ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 32 № 2 2025

Новосибирск
Издательство Института математики

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Апрель–июнь 2025. Т. 32, № 2. С. 72–87

УДК 519.172.1 DOI: 10.33048/daio.2025.32.826

О СООТНОШЕНИИ ДВУХ КЛАССОВ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ДЕРЕВЬЕВ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ

С. А. Круподерова[a], *А. Д. Курносов*[b]

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Институтский пер., 9, 141700 Долгопрудный, Россия
E-mail: [a]`krupoderova.sa@phystech.edu`, [b]`kurnosov@phystech.edu`

Аннотация. Вершины графа, смежные с листьями, назовём *опорными*. В работе исследуется, как могут соотноситься между собой два класса экстремальных деревьев, имеющих одну и ту же последовательность степеней вершин: класс деревьев, реализующих минимум числа опорных вершин и класс деревьев, реализующих минимум числа доминирования. Заметную роль здесь играют две величины, определяемые через степенную последовательность: число Слэйтера, предложенное Слэйтером в качестве нижней оценки числа доминирования, и предложенная Курносовым нижняя оценка числа опорных вершин дерева. В работе полностью решена задача сравнения классов в случае, когда максимумом из двух величин является вторая. Ил. 2, библиогр. 14.

Ключевые слова: степенная последовательность, дерево, доминирующее множество, число доминирования, лист, висячая вершина, опорная вершина.

Введение

В работе рассматриваются простые неориентированные графы. Для произвольной пары смежных или совпадающих вершин v и w будем говорить, что вершина v *покрывается* вершиной w (или w *покрывает* v). Подмножество D вершин графа G называется *доминирующим*, если каждая вершина графа покрывается некоторой вершиной D. Таким образом, любая вершина графа либо принадлежит доминирующему множеству, либо у неё есть сосед из доминирующего множества. *Число доминирования* $\gamma(G)$ — это размер наименьшего доминирующего множества графа G.

При оценке различных инвариантов графа часто используется его степенная последовательность: Андриантиана [1] рассмотрел деревья с заданной степенной последовательностью, на которых достигаются экстремальные значения некоторых перечислительных инвариантов графа, таких как индекс Хосойи; Бесси и Ротенбах [2] оценивали экстремальные значения хроматического числа в графах с фиксированной степенной последовательностью; Рао [3] оценил кликовое число через степенную последовательность; а число независимости оценивали, например, Фаварон, Махео, Сакле [4], Григгс и Клейтман [5], Пеппер [6].

В 1992 г. Слэйтер [7] представил следующую нижнюю оценку числа доминирования, выраженную через специальную величину sl, в настоящее время именуемую *числом Слэйтера.*

Теорема 1 [7]. *Пусть граф G имеет невозрастающую степенную последовательность $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$. Тогда $\gamma(G) \geqslant \mathrm{sl}(G)$, где*

$$\mathrm{sl}(G) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{k}(d_i + 1) \geqslant n\right\}.$$

Оценки числа доминирования для заданной степенной последовательности приводились и при дополнительных ограничениях на структуру графов: Гентнер, Хеннинг и Ротенбах [8, 9] ограничились рассмотрением лесов с предписанными степенными последовательностями (в тех же работах приведены оценки числа независимости); Курносов и вовсе сузил круг рассматриваемых графов до деревьев [10], также им была исследована нижняя оценка числа связного доминирования на классе связных графов с заданной степенной последовательностью [11].

В данной работе рассматриваемыми классами графов являются множества деревьев с фиксированными степенными последовательностями.

Вершины графа, смежные с листьями назовём *опорными.* Множество опорных вершин графа G обозначим через $\mathrm{H}(G)$. Также $\mathrm{L}(G)$ — множество листьев в G, а $\mathrm{S}(G)$ — подграф G, порождённый вершинами $V(G) \setminus (\mathrm{H}(G) \cup \mathrm{L}(G))$.

Ясно, что висячую вершину в доминирующем множестве графа можно заменить смежной ей опорной вершиной (в случае отсутствия в графе изолированных рёбер), не потеряв свойства доминирования. Неудивительно поэтому, что при исследовании наименьших доминирующих множеств часто в том или ином виде рассматривается связь таких множеств с множеством опорных вершин [8, 10–13], как, например, в следующем утверждении.

Лемма 1 [10]. *В любом связном графе G, имеющем не менее трёх вершин, существует такое доминирующее множество D размера $\gamma(G)$, для которого $D \cap \mathrm{L}(G) = \varnothing$. Для такого D выполнено $D \supseteq \mathrm{H}(G)$.*

В дальнейшем доминирующее множество графа G, не содержащее ни одного листа, будем называть *безлистным* доминирующим множеством. Как видно из леммы 1, в любом дереве T хотя бы с тремя вершинами выполнено $\gamma(T) \geqslant |\mathrm{H}(T)|$ и, кроме того, для вычисления $\gamma(T)$ достаточно выяснить, сколько минимум вершин из $\mathrm{S}(T)$ надо добавить к $\mathrm{H}(T)$, чтобы полученное множество покрывало все вершины $\mathrm{S}(T)$.

Следовательно, довольно естественным представляется рассмотрение связи между классом деревьев с заданной степенной последовательностью $\mathbf{d}$, имеющих экстремальное значение числа доминирования среди всех деревьев со степенной последовательностью $\mathbf{d}$, и классом деревьев с той же степенной последовательностью, имеющих аналогичное экстремальное значение величины $|\mathrm{H}(T)|$.

