

ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 32 № 3 2025

Новосибирск
Издательство Института математики

ПОИСК И ИССЛЕДОВАНИЕ
ИДЕАЛЬНЫХ ДВУМЕРНЫХ ЦИРКУЛЯНТНЫХ СЕТЕЙ
НА ОСНОВЕ ГРАФОВЫХ БАЗ ДАННЫХ

Э. А. Монахова^a, О. Г. Монахов^b

Институт вычислительной математики и математической геофизики,
пр. Акад. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: ^aemilia@rav.ssc.ru, ^bmonakhov@rav.ssc.ru

Аннотация. На основе анализа больших массивов экспериментальных данных исследуется проблема поиска идеальных двумерных кольцевых циркулянтных сетей, оптимальных по двум параметрам — диаметру и среднему расстоянию. Ранее авторами был получен большой датасет (база данных) оптимальных по диаметру двумерных кольцевых циркулянтных сетей. В настоящей работе получен новый датасет рассматриваемых сетей, оптимальных по среднему расстоянию. Исследование графов указанных датасетов позволило вывести новые свойства соотношений диаметра и среднего расстояния в оптимальных циркулянтах и получить семейства наилучших по двум параметрам оптимальных циркулянтных сетей, для которых применим настраиваемый по числу узлов эффективный алгоритм маршрутизации константной сложности. Идеальные двумерные кольцевые циркулянты представляют интерес как эффективные и надёжные топологии для межузловых связей в сетях на кристалле и информационно-коммуникационных системах. Ил. 6, библиогр. 27.

Ключевые слова: кольцевая циркулянтная сеть, диаметр, среднее расстояние, датасет оптимальных циркулянтов, алгоритм маршрутизации.

Введение

Циркулянтные графы степени четыре изучаются в теории и различных прикладных областях, включая использование в качестве топологий сетей связи суперкомпьютеров и сетей на кристалле [1–9]. Дадим общее определение исследуемого класса сетей. *Циркулянтная сеть* (circulant network) степени четыре представляет собой неориентированный граф $C(N; s_1, s_2)$, где $1 \leq s_1 < s_2 < N/2$, с множеством вершин $V = \mathbb{Z}_N =$

$\{0, 1, \dots, N - 1\}$, в котором каждая вершина $i \in V$ смежна с вершинами $(i \pm s_1) \bmod N$ и $(i \pm s_2) \bmod N$. Числа s_1, s_2 — образующие, N — порядок графа. Граф $C(N; s_1, s_2)$ связен, если $\text{НОД}(N, s_1, s_2) = 1$. Если $s_1 = 1$, то граф $C(N; 1, s)$ называется *двумерным кольцевым циркулянтным графом* (двумерный — по числу образующих $k = 2$). В англоязычной литературе для этого графа применяются также названия *undirected double-loop network*, *chordal ring of fourth degree*. На рис. 1 изображена циркулянтная сеть $C(10; 1, 4)$.

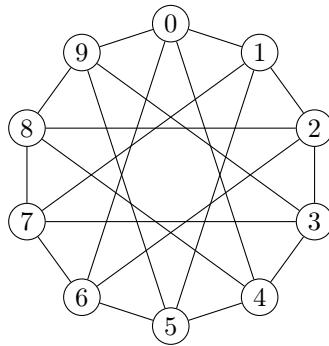


Рис. 1. Циркулянтная сеть $C(10; 1, 4)$

Диаметром графа называется длина $d = d(N; s_1, s_2)$ максимального кратчайшего пути на множестве всевозможных пар вершин. *Среднее расстояние* (mean path length, average distance) определяется как

$$\bar{d} = \bar{d}(N; s_1, s_2) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^d in_i,$$

где n_i — число вершин графа, находящихся на расстоянии i от нулевой вершины. В ряде работ показано, что минимизация диаметра (среднего расстояния) при заданных порядке и степени графа оптимизирует структурные задержки при передаче данных, пропускную способность и другие характеристики топологии сети связи и напрямую влияет на повышение производительности вычислительного кластера [1, 10].

Основной объект исследования в данной работе — класс циркулянтных графов вида $C(N; 1, s)$, где $N \geq 5$, $2 \leq s < N/2$. Пусть

$$d(N) = \min_s d(N; 1, s), \quad \bar{d}(N) = \min_s \bar{d}(N; 1, s).$$

Назовём *оптимальным по диаметру* граф $C(N; 1, s)$ с минимально возможным для данного N диаметром $d = d(N)$, *оптимальным по среднему расстоянию* — граф $C(N; 1, s)$ с минимально возможным для данного N

средним расстоянием $\bar{d} = \bar{d}(N)$. Граф $C(10; 1, 4)$ — пример графа, оптимального по диаметру и среднему расстоянию, при этом $d = d(10) = 2$, $\bar{d} = \bar{d}(10) = 1,4$. Например, для графов $C(10; 1, 2)$ и $C(10; 1, 3)$ имеем $d = 3$, $\bar{d} = 1,5$.

В настоящей работе для класса двумерных кольцевых сетей $C(N; 1, s)$ рассматривается решение оптимизационной проблемы поиска семейств оптимальных по двум параметрам сетей (с минимально возможными одновременно диаметром и средним расстоянием) и получения применимого для таких сетей эффективного алгоритма маршрутизации.

Для класса сетей $C(N; 1, s)$ авторами были ранее представлены в открытом доступе датасет (база данных) оптимальных по диаметру графов до $N \leq 50\,000$ вершин [11], а также полученные на его основе аналитически описываемые семейства оптимальных графов [12]. В настоящей работе путём полного перебора образующих для каждого испытуемого $N \leq 4100$ получен новый датасет оптимальных по среднему расстоянию графов класса $C(N; 1, s)$. На основе анализа и сравнения этих двух датасетов, а также рассмотрения свойств соотношений диаметра и среднего расстояния, построена база данных идеальных графов — циркулянтов сетей класса $C(N; 1, s)$ с минимально возможными одновременно диаметром и средним расстоянием. Найдены аналитически задаваемые семейства идеальных сетей, для которых применим масштабируемый по числу узлов алгоритм маршрутизации сложности $O(1)$.

1. Теоретические основы исследования

Известна [9] точная нижняя граница диаметра двумерных циркулянтов $C(N; s_1, s_2)$ для любого $N \geq 5$:

$$d(N) \geq D(N) = \lceil (-1 + \sqrt{2N - 1})/2 \rceil.$$

Гипотеза Цвиели [13] предполагает, что для любого N имеет место верхняя оценка

$$d(N) \leq D(N) + 1,$$

которая подтверждена при $N \leq 6 \cdot 10^6$. Графы с $d(N) = D(N) + 1$ называются *субоптимальными*. Большая часть работ в литературе посвящена изучению диаметра циркулянтов графов, и известно немного работ по исследованиям среднего расстояния циркулянтов и его соотношения с диаметром.

