ISSN 2949-5598

# ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 32 № 3 2025

Новосибирск
Издательство Института математики

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2025. Т. 32, № 3. С. 71–83

УДК 519.8 DOI: 10.33048/daio.2025.32.829

# О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА АНТЕННОЙ РЕШЁТКИ

*А. В. Еремеев*

Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: `eremeev@ofim.oscsbras.ru`

**Аннотация.** Рассматривается задача синтеза фазированной антенной решётки, которая заключается в выборе фаз и амплитуд для всех излучающих элементов, когда требуется, чтобы получаемая диаграмма направленности по каждому рассматриваемому направлению принадлежала заданному множеству. Установлено, что поиск допустимого решения является NP-трудной в сильном смысле задачей в случае, когда по каждому рассматриваемому направлению допускается одно или два значения мощности излучения. Кроме того, доказана NP-трудность поиска допустимого решения в задаче синтеза частично заполненной антенной решётки, когда требуется, чтобы получаемая диаграмма направленности по каждому рассматриваемому направлению принадлежала заданному интервалу и амплитуды всех излучателей были одинаковы. Библиогр. 19.

**Ключевые слова:** вычислительная сложность, антенная решётка, сводимость, NP-полнота.

## Введение

Фазированная антенная решётка (ФАР) представляет собой совокупность излучателей, подключённых к устройствам, обеспечивающим требуемое распределение фаз и амплитуд на этих излучателях. ФАР широко используются в диапазоне сверхвысоких частот для получения излучения с заданной диаграммой направленности (см., например, [1]). В диапазоне высоких частот, который соответствует коротким волнам, такие системы позволяют получить увеличение энергии канала связи или сокращение занимаемого пространства [2, 3].

Задача синтеза ФАР заключается в выборе фаз и амплитуд для всех излучающих элементов, когда требуется, чтобы получаемая диаграмма направленности по каждому из рассматриваемых направлений принадлежала заданному множеству. В некоторых формулировках задачу синтеза ФАР удаётся решить с использованием методов выпуклого программирования [4, 5] или методов линейной алгебры [6, 7]. В частности, в [8] показано, что задачей выпуклого программирования является отыскание возбуждений заданного набора произвольно расположенных источников таким образом, чтобы создать интенсивность дальнего поля, которая максимальна в заданном направлении и подчиняется произвольным верхним границам в других направлениях. Однако, многие авторы вынуждены использовать более трудоёмкие методы, разработанные для решения многоэкстремальных задач, такие как мультистарт градиентной оптимизации [9, 10], метаэвристики [11, 12], методы, основанные на полуопределённой релаксации [13] и т. д.

В настоящей работе для двух вариантов задачи синтеза ФАР доказывается NP-трудность в сильном смысле. Первый вариант соответствует постановке из [13], но имеет специфические требования к диаграмме направленности. Второй вариант предполагает синтез фаз в излучателях частично заполненной решётки с более реалистичными требованиями относительно диаграммы направленности. NP-трудность вытекает из полученных в теоремах 1 и 2 свойств NP-полноты соответствующих задач распознавания, сформулированных в разд. 1 и 2.

## 1. Задача синтеза фазированной антенной решётки

Рассмотрим ФАР, состоящую из $N$ излучающих элементов, размещённых в точках $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N \in \mathbb{R}^3$. Для упрощения обозначений задача описана в случае, когда диаграмма направленности параметризована только значениями полярного угла $\theta$ в фиксированной азимутальной плоскости, которая опущена в обозначениях. Обобщение на случай, когда диаграмма направленности задаётся как по азимутальному, так и по полярному угловому направлению, существенно не усложнит задачу.

Пусть каждый элемент $k$ создаёт парциальное поле $g_k(\theta)$ в направлении $\theta$, т. е. $g_k(\theta)$ — напряжённость электромагнитного поля, создаваемого в направлении $\theta$ на большом расстоянии (т. е. когда размеры ФАР пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до приёмника) при протекании единичного тока через излучающий элемент $k$. Тогда на большом расстоянии напряжённость поля $f(\theta)$, излучаемого всей ФАР в направлении $\theta$, имеет вид (см., например, [13] или подробнее в [14, § 1.13])

$$f(\theta) = \mathbf{a}(\theta)^{\mathsf{H}}\mathbf{w}, \tag{1}$$

$$\mathbf{a}(\theta) = (g_1(\theta)e^{2\pi j\langle \mathbf{r}_1, \mathbf{r}(\theta)\rangle/\lambda}, \dots, g_N(\theta)e^{2\pi j\langle \mathbf{r}_N, \mathbf{r}(\theta)\rangle/\lambda}), \tag{2}$$

