

ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 32 № 2 2025

Новосибирск
Издательство Института математики

МАСШТАБИРУЕМЫЙ ПОДХОД К КОДИЗАЙНУ
ТОПОЛОГИЙ И АЛГОРИТМОВ МАРШРУТИЗАЦИИ
ДЛЯ СЕМЕЙСТВ ОПТИМАЛЬНЫХ ЦИРКУЛЯНТНЫХ
СЕТЕЙ СТЕПЕНИ ЧЕТЫРЕ

О. Г. Монахов^а, Э. А. Монахова^б

Институт вычислительной математики и математической геофизики,
пр. Акад. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: ^аmonakhov@rav.sccc.ru, ^бemilia@rav.sccc.ru

Аннотация. В настоящей работе представлен новый подход к совместному конструированию топологий оптимальных по диаметру циркулянтных сетей $C(N; 1, s_2)$ и реализуемых для них оптимальных алгоритмов маршрутизации сложности $O(1)$. Новые алгоритмы маршрутизации основаны на использовании масштабируемых параметров L -образных шаблонов в плотной укладке графов на плоскости для семейств оптимальных сетей. Доказана масштабируемость параметров L -образных шаблонов для множества семейств оптимальных сетей $C(N; 1, s_2)$. Получены аналитические формулы зависимости этих параметров от диаметра графов, сокращающие время настройки алгоритма маршрутизации на предварительном этапе с $O(\log N)$ до $O(1)$. Сравнение нового алгоритма маршрутизации с известным в литературе оптимальным алгоритмом маршрутизации показывает его большую эффективность в среднем более чем на 10% по затратам времени на маршрутизацию в семействах оптимальных графов. Благодаря хорошей масштабируемости и простоте маршрутизации оптимальные циркулянтные сети степени четыре представляют интерес как эффективные и надёжные сети связи для сетей на кристалле, многопроцессорных суперкомпьютерных систем, телекоммуникационных сетевых структур и нейронных сетей связи. Табл. 1, ил. 6, библиогр. 20.

Ключевые слова: неориентированная циркулянтная сеть, оптимальный алгоритм маршрутизации, семейство оптимальных циркулянтов, диаметр, плотная укладка графов на плоскости.

Введение

Структура циркулянтных сетей степени четыре [1–5] изучается в различных прикладных областях, а также в качестве топологии сетей связи вычислительных и инфокоммуникационных систем, в том числе сетей на кристалле, благодаря лучшим структурным свойствам циркулянтов по сравнению с торами и двумерными решётками. Актуальность таких сетей обусловлена свойствами симметричности, высокой связности и масштабируемости, что позволяет применять их также в центрах коллективного пользования, беспроводных сенсорных и нейронных сетях [6–8]. Работы исследователей фокусируются в основном на разработке алгоритмов маршрутизации для циркулянтных сетей и оптимизации самой структуры сети по структурным задержкам или другим значимым показателям сетей.

Циркулянтная сеть степени четыре представляет собой неориентированный граф $C(N; s_1, s_2)$, $1 \leq s_1 < s_2 < N/2$, с множеством вершин $V = Z_N = \{0, 1, \dots, N - 1\}$, в котором каждая вершина i связана с вершинами $(i \pm s_1) \bmod N$ и $(i \pm s_2) \bmod N$. Числа s_1, s_2 — длины хорд (или образующие) графа, N — его порядок. Граф $C(N; s_1, s_2)$ связан, если $\text{НОД}(N, s_1, s_2) = 1$. На рис. 1 изображена циркулянтная сеть $C(10; 1, 4)$.

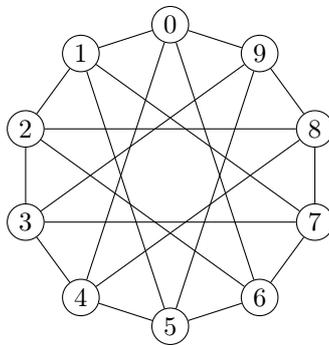


Рис. 1. Циркулянтная сеть $C(10; 1, 4)$

Диаметр графа — длина максимального кратчайшего пути на множестве всевозможных пар вершин, среднее расстояние — математическое ожидание всех длин кратчайших путей между парами вершин. Оптимальным называется циркулянтный граф $C(N; s_1, s_2)$ с минимально возможным диаметром (и/или средним расстоянием) для заданного N . Минимизация диаметра при фиксированном порядке и степени графа оптимизирует такие характеристики топологии сети связи, как надёжность

связи при отказах элементов, структурные задержки при передаче данных, скорость коммуникаций [3, 9]. В виду этого одна из фундаментальных проблем синтеза оптимальных топологий в различных классах регулярных графов состоит в поиске графов с минимальным диаметром (средним расстоянием) при заданных степени и числе вершин [1, 2, 10]. Для класса циркулянтных сетей $C(N; 1, s_2)$ авторами представлен в Интернете [11] датасет всех оптимальных графов до 50 000 вершин, а также их аналитически описываемые семейства, которые будут представлять объект исследования в настоящей работе.

Другая актуальная проблема при использовании циркулянтов в качестве сетей связи инфокоммуникационных систем состоит в разработке эффективных алгоритмов маршрутизации для передачи сообщений между парами узлов (вершин). Алгоритм маршрутизации называется оптимальным, если передача сообщений происходит вдоль кратчайших путей из источника в приёмник. В литературе известно большое число алгоритмов маршрутизации для циркулянтов степени четыре с разными оценками сложности (см. обзор в [4]).

Рассмотрим алгоритмы, не требующие таблиц маршрутизации (что является преимуществом для сетей на кристалле) и имеющие константную оценку времени вычисления маршрута из источника в приёмник. Среди них есть алгоритмы аналитического вида [4, 5, 12, 13] (для специальных семейств оптимальных циркулянтов) и алгоритмы с предварительной подготовкой топологических параметров сети для выполнения маршрутизации [14, 15]. К числу последних, как наиболее эффективный из них, относится алгоритм, предложенный в [14], где рассмотрен оптимальный алгоритм маршрутизации константного времени для циркулянтов вида $C(N; s_1, s_2)$.