В [14] показано, что нижняя граница среднего расстояния графов $C(N; s_1, s_2)$ асимптотически стремится к $\sqrt{2N}/3$. В [15] получена нижняя граница среднего расстояния двумерных циркулянтов:

$$\bar{d}(N) = (N - 1)\sqrt{2N - 1}/3N.$$

В [16] приведены некоторые соотношения между диаметром и средним расстоянием в оптимальных графах $C(N; 1, s)$. Дан пример, когда оптимальный по диаметру граф хуже по среднему расстоянию графа с большим на единицу диаметром. Аналогичное свойство отмечено для циркулянтных графов большей размерности $k = 3, 4, 5$.

Очевидно, что среднее расстояние, как показатель топологии сети связи, зависит от числа вершин графа, находящихся на определённых расстояниях (уровнях одинакового расстояния) от выделенной вершины. В силу вершинной симметрии циркулянтов в качестве выделенной рассматривается вершина с номером 0. Пусть n_i обозначает число вершин, находящихся на расстоянии i от 0, $i \in \overline{1, d}$, d — диаметр графа. Для двумерных циркулянтов максимально возможное число вершин на i -м уровне равно $4i$ [17, 18]. Циркулянт с полностью заполненными уровнями, включая диаметр, называется *экстремальным*. Семейство экстремальных двумерных кольцевых циркулянтов существует при любом диаметре [9] и имеет вид $\{C(N_d; 1, 2d+1) \mid d \geq 1\}$, где $N_d = 2d^2 + 2d + 1$. При этом среднее расстояние для графов экстремального семейства равно $\bar{d} = (2d+1)/3$ [15]. Исследованию распределения вершин графов по уровням для семейств экстремальных (и наибольших известных) циркулянтов размерностей $k = 2, 3, 4, 5$ посвящена работа [19].

Введём понятие *идеального* оптимального графа $C(N; 1, s)$, следуя [5]. В идеальном оптимальном графе распределение вершин по уровням расстояния относительно вершины 0 задаётся формулой

$$N = 1 + \sum_{i=1}^{d-1} n_i + (N - N_{d-1}), \quad n_i = 4i, i \in \overline{1, d-1}. \quad (1)$$

Другими словами, для идеального циркулянта распределение числа вершин по уровням расстояний от 0 до d можно представить в виде $(d+1)$ -мерного вектора $(1, 4, 8, \dots, 4(d-1), N - N_{d-1})$. Следует отметить, что впервые формула для среднего расстояния идеальных графов появилась в работе [17]. Из принадлежности графа к множеству идеальных следует равенство его диаметра точной нижней границе $D(N)$. Идеальные графы достигают минимумов структурных задержек и максимума связности [17, 20].

В работе [5] в диапазоне $5 \leq N \leq 1000$ найден 361 идеальный граф и проведён анализ полученного множества идеальных графов. Получено несколько семейств идеальных графов, описываемых полиномами от диаметра:

$$\begin{aligned} N &\in \{2d^2; 2d^2 \pm 1; 2d^2 + 2d - 1\}, \quad s = 2d - 1, \quad d > 1; \\ N &= 2d^2 - 2d + 5, \quad d > 5, \end{aligned} \quad (2)$$

$$s = \begin{cases} (2d^2 - 4d)/3 + 2 & \text{при } d = 3i, i \geq 2, \\ (2d^2 + 4)/3 & \text{при } d = 3i + 1, i \geq 2. \end{cases} \quad (3)$$

Формулу (3) для образующей s последнего семейства авторы [5] найти не смогли, при этом указали формулу (2) для N и для всех семейств вычислили среднее расстояние в виде функции от диаметра. Исправляя неточность в [5], приводим выражение среднего расстояния для семейства (2), (3):

$$\bar{d}(N; 1, s) = d(2d^2 - 3d + 7)/(3(d^2 - d + 2)), \quad d > 5.$$

Для других идеальных графов авторы [5] отмечают, что не нашли общего способа их построения.

В разд. 2 дано решение этого вопроса, а также построены новые базы данных — оптимальных по среднему расстоянию циркулянтов и идеальных графов. В разд. 3 приведены результаты получения большого количества семейств идеальных оптимальных графов $C(N; 1, s)$ с порядками и образующими, описанными в виде полиномов от диаметра, а также дана общая формула для среднего расстояния в графах идеальных семейств. В разд. 4 среди семейств идеальных графов найдены масштабируемые семейства, для которых применим оптимальный алгоритм маршрутизации, использующий параметры укладки циркулянтов на плоскости.

2. Новые датасеты оптимальных циркулянтов

В Интернете можно найти датасет оптимальных циркулянтов размерностей $k = 2, 3, 4, 5$ порядков $10 \leq N \leq 500$ [21], в котором для каждого N приведён один набор образующих при $s_1 = 1$. Полученный авторами и представленный в открытом доступе [11] датасет оптимальных по диаметру циркулянтов $C(N; 1, s)$ размерности $k = 2$ порядков $10 \leq N \leq 50\,000$ включает уже весь набор образующих оптимальных графов, что позволяет находить семейства оптимальных по диаметру циркулянтов графов, описанных полиномами от диаметра [12]. В настоящей работе продолжен поиск и исследование наилучших возможных графов класса $C(N; 1, s)$.

Найдено аналитическое выражение для среднего расстояния идеального графа $C(N; 1, s)$, используемое далее при получении множеств (семейств) идеальных графов. Эта же формула является нижней границей среднего расстояния в графах $C(N; 1, s)$ при $N_{d-1} < N \leq N_d$. Из определения идеального графа $C(N; 1, s)$ с числом вершин N , где $d(N) = D(N)$, следует равенство

$$\bar{D}(N) = \bar{d}(N) = d(3N - 2d^2 - 1)/(3(N - 1)), \quad (4)$$

которое является необходимым и достаточным условием того, что двумерный кольцевой циркулянт с числом вершин N и диаметром $d = D(N)$ является идеальным графом. Тем самым обобщён результат из [5] и найдена в общем виде формула среднего расстояния идеального графа, поэтому при проверке на принадлежность графа к множеству идеальных достаточно проверять выполнение (4). Формулу (4) можно использовать также для аналитического определения среднего расстояния в графах семейств идеальных графов в случае, если порядок N графов идеального семейства описан как функция от диаметра d .

Результатом представленной работы являются два новых датасета оптимальных графов $C(N; 1, s)$:

- 1) MPLset — параметры оптимальных по среднему расстоянию графов;
- 2) IDset — параметры идеальных графов.

