозначим множество *неуправляемых* вершин ресурсной сети G. Аналогично дуги, входящие в вершины множества S, будем называть управляемыми, а входящие в вершины множества N — неуправляемыми. Множество управляемых дуг обозначим через S^-, а неуправляемых — через N^-.

Рассмотрим задачу локального управления потоком (см. [17]) в ресурсной сети. Эта задача состоит в нахождении таких пропускных способностей управляемых дуг (в рассматриваемом здесь случае дуг множества S^-), чтобы предельное состояние Q^* было наиболее близким к заранее заданному состоянию ресурсной сети Q', т. е. значение функции $\rho(Q', Q^*)$ оказалось минимальным.

В первую очередь исследуем вопрос достижимости предельного состояния, т. е. нахождение такого набора пропускных способностей дуг множества S^-, для которого $\rho(Q', Q^*) = 0$. Последнее возможно только при $Q' = Q^*$, следовательно, состояние Q' должно быть предельным, а значит — устойчивым в ресурсной сети $G(X, U)$. Таким образом, для Q' необходимо выполнения равенства $Q' = \mathcal{A}(Q')$.

Поскольку пропускные способности дуг множества N^- (в отличие от S^-) известны, можно сформулировать первое условие недостижимости предельного состояния, равного заданному.

Теорема 2. *Если в регулярной ресурсной сети $G(X, U)$ с малым ресурсом существует вершина $x \in X \setminus \Gamma(\Gamma^-(S))$ такая, что при некотором наборе пропускных способностей дуг множества S^- имеет место неравенство $q'_x \neq (\mathcal{A}(Q'))_x$, то для любых пропускных способностей дуг из S^- состояние Q' не будет предельным.*

Доказательство. Пусть вершина $x \in X \setminus \Gamma(\Gamma^-(S))$ такова, что $q'_x \neq (\mathcal{A}(Q'))_x$. Выберем произвольную вершину $y \in \Gamma^-(x)$. Тогда изменение пропускных способностей дуг из S^- не влияет на значение F_{yx} для любой величины r_{yx}, поэтому из того, что для некоторого набора пропускных способностей дуг множества S^- выполняется неравенство $q'_x \neq (\mathcal{A}(Q'))_x$, следует его выполнение для любых пропускных способностей дуг из S^-. Последнее означает, что состояние Q' при любых значениях пропускных способностей дуг множества S^- не будет устойчивым, а значит, и предельным. Теорема 2 доказана.

Отметим, что невыполнение первого условия недостижимости не охватывает все случаи, для которых Q' не является предельным, поэтому сформулируем второе условие недостижимости.

Теорема 3. *Пусть в регулярной ресурсной сети $G(X,U)$ с малым ресурсом при некотором наборе пропускных способностей дуг из S^- имеют место равенства*

$$q'_x = (\mathcal{A}(Q'))_x, \quad x \in X \setminus \Gamma(\Gamma^-(S)), \tag{4}$$

и нарушается хотя бы одно из следующих условий.

1. *Для любого $x \in S$*

$$q'_x \leqslant \sum_{y\in\Gamma^-(x)} q'_y. \tag{5}$$

2. *Для любого $x \in \Gamma(\Gamma^-(S)) \setminus S$*

$$\sum_{y\in\Gamma^-(x)\setminus\Gamma^-(S)} F_{yx} \leqslant q'_x \leqslant \sum_{y\in\Gamma^-(x)\setminus\Gamma^-(S)} F_{yx} + \sum_{y\in\Gamma^-(x)\cap\Gamma^-(S)} \min\{q'_y, r_{yx}\}. \tag{6}$$

3. *Для любого $x \in X$*

$$q'_x \leqslant \sum_{y\in\Gamma(x)\cap S} q'_y + \sum_{y\in\Gamma(x)\setminus S} \min\{q'_y, r_{xy}\}.$$

Тогда для любых пропускных способностей дуг из S^- состояние Q' не будет предельным.

Доказательство. Достаточно показать, что если при условии (4) состояние Q' предельное, то выполняются условия 1–3. Пусть состояние Q' предельное. Отметим, что для малого ресурса в этом случае справедливы равенства

$$q'_x = \sum_{y\in\Gamma^-(x)} F_{yx}, \quad x \in X. \tag{7}$$

1. Пусть $x \in S$. Покажем, что в силу предельности Q' имеет место (5). Отметим, что согласно (2) для любой пропускной способности дуг из S^- имеем

$$0 \leqslant F_{yx} \leqslant q'_y, \quad y \in \Gamma^-(x).$$

Суммируя эти неравенства для всех вершин из $\Gamma^-(x)$, получим

$$0 \leqslant \sum_{y\in\Gamma^-(x)} F_{yx} \leqslant \sum_{y\in\Gamma^-(x)} q'_y. \tag{8}$$

Подставляя (7) в (8), приходим к неравенствам

$$0 \leqslant q'_x \leqslant \sum_{y\in\Gamma^-(x)} q'_y,$$

второе из которых совпадает с (5); тем самым условие 1 выполняется.

2. Пусть $x \in \Gamma(\Gamma^-(S)) \setminus S$. Отметим, что $\Gamma^-(x)$ может быть представлено в виде

$$\Gamma^-(x) = (\Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)) \cup (\Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)), \tag{9}$$

а так как $x \in N$, в равенстве (9) каждое из множеств, стоящих в скобках, непусто. Тогда (7) можно представить в виде

$$q'_x = \sum_{y \in \Gamma^-(x)} F_{yx} = \sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx} + \sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} F_{yx}. \tag{10}$$

Тем самым для величины ресурса в вершине x имеет место неравенство

$$\sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx} \leqslant q'_x,$$

которое совпадает с первым неравенством в (6).

Докажем справедливость второго неравенства в (6). Отметим, что в правой части (10) величины потоков F_{yx} в первом слагаемом не зависят от выбора пропускных способностей дуг множества S^-, в то время как во втором слагаемом разные пропускные способности дуг могут давать различные значения потоков. Оценим сверху второе слагаемое.