Указанный алгоритм основан на применении параметров a, b, p, q (рис. 2а) для L -образных шаблонов (L -shapes, L -shaped tiles [16, 17]), задающих плотную укладку графа $C(N; s_1, s_2)$ на плоскости Z^2 . На рис. 2б

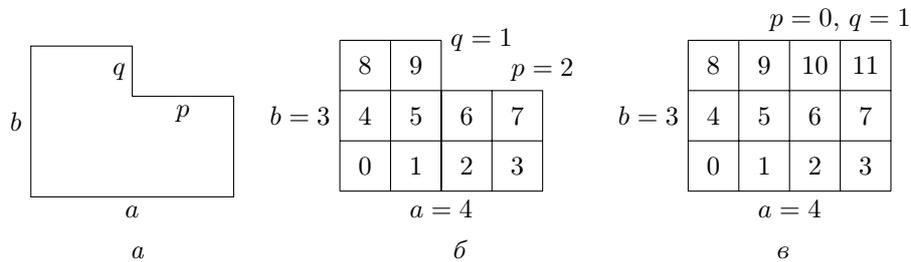


Рис. 2. Параметры L -образных шаблонов для циркулянтов $C(N; 1, s_2)$

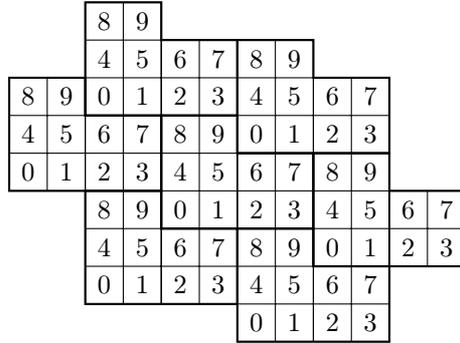


Рис. 3. Плотная укладка на плоскости L -образного шаблона для графа $C(10; 1, 4)$

и рис. 3 показано представление и укладка на плоскости циркулянтного графа $C(10; 1, 4)$ в виде L -образного шаблона.

Для алгоритма из [14] требуется предварительно определить параметры a, b, p, q и найти решение (\bar{x}, \bar{y}) сравнения $s_1x + s_2y \equiv 1 \pmod{N}$. Указанные параметры находятся при помощи алгоритма со сложностью порядка $O(N)$ [18] или $O(\log N)$ [16], что затратно при расчётах в сетях с большим числом узлов $N > 10^5$.

В настоящей работе для семейств оптимальных сетей $C(N; 1, s_2)$ предложен алгоритм получения аналитических формул, определяющих параметры a, b, p, q L -образных шаблонов, со сложностью $O(1)$ в отличие от существующего алгоритма сложности $O(\log N)$. Доказана аналитически задаваемая масштабируемость указанных параметров L -образных шаблонов для семейств оптимальных сетей $C(N; 1, s_2)$. Представлен также новый оптимальный алгоритм маршрутизации со сложностью порядка $O(1)$ для семейств оптимальных сетей $C(N; 1, s_2)$. Проведено сравнение нового алгоритма маршрутизации с алгоритмом из [14] для различных семейств оптимальных сетей, взятых из датасета оптимальных циркулянтов степени четыре [19], и показана эффективность нового алгоритма.

1. Плотная укладка циркулянтов на плоскости Z^2

В работах [16–18] описан алгоритм укладки ориентированных циркулянтов $C(N; s_1, s_2)$ на плоскости в виде L -образных шаблонов. В [17] доказано, что произвольный L -образный шаблон образует плотную укладку на плоскости, и получена следующая базовая система сравнений для

расположения нулей (вершин с номером 0) на плоскости:

$$\begin{aligned} as_1 - qs_2 &\equiv 0 \pmod{N}, \\ -ps_1 + bs_2 &\equiv 0 \pmod{N}. \end{aligned} \quad (1)$$

Сравнения (1) выполняются также для неориентированных циркулянтов $C(N; s_1, s_2)$, представленных в виде L -образных шаблонов, в том числе и прямоугольных (рис. 2в), при этом $N = ab - pq$. Согласно [17], если имеется несколько L -образных шаблонов размера N для заданной позиции нулевых вершин на плоскости, то они все могут быть получены с одними и теми же образующими s_1 и s_2 . Рассмотрим в качестве объекта исследования элементы множества аналитически задаваемых семейств оптимальных двухконтурных циркулянтов [19, 20].

Отметим, во-первых, что по построению каждое такое семейство состоит из оптимальных графов, т. е. графов с минимально возможным диаметром (и в большинстве случаев минимальным средним расстоянием) для заданного порядка графа. Минимально возможный диаметр оптимального графа с N вершинами равен $\lceil (-1 + \sqrt{2N - 1})/2 \rceil$ [2].

Во-вторых, члены семейства описаны полиномами от диаметра d , где порядок графов N — квадратичная функция, а образующие s_2 — линейные или квадратичные функции от d . Члены семейства существуют при

$$d = d_m + kP, \quad k \geq 0, \quad (2)$$

где d_m — минимальный диаметр, при котором член семейства является оптимальным графом, $P = \text{const} \in \mathbb{N}$ — период появления (повторения) членов семейства.

В-третьих, авторами получен и представлен в Интернете [11] в открытом доступе датасет семейств оптимальных графов $C(N(d); 1, s_2(d))$. В данный момент в датасете представлено более 2000 оптимальных семейств, и число их будет постепенно пополняться. Область возможных значений диаметров (2) для членов оптимального семейства либо ограничена рамками датасета $d \leq 158$, либо при доказательстве бесконечности семейства (см. [20]) параметр k в (2) может расти неограниченно.

В следующем разделе покажем, что при плотной укладке на плоскости Z^2 члены оптимального семейства могут образовывать масштабируемую последовательность L -образных шаблонов, что даёт возможность выразить параметры a, b, p, q в виде линейных полиномов от диаметра.

