

ISSN 2949-5598

# ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 32 № 4 2025

Новосибирск  
Издательство Института математики

## НЕЧЁТКОЕ ЯДРО И ВАЛЬРАСОВСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЭКОНОМИКИ

*В. А. Васильев*

Институт математики им. С. Л. Соболева,  
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: [vasilev@math.nsc.ru](mailto:vasilev@math.nsc.ru)

**Аннотация.** Анализируется эквивалентность неблокируемых и вальрасовских планов в пространственных моделях регионального взаимодействия, разработанных акад. А. Г. Гранбергом и его школой. Изучается непрерывный вариант гипотезы Эджворта: совпадение нечётких ядер с множествами равновесных распределений. Следует отметить, что помимо самостоятельной ценности, условия совпадения указанных множеств представляют значительный интерес при рассмотрении вопросов существования вальрасовских планов в пространственных моделях с неограниченными технологическими множествами. Ключевую роль в получении теоремы эквивалентности играют условия строгой автаркичности регионов (некоторый аналог известного условия Слейтера) и их неограниченности по функционалу. Важным общесистемным требованием является отсутствие так называемого «рога изобилия». Библиогр. 10.

**Ключевые слова:** пространственная экономика, вальрасовское распределение, нечёткое ядро, автаркия, «рог изобилия».

### Введение

В заметке продолжается сравнительный анализ равновесных и устойчивых по отношению к блокированию нечёткими коалициями планов в пространственных моделях регионального взаимодействия, разработанных акад. А. Г. Гранбергом и его школой [1]. Изучается непрерывный вариант гипотезы Эджворта, касающийся совпадения нечётких ядер с множествами равновесных распределений в условиях совершенной конкуренции. Ключевую роль в обеспечении такого совпадения играют условия

строгой автаркичности регионов и их неограниченности по функционалу. В содержательном плане строгая автаркичность означает потенциальную возможность реализации региональных планов строгого превышения экспорта над импортом. Иначе говоря, автаркичность есть некоторая форма гипотетической автономности на региональном уровне (не путать с сознательной политикой, направленной на создание замкнутого хозяйства, обособленного от экономики других регионов). Что касается региональной неограниченности по функционалу, это условие является аналогом монотонности индивидуальных предпочтений и потенциальной неограниченности потребления в классических моделях чистого обмена (см., например, [2]). Отметим сразу, что для получения основного результата об эквивалентности равновесных и неблокируемых распределений изучаемой модели достаточно и более скромного требования, чем региональная неограниченность по функционалу. Преимущество последнего заключается в значительном упрощении проверки в сравнении с более слабым предположением о ненасыщаемости регионов (см. [3]). Кроме перечисленных важным общесистемным требованием в обосновании основного результата является отсутствие так называемого «рога изобилия». Как и в классических моделях равновесного анализа, указанное требование означает, что при нулевом экономическом потенциале рассматриваемой пространственной системы возможна лишь её нулевая хозяйственная активность.

Отметим, что исследование проводится по схеме, разработанной автором в одной из ранних работ [4] и применявшейся в ряде дальнейших публикаций (см., например, [3]). Помимо основного материала в настоящей заметке уточняются некоторые предшествующие результаты и восстанавливаются полные доказательства там, где ранее приводились лишь их краткие схемы, данные только в нежурнальных публикациях. Завершая введение, отметим, что помимо самостоятельной ценности, признаки совпадения нечётких ядер и множеств равновесных распределений представляют значительный интерес при рассмотрении вопросов существования вальрасовских планов в пространственных моделях с неограниченными технологическими множествами (см. [3]).

Кроме введения работа содержит ещё три раздела. В разд. 1 приводится описание изучаемой модели пространственной экономики. В разд. 2 вводятся ключевые понятия: определение нечёткого ядра и вальрасовского равновесия рассматриваемой модели регионального взаимодействия. Разд. 3 содержит доказательство основного результата работы, указывающего условия, достаточные для совпадения нечёткого ядра и множества вальрасовских распределений исследуемой модели пространственной экономики.