В настоящей работе частично решена задача для минимальных значений γ и $|\mathrm{H}|$.

1. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

Приведём обозначения и необходимые утверждения из более ранних работ, которыми далее воспользуемся для формулирования и доказательства основных результатов.

Через $\mathcal{N}_G(v)$ будем обозначать множество соседей, а через $\deg_G(v)$ — степень вершины v в графе G. *Проходными* будем называть вершины степени два. Если $(d_1, \ldots, d_n)$ — степенная последовательность некоторого графа G, то будем говорить, что G *реализует* эту последовательность.

Неубывающую последовательность натуральных чисел длины n будем называть *n-последовательностью.* Введём следующие обозначения для n-последовательности $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$:

- $n_k(\mathbf{d})$ — число членов последовательности $\mathbf{d}$, равных k;
- $n_{\geqslant k}(\mathbf{d})$ — число членов последовательности $\mathbf{d}$, не меньших чем k;
- $n_{\leqslant k}(\mathbf{d})$ — число членов последовательности $\mathbf{d}$, не превосходящих k.

В этих обозначениях будем иногда опускать аргумент $\mathbf{d}$, если его вид очевиден из контекста.

Сокращённой будем называть непустую n-последовательность, состоящую из чисел d_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, вида $2 \leqslant d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$. Сокращённую n-последовательность обычно будем обозначать через $\widetilde{\mathbf{d}}$. Для сокращённой n-последовательности $\widetilde{\mathbf{d}}$ положим

$$l(\widetilde{\mathbf{d}}) = \sum_{i=1}^{n} d_i - 2(n-1).$$

Обозначим через $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$ множество всех деревьев, реализующих последовательность $1, 1, \ldots, 1, d_1, d_2, \ldots, d_n$, в которой ровно $l(\widetilde{\mathbf{d}})$ единиц.

Если существует реализация последовательности, являющаяся деревом, то соответствующая последовательность называется *древесной*. Широко известен следующий критерий древесности n-последовательностей, легко доказываемый по индукции.

Теорема 2 (см., например, [14, теорема 47.2])**.** *Последовательность положительных целых чисел $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ может быть реализована деревом тогда и только тогда, когда выполнено равенство $\sum\limits_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$.*

Для произвольного дерева T определим *усечение* T как дерево T', получающееся из T удалением всех листьев. Само дерево T будем при этом называть *расширением* дерева T'. В дальнейшем будем придерживаться именно такого обозначения для усечения T.

Лемма 2 [10]. *Пусть $\widetilde{\mathbf{d}}$ — произвольная сокращённая n-последовательность $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \ldots \leqslant d_n$. Тогда множество деревьев $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$ непусто.*

Ясно, что каждому дереву хотя бы с тремя вершинами соответствует сокращённая n-последовательность $\widetilde{\mathbf{d}} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ степеней нелистовых вершин, а число листьев дерева равно $l(\widetilde{\mathbf{d}})$, что следует из теоремы 2. Лемма 2 и теорема 2 говорят также об обратном: каждой сокращённой n-последовательности $\widetilde{\mathbf{d}} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ соответствует непустое множество деревьев $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$ хотя бы с тремя вершинами, у которых степени нелистовых вершин образуют в точности последовательность $\widetilde{\mathbf{d}}$; число листьев во всех таких деревьях равно $l(\widetilde{\mathbf{d}})$. Тем самым изучение классов $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$ равносильно изучению всех возможных деревьев хотя бы с тремя вершинами и заданными степенными последовательностями.

Введём обозначения

$$\gamma_{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \min\{\gamma(T) \mid T \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}\},$$
$$|\,\mathrm{H}\,|_{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \min\{|\,\mathrm{H}(T)| \mid T \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}\},$$

в которых будем иногда опускать аргумент $\widetilde{\mathbf{d}}$, когда его вид ясен из контекста. Также введём в рассмотрение два класса экстремальных деревьев

$$\mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \{T \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}} \mid \gamma(T) = \gamma_{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})\},$$
$$\mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \{T \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}} \mid |\,\mathrm{H}(T)| = |\,\mathrm{H}\,|_{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})\},$$

которые сравниваются в настоящей работе.

Величину $\mathrm{sl}(G)$ естественным образом распространим на неубывающую *сокращённую* n-последовательность $\widetilde{\mathbf{d}} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, воспользовавшись тем, что $n + l(\widetilde{\mathbf{d}})$ есть число вершин в деревьях из класса $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$:

$$\mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=n-k+1}^{n} (d_i + 1) \geqslant n + l(\widetilde{\mathbf{d}})\right\}.$$

Важной нижней оценкой обоих параметров $|\,\mathrm{H}\,|$ и γ является следующая величина, введённая Курносовым в [10] и определяемая через число листьев в деревьях класса $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$ (отметим, что при $n = 1$ данная величина не определена):

$$\mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=n-k+1}^{n} (d_i - 1) \geqslant l(\widetilde{\mathbf{d}})\right\}.$$

Величины $\mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}})$ и $\mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}})$ можно эквивалентно переопределить следующим образом:

$$\mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{n-k} (d_i + 1) \leqslant 2n - 2\right\}, \tag{1}$$

$$\mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{n-k} (d_i - 1) \leqslant n - 2\right\}. \tag{2}$$

Именно этими величинами определяется минимальное значение числа доминирования в классе деревьев с заданной степенной последовательностью:

Теорема 3 [10]. *Пусть* $\widetilde{\mathbf{d}} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ *— сокращённая n-последовательность. Тогда*

$$\gamma_{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \max\{\mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}}), \mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}})\}.$$

При доказательстве теоремы 3 в [10] получен следующий результат, важный для сравнения классов $\mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$ и $\mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$.