2. Масштабируемость параметров L -образных шаблонов для семейств оптимальных циркулянтов

Пусть задано семейство оптимальных аналитически задаваемых циркулянтов $C(N(d); 1, s_2(d))$, где $d \geq d_m, P \in \mathbb{N}$. Вычислим значения полиномов $N(d), s_2(d)$ при $d_1 = d_m$ и $d_2 = d_1 + P$ для двух последовательных

членов семейства $C(N(d_1); 1, s_2(d_1))$ и $C(N(d_2); 1, s_2(d_2))$. Применим алгоритм из [18] или [16] для расчёта параметров a, b, p, q найденных членов семейства. Пусть это будут значения $a(d_1), b(d_1), p(d_1), q(d_1)$ и $a(d_2), b(d_2), p(d_2), q(d_2)$. После этого получим значения приращения искомых параметров для двух последовательных членов семейства:

$$\begin{aligned}\Delta a &= a(d_2) - a(d_1), & \Delta b &= b(d_2) - b(d_1), \\ \Delta p &= p(d_2) - p(d_1), & \Delta q &= q(d_2) - q(d_1).\end{aligned}\tag{3}$$

При выполнении условий

$$\Delta a \geq 0, \quad \Delta b \geq 0, \quad \Delta p \geq 0, \quad \Delta q \geq 0$$

определим параметры L -образного шаблона для k -го члена семейства следующим образом:

$$\begin{aligned}a(d) &= a(d_1) + k\Delta a, & b(d) &= b(d_1) + k\Delta b, \\ p(d) &= p(d_1) + k\Delta p, & q(d) &= q(d_1) + k\Delta q.\end{aligned}$$

Подставляя значение $k = (d - d_1)/P$, получим линейного вида формулы от диаметра для всех искомых параметров:

$$\begin{aligned}a(d) &= (\Delta a/P)d + a(d_1) - (\Delta a/P)d_1, \\ b(d) &= (\Delta b/P)d + b(d_1) - (\Delta b/P)d_1, \\ p(d) &= (\Delta p/P)d + p(d_1) - (\Delta p/P)d_1, \\ q(d) &= (\Delta q/P)d + q(d_1) - (\Delta q/P)d_1.\end{aligned}\tag{4}$$

Справедливость формул (4) для определения параметров $a(d), b(d), p(d), q(d)$ L -образных шаблонов семейств оптимальных циркулянтных сетей вида $C(N(d); 1, s_2(d))$ основана на следующем предположении: значения (3) приращения параметров $\Delta a, \Delta b, \Delta p, \Delta q$, полученные для двух последовательных членов семейства, сохраняются на всём диапазоне существования заданного семейства оптимальных циркулянтных графов $C(N(d); 1, s_2(d))$, где d удовлетворяет условию (2).

Продemonстрируем справедливость этого утверждения при помощи теоретического обоснования для ряда конкретных семейств.

Лемма 1. *Параметры L -образных шаблонов для семейства оптимальных циркулянтов $C(2d^2 + 2d + 1; 1, 2d + 1)$, где $d \geq 1, P = 1$, равны $a(d) = 2d + 1, b(d) = d + 1, p(d) = d, q(d) = 1$.*

Доказательство. Пусть $d_1 = 3, d_2 = 4$. Тогда

$$N(d_1) = 25, \quad s_2(d_1) = 7, \quad N(d_2) = 41, \quad s_2(d_2) = 9.$$

Применение алгоритма из [16] (или [18]) для двух последовательных членов семейства даёт равенства

$$a(d_1) = 7, \quad b(d_1) = 4, \quad p(d_1) = 3, \quad q(d_1) = 1,$$

$$a(d_2) = 9, \quad b(d_2) = 5, \quad p(d_2) = 4, \quad q(d_2) = 1.$$

Тогда $\Delta a = 2$, $\Delta b = 1$, $\Delta p = 1$, $\Delta q = 0$. Отсюда в силу (4) имеем

$$a(d) = 2d + 1, \quad b(d) = d + 1, \quad p(d) = d, \quad q(d) = 1.$$

Покажем, что базовая система сравнений (1) для расположения нулевых вершин на плоскости выполняется для полученных функций при любом $d \geq 1$:

$$\begin{aligned} (2d + 1) - (2d + 1) &= 0 \equiv 0 \pmod{N}, \\ -d + (d + 1)(2d + 1) &= 2d^2 + 2d + 1 \equiv N \pmod{N}. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Данное семейство относится к экстремальным циркулянтам (см. [2]) — оптимальным графам степени четыре с максимально возможным порядком при любом диаметре. На рис. 4 изображены L -образные шаблоны для трёх графов семейства — $C(13; 1, 5)$, $C(25; 1, 7)$, $C(41; 1, 9)$ с диаметрами $d = 2, 3, 4$ соответственно, демонстрирующие масштабируемость параметров a, b, p, q .

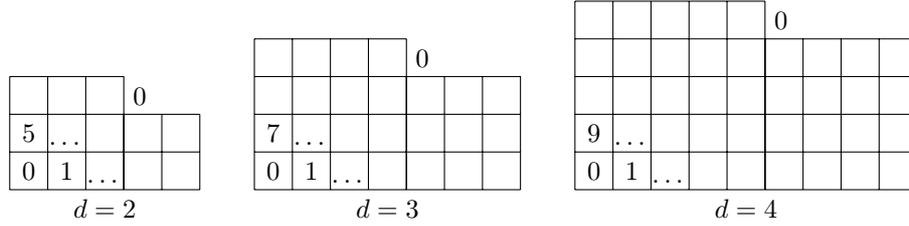


Рис. 4. Масштабируемость параметров L -образных шаблонов для графов экстремального семейства из леммы 1

Лемма 2. *Параметры L -образных шаблонов для семейства оптимальных циркулянтов $C(2d^2 + 2d - 7; 1, 2d + 5)$, где $d \geq 5$, $P = 2$, равны $a(d) = d + 2$, $b(d) = 3d - 4$, $p(d) = d + 1$, $q(d) = d - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d_1 = 5$, $d_2 = 7$. Применив алгоритм из [16], имеем $\Delta a = 9 - 7 = 2$, $\Delta b = 17 - 11 = 6$, $\Delta p = 8 - 6 = 2$, $\Delta q = 6 - 4 = 2$. В силу (4) получаем $a(d) = d + 2$, $b(d) = 3d - 4$, $p(d) = d + 1$, $q(d) = d - 1$. Проверка выполнения (1) даёт при любом нечётном $d \geq 5$ равенства

$$\begin{aligned} (d + 2) - (d - 1)(2d + 5) &= -2d^2 - 2d + 7 = -N, \\ -(d + 1) + (3d - 4)(2d + 5) &= 6d^2 + 6d - 21 = 3N. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Параметры L -образных шаблонов для семейства оптимальных циркулянтов $C(2d^2 - 3; 1, 4d - 5)$, где $d \geq 4$, $P = 2$, равны $a(d) = (3/2)d - 2$, $b(d) = (3/2)d + 2$, $p(d) = d/2 - 1$, $q(d) = d/2 + 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d_1 = 4$, $d_2 = 6$. После применения алгоритма из [16] имеем $\Delta a = 7 - 4 = 3$, $\Delta b = 11 - 8 = 3$, $\Delta p = 2 - 1 = 1$, $\Delta q = 4 - 3 = 1$. В силу (4) получаем $a(d) = (3/2)d - 2$, $b(d) = (3/2)d + 2$, $p(d) = d/2 - 1$, $q(d) = d/2 + 1$. Проверка выполнения (1) даёт при любом чётном $d \geq 4$ равенства

