ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 32 № 3 2025

Новосибирск
Издательство Института математики

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Июль–сентябрь 2025. Т. 32, № 3. С. 84–97

УДК 512.534.1 DOI: 10.33048/daio.2025.32.824

ОБОБЩЁННЫЕ ЦЕНТРАЛИЗАТОРЫ БИНАРНОГО ОТНОШЕНИЯ

М. В. Лежнин[a], *Д. А. Хвощевский*[b]

НИУ «Московский институт электронной техники»,
пл. Шокина, 1, 124498 Москва, Россия
E-mail: [a]`max.lezhnin@gmail.com`, [b]`dima1667@gmail.com`

Аннотация. Рассматриваются обобщённые централизаторы бинарного отношения σ, представляющие собой полугруппы отношений (многозначных отображений), сохраняющих отношение σ в определённом смысле. Определяется восемь неэквивалентных условий того, что может значить термин «сохранять отношение». Рассмотрены все возможные комбинации этих условий, приводящие к различным полугруппам обобщённых централизаторов бинарного отношения, в зависимости от мощности множества, на котором это отношение задано. В частности, доказано восемь теорем, устанавливающих связь между этими условиями: первые четыре теоремы выполняются только для конечных множеств, а последние — для произвольных. Также установлена полнота этого списка теорем для множеств мощности не меньше 4. Для каждой мощности дан исчерпывающий ответ на вопрос о числе обобщённых централизаторов. Табл. 2, библиогр. 5.

Ключевые слова: обобщённый централизатор, полугруппа бинарных отношений.

Введение

Для непустого множества X определим следующие множества:

- $S(X)$ — множество всех биективных отображений $\alpha\colon X \to X$;
- $T(X)$ — множество всех отображений $\alpha\colon X \to X$;
- $P(X)$ — множество всех частичных отображений $\alpha\colon X_1 \to X$, где $X_1 \subseteq X$ — произвольное подмножество;
- $B(X)$ — множество всех многозначных отображений $\alpha\colon X \to X$, т. е. бинарных отношений $\alpha \subseteq X \times X$.

Элементы из $S(X)$, $T(X)$, $P(X)$ можно также рассматривать как бинарные отношения, т. е. отождествлять отображение α с отношением $\{(x, x\alpha) \in X \times X \mid \text{образ } x\alpha \text{ определён}\}$.

© М. В. Лежнин, Д. А. Хвощевский, 2025

На этих множествах можно ввести умножение следующим образом:

$$\alpha\beta = \{(x, y) \in X \times X \mid \exists\, z\colon (x, z) \in \alpha,\ (z, y) \in \beta\}.$$

Относительно этой бинарной операции вышеописанные множества образуют полугруппы, а $S(X)$ — группу.

Замечание 1. Справедливы включения $S(X) \subseteq T(X) \subseteq P(X) \subseteq B(X)$, и при $|X| \geqslant 2$ все включения строгие. Каждая предыдущая полугруппа — подполугруппа следующей, а $S(X)$ — подгруппа $T(X)$.

Например, при $X = \{1, 2, 3, 4\}$ имеем

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in T(X) \setminus S(X), \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ - & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in P(X) \setminus T(X),$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \{1, 3\} & - & 2 & \{2, 3, 4\} \end{pmatrix} \in B(X) \setminus P(X).$$

Замечание 2. Бинарные отношения можно понимать и в более широком смысле как $\alpha \subseteq A \times B$. Тогда можно будет умножать $\alpha \subseteq A \times B$ на $\beta \subseteq B \times C$, получая $\alpha\beta \subseteq A \times C$ (см. [1]).

Для $\alpha \in B(X)$ определяется отношение

$$\alpha^{-1} = \{(y, x) \in X \times X \mid (x, y) \in \alpha\}.$$

Вообще, для $\alpha \subseteq X \times Y$ аналогично определяется $\alpha^{-1} \subseteq Y \times X$.

Пусть $x, y \in X$ и $\alpha \in T(X)$. Определим действие полугруппы отображений на множестве X следующим образом:

$$x\alpha = y \Leftrightarrow (x, y) \in \alpha.$$

Что означает фраза «преобразование α сохраняет отношение σ»? Для $\alpha \in P(X)$ можно определять сохранение σ разными неэквивалентными способами, как описано в [2]. Бинарное отношение σ можно рассматривать как граф с множеством вершин X, тогда фраза «отображение $\alpha\colon X \to X$ сохраняет σ» может означать, что α является эндоморфизмом графа. Различные подходы к понятию эндоморфизма графа описаны в [3]. Сохранение n-арного отношения рассматривалось в [4].