Поскольку величина потока по дуге не может превышать количества ресурса, находящегося в начальной вершине этой дуги, для второго слагаемого в правой части (10) имеет место оценка

$$\sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} F_{yx} \leqslant \sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} q'_y. \tag{11}$$

С другой стороны, согласно (2) пропускная способность каждой дуги не меньше величины потока, проходящего по этой дуге. Так как $x \in N$ и значения пропускных способностей всех дуг множества N^- известны, имеет место неравенство

$$\sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} F_{yx} \leqslant \sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} r_{yx}. \tag{12}$$

Объединяя (11) и (12), получаем неравенство

$$\sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} F_{yx} \leqslant \sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} \min\{q'_y, r_{yx}\},$$

подставляя которое в (10), приходим ко второму неравенству в (6):

$$q'_x \leqslant \sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx} + \sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} \min\{q'_y, r_{yx}\}.$$

Тем самым условие 2 доказано.

3. Рассмотрим произвольную вершину $x \in X$ и оценим величину q'_x через величины q'_y, где $y \in \Gamma(x)$. Поскольку состояние Q' устойчиво, для любой дуги $(x, y) \in U$ ресурсной сети G имеет место неравенство

$$F_{xy} \leqslant q'_y.$$

С другой стороны, поток по дуге не может превышать её пропускной способности, поэтому

$$F_{xy} \leqslant r_{xy}, \quad y \in N.$$

Объединяя два записанных выше утверждения, получим

$$F_{xy} \leqslant \begin{cases} q'_y, & y \in S, \\ \min\{q'_y, r_{xy}\}, & y \in N. \end{cases}$$

В силу произвольности вершины y последнее неравенство приводит к следующей оценке для правой части (7):

$$q'_x = \sum_{y \in \Gamma(x)} F_{xy} \leqslant \sum_{y \in \Gamma(x) \cap S} q'_y + \sum_{y \in \Gamma(x) \setminus S} \min\{q'_y, r_{xy}\}.$$

Таким образом, условие 3 выполняется. Теорема 3 доказана.

Замечание 2. В условиях 1 и 2 теоремы 3 рассматриваются вершины множества $\Gamma(\Gamma^-(S))$. Заметим, что для $x \in X \setminus \Gamma(\Gamma^-(S))$ справедливо

$$q'_x = \sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx},$$

что соответствует (4). В силу этого теорему 3 можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 4. *В регулярной ресурсной сети $G(X, U)$ с малым ресурсом для любых пропускных способностей дуг из S^- состояние Q' не будет предельным, если для некоторых пропускных способностей дуг нарушается хотя бы одно из следующих условий.*

1. *Для любого $x \in S$*

$$q'_x \leqslant \sum_{y \in \Gamma^-(x)} q'_y.$$

2. *Для любого $x \in \Gamma(\Gamma^-(S)) \setminus S$*

$$\sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx} \leqslant q'_x \leqslant \sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx} + \sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} \min\{q'_y, r_{yx}\}.$$

3. *Для любого $x \in X \setminus \Gamma(\Gamma^-(S))$*

$$q'_x = \sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx}.$$

4. *Для любого* $x \in X$

$$q'_x \leqslant \sum_{y \in \Gamma(x) \cap S} q'_y + \sum_{y \in \Gamma(x) \setminus S} \min\{q'_y, r_{xy}\}.$$

Заметим, что для дуг из N^- пропускные способности заданы изначально. Тем не менее, на потоки по таким дугам не распространяются условия теоремы 4.

Найдём условия, при которых обеспечивается переход нужной доли ресурса в вершины из N. Пусть $|N| = k$. Пронумеруем вершины множества N от 1 до k. Для произвольной вершины $a \in \Gamma^-(N)$ рассмотрим вектор $\overline{p}_a = \left(p_a^{x_1}, p_a^{x_2}, \ldots, p_a^{x_k}\right)$, где для любого $i \in \overline{1,k}$

$$p_a^{x_i} = \begin{cases} r_{ax_i}, & \text{если существует дуга } (a, x_i) \in N^-, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положим $Q'_N = \left(q'_{x_1}, q'_{x_2}, \ldots, q'_{x_k}\right)$. Возьмём также некоторую нумерацию вершин множества $\Gamma^-(N)$. Пусть $|\Gamma^-(N)| = m$. Тогда имеет место

Теорема 5. *Если в регулярной ресурсной сети $G(X,U)$ с малым ресурсом для вершин $a_i \in \Gamma^-(N)$, $i \in \overline{1,m}$, не существует коэффициентов $\lambda_{a_1}, \lambda_{a_2}, \ldots, \lambda_{a_m} \in (0,1]$ таких, что*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{a_i} \overline{p}_{a_i} = Q'_N, \tag{13}$$

то для любых пропускных способностей дуг из S^- состояние Q' не будет предельным.

Справедливость утверждения теоремы следует из того, что для любой вершины $a \in \Gamma^-(N)$ вектор $\overline{p}_a$ определяет пропорциональность распределения ресурса по дугам, выходящим из вершины a в вершины множества N.

Таким образом, если решения векторного уравнения (13) не существует, то невозможно подобрать такие пропускные способности дуг из S^-, чтобы Q' было устойчивым.

3. Задача о нахождении пропускных способностей дуг в управляемые вершины

Рассмотрим регулярную ресурсную сеть $G(X,U)$ с малым ресурсом, для которой указаны множества вершин S и N, а также множества дуг S^- и N^-. Будем считать, что в $G(X,U)$ для некоторого состояния $Q' = (q'_1, q'_2, \ldots, q'_n)$ выполняются все условия теорем 4 и 5. Покажем, что в этом случае всегда можно определить пропускные способности дуг из множества S^- таким образом, чтобы состояние Q' было устойчивым.