$$\begin{aligned} (3d/2 - 2) - (d/2 + 1)(4d - 5) &= -2d^2 + 3 = -N, \\ -(d/2 - 1) + (3d/2 + 2)(4d - 5) &= 6d^2 - 9 = 3N. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Параметры L -образных шаблонов для семейства оптимальных циркулянтов $C(2d^2 - 2; 1, d^2 - d - 2)$, где $d \geq 5$, $P = 2$, равны $a(d) = d + 1$, $b(d) = 2d - 2$, $p(d) = 0$, $q(d) = d - 2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d_1 = 5$, $d_2 = 7$. Применив алгоритм из [16], имеем $\Delta a = 8 - 6 = 2$, $\Delta b = 12 - 8 = 4$, $\Delta p = 0$, $\Delta q = 5 - 3 = 2$. В силу (4) $a(d) = d + 1$, $b(d) = 2d - 2$, $p(d) = 0$, $q(d) = d - 2$. Проверка выполнения (1) даёт при любом нечётном $d \geq 5$ равенства

$$\begin{aligned} (d + 1) - (d - 2)(d^2 - d - 2) &= -d^3 + 3d^2 + d - 3 = N(3 - d)/2, \\ -0 + (2d - 2)(d^2 - d - 2) &= 2d^3 - 4d^2 - 2d + 4 = (d - 2)N. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Параметр $p(d) = 0$ соответствует семейству с прямоугольным типом L -образного шаблона. Как показано в [16], прямоугольный тип L -образных шаблонов имеет место, если $bs_2 \equiv 0 \pmod{N}$.

Лемма 5. *Параметры L -образных шаблонов для семейства оптимальных циркулянтов $C(2d^2; 1, d^2 - 2d + 1)$, где $d \geq 7$, $P = 4$, равны $a(d) = (3d - 1)/2$, $b(d) = (3d + 1)/2$, $p(d) = (d + 1)/2$, $q(d) = (d - 1)/2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d_1 = 7$, $d_2 = 11$. Применив алгоритм из [16], имеем $\Delta a = 16 - 10 = 6$, $\Delta b = 17 - 11 = 6$, $\Delta p = 6 - 4 = 2$, $\Delta q = 5 - 3 = 2$. В силу (4) получаем $a(d) = (3/2)d - 2$, $b(d) = (3/2)d + 2$, $p(d) = d/2 - 1$, $q(d) = d/2 + 1$. Проверка выполнения (1) даёт при любом $d = 3 + 4k$, $k \geq 1$, равенства

$$\begin{aligned} (3d - 1)/2 - ((d - 1)/2)(d^2 - 2d + 1) &= -kN, \quad k = (d - 3)/4, \\ -(d + 1)/2 + ((3d + 1)/2)(d^2 - 2d + 1) &= (3k + 1)N, \quad k = (d - 3)/4. \end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

Отметим, что данное семейство исследовалось в [13], где для него был разработан аналитический алгоритм маршрутизации, использующий при определении кратчайших путей семь соседних нулей на плоскости. Как будет показано далее, при маршрутизации в графах данного семейства можно ограничиться пятью нулями, что уменьшит время работы алгоритма.

Запись структуры семейства циркулянтов вместе с данными, необходимыми для маршрутизации, представлены в датасете и в табл. 1, где показаны описания семейств из рассмотренных выше лемм. В табл. 1 использованы обозначения: $(c_2, c_1, c_0) = c_2d^2 + c_1d + c_0$ — коэффициенты при степенях d для задания N и s_2 , $(c_1, c_0) = c_1d + c_0$ — коэффициенты для задания a, b, p, q ; а также параметры d_m и P .

Таблица 1

**Задание семейств циркулянтов
с параметрами для маршрутизации**

N	s_2	a	b	p	q	d_m	P
c_2, c_1, c_0	c_2, c_1, c_0	c_1, c_0	c_1, c_0	c_1, c_0	c_1, c_0		
2, 2, 1	0, 2, 1	2, 1	1, 1	1, 0	0, 1	1	1
2, 2, -7	0, 2, 5	1, 2	3, -4	1, 1	1, -1	5	2
2, 0, -3	0, 4, -5	3/2, -2	3/2, 2	1/2, -1	1/2, 1	4	2
2, 0, -2	1, -1, -2	1, 1	2, -2	0, 0	1, -2	5	2
2, 0, 0	1, -2, 1	3/2, -1/2	3/2, 1/2	1/2, 1/2	1/2, -1/2	7	4

С помощью системы Wolfram Mathematica есть возможность проверки выполнения сравнений (1) для оптимальных семейств из датасета, у которых параметры N, s_2, a, b, p, q представимы в виде полиномов от диаметра. После такой проверки, проведённой на всём множестве оптимальных семейств из датасета (общим числом свыше 2000 семейств), осталось 1791 семейств, параметры L -образных шаблонов которых удовлетворяют системе сравнений (1) для диаметров из соответствующих областей существования семейств. Таким образом, для всех этих семейств наблюдается масштабируемость параметров L -образных шаблонов при увеличении диаметра. Все оптимальные семейства, прошедшие проверку на выполнение (1), даны в соответствующем разделе датасета. Ниже приведён фрагмент множества таких семейств, существующих для любого диаметра $d \geq d_m$, для которых соответственно $P = 1$. Для представленных семейств список содержит значения $d_m, P = 1$, полиномы для N и s_2 , коэффициенты при степенях d для параметров a, b, p, q .