### 1. Описание модели $M$

Следуя [5, 6], дадим краткое описание рассматриваемой модели пространственной экономики  $M$ , предназначенной для анализа экономического взаимодействия  $r$  регионов, обменивающихся  $n$  транспортабельными видами продукции из единого для всех регионов списка  $\{1, \dots, n\}$ . Эта модель имеет вид

$$M = \langle R, \{A^s, G^s, H^s, b^s, d^s\}_{s \in R} \rangle,$$

где  $R = \{1, \dots, r\}$  — множество (номеров) регионов;  $A^s$  — прямоугольная матрица размера  $n_s \times l_s$ , характеризующая производственный сектор региона  $s \in R$ ;  $G^s$  и  $H^s$  — прямоугольные матрицы размера  $n_s \times n$ , описывающие способы вывоза и ввоза в регионе  $s \in R$ ;  $b^s$  — вектор-столбец размерности  $n_s$ , характеризующий имеющийся ресурсно-технологический потенциал региона  $s \in R$ ;  $d^s$  — вектор-столбец размерности  $n_s$ , описывающий затраты ресурсов и продукции, связанные с достижением целей развития региона  $s \in R$ .

Детальную интерпретацию и ряд важных приложений этой модели можно найти в [1, 5, 6]. Здесь отметим лишь, что в отличие от более общей постановки из [1], далее предполагается, как и в [6], что изучаемый межрегиональный обмен реализуется на единой, общей для всех рыночной площадке, поэтому в приводимом ниже описании ресурсно-технологических возможностей  $Z_s$  регионов  $s \in R$  их внешние связи представлены лишь переменными вывоза и ввоза, без разделения по регионам-контрагентам. Напомним, что возможности региона  $s$  модели  $M$  по ввозу (вывозу)  $k$ -го продукта характеризуются  $k$ -м столбцом матрицы  $H^s$  ( $G^s$ ), имеющим лишь два ненулевых элемента: 1 на  $k$ -й позиции и  $-c_s^v$  на позиции, отвечающей внешнеторговым перевозкам, при этом  $c_s^v$  — транспортные издержки по ввозу единицы продукта  $k$  в регион  $s$  ( $k$ -й столбец матрицы  $G^s$  также имеет два ненулевых элемента  $-1$  и  $-c_s^u$  на тех же позициях, при этом  $c_s^u$  — транспортные издержки по вывозу единицы продукта  $k$  из региона  $s$ ). В целом, каждая из матриц  $G^s$  и  $H^s$  — за исключением строк транспортных издержек — получена из единичной матрицы вычеркиванием столбцов, отвечающих отраслям с нетранспортабельной продукцией (с последующим умножением на  $-1$  для  $G^s$ ). Подробности, касающиеся других параметров модели  $M$ , см. в [1, 6].

Напомним [6], что множество  $Z_s$  ресурсно-технологических возможностей региона  $s \in R$  имеет вид

$$Z_s = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in \mathbb{R}_+^{l_s} \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+ \mid A^s x^s + G^s u^s + H^s v^s \geq b^s + \lambda_s d^s\}.$$

Неотрицательные вектор-столбцы  $x^s = (x_i^s)_{i=1}^{l_s}$ ,  $u^s = (u_j^s)_{j=1}^n$ ,  $v^s = (v_j^s)_{j=1}^n$  для региона  $s \in R$  модели  $M$  определяют объёмы производства, вывоза

и ввоза соответственно, а число  $\lambda_s \in \mathbb{R}_+$  — степень достижения целей регионального развития. Как обычно, символом  $\mathbb{R}$  обозначается множество вещественных чисел, а неравенство для векторов понимается в обычном покомпонентном смысле:  $x \geq y$ , если  $x_i \geq y_i$  при  $i = 1, \dots, m$  для любых  $x = (x_1, \dots, x_m), y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ .

Качество ресурсно-технологических возможностей (планов)  $z^s \in Z_s$  оценивается с помощью функций  $t_s$ , сопоставляющих каждому вектору  $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)$  его последнюю компоненту  $\lambda_s$ :

$$t_s(z^s) = t_s(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) = \lambda_s, \quad (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s, \quad s \in R.$$

Другими словами, отображения  $t_s: Z_s \rightarrow \mathbb{R}$  — целевые функции участников  $s \in R$ , характеризующие степень достижения целей их регионального развития.