Отметим, что любая вершина из X может быть началом дуг либо только из S^-, либо только из N^-, либо из S^- и N^- одновременно. В последнем случае с изменением пропускной способности любой дуги из S^- меняется поток как по ней самой, так и по всем дугам, имеющим с ней общее начало, в том числе и по дугам из N^-. Если же вершина является началом только дуг из N^-, то такого изменения в принципе произойти не может, поэтому разделим множество дуг N^- на множество частично управляемых дуг и на множество полностью неуправляемых дуг.

Определение 11. Дуги множества N^-, у которых начальные вершины принадлежат $\Gamma^-(S)$, будем называть *частично управляемыми.* Множество всех частично управляемых дуг обозначим через N_S^-.

Определение 12. Дуги множества N^-, у которых начальные вершины принадлежат $X \backslash \Gamma^-(S)$, будем называть *полностью неуправляемыми.* Множество всех полностью неуправляемых дуг обозначим через N_N^-.

Имеет место равенство $N^- = N_S^- \cup N_N^-$.

Отметим, что в произвольную вершину $x \in X \setminus \Gamma(\Gamma^-(S))$ ведут только дуги из N_N^-. Также заметим, что для каждой дуги $(x, y) \in N_N^-$ значение потока F_{xy} определяется однозначно по формуле во второй строке (2) и, как указано в доказательстве теоремы 2, не зависит от выбора пропускных способностей дуг множества S^-. В силу этого при решении задачи о нахождении пропускных способностей дуг S^- можно исключить из ресурсной сети G все дуги множества N_N^-.

Рассмотрим частичный подграф $\widetilde{G}(\widetilde{X}, \widetilde{U})$ ресурсной сети $G(X, U)$, полученный в результате удаления из $G(X, U)$ дуг множества N_N^-, а также вершин, которые в результате такого удаления оказались изолированными. Отметим, что множество дуг $\widetilde{U}$ определяется в виде

$$\widetilde{U} = S^- \cup N_S^-.$$

Поскольку изолированными в результате удаления дуг могут быть только вершины, являющиеся началом и концом дуг только из N_N^-, множество всех вершин $\widetilde{X}$ можно найти следующим образом:

$$\widetilde{X} = \Gamma^-(S) \cup \Gamma(\Gamma^-(S)).$$

Найдём количества ресурса, которые должны суммарно поступить в каждую вершину $\widetilde{X}$ по дугам из $\widetilde{U}$ так, чтобы Q' было устойчивым для $G(X, U)$.

Если $x \in S$, то поскольку в данную вершину ведут только дуги множества S^-, пересчёта не требуется.

В случае $x \in N$ справедливо $\widetilde{N} \subset N$ и $\widetilde{N}^- = N_S^-$.

Таким образом, количество ресурса, которое должно поступить в произвольную вершину $x \in \widetilde{X}$, можно найти по формуле

$$\widetilde{q}_x = q'_x - \sum_{(y,x)\in N_N^-} F_{yx}.$$

При этом стоит отметить, что количество ресурса, которое должно выйти из вершины $x \in \Gamma^-(S)$, не изменится и будет равно q'_x. Для удобства положим $\widetilde{q}_x = q'_x$ для всех вершин $x \in \Gamma^-(S)$.

Таким образом, задача нахождения пропускных способностей дуг множества S^- сводится к следующей подзадаче: показать, что при выполнении на $\widetilde{G}(\widetilde{X}, \widetilde{U})$ всех условий теорем 4 и 5 всегда существуют такие значения пропускных способностей дуг из S^-, при которых Q' в исходной ресурсной сети $G(X, U)$ будет предельным.

Для этого докажем ряд лемм, описывающих возможные конфигурации $\widetilde{G}(\widetilde{X}, \widetilde{U})$. Не нарушая общности, будем считать, что $\widetilde{G}(\widetilde{X}, \widetilde{U})$ связное, поскольку, если $\widetilde{G}(\widetilde{X}, \widetilde{U})$ состоит из нескольких компонент связности, то все рассуждения могут быть применены к каждой из них.

Лемма 1. *Пусть на частичном подграфе $\widetilde{G}(\widetilde{X}, \widetilde{U})$ нет циклов, а для исходной ресурсной сети $G(X, U)$ с малым ресурсом выполняются все условия теорем* 4 и 5. Тогда существуют такие пропускные способности дуг множества S^-, при которых состояние Q' предельное для $G(X, U)$.

Доказательство. Построим два соседних слоя временно́й развёртки $G'(X', U')$ (см. [1, 17, 19]), описывающих работу одной итерации ресурсной сети, по следующему правилу:

• каждой вершине $x \in X$ исходной ресурсной сети G ставятся в соответствие две вершины $\{x^{(0)}, x^{(1)}\}$ на развёртке G';

• каждой дуге $u = (x, y) \in U$ исходной сети G ставится в соответствие дуга $u' = (x^{(0)}, y^{(1)})$ на развёртке G'. При этом если $u \in N^-$, то её пропускная способность переносится на соответствующую ей дугу u'.

Пример построения такой развёртки показан на рис. 1. Вершины развёртки разбиты на два слоя: нижний $X'_b = \{x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\}$, и верхний $X'_t = \{x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}\}$.

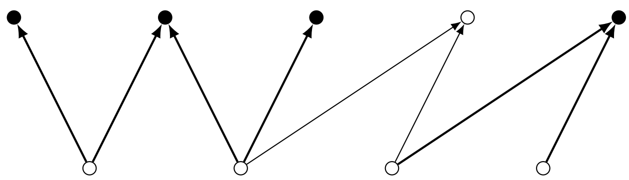

Рис. 1. Пример развёртки G'. Управляемые вершины и дуги выделены

Так как слои развёртки соответствуют двум последовательным моментам времени и рассматривается вопрос об устойчивости состояния Q', с каждой вершиной $x^{(i)} \in X'$ $(i = 0, 1)$ развёртки G' свяжем величину $\widetilde{q}_{x^{(i)}} = q'_x$. Таким образом задача локального управления потоками на исходной ресурсной сети сводится к задаче нахождения сбалансированного потока на развёртке: вначале на развёртке $G'(X', U')$ будут найдены величины потоков по дугам, соответствующим управляемым на исходной ресурсной сети, на основе которых можно определить пропускные способности дуг множества S^-, при которых состояние Q' предельное на $G(X, U)$.