В качестве определения понятия «отображение $\alpha\colon X \to X$ сохраняет отношение $\sigma \in B(X)$» возьмём следующее:

$$\forall\, x, y \in X \quad (x, y) \in \sigma \to (x\alpha, y\alpha) \in \sigma.$$

Легко доказать, что это условие равносильно каждому из включений $\sigma \subseteq \alpha\sigma\alpha^{-1}$, $\alpha^{-1}\sigma\alpha \subseteq \sigma$, $\sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma$, $\alpha^{-1}\sigma \subseteq \sigma\alpha^{-1}$. При рассмотрении произвольного отношения вместо отображения α эти условия оказываются, вообще говоря, неэквивалентными. Например, полугруппы отношений с условиями $\sigma \subseteq \alpha\sigma\alpha^{-1}$ и $\alpha^{-1}\sigma\alpha \subseteq \sigma$, рассмотренные в [5], различны.

Отметим также, что в случае, когда α представляет собой отношение, а не отображение, α и α^{-1} равноправны. По этой причине кроме приведённых выше четырёх включений имеет смысл рассматривать также четыре двойственных к ним, которые получаются заменой α на α^{-1}, поэтому в настоящей работе рассматриваются следующие 8 соотношений:

$$\begin{array}{ll}
(1)\ \alpha\sigma\alpha^{-1} \subseteq \sigma, & (2)\ \sigma \subseteq \alpha\sigma\alpha^{-1}, \\
(3)\ \alpha^{-1}\sigma\alpha \subseteq \sigma, & (4)\ \sigma \subseteq \alpha^{-1}\sigma\alpha, \\
(5)\ \sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma, & (6)\ \alpha\sigma \subseteq \sigma\alpha, \\
(7)\ \sigma\alpha^{-1} \subseteq \alpha^{-1}\sigma, & (8)\ \alpha^{-1}\sigma \subseteq \sigma\alpha^{-1}.
\end{array}$$

Пусть $I = \{1, \ldots, 8\}$ — множество номеров рассматриваемых условий. Каждой паре отношений (σ, α) поставим в соответствие набор $K(\sigma, \alpha) = (k_1, \ldots, k_8) \in \{0,1\}^8$, в котором $k_i = 0$, если соотношение (i) не выполняется, и $k_i = 1$, если соотношение (i) выполняется, где $i \in I$. Всего есть $2^{|I|} = 2^8 = 256$ наборов, однако многие из них невозможны, так как из некоторых соотношений можно вывести другие. Например, как будет показано далее, $(2) \wedge (3) \to (5)$, а значит, все наборы вида $*11{*}0{*}{*}{*}$ невозможны. Далее для всех мощностей множества X будет определено, какие наборы возможны, а какие невозможны.

Для $\sigma \in B(X)$ и $i \in I$ положим

$$B^i_\sigma(X) = \{\alpha \in B(X) \mid \alpha \text{ удовлетворяет условию } (i)\}.$$

Нетрудно проверить, что множество $B^i_\sigma(X)$ — подполугруппа полугруппы $B(X)$. Следовательно, если $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq I$, то множество

$$B^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_\sigma(X) = B^{i_1}_\sigma(X) \cap B^{i_2}_\sigma(X) \cap \cdots \cap B^{i_k}_\sigma(X)$$

также представляет собой подполугруппу полугруппы $B(X)$. Полугруппу $B^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_\sigma(X)$ можно условно считать полугруппой отображений (возможно, многозначных), сохраняющих σ. Наряду с $B^i_\sigma(X)$ можно рассматривать полугруппы $P^i_\sigma(X) = P(X) \cap B^i_\sigma(X)$ и $T^i_\sigma(X) = T(X) \cap B^i_\sigma(X)$, а также их пересечения.

Множество $B^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_\sigma(X)$ будем называть *обобщённым централизатором бинарного отношения* $\sigma \in B(X)$, а функцию $B^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_\bullet(X)\colon \sigma \mapsto B^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_\sigma(X)$ — *обобщённым централизатором*. Сразу видно, что для любого множества X имеется не больше чем $2^{|I|} = 2^8 = 256$ обобщённых централизаторов. Оказывается, что их всегда будет значительно меньше чем 256, так как из некоторых соотношений можно вывести другие, а значит, многие обобщённые централизаторы будут совпадать друг с другом. Например, как будет показано далее, $(2) \wedge (3) \to (5)$, а значит, $B^{2,3}_\bullet(X)$ и $B^{2,3,5}_\bullet(X)$ совпадают. Цель этой работы — для всех мощностей X определить, какие обобщённые централизаторы совпадают, а какие нет.

Утверждение 1. *Для произвольного множества X возможных наборов не больше, чем обобщённых централизаторов.*

Доказательство. Пусть $P = (p_1, \dots, p_8)$ и $Q = (q_1, \dots, q_8)$ — произвольные наборы. Введём отношение частичного порядка на наборах следующим образом:

$$P \preccurlyeq Q \Leftrightarrow \forall\, i \in I\ p_i \leqslant q_i.$$

Будем называть набор $P = (p_1, \dots, p_8)$ *допустимым* для обобщённого централизатора $B^S_\bullet(X)$ в том и только том случае, когда выполняется импликация $i \in S \to p_i = 1$. Например, для обобщённого централизатора $B^{1,4,5}_\bullet(X)$ допустимыми будут наборы вида $1{*}{*}11{*}{*}{*}$ и только они.