Для вычислений используется система Wolfram Mathematica. Отметим, что также можно использовать систему Wolfram Engine — свободно распространяемую альтернативу Wolfram Mathematica с урезанным графическим интерфейсом.

Алгоритм построения датасета MPLset сводится к полному перебору образующих $2 \leq s < N/2$ для каждого испытуемого порядка $N \leq 4100$ и формированию описаний всех графов с минимально возможным для

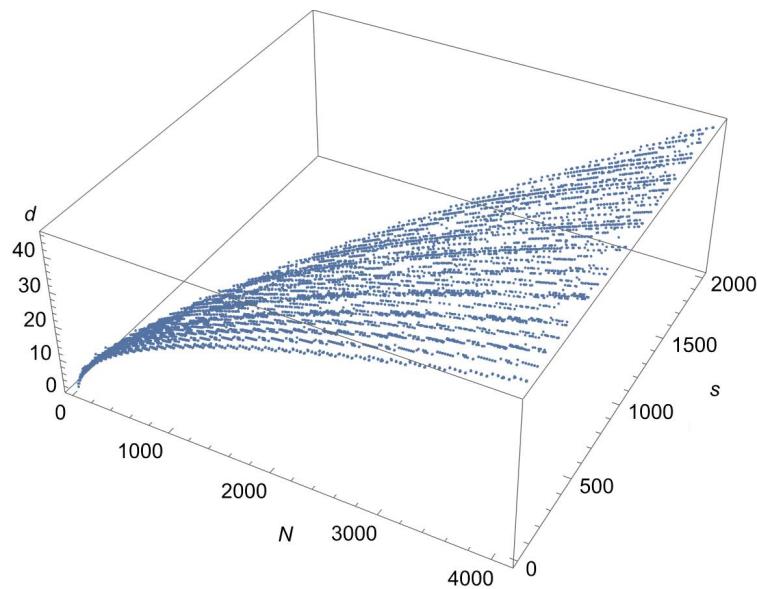


Рис. 2. Параметры графов $C(N; 1, s)$ из датасета MPLset

данного N средним расстоянием:

$$\text{MPLset} = \{(N, s) \in \mathbb{N} \mid \bar{d}(N) = \min_{2 \leq s < N/2} \bar{d}(N; 1, s), N \leq 4100\}.$$

Для повышения скорости вычислений проведено их распараллеливание по наборам образующих.

Датасет IDset идеальных графов строится перебором и поиском графов из множества MPLset, удовлетворяющих условию идеальности (1). Для найденных графов также проведена проверка равенства среднего расстояния нижней границе (4).

На рис. 2 и 3 представлены трёхмерные графики полученных датасетов точек (N, s, d, \bar{d}) при $10 \leq N \leq 4100$, отражающие параметры оптимальных по среднему расстоянию и идеальных графов. Для каждого значения N на графиках показаны все образующие $s < N/2$, определяющие оптимальный граф. Датасеты найденных оптимальных графов с числом вершин $N \leq 4100$ доступны по ссылке [11].

На рис. 4 изображены графики зависимостей диаметра d и среднего расстояния \bar{d} от порядка N для графов из датасета MPLset — циркулянтов $C(N; 1, s)$ с минимально возможным средним расстоянием.

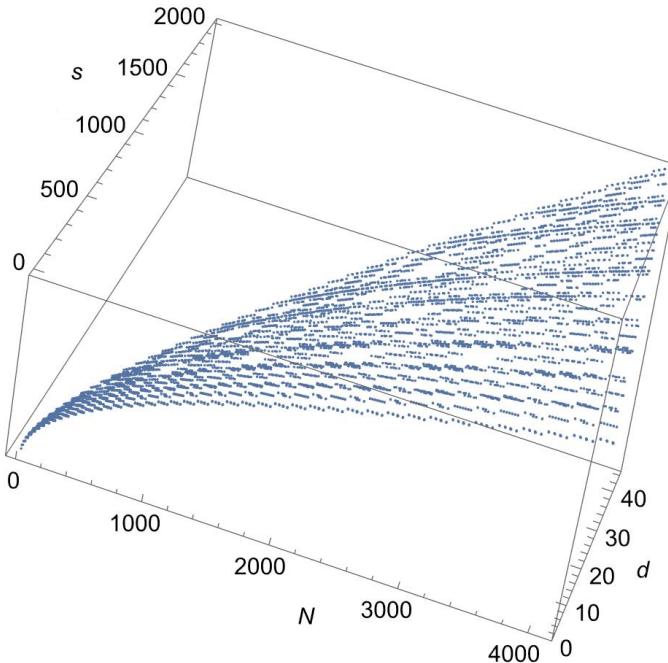


Рис. 3. Параметры идеальных графов $C(N; 1, s)$ из датасета IDset

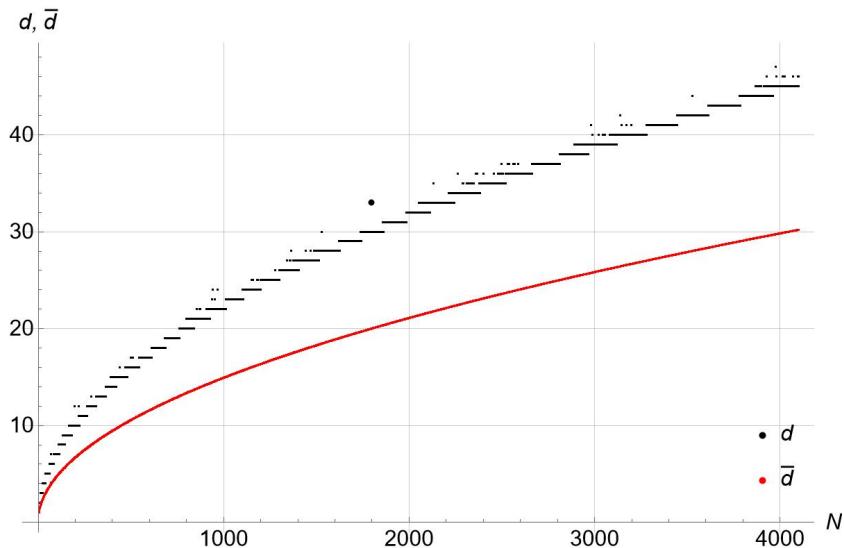


Рис. 4. Зависимости диаметра и среднего расстояния от порядка графа для датасета MPLset

На основе анализа найденных графов можно отметить следующие соотношения свойств оптимальных графов трёх видов.