Лемма 3 [10]. *Для любого дерева $T \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$ с сокращённой степенной n-последовательностью $\widetilde{\mathbf{d}}$ при $n > 1$ выполнено неравенство*

$$|\,\mathrm{H}(T)| \geqslant \mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}}).$$

Также приведём подробное описание конструкции экстремального дерева из доказательства теоремы 3 (справедливость всех соотношений, на которых основана данная конструкция, обоснована в [10]). Она используется для получения основных результатов настоящей работы.

Конструкция [10]. Пусть дана сокращённая n-последовательность $\widetilde{\mathbf{d}} = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$, $2 \leqslant d_1 < n$. Тогда дерево $\widetilde{T}_{\min} \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$, для которого

$$\gamma(\widetilde{T}_{\min}) = \gamma_{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) = r = \max\{\mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}}), \mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}})\},$$

может быть построено, например, следующим образом. Рассмотрим множество вершин $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Пусть

$$V_2 = \{v_i \in V \mid i \leqslant n_2\}, \quad V_3 = \{v_i \in V \mid i > n - r\}.$$

Построим такое дерево из класса $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$ с множеством нелистовых вершин V, в котором множество V_3 будет наименьшим доминирующим.

1. Пусть $n_2 \geqslant n - r$. Заметим, что тогда все $n - r$ первых членов n-последовательности являются двойками и $n - r \leqslant 2(r - 1)$ (см. [10, с. 71]). Соединим все n вершин в цепь в следующем порядке:

$$v_{n-r+1}, v_1, v_2, v_{n-r+2}, v_3, v_4, v_{n-r+3}, \ldots, v_{n-r}, v_{n-r+\lceil\frac{n-r}{2}\rceil+1}, \ldots, v_n.$$

Тем самым в этой цепи между вершинами v_{n-r+i} и $v_{n-r+i+1}$ лежат ровно две вершины v_{2i-1} и v_{2i} для каждого $1 \leqslant i \leqslant \lceil\frac{n-r}{2}\rceil - 1$. При $i = \lceil\frac{n-r}{2}\rceil$ между v_{n-r+i} и $v_{n-r+i+1}$ лежат вершины v_{n-r-1} и v_{n-r}, когда $n-r$ чётно, и только одна вершина v_{n-r}, когда $n - r$ нечётно. Далее после вершины $v_{n-r+\lceil\frac{n-r}{2}\rceil+1}$ идут все оставшиеся вершины в порядке возрастания номеров вплоть до вершины v_n.

Искомое дерево $\widetilde{T}_{\min}$ получим как расширение построенной цепи: присоединим к каждой вершине v_i столько листьев, чтобы выполнялось $\deg_{\widetilde{T}_{\min}}(v_i) = d_i$. Тогда все вершины v_i $(1 \leqslant i \leqslant n - r)$ имеют степень 2 и по построению не соединены с листьями. С другой стороны, каждая из этих вершин соединена с некоторой вершиной $v_j \in V_3$. В таком случае множество V_3 действительно доминирующее.

2. Пусть $n_2 < n-r$, т. е. множество вершин с номерами n_2+1, n_2+2, $\ldots$, $n - r$ непусто.

Соединим последовательно вершины $v_{n_2+1}, v_{n_2+2}, \ldots, v_{n-r}$ так, чтобы они образовывали простую цепь, и обозначим её через P. Далее будем поочерёдно, начиная с v_{n_2+1}, соединять вершины из P с вершинами из V_2 так, чтобы каждая вершина из V_2 соединялась не более чем с одной вершиной в P и чтобы степень каждой вершины v_i $(n_2 + 1 \leqslant i \leqslant n - r)$ в итоге не превзошла $d_i - 1$. Всего к вершинам из P мы присоединим $\min\left\{\sum\limits_{i=n_2+1}^{n-r}(d_i - 3) + 2, n_2\right\}$ вершин из V_2. Дополним степень каждой вершины v_i текущего дерева до d_i, присоединив к ним вершины из множества V_3 так, что вершины V_3 будут висячими в получившемся дереве $\widetilde{T}$. Заметим, что в $\widetilde{T}$ у каждой вершины v_i при $i \leqslant n - r$ будет сосед из V_3, при этом незадействованных вершин из V_3 будет ровно

$$n-2-\sum_{i=1}^{n-r}(d_i-1)\geqslant 0.$$

Как видно, вершин из V_3 действительно хватает для построения $\widetilde{T}$. Также из описания конструкции в [10] следует, что число оставшихся вершин из V_3 есть по крайней мере половина от оставшихся вершин из V_2. Это значит, что можно соединить все оставшиеся вершины в цепь так, что один конец u этой цепи будет из V_3, другой конец — из V_2 (если оно непусто), и в этой цепи не найдётся трёх подряд идущих вершин из V_2. Соединим конец цепи, отличный от u, с некоторым листом $\widetilde{T}$ (в котором все листья лежат в множестве V_3) так, чтобы он был смежен с концом цепи P.