Произвольному возможному набору $P = (p_1, \dots, p_8)$ поставим в соответствие обобщённый централизатор $f(P) = B^S_\bullet(X)$ для множества $S = \{i \in I \mid p_i = 1\}$. Покажем, что отображение f из множества возможных наборов в множество обобщённых централизаторов инъективно. Пусть $f(P) = f(Q)$, покажем, что $P = Q$. Рассмотрим множество $\{K(\sigma, \alpha) \mid \alpha \in f(P)(\sigma)\}$ возможных допустимых наборов для обобщённого централизатора $f(P)$. У него есть наименьший относительно порядка $\preccurlyeq$ элемент P. Аналогично у множества $\{K(\sigma, \alpha) \mid \alpha \in f(Q)(\sigma)\}$ есть наименьший элемент Q. Так как $f(P) = f(Q)$, эти множества равны, а поскольку у любого частично упорядоченного множества не больше одного наименьшего элемента, получаем $P = Q$. Следовательно, отображение f инъективное, т. е. возможных наборов не больше, чем обобщённых централизаторов. Утверждение 1 доказано.

Замечание 3. Отметим, что число возможных наборов и число обобщённых централизаторов не всегда совпадают, так как существуют обобщённые централизаторы, для которых множество возможных наборов не имеет наименьшего элемента. Например, для множеств мощности 2 выполняется $(4) \to (1) \vee (2)$, при этом $(4) \nrightarrow (1)$ и $(4) \nrightarrow (2)$, а значит, у $B^4_\bullet(X)$ нет наименьшего возможного набора. Здесь и далее при записи утверждений вывода будем подразумевать, что импликация имеет наименьший приоритет перед операциями в левой и правой частях.

Утверждение 2. *Пусть $|X| \leqslant |Y|$ для множеств X и Y.*

1. *Если набор возможен для X, то он возможен для Y. В частности, число возможных наборов для X не больше, чем для Y.*

2. *Если два обобщённых централизатора различны для X, то они различны для Y. В частности, число обобщённых централизаторов для X не больше, чем для Y.*

Доказательство. Так как $|X| \leqslant |Y|$, существует инъективное отображение $f\colon X \to Y$.

1. Если набор P возможен на множестве X, то существует пара (σ, α) отношений на множестве X таких, что $K(\sigma, \alpha) = P$. Тогда имеем следующую пару $(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\alpha})$ отношений на множестве Y таких, что $K(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\alpha}) = P$:

$$\widetilde{\sigma} = \{(f(a), f(b)) \mid (a, b) \in \sigma\}, \quad \widetilde{\alpha} = \{(f(a), f(b)) \mid (a, b) \in \alpha\}.$$

2. Если $B_{\bullet}^{S}(X)$ и $B_{\bullet}^{T}(X)$ различны на множестве X, то существует пара (σ, α) отношений на множестве X таких, что $\alpha \in B_{\sigma}^{S}(X)$ и $\alpha \notin B_{\sigma}^{T}(X)$, или таких, что $\alpha \notin B_{\sigma}^{S}(X)$ и $\alpha \in B_{\sigma}^{T}(X)$. Без ограничения общности будем считать, что выполняется первый случай, т. е. $\alpha \in B_{\sigma}^{S}(X)$ и $\alpha \notin B_{\sigma}^{T}(X)$. Тогда имеем следующую пару $(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\alpha})$ отношений на множестве Y таких, что $\widetilde{\alpha} \in B_{\widetilde{\sigma}}^{S}(X)$ и $\widetilde{\alpha} \notin B_{\widetilde{\sigma}}^{T}(X)$:

$$\widetilde{\sigma} = \{(f(a), f(b)) \mid (a, b) \in \sigma\}, \quad \widetilde{\alpha} = \{(f(a), f(b)) \mid (a, b) \in \alpha\}.$$

Утверждение 2 доказано.

1. Результаты для конечных множеств

С помощью полного компьютерного перебора пар (σ, α) бинарных отношений на множестве X мощности $|X| \leqslant 4$ найдены все возможные наборы и все обобщённые централизаторы, их количества приведены в табл. 1. Так как для некоторых мощностей их достаточно много, вместо возможных наборов и обобщённых централизаторов для каждой мощности приведём системы утверждений, по которым их можно восстановить.