Фрагмент датасета оптимальных семейств с аналитическим описанием и масштабируемыми параметрами L -образных шаблонов в формате

$\{d_m, P, \{N, s_2\}, \{\{a_1, a_0\}, \{b_1, b_0\}, \{p_1, p_0\}, \{q_1, q_0\}\}\}$:

$$\begin{aligned}
 & \{3, 1, \{2d^2, -1 + 2d\}, \{\{2, -1\}, \{1, 1\}, \{1, -1\}, \{0, 1\}\}\}, \\
 & \{3, 1, \{2d^2, 1 + 2d\}, \{\{1, 0\}, \{3, -1\}, \{1, -1\}, \{1, 0\}\}\}, \\
 & \{8, 1, \{-13 + 2d^2, -5 + 2d\}, \{\{2, -5\}, \{1, 3\}, \{1, -2\}, \{0, 1\}\}\}, \\
 & \{8, 1, \{-13 + 2d^2, 5 + 2d\}, \{\{1, 3\}, \{2, -5\}, \{0, 1\}, \{1, -2\}\}\}, \\
 & \{7, 1, \{-12 + 2d^2, -5 + 2d\}, \{\{2, -5\}, \{1, 3\}, \{1, -3\}, \{0, 1\}\}\}, \\
 & \{7, 1, \{-12 + 2d^2, 5 + 2d\}, \{\{1, 2\}, \{3, -7\}, \{1, 1\}, \{1, -2\}\}\}, \\
 & \{7, 1, \{-11 + 2d^2, -5 + 2d\}, \{\{2, -5\}, \{1, 3\}, \{1, -4\}, \{0, 1\}\}\}, \\
 & \{7, 1, \{-11 + 2d^2, 5 + 2d\}, \{\{1, 1\}, \{3, -7\}, \{1, -2\}, \{1, -2\}\}\}, \\
 & \{4, 1, \{-5 + 2d^2, -3 + 2d\}, \{\{2, -3\}, \{1, 2\}, \{1, -1\}, \{0, 1\}\}\}, \\
 & \{4, 1, \{-5 + 2d^2, 3 + 2d\}, \{\{1, 2\}, \{2, -3\}, \{0, 1\}, \{1, -1\}\}\}, \\
 & \{4, 1, \{-4 + 2d^2, -3 + 2d\}, \{\{2, -3\}, \{1, 2\}, \{1, -2\}, \{0, 1\}\}\}, \\
 & \{3, 1, \{1 + 2d^2, -1 + 2d\}, \{\{2, -1\}, \{1, 1\}, \{1, -2\}, \{0, 1\}\}\}, \\
 & \{3, 1, \{1 + 2d^2, 1 + 2d\}, \{\{2, 1\}, \{1, 0\}, \{1, -1\}, \{0, 1\}\}\}, \\
 & \{3, 1, \{2 - 2d + 2d^2, -1 + 2d\}, \{\{2, -1\}, \{1, 0\}, \{1, -2\}, \{0, 1\}\}\}, \\
 & \{3, 1, \{3 - 2d + 2d^2, -1 + 2d\}, \{\{2, -1\}, \{1, 0\}, \{1, -3\}, \{0, 1\}\}\}, \\
 & \{11, 1, \{-9 - d + 2d^2, 4 + 2d\}, \{\{1, 1\}, \{3, -7\}, \{1, -1\}, \{1, -2\}\}\}, \\
 & \{10, 1, \{-8 - d + 2d^2, 4 + 2d\}, \{\{1, 0\}, \{3, -7\}, \{1, -4\}, \{1, -2\}\}\}, \\
 & \{9, 1, \{-31 + 2d + 2d^2, 9 + 2d\}, \{\{1, 4\}, \{3, -10\}, \{1, 3\}, \{1, -3\}\}\}, \\
 & \{5, 1, \{-17 + 2d + 2d^2, -5 + 2d\}, \{\{2, -5\}, \{1, 4\}, \{1, -3\}, \{0, 1\}\}\}, \\
 & \{5, 1, \{-17 + 2d + 2d^2, 7 + 2d\}, \{\{1, 3\}, \{3, -7\}, \{1, 2\}, \{1, -2\}\}\}, \\
 & \{4, 1, \{-7 + 2d + 2d^2, -3 + 2d\}, \{\{2, -3\}, \{1, 3\}, \{1, -2\}, \{0, 1\}\}\}, \\
 & \{4, 1, \{-7 + 2d + 2d^2, 5 + 2d\}, \{\{1, 2\}, \{3, -4\}, \{1, 1\}, \{1, -1\}\}\}, \\
 & \{3, 1, \{-1 + 2d + 2d^2, -1 + 2d\}, \{\{2, -1\}, \{1, 2\}, \{1, -1\}, \{0, 1\}\}\}, \\
 & \{3, 1, \{-1 + 2d + 2d^2, 3 + 2d\}, \{\{1, 1\}, \{3, -1\}, \{1, 0\}, \{1, 0\}\}\}, \\
 & \{2, 1, \{1 + 2d + 2d^2, 1 + 2d\}, \{\{2, 1\}, \{1, 1\}, \{1, 0\}, \{0, 1\}\}\}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, определив при малых значениях $d_1 = d_m$ и $d_2 = d_1 + P$ значения a, b, p, q по алгоритму [16], получаем формулы (4) для них, справедливые при любых возможных диаметрах d для графов оптимальных семейств. По найденным формулам можно теперь аналитически определить искомые параметры для больших значений N , тем самым

сократив сложность решения проблемы определения параметров L -образных шаблонов до $O(1)$.

3. Описание алгоритма маршрутизации

В силу симметрии циркулянтов кратчайший путь из вершины i в вершину j равен кратчайшему пути из 0 в вершину $(j - i) \bmod N$, поэтому при поиске кратчайших путей между двумя вершинами достаточно решить задачу поиска кратчайших путей из 0 во все вершины циркулянта. Отметим, что алгоритмы маршрутизации из [9, 12–15] используют поиск кратчайших путей в циркулянтном графе путём минимизации длин путей «источник — приёмник» через применение координат пяти, семи или девяти соседних нулей в плотной укладке графа на плоскости и определения кратчайшего пути к вершине как минимума расстояния от этих нулей к заданной вершине. Основная проблема состоит в определении координат используемых в алгоритме соседних нулей. Пусть это будут нули $(0, 0)$, (u, v) , $(-a_0, b_0)$, $(-u, -v)$ и $(a_0, -b_0)$.

Ниже приведён текст алгоритма маршрутизации (алгоритм 1). Запись типа $a_1 + b_1[s_2]$ означает, что путь из 0 в вершину i содержит a_1 шагов по образующей $s_1 = 1$ плюс b_1 шагов по образующей s_2 . Знаки a_1 и b_1 определяют направление движения по образующей (+) или против образующей (-).