В итоге в полученном дереве T' каждая вершина v_i $(1\leqslant i\leqslant n-r)$ имеет степень d_i и при этом имеет хотя бы одного соседа из V_3. Вершины из V_3 имеют степень не выше 2. Восстановим по усечённому дереву T' дерево $\widetilde{T}_{\min}\in\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$, добавив к вершинам из V_3 необходимое число листьев (добиваемся равенства $\deg_{\widetilde{T}_{\min}}(v_i)=d_i$), очевидно, отличное от нуля. Тогда V_3 является доминирующим множеством размера r и, кроме того, совпадает с $\mathrm{H}(\widetilde{T}_{\min})$. Тем самым искомое дерево $\widetilde{T}_{\min}$ построено.

Теперь рассмотрим операции по перестроению графа, применявшиеся в [10] и используемые в настоящей работе.

Для произвольного графа G, в котором выбраны два непересекающихся по концам рёбра tu и vw, назовём X_{vw}^{tu}*-операцией* действие, заключающееся в удалении рёбер tu и vw и проведении рёбер uv и tw.

Пусть в графе G выбраны вершины u,v,w,s,t (допустимо совпадение t и u, но не остальных) такие, что $uv,vw,st\in E(G)$. Назовём Y_{uvw}^{st}-*операцией* действие, заключающееся в удалении из графа рёбер uv,vw,st и добавлении рёбер uw,sv,vt.

В произвольном дереве T между любыми двумя вершинами существует единственный путь. Последовательность вершин $v_1,v_2,\ldots,v_k$ будем называть T*-упорядоченной*, если путь в T от вершины v_1 к вершине v_k проходит через каждую из вершин v_i $(1\leqslant i\leqslant k)$, причём порядок их следования такой же, как в последовательности (т. е. при $1\leqslant i<j\leqslant k$ вершина v_i встречается на пути раньше, чем v_j).

Указанные X- и Y-операции позволяют преобразовать одно дерево в другое с той же степенной последовательностью, если применять их к определённым образом упорядоченным последовательностям вершин.

Лемма 4 [10]. *Пусть $T\in\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$, а T^X и T^Y — графы, получающиеся из T с помощью X_{vw}^{tu}- и Y_{xyz}^{pq}-операций соответственно для T-упорядоченных* *последовательностей вершин* (t, u, w, v) *и* (p, q, x, y, z). *Тогда* $T^X, T^Y \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$ *и при этом*

$$\left|\gamma(T^X) - \gamma(T)\right| \leqslant 1, \quad \left|\gamma(T^Y) - \gamma(T)\right| \leqslant 1.$$

2. Основные результаты

2.1. Сравнение величин sl **и** lv**.** Поскольку именно наибольшей из величин sl и lv определяется значение $\gamma_{\min}$, рассмотрим, как они соотносятся между собой в зависимости от степенной последовательности.

Утверждение 1. *Если* $\widetilde{\mathbf{d}}$ — *сокращённая* n*-последовательность, причём* $n > 1$ *и*

$$\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor} d_i < \left\lfloor\frac{3n-3}{2}\right\rfloor,$$

то $\mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}}) \geqslant \mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}})$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{lv} > \mathrm{sl}$. По определению (1) величины sl имеем

$$\sum_{i=1}^{n-\mathrm{sl}} (d_i + 1) \leqslant 2n - 2.$$

Из определения (2) величины lv следует, что для $\mathrm{sl} < \mathrm{lv}$ выполняется

$$\sum_{i=1}^{n-\mathrm{sl}} (d_i - 1) \geqslant n - 1.$$

Тогда

$$n - 1 + n - \mathrm{sl} \leqslant \sum_{i=1}^{n-\mathrm{sl}} d_i \leqslant 2n - 2 - n + \mathrm{sl},$$

откуда видно, что $n + 1 \leqslant 2\,\mathrm{sl}$. Возьмём ровно $n - k$ слагаемых, где $k = \left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil$. Для такого числа слагаемых нарушается неравенство из определения lv. Получаем

$$\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor} d_i \geqslant n + \left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor - 1.$$

В итоге из того, что $\mathrm{lv} > \mathrm{sl}$, следует, что

$$\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor} d_i \geqslant \left\lfloor\frac{3n-3}{2}\right\rfloor.$$