Все представленные ниже системы утверждений обладают тремя полезными свойствами:

1) *корректность,* т. е. для каждого возможного набора выполняются все утверждения системы;

2) *полнота,* т. е. каждый набор, для которого выполняются все утверждения системы, возможный;

3) *независимость,* т. е. если исключить какое-нибудь утверждение из системы, то появятся новые наборы, для которых выполняются все утверждения системы.

Таблица 1

Результаты компьютерного перебора

|X|	Число возможных наборов	Число обобщённых централизаторов
0	1	1
1	2	2
2	38	127
3	143	151
4	151	151

Система утверждений для $|X| = 0$:

$$(1),\quad (2),\quad (3),\quad (4),\quad (5),\quad (6),\quad (7),\quad (8).$$

Система утверждений для $|X| = 1$:

$$(1),\quad (2) \to (4),\quad (3),\quad (4) \to (2),\quad (5),\quad (6),\quad (7),\quad (8).$$

Система утверждений для $|X| = 2$:

$$(3) \wedge (4) \wedge (6) \wedge (7) \to (1),\quad (3) \wedge (6) \wedge (7) \wedge (8) \to (5),$$
$$(3) \wedge (4) \wedge (5) \wedge (8) \to (2),\quad (1) \wedge (5) \wedge (7) \wedge (8) \to (6),$$
$$(1) \wedge (2) \wedge (5) \wedge (8) \to (3),\quad (1) \wedge (5) \wedge (6) \wedge (8) \to (7),$$
$$(1) \wedge (2) \wedge (6) \wedge (7) \to (4),\quad (3) \wedge (5) \wedge (6) \wedge (7) \to (8),$$
$$(2) \wedge (3) \to (5),\quad (6) \wedge (7) \to (1) \vee (5),\quad (6) \to (1) \vee (5) \vee (8),$$
$$(1) \wedge (4) \to (6),\quad (6) \wedge (7) \to (1) \vee (8),\quad (7) \to (1) \vee (5) \vee (8),$$
$$(1) \wedge (4) \to (7),\quad (5) \wedge (8) \to (3) \vee (6),\quad (5) \to (3) \vee (6) \vee (7),$$
$$(2) \wedge (3) \to (8),\quad (5) \wedge (8) \to (3) \vee (7),\quad (8) \to (3) \vee (6) \vee (7),$$
$$(1) \wedge (5) \to (2) \vee (6) \vee (7),\quad (1) \wedge (8) \to (2) \vee (6) \vee (7),$$
$$(3) \wedge (6) \to (4) \vee (5) \vee (8),\quad (3) \wedge (7) \to (4) \vee (5) \vee (8),$$
$$(4) \to (1) \vee (2),\quad (6) \to (1) \vee (2),\quad (7) \to (1) \vee (2),$$
$$(2) \to (3) \vee (4),\quad (5) \to (3) \vee (4),\quad (8) \to (3) \vee (4).$$

Система утверждений для $|X| = 3$:

$$(1) \wedge (2) \wedge (7) \to (5) \vee (6),\quad (3) \wedge (4) \wedge (8) \to (5) \vee (6),$$
$$(1) \wedge (2) \wedge (6) \to (7) \vee (8),\quad (3) \wedge (4) \wedge (5) \to (7) \vee (8),$$
$$(3) \wedge (4) \wedge (6) \wedge (7) \to (1),\quad (2) \wedge (3) \to (5),$$
$$(3) \wedge (4) \wedge (5) \wedge (8) \to (2),\quad (1) \wedge (4) \to (6),$$
$$(1) \wedge (2) \wedge (5) \wedge (8) \to (3),\quad (1) \wedge (4) \to (7),$$
$$(1) \wedge (2) \wedge (6) \wedge (7) \to (4),\quad (2) \wedge (3) \to (8).$$

Система утверждений для $|X| = 4$:

$$(3) \wedge (4) \wedge (6) \wedge (7) \to (1),\quad (2) \wedge (3) \to (5),$$
$$(3) \wedge (4) \wedge (5) \wedge (8) \to (2),\quad (1) \wedge (4) \to (6),$$
$$(1) \wedge (2) \wedge (5) \wedge (8) \to (3),\quad (1) \wedge (4) \to (7),$$
$$(1) \wedge (2) \wedge (6) \wedge (7) \to (4),\quad (2) \wedge (3) \to (8).$$

Отметим, что корректность, полнота и независимость приведённых выше систем несложно проверяются с помощью компьютера.

Оказывается, что для конечного множества X мощности $|X| \geqslant 4$ система утверждений будет выглядеть так же, как и для множества мощности 4, что докажем далее. Независимость системы несложно проверяется с помощью компьютера. Полнота системы следует из её полноты для $|X| = 4$ и утверждения 2. Корректность системы показывают следующие восемь теорем.