1. Не для всех N достигаются нижние границы диаметра и среднего расстояния в классе циркулянтов $C(N; 1, s)$.

2. Существуют субоптимальные и оптимальные по диаметру графы с одинаковым средним расстоянием. Например, $d(30; 1, 8) = D(30) = 4$, $d(30; 1, 6) = 5$. Векторы распределения вершин по уровням: $(1, 4, 8, 9, 8)$ для $s = 8$ и $(1, 4, 8, 10, 6, 1)$ для $s = 6$, при этом для обоих графов имеем $\bar{d} = 2,633$.

3. При одинаковом $d = D(N) + 1$ различные распределения вершин по уровням могут давать одинаковое среднее расстояние. Например, неизоморфные субоптимальные графы $C(30; 1, 4)$ и $C(30; 1, 7)$ имеют одинаковые диаметр $d = 5$ и среднее расстояние $\bar{d} = 2,7$, а векторы распределения по уровням равны $(1, 4, 8, 8, 8, 1)$ и $(1, 4, 8, 9, 6, 2)$ соответственно.

4. Диаметр графа с минимальным средним расстоянием может превышать нижнюю границу для диаметра на 3 (на рис. 4 этот случай отмечен крупной точкой). Так, оптимальный по среднему расстоянию граф $C(1798; 1, 762)$ имеет $d = 33$ и $\bar{d}(1798) = 20,01$ в отличие от оптимального по диаметру графа $C(1798; 1, 544)$, у которого $d = d(1798) = D(1798) = 30$ и $\bar{d} = 20,02$.

5. Только идеальные циркулянты достигают одновременно нижних границ диаметра $D(N)$ и среднего расстояния $\bar{D}(N)$.

Среди 8499 графов датасета MPLset с $5 \leq N \leq 4100$ идеальными оказались 7955 (более 93%). Отметим, что для $5 \leq N \leq 1000$ число идеальных графов равно 911, что существенно больше, чем 361 идеальный граф, найденный ранее в [5].

3. Экспериментальные результаты поиска семейств идеальных сетей

Дадим сначала общую формулировку понятия семейства оптимальных графов в классе $C(N; 1, s)$. Под семейством оптимальных (идеальных) сетей будем понимать подмножество оптимальных (идеальных) графов класса $C(N; 1, s)$ с общим аналитическим описанием $N = N(d)$ и $s = s(d)$ и диаметром, растущим по правилу $d = d_m + kP$, где $k \geq 0$, d_m — минимальный диаметр, при котором граф семейства является оптимальным (идеальным), $P = \text{const} \in \mathbb{N}$ — период повторяемости, равный разности диаметров «соседних» графов семейства.

На первом этапе поиска семейств идеальных сетей к графикам датасета MPLset, оптимальных по среднему расстоянию, применены алгоритмы автоматизированного поиска аналитически описываемых семейств [12]. Порядки найденных семейств графов представляют собой квадратичные полиномы, а их образующие — квадратичные или линейные полиномы от диаметра d . Полученные семейства графов существуют в соответствующих диапазонах изменения диаметра d . Затем проверено существование найденных семейств при диаметрах больших, чем диаметры графов датасета MPLset (при $4100 < N \leq 50\,000$). Для этого этапа использована программа анализа структурных характеристик циркулянтов графов, которая дополнительно находит векторы распределения вершин по уровням. На заключительном этапе графы оставшихся семейств проверены на выполнение равенства (4). В результате осталось 1756 семейств идеальных сетей, список которых также помещён в [11].

4. Идеальные циркулянты сети и оптимальный алгоритм маршрутизации

В [22] на основе датасета оптимальных по диаметру графов $C(N; 1, s)$ получено множество семейств оптимальных графов, для которых дополнительно разработан эффективный оптимальный алгоритм маршрутизации [22] сложности $O(1)$, не требующий таблиц маршрутизации и использующий параметры плотной укладки циркулянтов на плоскости в виде L -образных шаблонов (L -shapes) [18, 23, 24]. Параметры a, b, p, q L -образных шаблонов для циркулянтов $C(N; 1, s)$ показаны на рис. 5а. На рис. 5б изображена плотная укладка на плоскости L -образного шаблона для графа $C(10; 1, 4)$ с параметрами $a = 4, b = 3, p = 2, q = 1$.

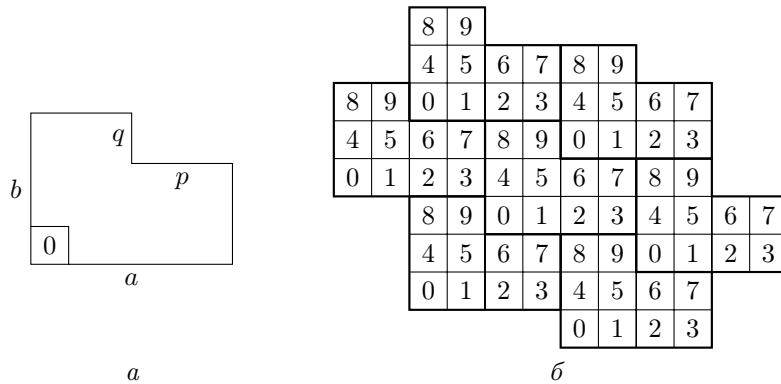


Рис. 5. а) Параметры L -образного шаблона; б) плотная укладка L -образного шаблона на плоскости для графа $C(10; 1, 4)$

В [23] доказано, что L -образный шаблон циркулянтов $C(N; s_1, s_2)$ всегда образует плотную укладку на плоскости, и получена следующая базовая система сравнений для расположения нулей (вершин с номером 0) на плоскости:

$$\begin{aligned} as_1 - qs_2 &\equiv 0 \pmod{N}, \\ -ps_1 + bs_2 &\equiv 0 \pmod{N}. \end{aligned} \quad (5)$$

В [22] введено понятие L -масштабируемости аналитически описанных семейств оптимальных графов, которое будем использовать далее при анализе множества полученных семейств идеальных сетей. Семейство $C(N(d); 1, s(d))$ L -масштабируемо, если существуют функции $a(d)$, $b(d)$, $p(d)$, $q(d)$, описывающие параметры L -образных шаблонов плотной укладки графов семейства на плоскости, для которых выполняется система сравнений (5). L -масштабируемость семейств графов позволяет определить параметры a , b , p , q укладки графов семейств в виде линейных полиномов от диаметра, тем самым сокращая сложность алгоритмов их определения с $O(N)$ [18] (или $O(\log N)$ [24]) до $O(1)$.