где $\lambda$ — длина волны, $j$ — мнимая единица, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение, $\mathbf{w}$ — комплексный вектор возбуждения, определяющий как амплитуду тока $|w_k|$, так и его фазу $\operatorname{Arg} w_k$ в каждом излучателе $k$. Наконец, $\mathbf{r}(\theta)$ — единичный вектор в направлении $\theta$, а верхний индекс $^{\mathsf{H}}$ обозначает эрмитову транспозицию вектора. Введём обозначения

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}(\theta_i), \quad f_i = f(\theta_i) = \mathbf{a}_i^{\mathsf{H}} \mathbf{w}, \quad \mathbf{x} = (\operatorname{Re} \mathbf{w}, \operatorname{Im} \mathbf{w})^\top \in \mathbb{R}^{2N \times 1},$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \mathbf{a}_i^\top & -\operatorname{Im} \mathbf{a}_i^\top \\ \operatorname{Im} \mathbf{a}_i^\top & \operatorname{Re} \mathbf{a}_i^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i^{(11)} & \ldots & a_i^{(1,2N)} \\ a_i^{(21)} & \ldots & a_i^{(2,2N)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2N}.$$

Вещественнозначная версия (1), (2) для напряжённости поля в направлении $\theta_i$ тогда примет вид (подробнее см., например, [9, п. 2.1])

$$(\operatorname{Re} f_i, \operatorname{Im} f_i)^\top = \mathbf{A}_i \mathbf{x}. \tag{3}$$

Мощность, излучаемая ФАР в направлении $\theta_i$, равна

$$|f_i|^2 = \mathbf{x}^\top \mathbf{Q}_i \mathbf{x}, \quad \mathbf{Q}_i = \mathbf{A}_i^\top \mathbf{A}_i. \tag{4}$$

Задача синтеза ФАР (см., например, [13]) сводится к поиску вектора возбуждений $\mathbf{x}$ такого, что для всех направлений $i = 1, \ldots, I$ мощность $|f_i|^2$, излучаемая решёткой в направлении $i$, принадлежит заданному подмножеству $\mathcal{C}_i \subset \mathbb{R}$.

Эта задача полагалась NP-трудной в [13] без строгого доказательства. Очевидно, что она не проще, чем следующая задача распознавания, которую назовём распознавательным вариантом дискретной задачи синтеза ФАР.

**Задача 1** (дискретная задача синтеза ФАР). *Дано $I \in \mathbb{N}$ целочисленных $(2 \times 2N)$-матриц $\mathbf{A}_i$, $i = 1, \ldots, I$, и $2I$ целочисленных значений $\alpha_i \leqslant \beta_i$, $i = 1, \ldots, I$. Существует ли вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$ такой, что*

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A}_i^\top \mathbf{A}_i \mathbf{x} \in \{\alpha_i, \beta_i\}, \quad i = 1, \ldots, I? \tag{5}$$

**Теорема 1.** *Распознавательный вариант дискретной задачи синтеза* ФАР *является* NP-*полной в сильном смысле задачей.*

Перед доказательством теоремы получим следующую техническую лемму, которая предполагает определённую координацию (синхронизацию) возбуждений в элементах $k = 1, \ldots, N-1$ с элементом $N$.

**Лемма 1.** *Если $N \geqslant 3$ и система ограничений содержит условия*

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{Q}_k \mathbf{x} = x_k^2 + x_{N+k}^2 \in \{0, 1\}, \quad k < N, \tag{6}$$

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{Q}_N \mathbf{x} = x_N^2 + x_{2N}^2 = 1, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\top \mathbf{Q}_{N+k} \mathbf{x} = 4x_k^2 + 4x_{N+k}^2 + x_N^2 + x_{2N}^2 &+ \\ + 4x_k x_N + 4x_{N+k} x_{2N} = 1, \quad k < N, \end{aligned} \tag{8}$$

*то для любых $k, \ell < N$ перекрёстные произведения удовлетворяют равенству*

$$x_k x_\ell + x_{N+k} x_{N+\ell} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_k^2 + x_{N+k}^2 = x_\ell^2 + x_{N+\ell}^2 = 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{9}$$

Доказательство. Очевидно, что если имеет место $x_k^2 + x_{N+k}^2 = 0$ или $x_\ell^2 + x_{N+\ell}^2 = 0$, то немедленно получаем $x_k x_\ell + x_{N+k} x_{N+\ell} = 0$, что удовлетворяет (9).