Таким образом, если
$$\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} d_i < \left\lfloor\frac{3n-3}{2}\right\rfloor,$$
то $\mathrm{sl} \geqslant \mathrm{lv}$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. *Если* $\widetilde{\mathbf{d}}$ — *сокращённая* n*-последовательность, причём* $n > 1$ *и*
$$\sum_{i=1}^{\lceil\frac{n+1}{2}\rceil} d_i > \left\lceil\frac{3n-3}{2}\right\rceil,$$
то $\mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}}) \geqslant \mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}})$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{sl} > \mathrm{lv}$. По определению lv имеем
$$\sum_{i=1}^{n-\mathrm{lv}} (d_i - 1) \leqslant n - 2.$$
Из определения sl следует, что для $\mathrm{lv} < \mathrm{sl}$ выполняется
$$\sum_{i=1}^{n-\mathrm{lv}} (d_i + 1) \geqslant 2n - 1.$$
Тогда
$$n + \mathrm{lv} - 1 \leqslant \sum_{i=1}^{n-\mathrm{lv}} d_i \leqslant 2n - 2 - \mathrm{lv},$$
откуда видно, что $2\,\mathrm{lv} \leqslant n - 1$. Возьмём $n - k$ слагаемых, где $k = \left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$. Тогда для $n-k = \left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil$ первых степеней выполнено неравенство из определения lv:
$$\sum_{i=1}^{\lceil\frac{n+1}{2}\rceil} d_i \leqslant n + \left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil - 2.$$
В итоге из того, что $\mathrm{sl} > \mathrm{lv}$, следует, что
$$\sum_{i=1}^{\lceil\frac{n+1}{2}\rceil} d_i \leqslant \left\lceil\frac{3n-3}{2}\right\rceil.$$
Таким образом, если
$$\sum_{i=1}^{\lceil\frac{n+1}{2}\rceil} d_i > \left\lceil\frac{3n-3}{2}\right\rceil,$$
то $\mathrm{lv} \geqslant \mathrm{sl}$. Утверждение 2 доказано.

Стоит отметить, что к любой сокращённой n-последовательности $\widetilde{\mathbf{d}}$ при $n > 1$ всегда применимо по крайней мере одно из утверждений 1 и 2. Действительно, пусть к $\widetilde{\mathbf{d}}$ не применимо утверждение 1. Тогда выполняется цепочка неравенств

$$\left\lfloor \frac{3n-3}{2} \right\rfloor \leqslant \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} d_i \leqslant \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} d_i - d_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} \leqslant \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} d_i - 2,$$

$$\sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} d_i \geqslant \left\lfloor \frac{3n-3}{2} \right\rfloor + 2 > \left\lceil \frac{3n-3}{2} \right\rceil,$$

а значит, к $\widetilde{\mathbf{d}}$ применимо утверждение 2.

Таким образом, с учётом теоремы 3 может быть сформулирована

Теорема 4. *Если для сокращённой n-последовательности $\widetilde{\mathbf{d}}$, $n > 1$, выполнено неравенство*

$$\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} d_i < \left\lfloor \frac{3n-3}{2} \right\rfloor,$$

то $\gamma_{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}})$, *иначе* $\gamma_{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}})$.

Неформально утверждения 1 и 2 и теорема 4 говорят о том, что если в «первой половине» сокращённой n-последовательности $\widetilde{\mathbf{d}}$ значения её членов «в среднем меньше 3» (т. е. в первой половине последовательности относительно большое число «двоек» и не слишком много вершин «большой» степени), то $\gamma_{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}})$, иначе $\gamma_{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}})$. В частности, из утверждения 2 следует, что если $n > 1$ и $d_1 \geqslant 3$, то $\gamma_{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}})$.

Отметим также то, что к сокращённой n-последовательности $\widetilde{\mathbf{d}}$ иногда могут быть применимы оба утверждения. Например, при $n = 2$ выполняются сразу и неравенство $\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} d_i = 0 < 1 = \left\lfloor \frac{3n-3}{2} \right\rfloor$, и неравенство $\sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} d_i = d_1 + d_2 \geqslant 4 > 2 = \left\lceil \frac{3n-3}{2} \right\rceil$. В таких случаях получаем $\gamma_{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}})$.

2.2. Соотношение классов $\mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$ и $\mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$ при $\mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}}) \geqslant \mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}})$. В данном случае оказывается, что неравенство $\mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}}) \geqslant \mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}})$ влечёт включение как минимум одного класса в другой, что показывает

Лемма 5. *Если для сокращённой n-последовательности $\widetilde{\mathbf{d}}$ выполнено $\mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}}) \geqslant \mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}})$, то*

$$\mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) \subseteq \mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}).$$

Доказательство. В этом случае из теоремы 3 следует равенство $\gamma_{\min} = \mathrm{lv}$, а из леммы 3 получаем оценку $|\,\mathrm{H}\,|_{\min} \geqslant \mathrm{lv}$. С другой стороны, согласно лемме 1 выполнено неравенство $\gamma_{\min} \geqslant |\,\mathrm{H}\,|_{\min}$, а значит,

$$\gamma_{\min} = \mathrm{lv} = |\,\mathrm{H}\,|_{\min}.$$

Таким образом, для любого дерева $T \in \mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$ в силу всё той же леммы 1 выполнено

$$\mathrm{lv} = \gamma(T) \geqslant |\,\mathrm{H}(T)| \geqslant \mathrm{lv} \implies |\,\mathrm{H}(T)| = \mathrm{lv} = |\,\mathrm{H}\,|_{\min},$$

откуда и получаем требуемое. Лемма 5 доказана.

Следующая теорема полностью отвечает на вопрос, в каких случаях есть совпадение указанных классов, а в каких — строгое включение, при условии, что $\mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}}) \geqslant \mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}})$.

Теорема 5. *Пусть сокращённая n-последовательность $\widetilde{\mathbf{d}}$ такова, что $\mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}}) \geqslant \mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}})$. Тогда*

$$\mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) \begin{cases} = \mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}), & \text{если } d_1 \geqslant n - \mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}}), \\ \subset \mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}), & \text{если } d_1 < n - \mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}}). \end{cases}$$

Доказательство. В силу леммы 5 имеем $\mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) \subseteq \mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$. Значит, остаётся проверить существование дерева $T \in \mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) \setminus \mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$. При этом, как было показано при доказательстве леммы 5, для класса $\mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$ выполняется равенство $\gamma_{\min} = \mathrm{lv} = |\,\mathrm{H}\,|_{\min}$.