Теорема 1. *Пусть σ и α — отношения на конечном множестве X и выполняются соотношения*

$$(3)\ \alpha^{-1}\sigma\alpha \subseteq \sigma, \quad (4)\ \sigma \subseteq \alpha^{-1}\sigma\alpha, \quad (6)\ \alpha\sigma \subseteq \sigma\alpha, \quad (7)\ \sigma\alpha^{-1} \subseteq \alpha^{-1}\sigma.$$

Тогда выполняется соотношение (1) $\alpha\sigma\alpha^{-1} \subseteq \sigma$.

Доказательство. Поскольку множество X конечно, степени α начнут периодически повторяться начиная с некоторого числа:

$$\exists\, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\ \exists\, t \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \colon \alpha^{n+t+1} = \alpha^n.$$

Здесь $n \geqslant 0$ — целое, с которого начинаются повторения, а $t + 1 \geqslant 1$ — период. В этом случае из цепочки соотношений

$$\alpha\sigma\alpha^{-1} \overset{(7)}{\subseteq} \alpha\alpha^{-1}\sigma \overset{(4)}{\subseteq} \alpha(\alpha^{-1})^{n+t+1}\sigma\alpha^{n+t} = \alpha(\alpha^{-1})^{n}\sigma\alpha^{n+t} \overset{(3)}{\subseteq}$$
$$\overset{(3)}{\subseteq} \alpha\sigma\alpha^{t} \overset{(6)}{\subseteq} \sigma\alpha^{t+1} \overset{(4)}{\subseteq} (\alpha^{-1})^{n}\sigma\alpha^{n+t+1} = (\alpha^{-1})^{n}\sigma\alpha^{n} \overset{(3)}{\subseteq} \sigma$$

получаем (1) $\alpha\sigma\alpha^{-1} \subseteq \sigma$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть σ и α — отношения на конечном множестве X и выполняются соотношения*

$$(3)\ \alpha^{-1}\sigma\alpha \subseteq \sigma, \quad (4)\ \sigma \subseteq \alpha^{-1}\sigma\alpha, \quad (5)\ \sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma, \quad (8)\ \alpha^{-1}\sigma \subseteq \sigma\alpha^{-1}.$$

Тогда выполняется соотношение (2) $\sigma \subseteq \alpha\sigma\alpha^{-1}$.

Доказательство. Используя конечность множества X, делаем вывод, что начиная с какого-то номера, степени α начнут периодически повторяться:

$$\exists\, n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\ \exists\, t \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \colon \alpha^{n+t+1} = \alpha^n.$$

Здесь n — номер, с которого начинаются повторения, а $t+1$ — период, который обязательно не меньше 1. В этом случае из цепочки соотношений

$$\sigma \overset{(4)}{\subseteq} (\alpha^{-1})^{n+t+1}\sigma\alpha^{n+t+1} = (\alpha^{-1})^{n}\sigma\alpha^{n+t+1} \overset{(3)}{\subseteq} \sigma\alpha^{t+1} \overset{(5)}{\subseteq} \alpha\sigma\alpha^{t} \overset{(4)}{\subseteq}$$
$$\overset{(4)}{\subseteq} \alpha(\alpha^{-1})^{n+1}\sigma\alpha^{n+t+1} = \alpha(\alpha^{-1})^{n+1}\sigma\alpha^{n} \overset{(3)}{\subseteq} \alpha\alpha^{-1}\sigma \overset{(8)}{\subseteq} \alpha\sigma\alpha^{-1}$$

получаем (2) $\sigma \subseteq \alpha\sigma\alpha^{-1}$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть σ и α — отношения на конечном множестве X и выполняются соотношения*

$$(1)\ \alpha\sigma\alpha^{-1} \subseteq \sigma, \quad (2)\ \sigma \subseteq \alpha\sigma\alpha^{-1}, \quad (5)\ \sigma\alpha \subseteq \alpha\sigma, \quad (8)\ \alpha^{-1}\sigma \subseteq \sigma\alpha^{-1}.$$

Тогда выполняется соотношение (3) $\alpha^{-1}\sigma\alpha \subseteq \sigma$.

Доказательство. С помощью замены α на α^{-1} можно увидеть, что эта теорема равносильна теореме 1. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть σ и α — отношения на конечном множестве X и выполняются соотношения*

$$(1)\ \alpha\sigma\alpha^{-1} \subseteq \sigma, \quad (2)\ \sigma \subseteq \alpha\sigma\alpha^{-1}, \quad (6)\ \alpha\sigma \subseteq \sigma\alpha, \quad (7)\ \sigma\alpha^{-1} \subseteq \alpha^{-1}\sigma.$$

Тогда выполняется соотношение (4) $\sigma \subseteq \alpha^{-1}\sigma\alpha$.

Доказательство. С помощью замены α на α^{-1} можно увидеть, что эта теорема равносильна теореме 2. Теорема 4 доказана.