Рассмотрим случай $x_k^2 + x_{N+k}^2 = x_\ell^2 + x_{N+\ell}^2 = 1$. Тогда условие (8) означает, что

$$x_k x_N + x_{N+k} x_{2N} = -1. \tag{10}$$

Легко видеть, что при условии $x_k^2 + x_{N+k}^2 = x_N^2 + x_{2N}^2 = 1$ минимум выражения $x_k x_N + x_{N+k} x_{2N}$ равен $-1$, и он достигается тогда и только тогда, когда $x_k = -x_N$, $x_{N+k} = -x_{2N}$. Как раз этого и требует условие (10) для всех $k < N$, поэтому в рассматриваемом случае $x_k x_\ell + x_{N+k} x_{N+\ell} = x_N^2 + x_{2N}^2 = 1$, где последнее равенство следует из условия (7). Лемма 1 доказана.

Как видно из леммы 1, ограничения (8) обеспечивают согласование фаз во всех излучающих элементах $k < N$ с фазой в элементе $N$, которая может быть произвольной.

Доказательство теоремы 1. Прежде всего отметим, что распознавательный вариант дискретной задачи синтеза ФАР принадлежит классу NP. Далее к рассматриваемой задаче распознавания сведём NP-полную в сильном смысле задачу Независимое множество (см., например, [15]).

**Задача 2** (Независимое множество). *Даны граф $G = (V, E)$ и целое число $K > 0$. Содержит ли граф $G$ подмножество попарно несмежных вершин $S$ мощности $K$ (т. е. независимое множество $S$, $|S| = K$)?*

Пусть $n = |V|$, $m = |E|$, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, а ребро с номером $r = 1, \ldots, m$ имеет вид $e_r = v_{k(r)} v_{\ell(r)}$.

Для заданного графа $G$, т. е. примера задачи Независимое множество, построим пример распознавательной дискретной задачи синтеза ФАР следующим образом. Пусть $N = n + 1$ и все $N$ векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_N$ вещественнозначны:

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0 \ldots, 0)^\top, \quad \mathbf{a}_2 = (0, 1, 0 \ldots, 0)^\top, \quad \ldots, \quad \mathbf{a}_N = (0, 0, \ldots, 0, 1)^\top.$$

Тогда для любого $k = 1, \ldots, N$ все элементы матрицы $\mathbf{A}_k$ нулевые, за исключением $a_k^{(1,k)} = a_k^{(2,N+k)} = 1$.

Подмножества $\mathcal{C}_k$, $k = 1, \ldots, n$, задаются двумя допустимыми значениями излучаемой мощности $\alpha_k = 0$, $\beta_k = 1$. Тем самым $\mathbf{Q}_k = \mathbf{A}_k^\top \mathbf{A}_k$, где все элементы равны нулю, за исключением $q_k^{(kk)} = q_k^{(N+k,N+k)} = 1$ при $k = 1, \ldots, n$, т. е. первые $n$ ограничений в системе (5) имеют вид

$$x_k^2 + x_{N+k}^2 \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Ограничения (11) задают альтернативу (0 или 1) для амплитуды возбуждения в излучающих элементах $1, \ldots, n$, что соответствует альтернативе в задаче Независимое множество: либо включить вершину $v_k$ в набор $S$ (когда $x_k^2 + x_{N+k}^2 = 1$), либо пропустить эту вершину (когда $x_k^2 + x_{N+k}^2 = 0$).

Для последнего элемента ФАР фиксируем единичную амплитуду:

$$x_N^2 + x_{2N}^2 = 1, \tag{12}$$

поэтому $\mathcal{C}_N = \{1\}$. Этот элемент ФАР используем для координации фаз во всех других излучающих элементах в том же смысле, в каком элемент с номером $N$ используется в лемме 1. С этой целью в каждом векторе $\mathbf{a}_{N+k}$, $k = 1, \ldots, n$, положим действительную часть $k$-го компонента равной 2, а действительную часть компонента $N$ положим равной 1. Остальные действительные и все мнимые части комплексного вектора $\mathbf{a}_{N+k}$ полагаются равными 0. Тогда для любого $k = 1, \ldots, n$ все элементы матрицы $\mathbf{A}_{N+k}$ нулевые, за исключением $a_{N+k}^{(1k)} = a_{N+k}^{(2,N+k)} = 2$ и $a_{N+k}^{(1N)} = a_{N+k}^{(2,N)} = 1$.