Поскольку на частичном подграфе $\widetilde{G}(\widetilde{X}, \widetilde{U})$ отсутствуют циклы, они будут отсутствовать и на его развёртке, так как после склейки пар вершин, соответствующих одним и тем же вершинам множества $\widetilde{X}$, получится граф, изоморфный $\widetilde{G}(\widetilde{X}, \widetilde{U})$. Таким образом, развёртка является деревом или лесом. Как известно, на каждом дереве существует как минимум две висячие вершины. Обозначим через $X'_\circ$ множество висячих вершин $G'(X', U')$.

С целью нахождения потоков далее будем использовать (1), учитывая то, что ресурс малый.

Заметим, что величина потока по дуге, инцидентной произвольной вершине $x \in X'_\circ$, равна количеству находящегося в ней ресурса. Кроме того, указанная величина потока не может превышать пропускной способности указанной дуги. Зная данные факты, находим все потоки по дугам, инцидентным висячим вершинам. Удалим из $G'(X', U')$ все вершины множества $X'_\circ$, а также инцидентные им дуги.

Для оставшихся вершин необходимо учесть изменение величины ресурса, произошедшее вследствие удаления. С этой целью для каждой вершины $y \in X' \setminus X'_\circ$ выполним пересчёт её ресурса следующим образом: положим

$$\widetilde{q}_y = \widetilde{q}_y - \sum_{x \in \Gamma^-(y) \cap X'_\circ} \widetilde{q}_x - \sum_{x \in \Gamma(y) \cap X'_\circ} \widetilde{q}_x.$$

Согласно условию для исходной ресурсной сети $G(X, U)$ с малым ресурсом выполняются все условия теоремы 4. Кроме того, для любой ресурсной сети суммарное количество ресурса на каждом шаге её работы постоянно, поэтому значения, полученные по указанной формуле, неотрицательны.

Полученная в результате новая развёртка $G'_1(X'_1, U'_1)$ будет деревом или лесом, т. е. в ней существует минимум две висячие вершины. Повторяя действия, совершённые на первом шаге, получим величины потоков по дугам, инцидентным висячим вершинам. Используя найденные потоки, найдём количества ресурса, которые должны переместиться из или в вершины, смежные висячим. При этом все найденные на этом шаге значения в силу выполнения условий теорем 4 и 5 будут неотрицательными.

Повторяя описанный выше процесс, найдём все величины потоков для $\widetilde{G}(\widetilde{X},\widetilde{U})$, а значит, и в $G(X,U)$.

Докажем, что существуют пропускные способности дуг из S^-, при которых состояние Q' предельное.

Отметим, что поскольку рассматриваемый ресурс малый, для произвольных дуг $(a,x),(a,y) \in S^-$ согласно формуле во второй строке (2) справедливо соотношение пропорциональности

$$r_{ax} \cdot F_{ay} = r_{ay} \cdot F_{ax}. \tag{14}$$

Равенство (14) описывает также ряд частных случаев. Так, например, если величина потока по дуге из S^- равна нулю, то пропускная способность этой дуги из S^- должна быть равной нулю.

Предположим, что $(a,x) \in S^-$, а $(a,y) \in N_S^-$. Поскольку r_{ay} известно, из (14) можно однозначно найти величину r_{ax}. В случае, если помимо указанных выше дуг из a выходят другие дуги из S^-, их пропускные способности находятся аналогично.

Пусть a является началом только дуг множества S^-. Пропускные способности дуг (a,x) можно положить равными $r_{ax} = \lambda F_{ax}$, где $\lambda \geqslant 1$. При этом из (14) следует, что пропорциональность потоков по этим дугам сохраняется при любом таком значении λ. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть на частичном подграфе $\widetilde{G}(\widetilde{X},\widetilde{U})$ в каждый его цикл входит хотя бы одна дуга из N_S^- с началом в некоторой вершине $b \in \widetilde{X}$ такой, что из b выходит хотя бы одна дуга множества N_S^-, конец которой является висячей вершиной. Пусть также для исходной ресурсной сети $G(X,U)$ выполняются все условия теорем* 4 и 5. Тогда существуют такие пропускные способности дуг множества S^-, при которых состояние Q' предельное для $G(X,U)$.

Доказательство. Применяя метод, изложенный в доказательстве леммы 1, построим развёртку для частичного подграфа $\widetilde{G}(\widetilde{X},\widetilde{U})$.

Аналогично доказательству леммы 1 найдём сначала величины потоков. Пусть (b,z) — дуга из вершины b нижнего слоя развёртки с концом в висячей вершине z. Обозначим через $N_S^-(b) \subset N_S^-$ множество дуг, каждая из которых входит хотя бы в один существующий цикл.

Как и в доказательстве леммы 1, полагаем величину потока по дуге (b,z) равной $F_{bz} = \widetilde{q}_z$. Далее, используя найденную величину F_{bz}, для каждой дуги $(b,y) \in N_S^-(b)$ составим уравнение, аналогичное (14). В результате найдём все F_{by}.

Пусть $N_S(b) = \Gamma(b)$ — множество концов дуг из $N_S^-(b)$. В таком случае количество ресурса, которое должно поступить в некоторую вершину $y \in N_S(b)$ по дугам, отличным от (b, y), можно определить, полагая

$$\widetilde{q}_y := \widetilde{q}_y - F_{by}.$$

Аналогично количество ресурса, которое должно выйти из вершины b по дугам, отличным от дуги (b, z) и дуг множества $N_S^-(b)$, находится следующим образом:

$$\widetilde{q}_b := \widetilde{q}_b - \sum_{v \in N_S(b)} F_{bv}.$$

Удалим дуги множества $N_S^-(b)$ и вершину z из развёртки. Так как каждый цикл развёртки содержит хотя бы одну дугу множества $N_S^-(b)$, после их удаления развёртка превратится в дерево или лес, стало быть, применяя далее метод, описанный в лемме 1, можно найти все неизвестные потоки, а значит, пропускные способности дуг множества S^-. Лемма 2 доказана.