С использованием системы Wolfram Mathematica авторами проведена проверка выполнения сравнений (5) для идеальных семейств, взятых из датасета IDset с параметрами N , s , a , b , p , q , описанными в виде полиномов от диаметра. После проверки, проведённой на всём множестве идеальных семейств, найдено 869 описаний L -масштабируемых идеальных семейств, список которых дан в соответствующем разделе датасета [11]. Для этих семейств применим алгоритм маршрутизации из [22] с аналитическим определением параметров L -образных шаблонов. Ниже приведён фрагмент описаний семейств, существующих для каждого диаметра $d \geq d_m$. Список включает для представленных семейств значения d_m , период повторяемости P , полиномы для N и s , коэффициенты

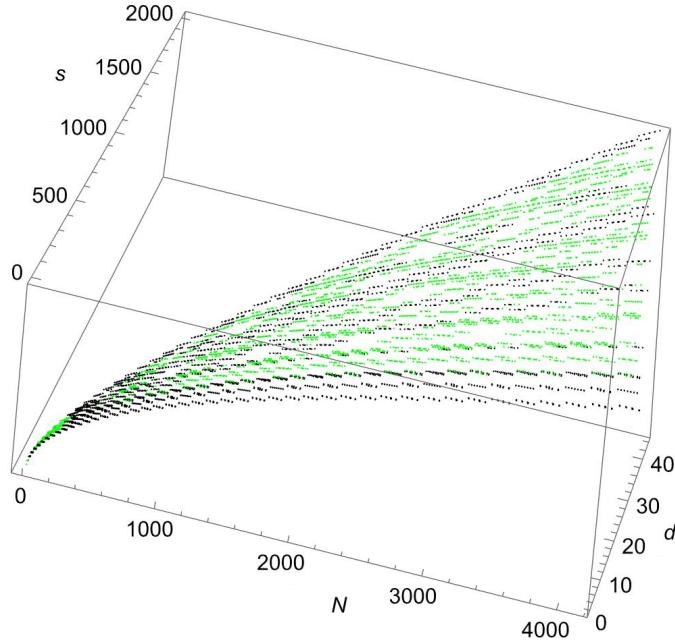


Рис. 6. Точки датасета L -масштабируемых идеальных семейств (чёрные) и датасета IDset идеальных циркулянтных графов (зелёные точки)

при степенях d для параметров a, b, p, q . На рис. 6 показан трёхмерный график датасета точек (N, s, d) , $10 \leq N \leq 4100$, полученных по описаниям L -масштабируемых идеальных семейств (чёрные точки) на фоне датасета всех идеальных графов (зелёные точки). Здесь N — число вершин графа, s — образующая, d — диаметр, \bar{d} — среднее расстояние графа $C(N; 1, s)$.

Фрагмент датасета семейств идеальных графов с аналитическим описанием и масштабируемыми параметрами L -образных шаблонов в формате $\{d_m, P = 1, \{N, s\}, \{\{a_1, a_0\}, \{b_1, b_0\}, \{p_1, p_0\}, \{q_1, q_0\}\}\}$:

$$\begin{aligned}
 & \{2, 1, \{1 + 2d + 2d^2, 1 + 2d\}, \{\{2, 1\}, \{1, 1\}, \{1, 0\}, \{0, 1\}\}\}, \\
 & \{3, 1, \{2d^2, -1 + 2d\}, \{\{2, -1\}, \{1, 1\}, \{1, -1\}, \{0, 1\}\}\}, \\
 & \{3, 1, \{2d^2, 1 + 2d\}, \{\{1, 0\}, \{3, -1\}, \{1, -1\}, \{1, 0\}\}\}, \\
 & \{3, 1, \{-1 + 2d^2, -1 + 2d\}, \{\{2, -1\}, \{1, 1\}, \{1, 0\}, \{0, 1\}\}\}, \\
 & \{3, 1, \{-1 + 2d^2, 1 + 2d\}, \{\{1, 1\}, \{2, -1\}, \{0, 1\}, \{1, 0\}\}\}, \\
 & \{3, 1, \{1 + 2d^2, -1 + 2d\}, \{\{2, -1\}, \{1, 1\}, \{1, -2\}, \{0, 1\}\}\}, \\
 & \{3, 1, \{1 + 2d^2, 1 + 2d\}, \{\{2, 1\}, \{1, 0\}, \{1, -1\}, \{0, 1\}\}\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \{2, 1, \{d + 2d^2, 2d\}, \{\{2, 0\}, \{1, 1\}, \{1, 0\}, \{0, 1\}\}\}, \\
& \{3, 1, \{-1 - d + 2d^2, -2 + 2d\}, \{\{2, -2\}, \{1, 1\}, \{1, -1\}, \{0, 1\}\}\}, \\
& \quad \{3, 1, \{-d + 2d^2, 2d\}, \{\{1, 0\}, \{2, -1\}, \{0, 0\}, \{1, 0\}\}\}, \\
& \quad \{3, 1, \{-d + 2d^2, -2 + 2d\}, \{\{2, -2\}, \{1, 1\}, \{1, -2\}, \{0, 1\}\}\}, \\
& \quad \{3, 1, \{1 - d + 2d^2, 2d\}, \{\{2, 0\}, \{1, 0\}, \{1, -1\}, \{0, 1\}\}\}, \\
& \quad \{3, 1, \{-3 + d + 2d^2, -2 + 2d\}, \{\{2, -2\}, \{1, 2\}, \{1, -1\}, \{0, 1\}\}\}, \\
& \quad \{3, 1, \{-2 + d + 2d^2, -2 + 2d\}, \{\{2, -2\}, \{1, 2\}, \{1, -2\}, \{0, 1\}\}\}.
\end{aligned}$$

Интересно отметить, что оптимальный граф $C(10; 1, 4)$, изображённый на рис. 1, идеальный и принадлежит семейству $\{C(2d^2 + d; 1, 2d) \mid d \geq 2\}$. Более того, это семейство L -масштабируемо, что покажем далее.

Лемма 1. Параметры L -образных шаблонов для семейства оптимальных циркулянтов $C(2d^2 + d; 1, 2d)$, где $d \geq 2$, равны $a = 2d$, $b = d + 1$, $p = d$, $q = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что базовая система сравнений (5) для расположения нулевых вершин на плоскости выполняется для указанных параметров при любом $d \geq 2$. Имеем

$$\begin{aligned}
2d - 2d &= 0 \equiv 0 \pmod{N}, \\
-d + (d + 1)2d &= 2d^2 + d = N \equiv 0 \pmod{N}.
\end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Покажем, что семейство идеальных графов (2), (3) также L -масштабируемо.