Подмножества $\mathcal{C}_{N+k}$, $k = 1, \ldots, n$, состоят из одного элемента, равного 1: $\alpha_k = 1$, $\beta_k = 1$ для $k = N+1, \ldots, N+n$. Тогда для любого $k = 1, \ldots, n$ справедливо $\mathbf{Q}_{N+k} = \mathbf{A}_{N+k}^\top \mathbf{A}_{N+k}$, где все элементы равны нулю, за исключением четырёх элементов, соответствующих действительным частям: $q_{N+k}^{(kk)} = 4$, $q_{N+k}^{(N,N)} = 1$, $q_{N+k}^{(kN)} = 2$, $q_{N+k}^{(Nk)} = 2$, и четырёх элементов, соответствующих мнимым частям:

$$q_{N+k}^{(N+k,N+k)} = 4, \quad q_{N+k}^{(2N,2N)} = 1, \quad q_{N+k}^{(N+k,2N)} = 2, \quad q_{N+k}^{(2N,N+k)} = 2.$$

Следовательно, матрицы $\mathbf{Q}_{N+k}, k = 1, \ldots, n$, определяют ограничения

$$4x_k^2 + 4x_{N+k}^2 + x_N^2 + x_{2N}^2 + 4x_k x_N + 4x_{N+k}x_{2N} = 1, \tag{13}$$

где $k = 1. \ldots, n$. Заметим, что ввиду леммы 1 ограничения (13) вместе с (12) дают

$$x_k x_\ell + x_{N+k} x_{N+\ell} \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \ldots, n, \ \ell = 1, \ldots, n. \tag{14}$$

Чтобы представить граф в терминах дискретной задачи синтеза ФАР, для каждого ребра $e_r$, $r = 1, \ldots, m$, положим равными 1 действительные части двух компонент с индексами $k(r)$ и $\ell(r)$ в векторе $\mathbf{a}_{N+n+r}$, остальные действительные части $\operatorname{Re} \mathbf{a}_{N+n+r}$ полагаем равными нулю, как и все мнимые части, т. е. $\operatorname{Im}\mathbf{a}_{N+n+r} = (0,0,\dots,0)^\top$. Тогда для любого $r = 1,\dots,m$ матрица $\mathbf{A}_{N+n+r}$ состоит из нулевых элементов, за исключением

$$a_{N+n+r}^{(1,k(r))} = a_{N+n+r}^{(1,\ell(r))} = a_{N+n+r}^{(2,N+k(r))} = a_{N+n+r}^{(2,N+\ell(r))} = 1.$$

Подмножества $\mathcal{C}_{N+n+r}$ снова состоят из двух элементов, нуля и единицы: $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 1$ для $i = N+n+1,\dots,N+n+m$. Тогда для любого $r = 1,\dots,m$ имеем $\mathbf{Q}_{N+n+r} = \mathbf{A}_{N+n+r}^\top \mathbf{A}_{N+n+r}$, где все элементы равны нулю, за исключением четырёх элементов, соответствующих действительным частям:

$$q_{N+n+r}^{(k(r),k(r))} = q_{N+n+r}^{(\ell(r),\ell(r))} = q_{N+n+r}^{(k(r),\ell(r))} = q_{N+n+r}^{(\ell(r),k(r))} = 1,$$

и четырёх элементов, соответствующих мнимым частям:

$$q_{N+n+r}^{(N+k(r),N+k(r))} = q_{N+n+r}^{(N+\ell(r),N+\ell(r))} = q_{N+n+r}^{(N+k(r),N+\ell(r))} = q_{N+n+r}^{(N+\ell(r),N+k(r))} = 1.$$

Следовательно, матрицы $\mathbf{Q}_{N+n+r}$, $r = 1,\dots,m$, определяют ограничения

$$\begin{aligned} &x_{k(r)}^2 + x_{N+k(r)}^2 + x_{\ell(r)}^2 + x_{N+\ell(r)}^2 + \\ &\qquad + 2x_{k(r)}x_{\ell(r)} + 2x_{N+k(r)}x_{N+\ell(r)} \in \{0,1\}, \quad r = 1,\dots,m, \end{aligned} \tag{15}$$

которые вместе с (14) показывают, что должно выполняться хотя бы одно из равенств $x_{k(r)}^2 + x_{N+k(r)}^2 = 0$, $x_{\ell(r)}^2 + x_{N+\ell(r)}^2 = 0$. Это соответствует требованию, чтобы оба конца ребра $e_r$ не принадлежали одновременно множеству $S$.