Оставшиеся четыре теоремы сформулируем и докажем в обобщённом виде. Вместо одного множества X рассмотрим два множества X и Y, а вместо одного отношения σ — два отношения ρ и σ. При этом в частном случае, когда $X = Y$ и $\rho = \sigma$, получим интересующие нас утверждения. Отметим, что первые четыре теоремы не допускают аналогичного обобщения, что несложно проверить с помощью компьютера. Также для четырёх теорем ниже не будем требовать конечности множеств X и Y.

Теорема 5. *Пусть $\rho \in B(X)$, $\sigma \in B(Y)$, α — отношение между множествами X и Y, т. е. $\alpha \subseteq X \times Y$, и выполняются обобщённые соотношения*

$$(2)\ \rho \subseteq \alpha\sigma\alpha^{-1}, \quad (3)\ \alpha^{-1}\rho\alpha \subseteq \sigma.$$

Тогда выполняется обобщённое соотношение (5) $\rho\alpha \subseteq \alpha\sigma$.

Доказательство. В этом случае из цепочки соотношений

$$(x,y) \in \rho\alpha \overset{(2)}{\Leftrightarrow} (x,y) \in \rho\alpha \wedge (x,y) \in \alpha\sigma\alpha^{-1}\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\, y' \in Y\ (x,y) \in \rho\alpha \wedge (x,y') \in \alpha \Rightarrow (x,y) \in \alpha\alpha^{-1}\rho\alpha \overset{(3)}{\Rightarrow} (x,y) \in \alpha\sigma$$

получаем утверждение $\forall\, x \in X\ \forall\, y \in Y\ (x,y) \in \rho\alpha \to (x,y) \in \alpha\sigma$, равносильное соотношению (5) $\rho\alpha \subseteq \alpha\sigma$. Теорема 5 доказана.

Теорема 6. *Пусть $\rho \in B(X)$, $\sigma \in B(Y)$, α — отношение между множествами X и Y, т. е. $\alpha \subseteq X \times Y$, и выполняются обобщённые соотношения*

$$(1)\ \alpha\sigma\alpha^{-1} \subseteq \rho, \quad (4)\ \sigma \subseteq \alpha^{-1}\rho\alpha.$$

Тогда выполняется обобщённое соотношение (6) $\alpha\sigma \subseteq \rho\alpha$.

Доказательство. В этом случае из цепочки соотношений

$$(x,y) \in \alpha\sigma \overset{(4)}{\Leftrightarrow} (x,y) \in \alpha\sigma \wedge (x,y) \in \alpha\alpha^{-1}\rho\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists\, x' \in X \ (x,y) \in \alpha\sigma \wedge (x',y) \in \alpha \Rightarrow (x,y) \in \alpha\sigma\alpha^{-1}\alpha \overset{(1)}{\Rightarrow} (x,y) \in \rho\alpha$$

получаем утверждение $\forall\, x \in X \ \forall\, y \in Y \ (x,y) \in \alpha\sigma \to (x,y) \in \rho\alpha$, равносильное утверждению (6) $\alpha\sigma \subseteq \rho\alpha$. Теорема 6 доказана.

Теорема 7. *Пусть $\rho \in B(X)$, $\sigma \in B(Y)$, α — отношение между множествами X и Y, т. е. $\alpha \subseteq X \times Y$, и выполняются обобщённые соотношения*

$$(1)\ \alpha\sigma\alpha^{-1} \subseteq \rho, \quad (4)\ \sigma \subseteq \alpha^{-1}\rho\alpha.$$

Тогда выполняется обобщённое соотношение (7) $\sigma\alpha^{-1} \subseteq \alpha^{-1}\rho$.

Доказательство. С помощью замен

$$X \leftrightarrow Y, \quad \rho \leftrightarrow \sigma, \quad \alpha \leftrightarrow \alpha^{-1}$$

можно увидеть, что эта теорема равносильна теореме 5. Теорема 7 доказана.

Теорема 8. *Пусть $\rho \in B(X)$, $\sigma \in B(Y)$, α — отношение между множествами X и Y, т. е. $\alpha \subseteq X \times Y$, и выполняются обобщённые соотношения*

$$(2)\ \rho \subseteq \alpha\sigma\alpha^{-1}, \quad (3)\ \alpha^{-1}\rho\alpha \subseteq \sigma.$$

Тогда выполняется обобщённое соотношение (8) $\alpha^{-1}\rho \subseteq \sigma\alpha^{-1}$.

Доказательство. С помощью замен

$$X \leftrightarrow Y, \quad \rho \leftrightarrow \sigma, \quad \alpha \leftrightarrow \alpha^{-1}$$

можно увидеть, что эта теорема равносильна теореме 6. Теорема 8 доказана.