Положим  $Z = Z_M = \prod_{s \in R} Z_s$  и через  $Z(R) = Z_M(R)$  обозначим совокупность сбалансированных планов модели  $M$ :

$$Z_M(R) = \left\{ (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s \in R} \in Z_M \mid \sum_{s \in R} u^s \geq \sum_{s \in R} v^s \right\}.$$

Если модель  $M$  однозначно определяется из контекста, то символ  $M$  опускается и используются сокращения  $Z, Z(R)$  и т. п. Согласно интерпретации из [1, 6] условие сбалансированности  $\sum_{s \in R} u^s \geq \sum_{s \in R} v^s$  означает, что по каждому из  $n$  транспортабельных продуктов  $k$ , участвующих в обмене, должно выполняться стандартное условие баланса: суммарный импорт  $\sum_{s \in R} v_k^s$  не превышает суммарного экспорта  $\sum_{s \in R} u_k^s$ . Напомним, что в модели  $M$  предполагается, что списки  $N_s = \{1, \dots, n\}$ ,  $s \in R$ , транспортабельных продуктов регионов совпадают между собой и содержат ровно  $n$  элементов.

Аналогично множеству  $R$  всех регионов рассматриваются и сбалансированные планы непустых частей  $R$ , называемых *коалициями*. А именно, для каждой коалиции  $T \subseteq R$  вводим обозначения  $Z_T = Z_{M,T} = \prod_{s \in T} Z_s$  и под  $Z(T) = Z_M(T)$  понимаем совокупность сбалансированных планов этой коалиции

$$Z_M(T) = \left\{ (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)_{s \in T} \in Z_{M,T} \mid \sum_{s \in T} u^s \geq \sum_{s \in T} v^s \right\}.$$

Особое место в формулировке ряда утверждений, касающихся коалиционной стабильности равновесных планов, занимают одноэлементные коалиции. Отвечающие им множества сбалансированных планов имеют вид

$$Z_M(s) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid u^s \geq v^s\}, \quad s \in R.$$

Здесь и далее используются стандартные сокращения, при которых фигурные скобки в записи одноэлементных множеств опускаются:  $Z_M(s) = Z_M(\{s\})$ ,  $s \in R$ .

**Определение 1.** Регион  $s \in R$  называется *автаркическим*, если его технологические возможности могут обеспечить превышение экспорта над импортом

$$Z_M(s) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid u^s \geq v^s\} \neq \emptyset. \quad (M1)$$

Элементы множества  $Z_M(s)$  называются *автаркическими планами региона  $s$* .

Как видно из определения 1, выполнение условия (M1) означает лишь потенциальную реализуемость автономных — сбалансированных по экспорту и импорту — планов развития региона  $s \in R$ . Подчеркнём, что как в содержательном, так и в чисто формальном плане словосочетание «автаркический регион» есть термин, характеризующий вышеупомянутое свойство региональной экономики. В отличие от существительного «автаркия» этот термин не имеет никакого отношения к реальной экономической политике региона.

Важную роль в дальнейших рассуждениях играет и такой объект, связанный с моделью  $M$ , как множество  $Z_{M_0}(R)$  сбалансированных планов её однородной составляющей

$$M_0 = \langle R, \{A^s, G^s, H^s, 0, d^s\}_{s \in R} \rangle.$$

Согласно определению модель  $M_0$  отличается от  $M$  только тем, что начальный ресурсно-технологический потенциал  $M_0$  равен нулю:  $b^s = 0$  для каждого региона  $s \in R$ .

**Определение 2.** Будем говорить, что в модели  $M$  *отсутствует «рог изобилия»*, если выполняется условие

$$Z_{M_0}(R) = \{0\}. \quad (M2)$$

Напомним, что условие (M2) трактуется как невозможность ненулевого выпуска при нулевом ресурсно-технологическом потенциале пространственной экономической системы  $M$ .

## 2. Вальрасовское равновесие и нечёткое ядро

Переходя к описанию вальрасовского равновесия в модели  $M$ , определим сначала понятие *бюджетных множеств*  $B_s(p)$  регионов  $s \in R$  при ценах  $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$  (см. также [6]). Последние задаются формулой, в которой  $x \cdot y$  — скалярное произведение векторов  $x$  и  $y$ :

$$B_s(p) = \{z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid p \cdot u^s \geq p \cdot v^s\}, \quad s \in R.$$

**Определение 3** (вальрасовское равновесие [6]). Сбалансированный план  $\bar{z} = (\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s, \bar{\lambda}_s)_{s \in R} \in Z_M(R)$  и ненулевой вектор цен  $\bar{p} \in \mathbb{R}_+^n$  образуют вальрасовское равновесие модели  $M$ , если для каждого региона  $s \in R$  выполняются условия

$$(W1) \quad \bar{p} \cdot \bar{u}^s \geq \bar{p} \cdot \bar{v}^s;$$

$$(W2) \quad \bar{\lambda}_s \geq \lambda_s \text{ для всех планов } (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in B_s(\bar{p}).$$

При этом план  $\bar{z}$  называется *вальрасовским* планом модели  $M$ , а цены  $\bar{p}$  — *равновесными ценами*  $M$ . Совокупность вальрасовских планов модели  $M$  обозначим через  $W(M)$ .