Для подсчёта числа излучающих элементов с единичной амплитудой возбуждения определим вектор $\mathbf{a}_I$, $I = N+n+m+1$, равенствами

$$\operatorname{Re}\mathbf{a}_I = (1,1,\dots,1,0)^\top, \quad \operatorname{Im}\mathbf{a}_I = (0,0,\dots,0,0)^\top,$$

т. е.

$$\mathbf{A}_I = \begin{pmatrix} 1,\dots,1,0 & 0,\dots,0,0 \\ 0,\dots,0,0 & 1,\dots,1,0 \end{pmatrix},$$

и в $\mathbf{Q}_I = \mathbf{A}_I^\top \mathbf{A}_I$ имеем $q_I^{(k\ell)} = q_I^{(N+k,N+\ell)} = 1$ для всех $k,\ell = 1,\dots,n$, остальные элементы в $\mathbf{Q}_I$ равны нулю.

Пусть $M = \big\{k \in \{1,\dots,n\} \mid x_k^2 + x_{N+k}^2 = 1\big\}$. Тогда

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{Q}_I \mathbf{x} = \sum_{k,\ell\in M} (x_k x_\ell + x_{N+k}x_{N+\ell}) = |M|^2 \tag{16}$$

в силу леммы 1 и определения множества $M$.

Наконец, положим $\alpha_I = \beta_I = K^2$, т. е. последнее ограничение в задаче синтеза ФАР имеет вид

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{Q}_I \mathbf{x} = |K|^2. \tag{17}$$

С одной стороны, если этот экземпляр распознавательной задачи синтеза ФАР имеет допустимое решение, то из (16) следует, что $|M| = K$, а множество вершин $S = \{v_i \mid i \in M\}$ является независимым в графе $G$ и имеет размер $K$. С другой стороны, если $|S| = K$ в задаче Независимое множество, то можно положить $x_k = 1$ для всех $k \leqslant n$ таких, что $v_k \in S$, и для $k = n + 1$, а остальные компоненты вектора $\mathbf{x}$ установить равными нулю. Легко проверить, что все ограничения соответствующего экземпляра распознавательной задачи синтеза ФАР выполнены.

Следовательно, индивидуальная задача Независимое множество имеет положительный ответ тогда и только тогда, когда построенный нами пример имеет положительный ответ, и это построение выполнимо за полиномиальное время. Таким образом, распознавательный вариант дискретной задачи синтеза ФАР — NP-полная задача. Более того, эта задача NP-полна в сильном смысле, поскольку числовые параметры построенного примера полиномиально ограничены от размера графа в исходной задаче Независимое множество. Теорема 1 доказана.

## 2. Интервальная задача синтеза фаз в частично заполненной антенной решётке

Как правило, излучатели ФАР располагаются некоторым регулярным образом с фиксированным шагом, например, на линии, в узлах прямоугольной решётки, в вершинах правильного многоугольника и т. п. Однако в некоторых случаях могут использоваться и *прореженные* ФАР, в которых часть регулярных позиций не заполнена. Пусть $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N \in \mathbb{R}^3$ далее описывают расположение регулярных позиций. Прореженные ФАР, таким образом, имеют менее $N$ излучателей, что выгодно снижает стоимость и взаимное влияние между элементами, но также невыгодно повышает излучаемую мощность в нежелательных направлениях (см., например, [14, 16, § 1.17]). Прореженные ФАР, в которых все элементы имеют одинаковую мощность возбуждения, могут быть основаны на случайном расположении элементов (см., например, [17, 18, гл. 7]) или специально выбранном подмножестве регулярных положений излучателей, например, с использованием разностных множеств [16, 19].

Некоторое снижение излучаемой мощности в нежелаемых направлениях может быть получено путём подачи неравных по амплитуде возбуждений на элементы антенны. Как отмечено в [16], недостаток этого подхода заключается в том, что усиление ФАР будет меньше, чем у решётки, в которой полная мощность прикладывается ко всем элементам, что также согласуется с результатами вычислительных экспериментов в [9, § 3.2]. В связи с этим в этом разделе рассмотрим задачу синтеза ФАР, где амплитуды возбуждения не подлежат оптимизации.

Задача заключается в выборе подмножества излучателей из заданной ФАР, состоящей из $N$ элементов, и в назначении фаз возбуждения выбранным элементам так, чтобы для всех направлений $i = 1, \ldots, I$ мощность, излучаемая решёткой в направлении $i$, принадлежала соответствующему интервальному подмножеству $\mathcal{C}_i = [L_i, U_i] \subset \mathbb{R}$. Без потери общности можно предположить, что амплитуда в каждом элементе равна 1. Очевидно, что такая задача синтеза ФАР не будет проще следующей задачи распознавания, которую назовём распознавательным вариантом задачи синтеза частично заполненной ФАР.