Лемма 2. Параметры L -образных шаблонов для семейства оптимальных циркулянтов $C(2d^2 - 2d + 5; 1, s)$ с образующей

$$s = \begin{cases} (2d^2 - 4d)/3 + 2 & \text{при } d = 3i, \\ (2d^2 + 4)/3 & \text{при } d = 3i + 1, \end{cases}$$

где $d > 5$, равны

$$\begin{cases} a = d + 1, b = 2d - 1, p = 3, q = d - 2 & \text{при } d = 3i, \\ a = 2d - 1, b = d + 1, p = d - 2, q = 3 & \text{при } d = 3i + 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что базовая система сравнений (5) выполняется для указанных параметров при $d > 5$.

Если $d = 3i$, $i \geq 2$, имеем

$$\begin{aligned}
(d + 1) - (d - 2)((2d^2 - 4d)/3 + 2) &= (1 - d/3)N \equiv 0 \pmod{N}, \\
-3 + (2d - 1)((2d^2 - 4d)/3 + 2) &= (2d/3 - 1)N \equiv 0 \pmod{N}.
\end{aligned}$$

Аналогично, если $d = 3i + 1$, $i \geq 2$, имеем

$$(2d - 1) - 3(2d^2 + 4)/3 = -N \equiv 0 \pmod{N},$$

$$-(d - 2) + (d + 1)(2d^2 + 4)/3 = ((d + 2)/3)N \equiv 0 \pmod{N}.$$

Лемма 2 доказана.

Таким образом, ко всем графикам семейств из лемм 1 и 2, а также всех найденных идеальных L -масштабируемых семейств может быть применён оптимальный алгоритм маршрутизации из [22]. В отличие от ряда других алгоритмов поиска кратчайших путей, использующих плотную укладку графов на плоскости [25, 26], указанный алгоритм использует минимальное число (пять) соседних нулей, при этом затрачивает меньшее число операций при расчёте кратчайшего пути по сравнению с алгоритмом из [27]. Продемонстрируем работу алгоритма маршрутизации на примере графов идеального семейства из леммы 2. Ниже запись вида $a_1[+1] + b_1[+s]$ означает, что путь из 0 в вершину i содержит a_1 шагов по образующей $s_1 = 1$ и b_1 шагов по образующей s . Знаки a_1 и b_1 определяют направление движения: в направлении образующей (+) или против образующей (-).

Пример 1. В качестве топологии рассмотрим граф $C(65; 1, 18)$ семейства (2), (3) диаметра $d = 6$. Пусть требуется вычислить кратчайший путь из 0 в вершину $i = 50$. Имеем $a = 7$, $b = 11$, $p = 3$, $q = 4$, $u = a - p = 4$, $v = b - q = 7$.

ШАГ 1. $a_0 = 7$, $b_0 = 4$.

ШАГ 2. $(a_1, b_1) = (50, 0) - \text{round}\left(\frac{1}{65}(50, 0)\left(\begin{smallmatrix} 4 & -7 \\ 7 & 4 \end{smallmatrix}\right)\right)\left(\begin{smallmatrix} 4 & 7 \\ -7 & 4 \end{smallmatrix}\right) = (3, -1)$.

ШАГ 3. $P_1 = (3)[+1] + (-1)[+18]$; $P_2 = (-1)[+1] + (-8)[+18]$; $P_3 = (10)[+1] + (-5)[+18]$; $P_4 = (7)[+1] + (6)[+18]$; $P_5 = (-4)[+1] + (3)[+18]$. Кратчайший из пяти путей в вершину $i = 50$ есть $P' = P_1$.

Пример 2. Рассмотрим граф $C(89; 1, 34)$ семейства (2), (3) диаметра $d = 7$. Требуется вычислить кратчайший путь из 0 в вершину $i = 6$. Имеем $a = 13$, $b = 8$, $p = 5$, $q = 3$, $u = a - p = 8$, $v = b - q = 5$.

ШАГ 1. $a_0 = 5$, $b_0 = 8$.

ШАГ 2. $(a_1, b_1) = (6, 0) - \text{round}\left(\frac{1}{89}(6, 0)\left(\begin{smallmatrix} 8 & -5 \\ 5 & 8 \end{smallmatrix}\right)\right)\left(\begin{smallmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 8 \end{smallmatrix}\right) = (-2, -5)$.

ШАГ 3. $P_1 = (-2)[+1] + (-5)[+34]$; $P_2 = (-10)[+1] + (-10)[+34]$; $P_3 = (3)[+1] + (-13)[+34]$; $P_4 = (6)[+1] + (0)[+34]$; $P_5 = (-7)[+1] + (3)[+34]$. Кратчайший из пяти путей в вершину $i = 6$ есть $P' = P_4$.

Таким образом, графы из найденных в настоящей работе семейств идеальных циркулянтных сетей обладают не только минимально возможными структурными задержками при межузловых обменах, но и эффективной организацией маршрутизации. Вопросы полноты множества

семейств идеальных графов $C(N; 1, s)$ на основе полученных датасетов являются темой для будущих исследований.

Заключение

В данной работе продолжены исследования, начатые в цикле статей по генерации датасетов оптимальных кольцевых циркулянтных сетей степени четыре. Проектирование оптимальных сетевых топологий, обладающих симметрией связей и минимальными структурными задержками при межузловых обменах, является одним из основных критериев при разработке сетей на кристалле. На основе анализа больших массивов экспериментальных данных нами исследовано решение проблемы поиска двумерных кольцевых циркулянтных сетей, оптимальных по двум параметрам — диаметру и среднему расстоянию. Получены и представлены в открытом доступе новые датасеты рассматриваемых сетей — оптимальных по среднему расстоянию и наилучших возможных по двум параметрам так называемых идеальных сетей. Существенно расширено исследование свойств идеальных циркулянтных сетей, что позволило открыть множество аналитически задаваемых семейств идеальных циркулянтных сетей. Для таких семейств идеальных сетей применим эффективный, масштабируемый по числу узлов алгоритм маршрутизации сложности $O(1)$. Нахождение аналитическими вычислениями оптимальных топологий с симметричной структурой построения подсистемы связей и минимальными задержками гарантирует простоту инженерных решений и повышение эффективности функционирования сетей на кристалле при обменах.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт бюджетного проекта Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН (проект № FWNM-2025-0005). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Литература

1. Huang X., Ramos A. F., Deng Y. Optimal circulant graphs as low-latency network topologies // J. Supercomputing. 2022. V. 78, No. 11. P. 13491–13510. DOI: 10.1007/s11227-022-04396-5.
2. Liu H., Li X., Wang S. Construction of dual optimal bidirectional double-loop networks for optimal routing // Mathematics. 2022. V. 10. Article ID 4016. 17 p. DOI: 10.3390/math10214016.