**Замечание 1.** Вальрасовские планы называют также равновесными планами (или вальрасовскими распределениями), а равновесные цены — вальрасовскими (см., например, [1, 6]).

Введём ещё одно рассматриваемое в работе понятие оптимальности — определение нечёткого ядра применительно к рассматриваемой модели пространственной экономики. Рассмотрим гиперкуб

$$I^R = \{\tau = (\tau_1, \dots, \tau_r) \in \mathbb{R}_+^R \mid \tau_s \leq 1, s \in R\}$$

и, следуя [3], положим  $\sigma_F = I^R \setminus \{0\}$ . Согласно [2] (см. также [7]) элементы множества  $\sigma_F$  называются *нечёткими коалициями*. Каждая компонента  $\tau_s$  вектора  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_r) \in \sigma_F$  трактуется как степень участия игрока  $s$  в большой коалиции  $R$ . Для нечёткой коалиции  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_r) \in \sigma_F$  через  $R(\tau)$  обозначается *носитель*  $\tau$

$$R(\tau) = \{s \in R \mid \tau_s > 0\}.$$

**Определение 4** (нечёткое ядро [6]). Коалиция  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_r) \in \sigma_F$  блокирует сбалансированный план  $\bar{z} = (\bar{z}^s)_{s \in R} \in Z(R)$ , если существуют региональные планы

$$z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s, \quad s \in R(\tau),$$

для которых выполняются условия

$$(CF1) \quad t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s) \text{ для каждого } s \in R(\tau);$$

$$(CF2) \quad \sum_{s \in R(\tau)} \tau_s u^s \geq \sum_{s \in R(\tau)} \tau_s v^s.$$

План  $z \in Z(R)$ , не блокируемый никакой коалицией  $\tau \in \sigma_F$ , называется *неблокируемым* сбалансированным планом. Обозначим совокупность всех неблокируемых сбалансированных планов модели  $M$  через  $C_F(M)$  и назовём  $C_F(M)$  её *нечётким ядром*.

В завершение раздела отметим, что естественным необходимым условием наличия как равновесных, так и неблокируемых сбалансированных планов является непустота множества  $Z_M(R)$ . Ясно, что автаркичность всех регионов гарантирует выполнение этого условия. Действительно,

предполагая существование автаркических планов  $z_0^s = (x_0^s, u_0^s, v_0^s, \lambda_s^0)$ , непосредственно из определения множества сбалансированных планов модели  $M$  получаем: план  $(z_0^s)_{s \in R}$  принадлежит  $Z_M(R)$  в силу очевидного неравенства  $\sum_{s \in R} u_0^s \geq \sum_{s \in R} v_0^s$ . Отметим, что автаркичность региона  $s \in R$  обеспечивает, например, неотрицательная разрешимость системы  $A^s x^s \geq b^s$  (или системы  $A^s x^s \geq b^s + \lambda_s d^s$ ). В этих случаях автаркические планы имеют вид  $(x_0^s, 0, 0, 0)$  или  $(x_1^s, 0, 0, \lambda_s^1)$  соответственно. Здесь  $x_0^s$  — решение системы  $A^s x^s \geq b^s$ ,  $x^s \geq 0$ , а  $(x_1^s, \lambda_s^1)$  — решение системы  $A^s x^s \geq b^s + \lambda_s d^s$ ,  $x^s \geq 0$ ,  $\lambda_s \geq 0$ .