2. Результаты для бесконечных множеств

Первые четыре теоремы доказаны в предположении, что множество X конечно. Оказывается, что они не выполняются для бесконечных множеств. При этом никаких более слабых утверждений не добавляется, т. е. система утверждений для бесконечных множеств имеет вид

$$(2) \wedge (3) \to (5), \quad (1) \wedge (4) \to (6), \quad (1) \wedge (4) \to (7), \quad (2) \wedge (3) \to (8).$$

Независимость системы несложно проверяется с помощью компьютера. Теоремы 5–8 показывают корректность системы. Для того чтобы показать полноту, нужно доказать, что все наборы, удовлетворяющие системе, возможны, т. е. достаточно предъявить пару (σ, α) для каждого такого набора. Оказывается, что таких наборов 169, при этом для 151 из них несложно с помощью компьютера найти пары (σ, α) отношений на множестве мощности 4, а потом преобразовать их в пары отношений на бесконечном множестве с использованием утверждения 2. Значит, остаётся привести 18 пар отношений на множестве мощности $\aleph_0$. При этом достаточно привести 9 пар отношений, а остальные 9 получаются из них заменой α на α^{-1}. Далее в виде примеров приведены эти 9 пар отношений на множестве $\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Подробно опишем один из примеров, остальные проверяются аналогично.

Пример 1. Для наборов $K(\sigma,\alpha) = 10111111$ и $K(\sigma,\alpha^{-1}) = 11101111$ возьмём отношения

$$\sigma = \{(i,i) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}, \quad \alpha = \{(i+1,i) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}.$$

Заметим, что

$$\sigma\alpha = \alpha\sigma = \alpha, \quad \sigma\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\sigma = \alpha^{-1},$$
$$\alpha^{-1}\sigma\alpha = \alpha^{-1}\alpha, \quad \alpha\sigma\alpha^{-1} = \alpha\alpha^{-1}.$$

Из равенств в первой строке очевидно, что выполняются соотношения (5)–(8). Далее по определению α получаем

$$\alpha\alpha^{-1} = \{(i+1,i+1) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\} \subset \sigma, \quad \alpha^{-1}\alpha = \{(i,i) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\} = \sigma,$$

откуда непосредственно следует, что $K(\sigma,\alpha) = 10111111$. Такой набор невозможен для конечных множеств в силу теоремы 2.

Пример 2. Для наборов $K(\sigma,\alpha) = 00111001$ и $K(\sigma,\alpha^{-1}) = 11000110$

$$\sigma = \{(i+1,i+1) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}, \quad \alpha = \{(i+2,i+1) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\} \cup \{(0,1)\}.$$

Пример 3. Для наборов $K(\sigma,\alpha) = 00111011$ и $K(\sigma,\alpha^{-1}) = 11001110$

$$\sigma = \{(i+1,i+1) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\} \cup \{(1,0)\},$$
$$\alpha = \{(i+3,i+2) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\} \cup \{(0,0),(0,1),(1,1)\}.$$

Пример 4. Для наборов $K(\sigma,\alpha) = 00111101$ и $K(\sigma,\alpha^{-1}) = 11000111$

$$\sigma = \{(i+1,i+1) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\} \cup \{(0,1)\},$$
$$\alpha = \{(i+3,i+2) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\} \cup \{(0,0),(0,1),(1,1)\}.$$

Пример 5. Для наборов $K(\sigma,\alpha) = 01111111$ и $K(\sigma,\alpha^{-1}) = 11011111$

$$\sigma = \{(i,i) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}, \quad \alpha = \{(i+1,i) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\} \cup \{(0,0)\}.$$

Пример 6. Для наборов $K(\sigma,\alpha) = 00110110$ и $K(\sigma,\alpha^{-1}) = 11001001$

$$\sigma = \{(i,i) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\} \cup \{(0,1),(1,0)\},$$
$$\alpha = \{(i+3,i+2) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\} \cup \{(1,0),(1,1),(2,2)\}.$$

Пример 7. Для наборов $K(\sigma,\alpha) = 00110111$ и $K(\sigma,\alpha^{-1}) = 11001101$

$$\sigma = \{(i+3, i+3) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\} \cup \{(1,0),(2,0)\},$$
$$\alpha = \{(i+4, i+3) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\} \cup \{(0,0),(2,1),(2,2),(3,3)\}.$$

Пример 8. Для наборов $K(\sigma,\alpha) = 00111110$ и $K(\sigma,\alpha^{-1}) = 11001011$

$$\sigma = \{(i+3, i+3) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\} \cup \{(2,0),(2,1)\},$$
$$\alpha = \{(i+4, i+3) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\} \cup \{(1,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}.$$

Пример 9. Для наборов $K(\sigma,\alpha) = 00111111$ и $K(\sigma,\alpha^{-1}) = 11001111$

$$\sigma = \{(i,i) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}, \quad \alpha = \{(i+2, i) \mid i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\} \cup \{(0,0)\}.$$

В заключение приведём табл. 2 — дополненную версию табл. 1. Отметим, что при любом σ все обобщённые централизаторы непусты, так как $K(\sigma,\varepsilon) = 11111111$, а значит, ε принадлежит каждому обобщённому централизатору. Вместе с тем, $B_\sigma^{\varnothing}(X) = B(X)$ при любом отношении σ, поэтому интересных обобщённых централизаторов на один меньше, чем числа, приведённые в табл. 2. Наконец, значения в табл. 1 и 2 соответствуют утверждениям 1 и 2, поскольку не убывают при движении по таблицам слева направо или сверху вниз.