Случай 1: $d_1 \geqslant n - \mathrm{lv}$. Рассмотрим дерево $T \in \mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$. Для него $|\,\mathrm{H}(T)| = \mathrm{lv}$. Поскольку в $\mathrm{S}(T)$ ровно $n - \mathrm{lv}$ вершин и $\deg(v) \geqslant d_1 \geqslant n - \mathrm{lv}$ для любой $v \in \mathrm{S}(T)$, очевидно, что у вершины v есть хотя бы один сосед из $\mathrm{H}(T)$. Следовательно, $\mathrm{H}(T)$ является безлистным доминирующим множеством. Тогда $\gamma(T) = |\,\mathrm{H}(T)| = \mathrm{lv}$. Значит, $T \in \mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$. Таким образом, установили включение $\mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) \subseteq \mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$, а значит, и равенство $\mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) = \mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$.

Случай 2: $d_1 < n - \mathrm{lv}$. Покажем существование дерева $T \in \mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) \setminus \mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$. Рассмотрим несколько подслучаев.

Случай 2.1: $d_1 < n - \mathrm{lv}$, $n_2 < n - \mathrm{lv}$. Возьмём дерево $\widetilde{T}$ из конструкции (2.).

1. Пусть $d_1 \geqslant 3$, вершины $v_1, v_2, \ldots, v_{n-\mathrm{lv}}$ образуют простую цепь $P = \mathrm{S}(\widetilde{T})$, $\deg(v_1) = d_1$, а v_1 смежна с вершинами $t_1, t_2, \ldots, t_{d_1-1}$, опорными в $\widetilde{T}$. Поскольку любая последовательность $t_i, v_1, v_2, \ldots, v_{n-\mathrm{lv}}$ при $1 \leqslant i \leqslant d_1 - 1$ $\widetilde{T}$-упорядоченная, по лемме 4 каждая из $X_{v_1 t_i}^{v_{i+1} v_{i+2}}$-операций даёт дерево $T_i \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$ (эти операции проводим по порядку с очередным получившимся деревом). В итоговом дереве $T = T_{d_1-1}$ имеем $\mathcal{N}_T(v_1) = \{v_2, v_3, \ldots v_{d_1+1}\} \subseteq S(T)$. При этом $|\,\mathrm{H}(T)| = \mathrm{lv} = |\,\mathrm{H}\,|_{\min}$, но $\mathrm{H}(T)$ не доминирующе, поскольку $v_1 \in \mathrm{S}(T)$ и данная вершина не имеет ни одного соседа среди $\mathrm{H}(T)$. В итоге $\gamma(T) > |\,\mathrm{H}(T)| = \mathrm{lv} = \gamma_{\min}$, т. е. $T \notin \mathcal{T}_\gamma^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$; искомое дерево найдено. На рис. 1 и 2 представлено построение дерева из класса $\mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) \setminus \mathcal{T}_\gamma^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$ для частного случая (выделенными являются рёбра, участвующие в операциях по перестроению).

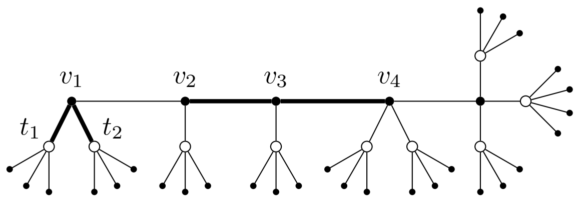

Рис. 1. Пример дерева $\widetilde{T}$ при $d_1 \geqslant 3$

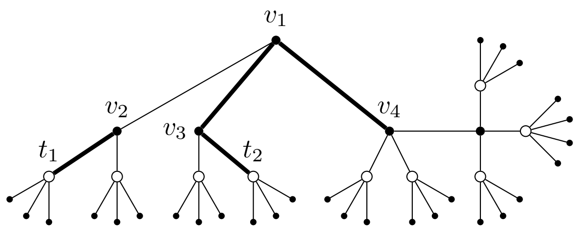

Рис. 2. Дерево $\widetilde{T}$ после перестроения

2. Пусть $d_1 = 2$. Всего в $\mathrm{S}(\widetilde{T})$ ровно $n - \mathrm{lv} \geqslant d_1 + 1 = 3$ вершин. Тогда по определению конструкции (2.) в $\widetilde{T}$ есть проходная вершина u степени $\deg_{\widetilde{T}}(u) = 2$, смежная с $t \in \mathrm{H}(\widetilde{T})$ и с $v \in P$, и есть две отличные от u смежные вершины v_1, v_2 (v_2 может совпадать с v) из $\mathrm{S}(\widetilde{T})$ (либо две из P, либо одна из P, а другая — некоторая проходная в $\widetilde{T}$ из $\mathrm{S}(\widetilde{T})$). Не умаляя общности, можно считать, что последовательность v_1, v_2, v, u, t $\widetilde{T}$-упорядоченная. Тогда по лемме 4 с помощью $Y_{vut}^{v_1 v_2}$-операции получим дерево $T \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$. В нём $|\,\mathrm{H}(T)| = \mathrm{lv} = |\,\mathrm{H}\,|_{\min}$, но $\mathrm{H}(T)$ не будет доминирующим, поскольку $u \in \mathrm{S}(T)$ и данная вершина не имеет ни одного соседа среди

$\mathrm{H}(T)$. В итоге $\gamma(T) > |\,\mathrm{H}(T)| = \mathrm{lv} = \gamma_{\min}$, т. е. $T \notin \mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$; искомое дерево найдено.