**Задача 3** (синтез частично заполненной ФАР). *Даны $I \in \mathbb{N}$ целочисленных $(2 \times 2N)$-матриц $\mathbf{A}_i$, $i = 1, \ldots, I$, и $2I$ целочисленных значений $L_i \leqslant U_i$, $i = 1, \ldots, I$. Существует ли вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{2N}$ такой, что*

$$x_k^2 + x_{N+k}^2 \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \ldots, N, \tag{18}$$

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A}_i^\top \mathbf{A}_i \mathbf{x} \in [L_i, U_i], \quad i = 1, \ldots, I? \tag{19}$$

Условие (18) здесь подразумевает, что излучающий элемент создаётся на позиции $k$ тогда и только тогда, когда $x_k^2 + x_{N+k}^2 \in \{0, 1\}$.

Заметим, что в отличие от распознавательного варианта дискретной задачи синтеза ФАР, сформулированная здесь задача требует, чтобы излучаемая мощность в каждом направлении $i = 1, \ldots, I$ принадлежала непрерывному интервалу $[L_i, U_i]$, а не дискретному множеству $\{\alpha_i, \beta_i\}$. В этом смысле распознавательный вариант задачи синтеза частично заполненной ФАР имеет более реалистичную постановку.

**Теорема 2.** *Распознавательный вариант задачи синтеза частично заполненной* ФАР *является* NP*-полной в сильном смысле задачей.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 с тем отличием, что здесь при построении сводимости не требуются ограничения (11), так как они следуют из условия (18), содержащегося в формулировке задачи. Аналоги всех прочих ограничений — (12), (13), (15) и (17) — отличаются тем, что в правой части содержат интервалы $[L_i, U_i]$, где $L_i = \alpha_i$, $U_i = \beta_i$. Теорема 2 доказана.

## Заключение

С использованием эффективной сводимости известной NP-полной задачи Независимое множество показано, что поиск допустимого возбуждения ФАР является NP-трудной в сильном смысле задачей в случае, когда по каждому направлению допускается одно или два значения мощности излучения (теорема 1). Формально эта задача является частным случаем рассмотренной в [13] задачи синтеза ФАР. Однако более реалистичной постановкой является другой частный случай, когда по каждому направлению задан непрерывный интервал для мощности излучения (интервальная постановка). Частный случай этой задачи, когда допустимые интервалы на излучаемую мощность представляют собой верхние границы, эффективно разрешим [8]. Предполагается, что дальнейшие исследования позволят уточнить границу, разделяющую труднорешаемые варианты задачи синтеза ФАР от эффективно разрешимых случаев.

В работе также рассмотрена модификация интервальной постановки задачи, когда в каждой известной позиции можно установить или не устанавливать излучающий элемент, амплитуды всех излучателей одинаковы, а фазы излучателей требуется найти. NP-трудность поиска допустимого решения для этой задачи следует из теоремы 2.

Автор благодарен А. С. Юркову за полезные замечания и М. Н. Макурину за указание на известные результаты по прореженным ФАР.

### Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева (проект № FWNF–2022–0020). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

### Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

### Литература

1. **Hansen R. C.** Phased array antennas. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 1979. 580 p.
2. **Kudzin V. P., Lozovsky V. N., Shlyk N. I.** The compact linear antenna array system of the short-wave band consisting of “butterfly” radiators // Proc. 9th Int. Conf. Antenna Theory and Techniques (Odessa, Ukraine, Sept. 16–20, 2013). Piscataway: IEEE, 2013. P. 252–253.
3. **Wilensky R.** High-power, broad-bandwidth HF dipole curtain array with extensive vertical and azimuthal beam control // IEEE Trans. Broadcast. 1988. V. 34, No. 2. P. 201–209. DOI: `10.1109/11.1437`.
4. **Echeveste J. I., González de Aza M. A., Zapata J.** Shaped beam synthesis of real antenna arrays via finite-element method, floquet modal analysis, and convex programming // IEEE Trans. Antennas Propag. 2016. V. 64, No. 4. P. 1279–1286. DOI: `10.1109/TAP.2016.2526038`.
5. **Bucci O., Caccavale L., Isernia T.** Optimal far-field focusing of uniformly spaced arrays subject to arbitrary upper bounds in non-target directions // IEEE Trans. Antennas Propag. 2002. V. 50, No. 11. P. 1539–1554. DOI: `10.1109/TAP.2002.803959`.
6. **Юрков А. С.** Оптимизация возбуждения передающих фазированных антенных решёток декаметрового диапазона длин волн. Омск: ОНИИП, 2014. 65 с.