3. **Hoffmann R., Deserable D., Seredyński F.** Cellular automata rules solving the wireless sensor network coverage problem // *Nat. Comput.* 2022. V. 21. P. 417–447.
4. **Fei J., Lu C.** Adaptive sliding mode control of dynamic systems using double loop recurrent neural network structure // *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* 2018. V. 29. P. 1275–1286.
5. **Łedziński D., Bujnowski S., Marciniak T., Pedersen J. M., Gutierrez Lopez J. M.** Networks structures constructed on basis of chordal rings 4th degree // *Image processing and communications challenges 5. Proc. 5th Int. Conf. (Bydgoszcz, Poland, Sept. 11–13, 2013)*. Cham: Springer, 2014. P. 281–299. (Adv. Intell. Syst. Comput.; V. 233). DOI: 10.1007/978-3-319-01622-1_33.
6. **Martínez C., Vallejo E., Beivide R., Izu C., Moretó M.** Dense Gaussian networks: Suitable topologies for on-chip multiprocessors // *Int. J. Parallel Program.* 2006. V. 34, No. 3. P. 193–211. DOI: 10.1007/s10766-006-0014-1.
7. **Bermond J.-C., Comellas F., Hsu D. F.** Distributed loop computer networks: A survey // *J. Parallel Distrib. Comput.* 1995. V. 24, No. 1. P. 2–10. DOI: 10.1006/jpdc.1995.1002.
8. **Hwang F. K.** A survey on multi-loop networks // *Theor. Comput. Sci.* 2003. V. 299, No. 1–3. P. 107–121.
9. **Monakhova E. A.** A survey on undirected circulant graphs // *Discrete Math. Algorithms Appl.* 2012. V. 4, No. 1. Article ID 1250002. 30 p.
10. **Deng Y., Guo M., Ramos A. F., Huang X., Xu Z., Liu W.** Optimal low-latency network topologies for cluster performance enhancement // *J. Supercomputing.* 2020. V. 76, No. 12. P. 9558–9584.
11. **Monakhova E. A., Monakhov O. G.** Double-loop-networks. Datasets of optimal double loop networks or optimal circulant graphs ($N; 1, s$). 2024. github.com/mila0411/Double-loop-networks (accessed: 29.08.2025).
12. **Монахова Э. А., Монахов О. Г.** Анализ базы данных оптимальных двухконтурных кольцевых сетей // Прикл. дискрет. математика. 2024. № 64. С. 56–71.
13. **Tzvieli D.** Minimal diameter double-loop networks. I. Large infinite optimal families // *Networks.* 1991. V. 21, No. 4. P. 387–415.
14. **Bermond J.-C., Illiades G., Peyrat C.** An optimization problem in distributed loop computer networks // *Ann. New York Acad. Sci.* 1989. V. 555, No. 1. P. 45–55.
15. **Browne R. F., Hodgson R. M.** Symmetric degree-four chordal ring networks // *IEE Proc. Ser. E.* 1990. V. 137, No. 4. P. 310–318.
16. **Bian Q.-F., Hang T., Liu H., Fang M.** Research on the diameter and average diameter of undirected double-loop networks // *Proc. 9th Int. Conf. Grid and Cloud Computing (Nanjing, China, Nov. 1–5, 2010)*. Los Alamitos: IEEE Comput. Soc., 2010. P. 461–466.
17. **Корнеев В. В.** О макроструктуре однородных вычислительных систем // Вычислительные системы. Вып. 60. Вопросы теории и построения вычислительных систем. Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1974. С. 17–34.

18. Wong C. K., Coppersmith D. A combinatorial problem related to multi-module memory organizations // J. ACM. 1974. V. 21, No. 3. P. 392–402.
19. Lewis R. R. Distance partitions of extremal and largest known circulant graphs of degree 2 to 9. Ithaca, NY, 2014. 22 p. (e-Print Archive / Cornell Univ.; arXiv:1408.0988).
20. Boesch F., Wang J.-F. Reliable circulant networks with minimum transmission delay // IEEE Trans. Circuits Syst. 1985. V. 32, No. 12. P. 1286–1291.
21. Romanov A. Yu. The dataset for optimal circulant topologies // Big Data Cogn. Comput. 2023. V. 7, No. 2. Article ID 80. 14 p.
22. Монахов О. Г., Монахова Э. А. Масштабируемый подход к кодизайну топологий и алгоритмов маршрутизации для семейств оптимальных циркулянтных сетей степени четыре // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2025. Т. 32, № 2. С. 88–106.
23. Fiol M. À., Yebra J. L. A., Alegre I., Valero M. A discrete optimization problem in local networks and data alignment // IEEE Trans. Comput. 1987. V. C-36, No. 6. P. 702–713.
24. Hwang F. K. A complementary survey on double-loop networks // Theor. Comput. Sci. 2001. V. 263, No. 1–2. P. 211–229.
25. Jha P. K. Dimension-order routing algorithms for a family of minimal-diameter circulants // J. Interconnect. Netw. 2013. V. 14, No. 1. Article ID 1350002. 24 p.
26. Camarero C., Martínez C., Beivide R. L-networks: A topological model for regular two-dimensional interconnection networks // IEEE Trans. Comput. 2013. V. 62, No. 7. P. 1362–1375.
27. Chen B.-X., Meng J.-X., Xiao W.-J. A constant time optimal routing algorithm for undirected double-loop networks // Mobile ad-hoc and sensor networks. Proc. 1st Int. Conf. (Wuhan, China, Dec. 13–15, 2005). Heidelberg: Springer, 2005. P. 308–316. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 3794).

Монахова Эмилия Анатольевна
Монахов Олег Геннадьевич

Статья поступила
29 ноября 2024 г.
После доработки —
21 декабря 2024 г.
Принята к публикации
22 марта 2025 г.

SEARCH AND RESEARCH OF IDEAL TWO-DIMENSIONAL CIRCULANT NETWORKS BASED ON GRAPH DATABASES

E. A. Monakhova^a and O. G. Monakhov^b

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
 6 Acad. Lavrentiev, 630090 Novosibirsk, Russia

E-mail: ^aemilia@rav.sscc.ru, ^bmonakhov@rav.sscc.ru

Abstract. Based on analysis of large arrays of experimental data, the problem of finding ideal two-dimensional ring circulant networks optimal with respect to two parameters, diameter and average distance, is investigated. Previously, the authors obtained a large dataset (database) of two-dimensional ring circulant networks that are optimal with respect to diameter. In this paper, a new dataset of the considered networks that are optimal with respect to average distance is obtained. The study of the graphs of these datasets allowed us to derive new properties of the ratios of diameter and average distance in optimal circulants and to obtain families of the best optimal circulant networks with respect to two parameters, for which an efficient routing algorithm of constant complexity, adjustable by the number of nodes, is applicable. Ideal two-dimensional ring circulants are of interest as efficient and reliable topologies for inter-node connections in networks on a chip and information and communication systems. Illustr. 6, bibliogr. 27.