Далее рассмотрим общий случай для нахождения пропускных способностей дуг множества S^-. Пусть для ресурсной сети $G(X, U)$ с малым ресурсом выполняются все условия теорем 4 и 5. Рассмотрим частичный подграф $\widetilde{G}(\widetilde{X}, \widetilde{U})$ ресурсной сети $G(X, U)$ и построим для него развёртку $G'(X', U')$. Применим к ней методы, описанные в леммах 1 и 2, и найдём искомые пропускные способности дуг S^- (все или их часть).

Далее удалим из рассмотрения дуги с найденными характеристиками, выполняя пересчёт величин ресурсов в вершинах развёртки. В оставшейся части развёртки вершины нижнего слоя обозначим через $X_b = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, а верхнего — через $X_t = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $m, n \in \mathbb{N}$ — число вершин нижнего и верхнего слоёв соответственно. Общий вид получившейся развёртки представлен на рис. 2, на котором вершины и дуги изображены в одном стиле, поскольку для дальнейшего рассмотрения не важен тип множеств, к которым они относятся.

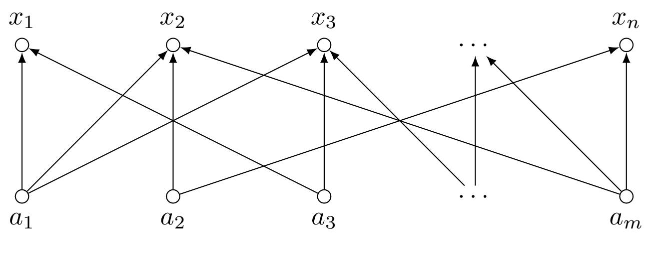

Рис. 2. Общий вид развёртки после применения к $\widetilde{G}(\widetilde{X}, \widetilde{U})$ методов, описанных в леммах 1 и 2

Запишем уравнения, описывающие работу каждой вершины развёртки, используя (1) для случая малого ресурса. Для произвольной вершины a_i нижнего слоя с номером $i \in \overline{1,m}$ уравнение работы имеет вид

$$\sum_{x \in \Gamma(a_i)} F_{a_i x} = \widetilde{q}_{a_i}. \tag{15}$$

В свою очередь, для вершины x_j верхнего слоя с номером $j \in \overline{1,n}$ имеем

$$\sum_{a \in \Gamma^-(x_j)} F_{a x_j} = \widetilde{q}_{x_j}. \tag{16}$$

Из полученных уравнений вида (15) и (16) составим систему (17). При этом полагаем, что уравнения каждой части будут записаны в порядке возрастания номеров вершин, для которых они составлены:

$$\begin{cases} \sum\limits_{x \in \Gamma(a_i)} F_{a_i x} = \widetilde{q}_{a_i}, & i \in \overline{1,m}, \\ \sum\limits_{a \in \Gamma^-(x_j)} F_{a x_j} = \widetilde{q}_{x_j}, & j \in \overline{1,n}. \end{cases} \tag{17}$$

Теорема 6. *Для любой связной временно́й развёртки G' система* (17) *совместна.*

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений (18), полученную из (17) умножением на минус единицу всех уравнений, описанных в первой строке:

$$\begin{cases} \sum\limits_{x \in \Gamma(a_i)} (-F_{a_i x}) = -\widetilde{q}_{a_i}, & i \in \overline{1,m}, \\ \sum\limits_{a \in \Gamma^-(x_j)} F_{a x_j} = \widetilde{q}_{x_j}, & j \in \overline{1,n}. \end{cases} \tag{18}$$

Система (18) эквивалентна (17), при этом матрицей системы (18) будет матрица инцидентности графа G'. Поскольку развёртка G' является связным графом, ранг её матрицы инцидентности равен $\operatorname{rang} B(G') = n+m-1$, что на единицу меньше числа строк матрицы $B(G')$. Таким образом, для доказательства совместности нужно показать, что ранг расширенной матрицы $(B(G') \mid C(q))$ системы (18) равен $n+m-1$, т. е. система всех её вектор-строк линейно зависима.

Рассмотрим сумму всех вектор-строк расширенной матрицы системы (18):

$$\sum_{i=1}^{n+m} (B(G') \mid C(q))_i = \left(0 \ \ldots \ 0 \mid \sum_{i=1}^{n} \widetilde{q}_{x_i} - \sum_{i=1}^{m} \widetilde{q}_{a_i}\right).$$

Поскольку суммарная величина ресурса в ресурсной сети постоянна, разность в последней компоненте результата последней суммы равна нулю. Следовательно, система (18) совместна. Теорема 6 доказана.

Таким образом, имеет место

Теорема 7. *Пусть в регулярной ресурсной сети $G(X, U)$ с малым ресурсом для вершин множества $\Gamma^-(S) = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ существуют коэффициенты*

$$\lambda_{a_1}, \lambda_{a_2}, \ldots, \lambda_{a_m} \in (0, 1] \tag{19}$$

такие, что

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_{a_i} \overline{p}_{a_i} = Q'_N, \tag{20}$$

а также выполняются следующие условия.

1. *Для любого $x \in S$*

$$q'_x \leqslant \sum_{y \in \Gamma^-(x)} q'_y.$$

2. *Для любого $x \in \Gamma(\Gamma^-(S)) \setminus S$*

$$\sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx} \leqslant q'_x \leqslant \sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx} + \sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} \min\{q'_y, r_{yx}\}.$$

3. *Для любого $x \in X \setminus \Gamma(\Gamma^-(S))$*

$$q'_x = \sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx}.$$

4. *Для любого $x \in X$*

$$q'_x \leqslant \sum_{y \in \Gamma(x) \cap S} q'_y + \sum_{y \in \Gamma(x) \setminus S} \min\{q'_y, r_{xy}\}.$$

Тогда найдётся набор пропускных способностей дуг множества S^-, для которого существует единственное предельное состояние $Q^* = Q'$.