7. **Юрков А. С.** Максимизация направленности фазированных антенных решёток коротковолнового диапазона // Техника радиосвязи. 2016. № 2. С. 46–53.
8. **Isernia T., Di Iorio P., Soldovieri F.** An effective approach for the optimal focusing of array fields subject to arbitrary upper bounds // IEEE Trans. Antennas Propag. 2000. V. 48, No. 12. P. 1837–1847. DOI: `10.1109/8.901272`.
9. **Тюнин Н. Н.** Задачи невыпуклого квадратичного программирования, связанные с оптимизацией фазированных антенных решёток // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2021. Т. 28, № 3. С. 65–89.
10. **Indenbom M., Izhutkin V., Sharapov A., Zonov A.** Synthesis of conical phased antenna arrays optimization of amplitude distribution parameters // Proc. 9th Int. Conf. Optimization and Applications (Petrovac, Montenegro, Oct. 1–5, 2018). Lancaster, PA: DEStech Publ., 2018. P. 273–285.
11. **Akdagli A., Guney K.** Shaped-beam pattern synthesis of equally and unequally spaced linear antenna arrays using a modified tabu search algorithm algorithm // Microw. Opt. Technol. Lett. 2003. V. 36, No. 1. P. 16–20. DOI: `10.1002/mop.10657`.
12. **Villegas F. J.** Parallel genetic-algorithm optimization of shaped beam coverage areas using planar 2-D phased arrays // IEEE Trans. Antennas Propag. 2007. V. 55, No. 6. P. 1745–1753. DOI: `10.1109/TAP.2007.898601`.
13. **Fuchs B.** Application of convex relaxation to array synthesis problems // IEEE Trans. Antennas Propag. 2014. V. 62, No. 2. P. 634–640.
14. **Щелкунов С. А., Фриис Г. Т.** Антенны: Теория и практика. М.: Советское радио, 1955. 604 с.
15. **Garey M. R., Johnson D. S.** Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. San Francisco: Freeman, 1979. 338 p.
16. **Leeper D. G.** Thinned aperiodic antenna arrays with improved peak sidelobe level control. US Patent 4,071,848 (Jan 31, 1978). Murray Hill, NJ: Bell Teleph. Lab., 1976. URL: `patentimages.storage.googleapis.com/30/73/fa/25b9b72c3d3e8a/US4071848.pdf` (accessed: 20.09.2025).
17. **Steinberg B. D.** The peak sidelobe of the phased array having randomly located elements // IEEE Trans. Antennas Propag. 1972. V. 20, No. 2. P. 129–136. DOI: `10.1109/TAP.1972.1140162`.
18. **Steinberg B. D.** Principles of aperture and array system design. New York: John Wiley & Sons, 1976. 356 p.
19. **Копилович Л. Е., Содин Л. Г.** Линейные не-эквидистантные антенны-решётки на базе разностных множеств // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34, № 10. С. 2059–2066.


*Еремеев Антон Валентинович*

Статья поступила
17 февраля 2025 г.
После доработки —
5 мая 2025 г.
Принята к публикации
22 июня 2025 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2025. Vol. 32, No. 3. P. 71–83

UDC 519.8 DOI: 10.33048/daio.2025.32.829

# ON COMPUTATIONAL COMPLEXITY OF PHASED ANTENNA ARRAY SYNTHESIS

*A. V. Eremeev*

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: `eremeev@ofim.oscsbras.ru`

**Abstract.** We consider the problem of phased antenna array synthesis, which consists of choosing phases and amplitudes for all radiating elements when it is required that the resulting radiation pattern in each direction considered belongs to a given set. It is established that the search for an admissible solution is a strongly NP-hard problem in the case when, for each direction considered, one or two radiation power values are allowed. In addition, the NP-hardness of finding an admissible solution in the problem of synthesis of a thinned antenna array is proven in the case when, for each direction considered, radiation power belongs to a given interval and excitation amplitudes in all elements are identical. Bibliogr. 19.