Случай 2.2: $d_1 < n - \mathrm{lv}$, $n_2 \geqslant n - \mathrm{lv}$. Из этих неравенств следует, что $n_2 > 0$, поэтому $d_1 = 2$. Тогда $n - \mathrm{lv} > d_1 = 2$, а значит, выполнена цепочка неравенств $n_2 \geqslant n - \mathrm{lv} \geqslant 3$. Рассмотрим дерево $\widetilde{T}$, построенное согласно конструкции 1. По построению поддерево $\mathrm{S}(\widetilde{T})$ содержит ровно $n - \mathrm{lv} \geqslant 3$ вершин, причём все они проходные в $\widetilde{T}$. При этом из леммы 5 и её доказательства знаем, что $|\,\mathrm{H}(\widetilde{T})| = |\,\mathrm{H}\,|_{\min} = \mathrm{lv} = \gamma_{\min} = \gamma(\widetilde{T})$, т. е. наименьшее безлистное доминирующее множество в дереве является в точности множеством опорных вершин.

Будем использовать обозначения, введённые при построении: проходные вершины v_1, v_2 смежны и лежат между $v_{n-\mathrm{lv}+1}$ и $v_{n-\mathrm{lv}+2} \in \mathrm{H}(\widetilde{T})$, а проходная вершина v_3 смежна с $v_{n_2+2} \in \mathrm{H}(\widetilde{T})$ и некоторой вершиной v. Понятно, что последовательность $v_1, v_2, v_{n_2+2}, v_3, v$ будет $\widetilde{T}$-упорядоченной. Тогда по лемме 4 с помощью $Y^{v_1 v_2}_{v_{n-\mathrm{lv}+2} v_3 v}$-операции получим дерево $T \in \mathcal{T}_{\widetilde{\mathbf{d}}}$. Для него $|\,\mathrm{H}(T)| = |\,\mathrm{H}(\widetilde{T})| = |\,\mathrm{H}\,|_{\min}$, но $\mathrm{H}(T)$ не доминирующее, поскольку $v_3 \in \mathrm{S}(T)$ и данная вершина не имеет ни одного соседа среди $\mathrm{H}(T)$. В итоге $\gamma(T) > |\,\mathrm{H}(T)| = \mathrm{lv} = \gamma_{\min}$, т. е. $T \in \mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}}) \setminus \mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$. Теорема 5 доказана.

Таким образом, вопрос о соотношении классов $\mathcal{T}_{\mathrm{H}}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$ и $\mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\widetilde{\mathbf{d}})$ решён полностью в случае $\mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}}) \geqslant \mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}})$. Дальнейший интерес представляет ситуация $\mathrm{lv}(\widetilde{\mathbf{d}}) < \mathrm{sl}(\widetilde{\mathbf{d}})$. Поскольку в указанном случае числом доминирования экстремальных деревьев будет число Слэйтера, не имеющее явной связи с множеством опорных вершин (в отличие от величины lv), исследование такой ситуации требует новых подходов.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт бюджета Московского физико-технического института (национального исследовательского университета). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Литература

1. **Andriantiana E.** Energy, Hosoya index and Merrifield–Simmons index of trees with prescribed degree sequence // Discrete Appl. Math. 2013. V. 161, No. 6. P. 724–741.

2. **Bessy S., Rautenbach D.** Extremal values of the chromatic number for a given degree sequence // Graphs Comb. 2017. V. 33, No. 4. P. 789–799.
3. **Rao A. R.** The clique number of a graph with given degree sequence // Graph Theory. Proc. Symp. (Calcutta, India, Dec. 20–25, 1976). New Delhi: MacMillan India, 1979. P. 251–267. (ISI Lect. Notes; V. 4).
4. **Favaron O., Mahéo M., Saclé J.** On the residue of a graph // J. Graph Theory. 1991. V. 15, No. 1. P. 39–64.
5. **Griggs R., Kleitman D.** Independence and the Havel–Hakimi residue // Discrete Math. 1994. V. 127. P. 209–212.
6. **Pepper R.** On the annihilation number of a graph // Proc. 15th Am. Conf. Applied Mathematics (Houston, USA, Apr. 30 – May 2, 2009). Stevens Point, WI: WSEAS, 2009. P. 217–220.
7. **Slater P. J.** Locating dominating sets and locating-dominating sets // Proc. 7th Quad. Int. Conf. Theory and Applications of Graphs (Kalamazoo, MI, USA, June 1–5, 1992). V. 2. New York: Wiley, 1995. P. 1073–1079.
8. **Gentner M., Henning M., Rautenbach D.** Largest domination number and smallest independence number of forests with given degree sequence // Discrete Appl. Math. 2016. V. 206. P. 181–187.
9. **Gentner M., Henning M., Rautenbach D.** Smallest domination number and largest independence number of graphs and forests with given degree sequence // J. Graph Theory. 2018. V. 88, No. 1. P. 131–145.
10. **Курносов А. Д.** Множество всех возможных значений числа доминирования в деревьях с заданной степенной последовательностью // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2020. Т. 27, № 1. С. 61–87.
11. **Курносов А. Д.** О нижней оценке числа связного доминирования в графах с фиксированной степенной последовательностью // Тр. МФТИ. 2020. Т. 12, № 2. С. 40–54.
12. **DeLavina E., Larson C. E., Pepper R., Waller B., Favaron O.** On total domination and support vertices of a tree // AKCE Int. J. Graphs Comb. 2010. V. 7, No. 1. P. 85–95.
13. **Desormeaux W. J., Haynes T. W., Henning M. A.** Improved bounds on the domination number of a tree // Discrete Appl. Math. 2014. V. 177. P. 88–94.
14. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука. Физматлит, 1990. 384 с.