Таблица 2

Результаты перебора для всех мощностей

|X|	Число возможных наборов	Число обобщённых централизаторов
0	1	1
1	2	2
2	38	127
3	143	151
$4 \leqslant \|X\| < \aleph_0$	151	151
$\|X\| \geqslant \aleph_0$	169	169

Авторы выражают благодарность научному руководителю И. Б. Кожухову за полезные советы по подготовке и оформлению статьи.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт бюджета НИУ «Московский институт электронной техники». Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Литература

1. **Вагнер В. В.** Теория отношений и алгебра частичных отображений // Теория полугрупп и её приложения. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1965. С. 3–178.
2. **Ярошевич В. А.** Полугруппы частичных и многозначных изотонных отображений: Дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.06. Москва, 2009. 91 с.
3. **Böttcher M., Knauer U.** Endomorphism spectra of graphs // Discrete Math. 1992. V. 109. P. 45–57.
4. **Клюшин А. А, Кожухов И. Б., Манилов Д. Ю., Решетников А. В.** Определяемость отношений полугруппами изотонных преобразований // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2024. Т. 31, № 1. С. 19–34.
5. **Кожухов И. Б., Ярошевич В. А.** Полугруппы отображений, сохраняющих бинарное отношение // Фундамент. и прикл. математика. 2008. Т. 14, № 7. С. 129–135.

Лежнин Максим Витальевич
Хвощевский Дмитрий Алексеевич

Статья поступила
9 января 2025 г.
После доработки —
2 июня 2025 г.
Принята к публикации
22 июня 2025 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
July–September 2025. Vol. 32, No. 3. P. 84–97

UDC 512.534.1 DOI: 10.33048/daio.2025.32.824

GENERALIZED CENTRALIZERS OF A BINARY RELATION

M. V. Lezhnin[a] and *D. A. Khvoshchevskiy*[b]

National Research University of Electronic Technology,
1 Shokin Square, 124498 Moscow, Russia
E-mail: [a]`max.lezhnin@gmail.com`, [b]`dima1667@gmail.com`

Abstract. We consider generalized centralizers of a binary relation σ, which are semi-groups of relations (multi-valued mappings) that preserve the relation σ in a certain sense. Eight nonequivalent conditions are defined to specify what the term "to preserve a relation" can mean. All possible combinations of these conditions are considered, resulting in different semi-groups of generalized centralizers of a binary relation, depending on the cardinality of the set on which the relation is defined. Specifically, eight theorems are proven, establishing the connection between these conditions: the first four theorems hold only for finite sets, while the last four are valid for arbitrary sets. Furthermore, the completeness of this list of theorems is demonstrated for sets of cardinality no less than 4. For each cardinality, an exhaustive answer is provided regarding the number of distinct generalized centralizers. Tab. 2, bibliogr. 5.

Keywords: generalised centralizer, semi-group of binary relations.

References

1. **V. V. Vagner,** Relation theory and algebra of partial mappings, in *Semigroup Theory and Its Applications* (Izd. Saratov. Univ., Saratov, 1965), pp. 3–178.
2. **V. A. Yaroshevich,** Semigroups of partial and multivalued isotone mappings, *Candidate Sci. Diss.* (Moscow, 2009).
3. **M. Böttcher** and **U. Knauer,** Endomorphism spectra of graphs, *Discrete Math.* **109**, 45–57 (1992).
4. **A. A Klyushin, I. B. Kozhukhov, D. Yu. Manilov,** and **A. V. Reshetnikov,** Definability of relations by semigroups of isotone transformations, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **31** (1), 19–34 (2024) [Russian], DOI: `10.33048/daio.2024.31.783` [*J. Appl. Ind. Math.* **18** (1) 60–69 (2024), DOI: `10.1134/S199047892401006X`].

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **19** (3) (2025).

5. **I. B. Kozhukhov** and **V. A. Yaroshevich,** Transformation semigroups preserving a binary relation, *Fundam. Prikl. Mat.* **14** (7), 129–135 (2008) [Russian] [*J. Math. Sci.* **164** (2) 240–244 (2010), DOI: `10.1007/s10958-009-9723-5`].

Maksim V. Lezhnin
Dmitry A. Khvoshchevskiy

Received January 9, 2025
Revised June 2, 2025
Accepted June 22, 2025