**Keywords:** computational complexity, antenna array, reduction, NP-completeness.

## References

1. **R. C. Hansen,** *Phased Array Antennas* (John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 1979).
2. **V. P. Kudzin, V. N. Lozovsky,** and **N. I. Shlyk,** The compact linear antenna array system of the short-wave band consisting of “butterfly” radiators, in *Proc. 9th Int. Conf. Antenna Theory and Techniques* (Odessa, Ukraine, Sept. 16–20, 2013) (IEEE, Piscataway, 2013), pp. 252–253.
3. **R. Wilensky,** High-power, broad-bandwidth HF dipole curtain array with extensive vertical and azimuthal beam control, *IEEE Trans. Broadcast.* **34** (2), 201–209 (1988), DOI: `10.1109/11.1437`.

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **19** (3) (2025).

4. **J. I. Echeveste, M. A. González de Aza,** and **J. Zapata,** Shaped beam synthesis of real antenna arrays via finite-element method, floquet modal analysis, and convex programming, *IEEE Trans. Antennas Propag.* **64** (4), 1279–1286 (2016), DOI: `10.1109/TAP.2016.2526038`.
5. **O. Bucci, L. Caccavale,** and **T. Isernia,** Optimal far-field focusing of uniformly spaced arrays subject to arbitrary upper bounds in non-target directions, *IEEE Trans. Antennas Propag.* **50** (11), 1539–1554 (2002), DOI: `10.1109/TAP.2002.803959`.
6. **A. S. Yurkov,** *Optimizing Excitation of Transmitting Phased Antenna Arrays in the Decameter Wavelength Range* (ONIIP, Omsk, 2014) [Russian].
7. **A. S. Yurkov,** Maximizing the directivity of short-range phased antenna arras, *Tekh. Radiosvyazi*, No. 2, 46–53 (2016) [Russian].
8. **T. Isernia, P. Di Iorio,** and **F. Soldovieri,** An effective approach for the optimal focusing of array fields subject to arbitrary upper bounds, *IEEE Trans. Antennas Propag.* **48** (12), 1837–1847 (2000). DOI: `10.1109/8.901272`.
9. **N. N. Tyunin,** The problems of non-convex quadratic programming related to phased antenna arrays optimization, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **28** (3), 65–89 (2021) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **15** (3), 543-557 (2021), `DOI:10.1134/S1990478921030157`].
10. **M. Indenbom, V. Izhutkin, A. Sharapov,** and **A. Zonov,** Synthesis of conical phased antenna arrays optimization of amplitude distribution parameters, in *Proc. 9th Int. Conf. Optimization and Applications* (Petrovac, Montenegro, Oct. 1–5, 2018) (DEStech Publ., Lancaster, PA, 2018), pp. 273–285.
11. **A. Akdagli** and **K. Guney,** Shaped-beam pattern synthesis of equally and unequally spaced linear antenna arrays using a modified tabu search algorithm algorithm, *Microw. Opt. Technol. Lett.* **36** (1), 16–20 (2003), DOI: `10.1002/mop.10657`.
12. **F. J. Villegas,** Parallel genetic-algorithm optimization of shaped beam coverage areas using planar 2-D phased arrays, *IEEE Trans. Antennas Propag.* **55** (6), 1745–1753 (2007), DOI: `10.1109/TAP.2007.898601`.
13. **B. Fuchs,** Application of convex relaxation to array synthesis problems, *IEEE Trans. Antennas Propag.* **62** (2), 634–640 (2014). DOI: `10.1109/TAP.2013.2290797`.
14. **S. A. Schelkunoff** and **H. T. Friis,** *Antennas: Theory and Practice* (John Wiley & Sons, New York, 1952; Sov. Radio, Moscow, 1955 [Russian]).
15. **M. R. Garey** and **D. S. Johnson,** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* (Freeman, San Francisco, 1979).
16. **D. G. Leeper,** Thinned aperiodic antenna arrays with improved peak sidelobe level control, *US Patent 4,071,848* (Jan 31, 1978) (Bell Teleph. Lab., Murray Hill, NJ, 1976), URL: `patentimages.storage.googleapis.com/30/73/fa/25b9b72c3d3e8a/US4071848.pdf` (accessed: 20.09.2025).
17. **B. D. Steinberg,** The peak sidelobe of the phased array having randomly located elements, *IEEE Trans. Antennas Propag.* **20** (2), 129–136 (1972), DOI: `10.1109/TAP.1972.1140162`.

**18.** **B. D. Steinberg,** *Principles of Aperture and Array System Design* (John Wiley & Sons, New York, 1976).

**19.** **L. E. Kopilovich** and **L. G. Sodin,** Linear non-equidistant antenna arrays based on difference sets, *Radiotekh. Elektron.* **34** (10), 2059–2066 (1989).

*Anton V. Eremeev*

Received February 17, 2025
Revised May 5, 2025
Accepted June 22, 2025