Круподерова Софья Андреевна
Курносов Артём Дмитриевич

Статья поступила
29 января 2025 г.
После доработки —
15 марта 2025 г.
Принята к публикации
22 марта 2025 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
April–June 2025. Vol. 32, No. 2. P. 72–87

UDC 519.172.1 DOI: 10.33048/daio.2025.32.826

ON RELATION BETWEEN TWO CLASSES OF EXTREMAL TREES WITH PRESCRIBED DEGREE SEQUENCE

S. A. Krupoderova[a] and *A. D. Kurnosov*[b]

Moscow Institute of Physics and Technology
(National Research University),
9 Institutskii Lane, 141700 Dolgoprudnyi, Russia
E-mail: [a]`krupoderova.sa@phystech.edu`, [b]`kurnosov@phystech.edu`

Abstract. A non-pendant vertex of a graph is called a *support vertex* if it is adjacent to a leaf. This paper examines the relationship between two classes of extremal trees with the same vertex degree sequence: the class of trees minimizing the number of support vertices and the class of trees minimizing the domination number. Two values defined in terms of a degree sequence play a significant role here: the Slater number, proposed by Slater as a lower bound for the domination number, and the lower bound for the number of support vertices of a tree, proposed by Kurnosov. This paper completely solves the problem of comparing the classes in the case where the maximum of the two values is the latter. Illustr. 2, bibliogr. 14.

Keywords: degree sequence, tree, dominating set, domination number, leaf, pendant vertex, support vertex.

References

1. **E. Andriantiana,** Energy, Hosoya index and Merrifield–Simmons index of trees with prescribed degree sequence, *Discrete Appl. Math.* **161** (6), 724–741 (2013).
2. **S. Bessy** and **D. Rautenbach,** Extremal values of the chromatic number for a given degree sequence, *Graphs Comb.* **33** (4), 789–799 (2017).
3. **A. R. Rao,** The clique number of a graph with given degree sequence, in *Graph Theory* (Proc. Symp., Calcutta, India, Dec. 20–25, 1976) (MacMillan India, New Delhi, 1979), pp. 251–267 (ISI Lect. Notes, Vol. 4).
4. **O. Favaron, M. Mahéo,** and **J. Saclé,** On the residue of a graph, *J. Graph Theory* **15** (1), 39–64 (1991).

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **19** (2) (2025).

5. **R. Griggs** and **D. Kleitman,** Independence and the Havel–Hakimi residue, *Discrete Math.* **127**, 209–212 (1994).
6. **R. Pepper,** On the annihilation number of a graph, in *Proc. 15th Am. Conf. Applied Mathematics, Houston, USA, Apr. 30 – May 2, 2009* (WSEAS, Stevens Point, WI, 2009), pp. 217–220.
7. **P. J. Slater,** Locating dominating sets and locating-dominating sets, in *Proc. 7th Quad. Int. Conf. Theory and Applications of Graphs, Kalamazoo, MI, USA, June 1–5, 1992,* Vol. 2 (Wiley, New York, 1995), pp. 1073–1079.
8. **M. Gentner, M. Henning,** and **D. Rautenbach,** Largest domination number and smallest independence number of forests with given degree sequence, *Discrete Appl. Math.* **206**, 181–187 (2016).
9. **M. Gentner, M. Henning,** and **D. Rautenbach,** Smallest domination number and largest independence number of graphs and forests with given degree sequence, *J. Graph Theory* **88** (1), 131–145 (2018).
10. **A. D. Kurnosov,** The set of all values of the domination number in trees with a given degree sequence, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **27** (1), 61–87 (2020) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **14** (1), 131–147 (2020)].
11. **A. D. Kurnosov,** On a lower bound of connected domination number for graphs with prescribed degree sequence, *Tr. MFTI* **12** (2), 40–54 (2020) [Russian].
12. **E. DeLavina, C. E. Larson, R. Pepper, B. Waller,** and **O. Favaron,** On total domination and support vertices of a tree, *AKCE Int. J. Graphs Comb.* **7** (1), 85–95 (2010).
13. **W. J. Desormeaux, T. W. Haynes,** and **M. A. Henning,** Improved bounds on the domination number of a tree, *Discrete Appl. Math.* **177**, 88–94 (2014).
14. **V. A. Emelichev, O. I. Melnikov, V. I. Sarvanov,** and **R. I. Tyshkevich,** *Lectures on Graph Theory* (Nauka, Moscow, 1990 [Russian]; B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994).

Sofya A. Krupoderova
Artyom D. Kurnosov

Received January 29, 2025
Revised March 15, 2025
Accepted March 22, 2025