Доказательство. Рассмотрим частичный подграф $\widetilde{G}(\widetilde{X}, \widetilde{U})$ ресурсной сети $G(X, U)$, построенный по описанным выше правилам. Максимально упростим его структуру, применяя методы, описанные в леммах 1 и 2. Не нарушая общности, предположим, что в результате упрощения получен связный частичный подграф $\widetilde{G_1}(\widetilde{X_1}, \widetilde{U_1})$, в котором содержится хотя бы один цикл. В случае, если $\widetilde{G_1}(\widetilde{X_1}, \widetilde{U_1})$ будет содержать несколько компонент связности, для каждой из них рассуждения будут аналогичны.

Построим развёртку $G'(X', U')$ для $\widetilde{G_1}(\widetilde{X_1}, \widetilde{U_1})$ так, как было описано ранее, и составим по ней систему уравнений вида (17). Такая система совместна и имеет бесконечно много решений.

Для доказательства осталось показать, что существует хотя бы одно решение системы вида (17) такое, что для любой величины F_{ax} выполняется одно из следующих условий:

(1°) если $x \in S$, то $0 \leqslant F_{ax} \leqslant \min\{\widetilde{q}_a, \widetilde{q}_x\}$;

(2°) если $x \in N$, то $0 < F_{ax} \leqslant \min\{\widetilde{q}_a, \widetilde{q}_x, r_{ax}\}$.

С указанной целью каждой вершине $a \in \Gamma^-(N)$ нижнего слоя развёртки G' поставим в соответствие некоторую смежную с ней вершину $x_a \in N$ верхнего слоя G'. Согласно (14) справедливы равенства

$$F_{ay} = \frac{r_{ay}}{r_{ax_a}} \cdot F_{ax_a}, \quad y \in \Gamma(a) \cap N, \tag{21}$$

где в силу того, что $(a, y), (a, x_a) \in N^-$, имеем $r_{ay} \neq 0$ и $r_{ax_a} \neq 0$.

Рассмотрим произвольное уравнение верхней части системы (17):

$$\sum_{y \in \Gamma(a)} F_{ay} = \widetilde{q}_a.$$

Перепишем его в виде

$$\sum_{y \in \Gamma(a) \cap S} F_{ay} + \sum_{y \in \Gamma(a) \cap N} F_{ay} = \widetilde{q}_a.$$

Подставляя здесь во вторую сумму величины потоков, определённые с помощью соотношений (21), получим

$$\sum_{y \in \Gamma(a) \cap S} F_{ay} + F_{ax_a} \sum_{y \in \Gamma(a) \cap N} \frac{r_{ay}}{r_{ax_a}} = \widetilde{q}_a. \tag{22}$$

Положим

$$F_a^{N^-} = F_{ax_a} \sum_{y \in \Gamma(a) \cap N} \frac{r_{ay}}{r_{ax_a}}.$$

Тогда уравнение (22) примет вид

$$\sum_{y \in \Gamma(a) \cap S} F_{ay} + F_a^{N^-} = \widetilde{q}_a.$$

Аналогичным образом преобразуем все уравнения системы (17), соответствующие вершинам нижнего слоя $G'(X', U')$. Кроме того, сложим все уравнения указанной системы, описывающие работу вершин верхнего слоя $G'(X', U')$, содержащихся в множестве N. В результате получим

$$\sum_{y \in N} \sum_{a \in \Gamma^-(y)} F_{ay} = \sum_{y \in N} \widetilde{q}_y.$$

Так как

$$\sum_{y \in N} \sum_{a \in \Gamma^-(y)} F_{ay} = \sum_{a \in \Gamma^-(N)} \sum_{y \in \Gamma(a) \cap N} F_{ay} = \sum_{a \in \Gamma^-(N)} F_a^{N-},$$

после перегруппировки слагаемых и замены получим

$$\sum_{a \in \Gamma^-(N)} F_a^{N^-} = \sum_{x \in N} \widetilde{q}_x.$$

Объединяя полученные выше уравнения, получим систему

$$\begin{cases} \sum\limits_{x\in\Gamma(a)\cap S} F_{ax} = \widetilde{q}_a - F_a^{N-}, & a \in \Gamma^-(S), \\ \sum\limits_{a\in\Gamma^-(x)} F_{ax} = \widetilde{q}_x, & x \in S, \\ \sum\limits_{a\in\Gamma^-(N)} F_a^{N-} = \sum\limits_{x\in N} \widetilde{q}_x. \end{cases} \tag{23}$$

В силу условия теоремы о существовании коэффициентов вида (19), при которых выполняется (20), для каждой вершины $a \in \Gamma^-(N)$ выберем значение F_a^{N-} так, чтобы выполнялось нижнее равенство в системе (23), для каждой вершины $a \in \Gamma^-(S)$ имело место соотношение

$$0 < F_a^{N-} \leqslant \min\Big\{\widetilde{q}_a, \sum_{x\in\Gamma(a)\cap N} \min\{\widetilde{q}_x, r_{ax}\}\Big\},$$

а для каждой вершины $a \in \Gamma^-(N) \setminus \Gamma^-(S)$ было бы справедливо равенство $F_a^{N-} = \widetilde{q}_a$. Тогда для любой вершины $a \in \Gamma^-(S)$ выполняется неравенство $\widetilde{q}_a - F_a^{N-} \geqslant 0$.