Алгоритм 1. Вычисление кратчайшего пути из вершины 0 в любую другую вершину графа семейства

Вход: параметры $N, s_2, a, b, p, q, u = a - p, v = b - q$, номер вершины-приёмника $i \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$.

Выход: кратчайший путь P' из вершины 0 в вершину i .

1: **if** $u \geq v$ **then** $a_0 := p, b_0 := b$;

2: **else** $a_0 := a, b_0 := q$;

3: $(a_1, b_1) := (i, 0) - \text{round}\left(\frac{1}{N}(i, 0) \begin{pmatrix} b_0 & -v \\ a_0 & u \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} u & v \\ -a_0 & b_0 \end{pmatrix}$;

4: $P_1 = a_1 + b_1[s_2], P_2 = a_1 - u + (b_1 - v)[s_2], P_3 = a_1 + a_0 + (b_1 - b_0)[s_2],$
 $P_4 = a_1 + u + (b_1 + v)[s_2], P_5 = a_1 - a_0 + (b_1 + b_0)[s_2]$;

5: **return** $P' = \min\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$;

Предварительный этап настройки алгоритма 1 для графов оптимального семейства $C(N(d); 1, s_2(d))$, где d удовлетворяет (2), заключается в следующем: по формулам (4) определяются параметры $a(d), b(d), p(d), q(d)$ L -образного шаблона для графов семейства. Решением сравнения $x + s_2(d)y \equiv 1 \pmod{N}$ в этом случае будет пара $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 0)$. Этот

предварительный этап делается только один раз после формирования топологии системы в виде графа $C(N; 1, s_2)$.

Таким образом, при использовании семейств оптимальных циркулянтов $C(N; 1, s_2)$ в качестве подсистемы связей сетей на кристалле включение в описание семейства четырёх заранее определённых параметров L -образного шаблона создаёт основу для конструирования масштабируемых по числу элементов больших многоуровневых систем с унификацией по диаметру эффективных алгоритмов маршрутизации константной сложности.

4. Экспериментальные результаты

Предложенный алгоритм маршрутизации (расчёта кратчайшего пути из источника сообщения в его приёмник) реализован в системе Wolfram Mathematica и проверен сравнением с алгоритмом Дейкстры на множестве оптимальных циркулянтов вида $C(N; 1, s_2)$, $1 < s_2 < N/2$, $6 \leq N \leq 500$, при этом образующая s_2 пробегает все возможные оптимальные значения для данного N из полученного датасета. В силу симметрии циркулянтов в качестве источников сообщений взяты нулевые вершины графов. В качестве приёмников рассмотрены все вершины $i \in$

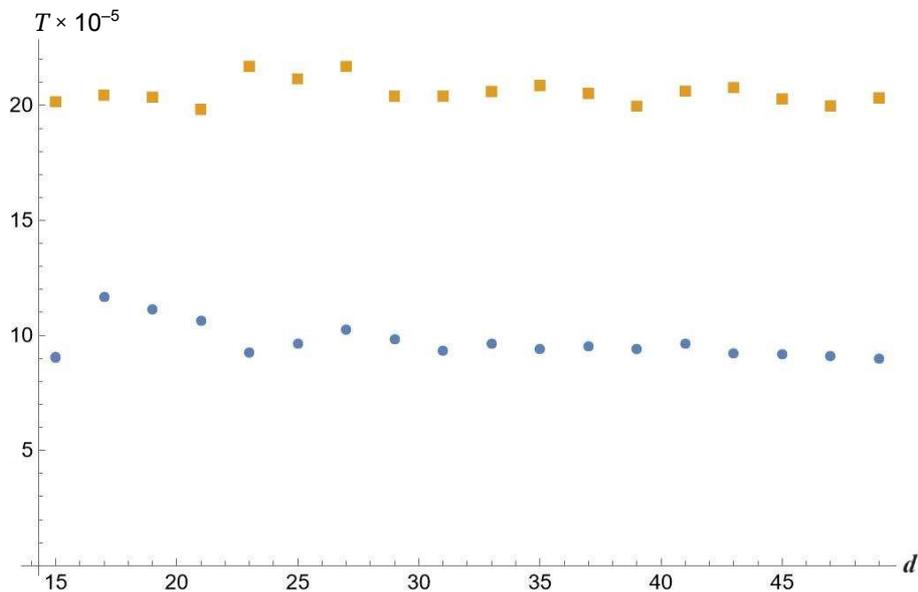


Рис. 5. Время работы алгоритмов маршрутизации на графах семейства из леммы 1

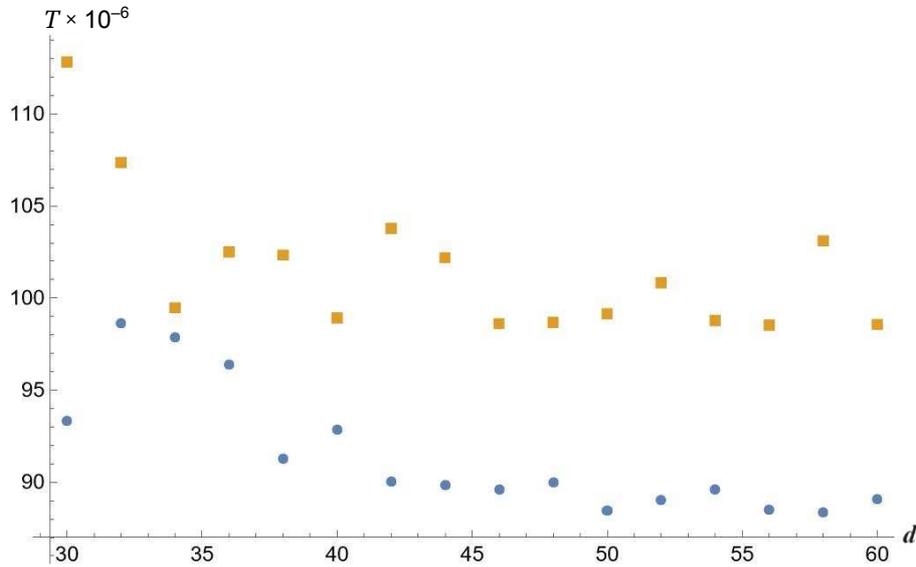


Рис. 6. Время работы алгоритмов маршрутизации на графах семейства из леммы 3

$\{1, 2, \dots, N - 1\}$. Проверена работа алгоритма маршрутизации для всех оптимальных семейств из датасета.