Keywords: undirected double loop network, diameter, mean distance, dataset of optimal circulant networks, routing algorithm.

References

1. **X. Huang, A. F. Ramos, and Y. Deng**, Optimal circulant graphs as low-latency network topologies, *J. Supercomputing* **78** (11), 13491–13510 (2022), DOI: 10.1007/s11227-022-04396-5.
2. **H. Liu, X. Li, and S. Wang**, Construction of dual optimal bidirectional double-loop networks for optimal routing, *Mathematics* **10**, ID 4016 (2022), DOI: 10.3390/math10214016.

3. **R. Hoffmann, D. Deserable, and F. Seredyński**, Cellular automata rules solving the wireless sensor network coverage problem, *Nat. Comput.* **21**, 417–447 (2022).
4. **J. Fei and C. Lu**, Adaptive sliding mode control of dynamic systems using double loop recurrent neural network structure, *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* **29**, 1275–1286 (2018).
5. **D. Ledziński, S. Bujnowski, T. Marciniak, J. M. Pedersen, and J. M. Gutierrez Lopez**, Networks structures constructed on basis of chordal rings 4th degree, in *Image Processing and Communications Challenges 5*, Proc. 5th Int. Conf. (Bydgoszcz, Poland, Sept. 11–13, 2013) (Springer, Cham, 2014), pp. 281–299 (Adv. Intell. Syst. Comput., Vol. 233), DOI: 10.1007/978-3-319-01622-1_33.
6. **C. Martínez, E. Vallejo, R. Beivide, C. Izu, and M. Moretó**, Dense Gaussian networks: Suitable topologies for on-chip multiprocessors, *Int. J. Parallel Program.* **34** (3), 193–211 (2006), DOI: 10.1007/s10766-006-0014-1.
7. **J.-C. Bermond, F. Comellas, and D. F. Hsu**, Distributed loop computer networks: A survey, *J. Parallel Distrib. Comput.* **24** (1), 2–10 (1995), DOI: 10.1006/jpdc.1995.1002.
8. **F. K. Hwang**, A survey on multi-loop networks, *Theor. Comput. Sci.* **299** (1–3), 107–121 (2003).
9. **E. A. Monakhova**, A survey on undirected circulant graphs, *Discrete Math. Algorithms Appl.* **4** (1), ID 1250002 (2012).
10. **Y. Deng, M. Guo, A. F. Ramos, X. Huang, Z. Xu, and W. Liu**, Optimal low-latency network topologies for cluster performance enhancement, *J. Supercomputing* **76** (12), 9558–9584 (2020).
11. **E. A. Monakhova and O. G. Monakhov**, Double-loop-networks. Datasets of optimal double loop networks or optimal circulant graphs ($N; 1, s$) (2024), github.com/mila0411/Double-loop-networks (accessed: 29.08.2025).
12. **E. A. Monakhova and O. G. Monakhov**, Database analysis of optimal double-loop networks, *Prikl. Diskretn. Mat.*, No. 64, 56–71 (2024) [Russian].
13. **D. Tzvieli**, Minimal diameter double-loop networks. I. Large infinite optimal families, *Networks* **21** (4), 387–415 (1991).
14. **J.-C. Bermond, G. Illiades, and C. Peyrat**, An optimization problem in distributed loop computer networks, *Ann. New York Acad. Sci.* **555** (1), 45–55 (1989).
15. **R. F. Browne and R. M. Hodgson**, Symmetric degree-four chordal ring networks, *IEE Proc, Ser. E* **137** (4), 310–318 (1990).
16. **Q.-F. Bian, T. Hang, H. Liu, and M. Fang**, Research on the diameter and average diameter of undirected double-loop networks, in *Proc. 9th Int. Conf. Grid and Cloud Computing* (Nanjing, China, Nov. 1–5, 2010) (IEEE Comput. Soc., Los Alamitos, 2010), pp. 461–466.
17. **V. V. Korneev**, On macrostructure of homogeneous computing systems, in *Computing Systems*, Vol. 60. Problems of Theory and Construction of Computing Systems (IM SO AN SSSR, Novosibirsk, 1974) [Russian], pp. 17–34.

18. **C. K. Wong** and **D. Coppersmith**, A combinatorial problem related to multimodule memory organizations, *J. ACM* **21** (3), 392–402 (1974).
19. **R. R. Lewis**, Distance partitions of extremal and largest known circulant graphs of degree 2 to 9 (Ithaca, NY, 2014) (e-Print Archive / Cornell Univ., arXiv:1408.0988).
20. **F. Boesch** and **J.-F. Wang**, Reliable circulant networks with minimum transmission delay, *IEEE Trans. Circuits Syst.* **32** (12), 1286–1291 (1985).
21. **A. Yu. Romanov**, The dataset for optimal circulant topologies, *Big Data Cogn. Comput.* **7** (2), ID 80 (2023).
22. **O. G. Monakhov** and **E. A. Monakhova**, A scalable approach to co-design of topologies and routing algorithms for families of optimal degree-four circulant networks, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **32** (2), 88–106 (2025) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **19** (2) (2025)].
23. **M. À. Fiol**, **J. L. A. Yebra**, **I. Alegre**, and **M. Valero**, A discrete optimization problem in local networks and data alignment, *IEEE Trans. Comput.* **C-36** (6), 702–713 (1987).
24. **F. K. Hwang**, A complementary survey on double-loop networks, *Theor. Comput. Sci.* **263** (1–2), 211–229 (2001).
25. **P. K. Jha**, Dimension-order routing algorithms for a family of minimal-diameter circulants, *J. Interconnect. Netw.* **14** (1), ID 1350002 (2013).
26. **C. Camarero**, **C. Martinez**, and **R. Beivide**, L-networks: A topological model for regular two-dimensional interconnection networks, *IEEE Trans. Comput.* **62** (7), 1362–1375 (2013).
27. **B.-X. Chen**, **J.-X. Meng**, and **W.-J. Xiao**, A constant time optimal routing algorithm for undirected double-loop networks, in *Mobile Ad-Hoc and Sensor Networks*, Proc. 1st Int. Conf. (Wuhan, China, Dec. 13–15, 2005) (Springer, Heidelberg, 2005), pp. 308–316 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 3794).

Emilia A. Monakhova

Oleg G. Monakhov

Received November 29, 2024

Revised December 21, 2024

Accepted March 22, 2025