Таким образом, выбраны значения потоков по всем частично управляемым дугам. Оставшиеся нерассмотренными неизвестные системы (23) соответствуют потокам по управляемым дугам. Заметим, что левые части каждого уравнения представляют собой суммы, поэтому с учётом того, что полученная после подстановки выбранных значений система (23) остаётся совместной (она эквивалентна системе вида (17) для подграфа исходной ресурсной сети, порождённого множеством управляемых вершин S), всегда можно выбрать неотрицательные значения свободных членов из диапазона, указанного в условии (1°), при которых главные члены будут также неотрицательными.

Вместе с тем, для потоков по дугам множества N^- выполняется условие (2°), следовательно, они могут быть определены с помощью соотношений (21) с известными величинами F_a^{N-}.

Таким образом, по известным потокам пропускные способности всех дуг множества S^- могут быть найдены так, как описано в доказательстве леммы 1 с учётом неравенства

$$r_{ax} \geqslant F_{ax}.$$

Отметим, что для найденных пропускных способностей состояние Q' будет устойчивым, а значит, и предельным в ресурсной сети $G(X, U)$, а поскольку сеть регулярна, согласно теореме 1 предельное состояние Q^* в ней единственно. Следовательно, $Q' = Q^*$. Теорема 7 доказана.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт бюджета Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ. Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Литература

1. **Ford L. R., Fulkerson D. R.** Constructing maximal dynamic flows from static flows // Oper. Res. 1958. V. 6, No. 3. P. 419–433. DOI: 10.1287/opre.6.3.419.
2. **Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р.** Потоки в сетях. М.: Мир, 1966. 276 с.
3. **Кристофидес Н.** Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. 432 с.
4. **Aronson J. E.** A survey of dynamic network flows // Ann. Oper. Res. 1989. V. 20. P. 1–66. DOI: 10.1007/BF02216922.
5. **Fonoberova M. A., Lozovanu D. D.** The maximum flow in dynamic networks // Comput. Sci. J. Moldova. 2004. No. 12. P. 387–396.
6. **Кузьминова М. В.** Периодические динамические графы. Задача о максимальном потоке // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2008. № 5. С. 16–20.
7. **Жилякова Л. Ю.** Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах // Автоматика и телемеханика. 2011. № 4. Р. 133–143.
8. **Жилякова Л. Ю.** Управление предельными состояниями в поглощающих ресурсных сетях // Пробл. упр. 2013. № 3. Р. 51–59.
9. **Кузнецов О. П., Жилякова Л. Ю.** Двусторонние ресурсные сети — новая потоковая модель // Докл. Акад. наук. 2010. Т. 433, № 5. С. 609–612.
10. **Kuznetsov O. P.** Nonsymmetric resource networks. The study of limit states // Manage. Prod. Eng. Rev. 2011. V. 2, No. 3. P. 33–39.
11. **Скороходов В. А., Ерусалимский Я. М., Муртузалиева С. Ч.** Задача нахождения начального состояния ресурсной сети // Итоги науки и техники. Соврем. математика и её прил. Тем. обзоры. Т. 209. М.: ВИНИТИ РАН, 2022. С. 42–52. DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-42-52.
12. **Жилякова Л. Ю., Чаплинская Н. В.** Исследование полных однородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами // Упр. большими системами. Вып. 89. М.: ИПУ РАН, 2021. С. 5–44. DOI: 10.25728/ubs.2021.89.1.
13. **Чаплинская Н. В.** Исследование эргодических неоднородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами // Упр. большими системами. Вып. 93. М.: ИПУ РАН, 2021. С. 5–50. DOI: 10.25728/ubs.2021.93.1.
14. **Kuznetsov O. P., Zhilyakova L. Yu.** Flows and limit states in bidirectional resource networks // IFAC Proc. Vol. 2011. V. 44, No. 1. P. 14031–14035. DOI: 10.3182/20110828-6-IT-1002.00766.

15. **Zhilyakova L. Yu., Koreshkov V. R., Chaplinskaya N. V.** Some properties of stochastic matrices and non-homogeneous Markov chains generated by nonlinearities in the resource network model // Mathematics. 2022. V. 10. Article ID 4095. 18 p. DOI: 10.3390/math10214095.
16. **Abdulrahman H. N., Erusalimskiy Ya. M.** On the realizability of stationary flows in resource networks by flows in classical networks // J. Math. Sci. 2024. V. 280. P. 733–740. DOI: 10.1007/s10958-024-07093-1.
17. **Skorokhodov V. A., Erusalimskiy Ya. M.** Flows local control in resource networks with a low resource // Math. Stat. 2023. V. 11, No. 2. P. 300–307. DOI: 10.13189/ms.2023.110208.
18. **Берж К.** Теория графов и её применения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 320 с.
19. **Скороходов В. А., Свиридкин Д. О.** Потоки в сильно регулярных периодических динамических ресурсных сетях // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. Математика. Механика. Компьют. науки. 2021. Т. 31, вып. 3. С. 458–470. DOI: 10.35634/vm210308.
20. **Жилякова Л. Ю., Кузнецов О. П.** Теория ресурсных сетей. М.: ИЦ РИОР, 2023. 283 с.
21. **Скороходов В. А.** Задача нахождения порогового значения в эргодической ресурсной сети // Упр. большими системами. Вып. 63. М.: ИПУ РАН, 2016. С. 6–23.

Евсеенко Александр Викторович
Скороходов Владимир Александрович

Статья поступила
11 декабря 2024 г.
После доработки —
15 января 2025 г.
Принята к публикации
22 марта 2025 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
April–June 2025. Vol. 32, No. 2. P. 30–53

UDC 519.1 DOI: 10.33048/daio.2025.32.823

LOCAL IN-FLOWS CONTROL IN REGULAR RESOURCE NETWORKS WITH A LOW RESOURCE

A. V. Evseenko[a] and *V. A. Skorokhodov*[b]

Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science
of the Southern Federal University,
8a Milchakov Street, 344090 Rostov-on-Don, Russia
E-mail: [a] `aevseenko@sfedu.ru`, [b] `vaskorohodov@sfedu.ru`

Abstract. The paper is devoted to solving the problem of local in-flows control in regular resource networks with a low resource. For such networks, a set of controlled vertices is specified. The local control problem is to determine such capacities of arcs entering the controlled vertices that the unique limit state of regular resource network Q^* is the closest to the given state Q'. Conditions for the unreachability of the limit state that coincides with the state Q' are obtained. Various configurations of resource networks with respect to the distribution of controlled vertices in them are considered. It is shown that if the conditions for the unreachability of the limit state are not satisfied, then there is such a set of capacities of arcs entering the controlled vertices for which the limit state Q^* is equal to the given state Q'. Illustr. 2, bibliogr. 21.