Для графов оптимальных семейств из лемм 1–5 проведено сравнение работы нового алгоритма маршрутизации с алгоритмом из [14].

На рис. 5 и 6 показаны средние оценки времени T (в секундах) работы алгоритма 1 и алгоритма из [14], полученные для двух различных семейств оптимальных графов. Здесь d — диаметр графов, источник сообщений — нулевая вершина, приёмники — все вершины графа. Точки на графиках обозначены кружками (алгоритм 1) и квадратами (алгоритм [14]). Отметим, что новый алгоритм маршрутизации даёт затраты времени для расчёта кратчайших путей лучшие, чем у алгоритма из [14], в среднем от 10 до 50 процентов за счёт меньшего числа операций на шагах 1–2 алгоритма. Кроме того, он может работать на всех семействах оптимальных двумерных циркулянтов вида $C(N; 1, s_2)$ в отличие от алгоритмов из [9, 12, 13], реализованных для отдельных семейств оптимальных графов.

Заключение

В настоящей работе предложен комплексный подход к кодизайну топологий и алгоритмов маршрутизации для множества семейств оптимальных по диаметру неориентированных циркулянтных сетей степени

четыре. Получен новый эффективный алгоритм вычисления кратчайших путей в оптимальных циркулянтах степени четыре, который является модификацией алгоритма маршрутизации константной временной сложности, предложенного в [14], но в отличие от последнего использует меньшее число операций при расчёте кратчайшего пути. Кроме того, найденные аналитические формулы для расчёта масштабируемых параметров L -образных шаблонов для графов оптимальных семейств сокращают время предварительной настройки алгоритма маршрутизации с $O(\log N)$ до $O(1)$. По сравнению с рядом других алгоритмов поиска кратчайших путей, использующих плотную укладку графов на плоскости, данный алгоритм использует минимально возможное количество (пять) соседних нулей и меньшее число операций для расчёта минимального пути из источника в приёмник. Проведённое сравнение с алгоритмом маршрутизации из [14], показало эффективность нового алгоритма от 10 до 50 процентов в зависимости от топологии семейств. В дальнейшем представляет интерес моделирование полученного алгоритма маршрутизации и его прототипирование для подсистем связи в сетях на кристалле.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт бюджетного проекта Института вычислительной математики и математической геофизики (проект № FWNM–2022–0005). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Литература

1. **Hwang F. K.** A survey on multi-loop networks // *Theor. Comput. Sci.* 2003. V. 299, No. 1–3. P. 107–121.
2. **Monakhova E. A.** A survey on undirected circulant graphs // *Discrete Math. Algorithms Appl.* 2012. V. 4, No. 1. Article ID 1250002. 30 p.
3. **Huang X., Ramos A. F., Deng Y.** Optimal circulant graphs as low-latency network topologies // *J. Supercomput.* 2022. V. 78, No. 11. P. 13491–13510.
4. **Monakhova E. A., Romanov A. Yu., Lezhnev E. V.** Shortest path search algorithm in optimal two-dimensional circulant networks: Implementation for networks-on-chip // *IEEE Access.* 2020. V. 8. P. 215010–215019.
5. **Liu H., Li X., Wang S.** Construction of dual optimal bidirectional double-loop networks for optimal routing // *Mathematics.* 2022. V. 10. Article ID 4016. 17 p.

6. **Hoffmann R., Deserale D., Seredynski F.** Cellular automata rules solving the wireless sensor network coverage problem // *Natural Comput.* 2022. V. 21. P. 417–447.
7. **Erickson A., Stewart I. A., Navaridas J., Kiasari A. E.** The stellar transformation: From interconnection networks to data-center networks // *Comput. Networks.* 2017. V. 113. P. 29–45.
8. **Fei J., Lu C.** Adaptive sliding mode control of dynamic systems using double loop recurrent neural network structure // *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* 2018. V. 29. P. 1275–1286.
9. **Monakhova E. A., Monakhov O. G., Romanov A. Yu.** Routing algorithms in optimal degree four circulant networks based on relative addressing: Comparative analysis for networks-on-chip // *IEEE Trans. Netw. Sci. Eng.* 2023. V. 10, No. 1. P. 413–425.
10. **Deng Y., Guo M., Ramos A. F., Huang X., Xu Z., Liu W.** Optimal low-latency network topologies for cluster performance enhancement // *J. Supercomput.* 2020. V. 76, No. 12. P. 9558–9584.
11. **Monakhova E. A., Monakhov O. G.** Optimal double loop networks or optimal circulant graphs $(N; 1, s)$. Dataset. 2024. URL: github.com/mila0411/Double-loop-networks/tree/main/Dataset (accessed 23.07.2025).
12. **Beivide R., Herrada E., Balcazar J. L., Arruabarrena A.** Optimal distance networks of low degree for parallel computers // *IEEE Trans. Comput.* 1991. V. 40, No. 10. P. 1109–1124.
13. **Jha P. K.** Dimension-order routing algorithms for a family of minimal-diameter circulants // *J. Interconnect. Netw.* 2013. V. 14, No. 1. Article ID 1350002. 24 p.
14. **Chen B.-X., Meng J.-X., Xiao W.-J.** A constant time optimal routing algorithm for undirected double-loop networks // *Mobile ad-hoc and sensor networks. Proc. 1st Int. Conf. (Wuhan, China, Dec. 13–15, 2005)*. Heidelberg: Springer, 2005. P. 308–316. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 3794).
15. **Camarero C., Martinez C., Beivide R.** L-networks: A topological model for regular two-dimensional interconnection networks // *IEEE Trans. Comput.* 2013. V. 62, No. 7. P. 1362–1375.
16. **Hwang F. K.** A complementary survey on double-loop networks // *Theor. Comput. Sci.* 2001. V. 263, No. 1–2. P. 211–229.
17. **Fiol M. A., Yebra J. L. A., Alegre I., Valero M.** A discrete optimization problem in local networks and data alignment // *IEEE Trans. Comput.* 1987. V. 36, No. 6. P. 702–713.
18. **Wong C. K., Coppersmith D.** A combinatorial problem related to multi-module memory organizations // *J. Assoc. Comput. Mach.* 1974. V. 21, No. 3. P. 392–402.
19. **Монахова Э. А., Монахов О. Г.** Генерация и анализ датасета оптимальных двухконтурных циркулянтных сетей // *Программная инженерия.* 2024. Т. 15, № 8. С. 402–410.

- 20. Монахова Э. А., Монахов О. Г.** Анализ базы данных оптимальных двухконтурных кольцевых сетей // Прикл. дискрет. математика. 2024. № 64. С. 56–71.

Монахов Олег Геннадьевич
Монахова Эмилия Анатольевна

Статья поступила
19 июля 2024 г.
После доработки —
11 августа 2024 г.
Принята к публикации
22 сентября 2024 г.

A SCALABLE APPROACH TO CO-DESIGN OF TOPOLOGIES
AND ROUTING ALGORITHMS FOR FAMILIES OF OPTIMAL
DEGREE-FOUR CIRCULANT NETWORKSO. G. Monakhov^a and E. A. Monakhova^bInstitute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
6 Acad. Lavrentyev Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: ^amonakhov@rav.sbcc.ru, ^bemilia@rav.sbcc.ru

Abstract. This paper presents a new approach to the joint construction of topologies for diameter-optimal circulant networks $C(N; 1, s_2)$ and optimal routing algorithms of complexity $O(1)$ implemented for them. New routing algorithms are based on the use of scalable parameters of L -shaped patterns in a dense packing of graphs on the plane for families of optimal networks. The scalability of the parameters of L -shaped patterns for a set of families of optimal networks $C(N; 1, s_2)$ is shown. We obtain analytical formulas for the dependence of these parameters on the graph diameter, reducing the time for setting up the routing algorithm at the preliminary stage from $O(\log N)$ to $O(1)$. A comparison of the new routing algorithm with the optimal one known in the literature demonstrates its greater efficiency, on average, by more than 10% in terms of routing time in families of optimal graphs. Due to their good scalability and ease of routing, optimal degree-four circulant networks are of interest as efficient and reliable communication networks for networks-on-chip, multiprocessor supercomputer systems, telecommunications network structures, and neural communication networks. Tab. 1, illustr. 6, bibliogr. 20.

Keywords: undirected circulant network, optimal routing algorithm, family of optimal circulant networks, diameter, dense packing of graphs on a plane.

References

1. **F. K. Hwang**, A survey on multi-loop networks, *Theor. Comput. Sci.* **299** (1–3), 107–121 (2003).

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **19** (2) (2025).

2. **E. A. Monakhova**, A survey on undirected circulant graphs, *Discrete Math. Algorithms Appl.* **4** (1), ID 1250002 (2012).
3. **X. Huang, A. F. Ramos, and Y. Deng**, Optimal circulant graphs as low-latency network topologies, *J. Supercomput.* **78** (11), 13491–13510 (2022).
4. **E. A. Monakhova, A. Yu. Romanov, and E. V. Lezhnev**, Shortest path search algorithm in optimal two-dimensional circulant networks: Implementation for networks-on-chip, *IEEE Access* **8**, 215010–215019 (2020).
5. **H. Liu, X. Li, and S. Wang**, Construction of dual optimal bidirectional double-loop networks for optimal routing, *Mathematics* **10**, ID 4016 (2022).
6. **R. Hoffmann, D. Deserale, and F. Seredynski**, Cellular automata rules solving the wireless sensor network coverage problem, *Natural Comput.* **21**, 417–447 (2022).
7. **A. Erickson, I. A. Stewart, J. Navaridas, and A. E. Kiasari**, The stellar transformation: From interconnection networks to data-center networks, *Comput. Netw.* **113**, 29–45 (2017).
8. **J. Fei and C. Lu**, Adaptive sliding mode control of dynamic systems using double loop recurrent neural network structure, *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* **29**, 1275–1286 (2018).
9. **E. A. Monakhova, O. G. Monakhov, and A. Yu. Romanov**, Routing algorithms in optimal degree four circulant networks based on relative addressing: Comparative analysis for networks-on-chip, *IEEE Trans. Netw. Sci. Eng.* **10** (1), 413–425 (2023).
10. **Y. Deng, M. Guo, A. F. Ramos, X. Huang, Z. Xu, and W. Liu**, Optimal low-latency network topologies for cluster performance enhancement, *J. Supercomput.* **76** (12), 9558–9584 (2020).
11. **E. A. Monakhova and O. G. Monakhov**, Optimal double loop networks or optimal circulant graphs $(N; 1, s)$. Dataset (2024), URL: github.com/mila0411/Double-loop-networks/tree/main/Dataset (accessed 23.07.2025).
12. **R. Beivide, E. Herrada, J. L. Balcazar, and A. Arruabarrena**, Optimal distance networks of low degree for parallel computers, *IEEE Trans. Comput.* **40** (10), 1109–1124 (1991).
13. **P. K. Jha**, Dimension-order routing algorithms for a family of minimal-diameter circulants, *J. Interconnect. Netw.* **14** (1), ID 1350002 (2013).
14. **B.-X. Chen, J.-X. Meng, and W.-J. Xiao**, A constant time optimal routing algorithm for undirected double-loop networks, in *Mobile Ad-Hoc and Sensor Networks* (Proc. 1st Int. Conf., Wuhan, China, Dec. 13–15, 2005) (Springer, Heidelberg, 2005), pp. 308–316 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 3794).
15. **C. Camarero, C. Martinez, and R. Beivide**, L-networks: A topological model for regular two-dimensional interconnection networks, *IEEE Trans. Comput.* **62** (7), 1362–1375 (2013).
16. **F. K. Hwang**, A complementary survey on double-loop networks, *Theor. Comput. Sci.* **263** (1–2), 211–229 (2001).

17. **M. A. Fiol, J. L. A. Yebra, I. Alegre, and M. Valero**, A discrete optimization problem in local networks and data alignment, *IEEE Trans. Comput.* **36** (6), 702–713 (1987).
18. **C. K. Wong and D. Coppersmith**, A combinatorial problem related to multimodule memory organizations, *J. Assoc. Comput. Mach.* **21** (3), 392–402 (1974).
19. **E. A. Monakhova and O. G. Monakhov**, Generation and analysis of a dataset of optimal double-loop circulant networks, *Program. Inzh.* **15** (8), 402–410 (2024) [Russian].
20. **E. A. Monakhova and O. G. Monakhov**, Database analysis of optimal double-loop networks, *Prikl. Diskretn. Mat.*, No. 64, 56–71 (2024) [Russian].

Oleg G. Monakhov
Emiliya A. Monakhova

Received July 19, 2024
Revised August 11, 2024
Accepted September 22, 2024