Keywords: flows in networks, resource network, limit state, limit flow, flow control.

References

1. **L. R. Ford** and **D. R. Fulkerson,** Constructing maximal dynamic flows from static flows, *Oper. Res.* **6** (3), 419–433 (1958), DOI: `10.1287/opre.6.3.419`.
2. **L. R. Ford** and **D. R. Fulkerson,** *Flows in Networks* (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1962; Mir, Moscow, 1966 [Russian]).
3. **N. Christofides,** *Graph Theory: An Algorithmic Approach* (Acad. Press, London, 1975; Mir, Moscow, 1978 [Russian]).
4. **J. E. Aronson,** A survey of dynamic network flows, *Ann. Oper. Res.* **20**, 1–66 (1989), DOI: `10.1007/BF02216922`.
5. **M. A. Fonoberova** and **D. D. Lozovanu,** The maximum flow in dynamic networks, *Comput. Sci. J. Moldova.,* No. 12, 387–396 (2004).

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **19** (2) (2025).

6. **M. V. Kuzminova,** Periodic dynamic graphs. Maximum flow problem, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Sev.-Kavk. Reg., Estestv. Nauki,* No. 1, 14–19 (2008) [Russian].

7. **L. Yu. Zhilyakova,** Asymmetrical resource networks. I. Stabilization processes for low resources, *Avtom. Telemekh.,* No. 4, 133–143 (2011) [Russian] [*Autom. Remote Control* **72** (4), 798–807 (2011), DOI: 10.1134/S0005117911040102].

8. **L. Yu. Zhilyakova,** The limit states control in absorbing resource networks, *Probl. Upr.,* No. 3, 51–59 (2013) [Russian] [*Autom. Remote Control.* **75** (2), 360–372 (2014), DOI: 10.1134/S0005117914020143].

9. **O. P. Kuznetsov** and **L. Yu. Zhilyakova,** Bidirectional resource networks: A new flow model, *Dokl. Akad. Nauk* **433** (5), 609–612 (2010) [Russian] [*Dokl. Math.* **82**, 643–646 (2010), DOI: 10.1134/S1064562410040368].

10. **O. P. Kuznetsov,** Nonsymmetric resource networks. The study of limit states, *Manage. Prod. Eng. Rev.* **2** (3), 33–39 (2011).

11. **V. A. Skorokhodov, Ya. M. Erusalimskiy,** and **S. Ch. Murtuzalieva,** The problem of finding the initial state of a resource network, in *Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Mat. Prilozh., Temat. Obz.,* Vol. 209 (VINITI RAN, Moscow, 2022), pp. 42–52, DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-42-52 [Russian].

12. **L. Yu. Zhilyakova** and **N. V. Chaplinskaya,** Research of complete homogeneous "greedy-vertices" resource networks, in *Upr. Bolsh. Sist.,* Vol. 89 (IPU RAN, Moscow, 2021), pp. 5–44, DOI: 10.25728/ubs.2021.89.1 [Russian].

13. **N. V. Chaplinskaya,** Research of ergodic heterogeneous "greedy-vertices" resource networks, in *Upr. Bolsh. Sist.,* Vol. 93 (IPU RAN, Moscow, 2021), pp. 5–50, DOI: 10.25728/ubs.2021.93.1 [Russian].

14. **O. P. Kuznetsov** and **L. Yu. Zhilyakova,** Flows and limit states in bidirectional resource networks, *IFAC Proc. Vol.* **44** (1), 14031–14035 (2011), DOI: 10.3182/20110828-6-IT-1002.00766.

15. **L. Yu. Zhilyakova, V. R. Koreshkov,** and **N. V. Chaplinskaya,** Some properties of stochastic matrices and non-homogeneous Markov chains generated by nonlinearities in the resource network model, *Mathematics* **10**, ID 4095 (2022), DOI: 10.3390/math10214095.

16. **H. N. Abdulrahman** and **Ya. M. Erusalimskiy,** On the realizability of stationary flows in resource networks by flows in classical networks, *J. Math. Sci.* **280**, 733–740 (2024), DOI: 10.1007/s10958-024-07093-1.

17. **V. A. Skorokhodov** and **Ya. M. Erusalimskiy,** Flows local control in resource networks with a low resource, *Math. Stat.* **11** (2), 300–307 (2023), DOI: 10.13189/ms.2023.110208.

18. **C. Berge,** *Théorie des graphes et ses applications,* (Dunod, Paris, 1958 [French]; Izd. Inostr. Lit., Moscow, 1962 [Russian]).

19. **V. A. Skorokhodov** and **D. O. Sviridkin,** Flows in strongly regular periodic dynamic resource networks, *Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Kompyut. Nauki* **31** (3), 458–470 (2021), DOI: 10.35634/vm210308 [Russian].

20. **L. Yu. Zhilyakova** and **O. P. Kuznetsov,** *Theory of Resource Networks* (ITs RIOR, Moscow, 2023) [Russian].

21. **V. A. Skorokhodov,** The problem of finding the threshold value in ergodic resource network, in *Upr. Bolsh. Sist.,* Vol. 63 (IPU RAN, Moscow, 2016), pp. 6–23 (2016) [Russian].

Aleksandr V. Evseenko
Vladimir A. Skorokhodov

Received December 11, 2024
Revised January 15, 2025
Accepted March 22, 2025