Представляют интерес и другие условия, но их формулировка упирается в отсутствие экономически осмысленной конкретики, касающейся матриц  $A_s$ ,  $G_s$ ,  $H_s$  и векторов  $b^s$  и  $d^s$ . Конечно, если для достижения целей развития региона  $s \in R$  требуются ненулевые затраты всех ресурсов и продукции (т. е. имеет место строгая отрицательность всех компонент вектора  $d^s$ ), то тривиальным автаркическим планом этого региона является любой элемент  $z_0^s = (x_0^s, u_0^s, v_0^s, \lambda_s^0) \in Z_s$ , удовлетворяющий условию:  $x_0^s = 0$ ,  $u_0^s = 0$ ,  $v_0^s = 0$  и  $b_k^s + \lambda_s^0 d_k^s \leq 0$  для каждого  $k = 1, \dots, n$ . Поскольку необходимость использования всех ресурсов и продукции для реализации целевых установок каждого региона представляется достаточно жёстким условием, вопрос отыскания более слабых и экономически содержательных требований, обеспечивающих существование сбалансированных планов, остаётся открытым.

### 3. Условия совпадения множеств $C_F(M)$ и $W(M)$

Для формулировки теоремы о совпадении нечёткого ядра и множества вальрасовских распределений модели  $M$  потребуется введение понятия строгой автаркичности региона  $s \in R$  — техническое усиление введённого ранее условия автаркичности (M1) из разд. 1.

**Определение 5.** Регион  $s \in R$  называется *строго автаркическим*, если его технологические возможности могут обеспечить строгое превышение экспорта над импортом:

$$\widehat{Z}_M(s) = \{(x^s, u^s, v^s, \lambda_s) \in Z_s \mid u^s \gg v^s\} \neq \emptyset, \quad (\text{M1}^*)$$

где  $x \gg y$  означает выполнение строгих неравенств  $x_i > y_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , для  $x, y \in \mathbb{R}^m$ .

Кроме того, среди используемых далее характеристик, касающихся регионов как таковых, помимо (M1\*) укажем ещё одну.

**Определение 6.** Регион  $s \in R$  называется *неограниченным по функционалу*, если его целевая функция  $t_s$  не ограничена сверху на технологическом множестве  $Z_s$

$$\sup_{z^s \in Z_s} t_s(z^s) = \infty. \quad (\text{M3})$$

Условие (M3) является некоторым аналогом монотонности индивидуальных предпочтений и потенциальной неограниченности потребления в классических моделях чистого обмена (см., например, [2]).

Для технологических планов  $z^s$  регионов  $s \in R$  введём обозначения

$$P_s(z^s) = \{\tilde{z}^s \in Z_s \mid t_s(\tilde{z}^s) > t_s(z^s)\}, \quad z^s \in Z_s, s \in R.$$

Справедливо простое, но полезное в дальнейших рассуждениях утверждение.

**Лемма 1.** *Если в модели  $M$  отсутствует «рог изобилия», т. е. имеет место (M2), и все её регионы неограниченны по функционалу, то для любого плана  $z = (z^s)_{s \in R} \in Z_M(R)$  множество  $P_s(z^s)$ ,  $s \in R$ , непустое.*

**Доказательство.** Ясно, что множество  $Z_M(R)$  замкнуто. Кроме того, при отсутствии «рога изобилия» из многогранности множества  $Z_M(R)$  на основании критерия Голдмана [8, следствие 1В] вытекает его ограниченность. Значит, множество  $Z_M(R)$  сбалансированных планов рассматриваемой модели является компактом, поэтому проекции  $\text{Pr}_{Z_s} Z_M(R)$ ,  $s \in R$ , будучи непрерывными образами компакта  $Z_M(R)$ , также компактны. Итак, полагая  $\tilde{Z}_s = \text{Pr}_{Z_s} Z_M(R)$ , получаем, что максимумы непрерывных функций  $t_s$  на соответствующих множествах  $\tilde{Z}_s$  конечны. Отсюда в силу бесконечности супремумов функций  $t_s(z^s)$  на их областях определения выполняются очевидные неравенства  $\sup_{z^s \in Z_s} t_s(z^s) > \max_{z^s \in \tilde{Z}_s} t_s(z^s)$ , но эти неравенства и означают требуемое: для каждого  $s \in R$  существует региональный план  $\tilde{z}_s \in Z_s$  такой, что  $t_s(\tilde{z}_s) > t_s(z^s)$ . Итак, для каждого  $s \in R$  множество  $P_s(z^s)$  непустое. Лемма 1 доказана.

Пусть сбалансированный план  $z = (z^s)_{s \in R}$  модели  $M$  удовлетворяет условию  $P_s(z^s) \neq \emptyset$  для каждого региона  $s \in R$ . В таком случае в дальнейшем будем использовать обозначения

$$A_s(z^s) = \{T_s(\tilde{z}^s) \mid \tilde{z}^s \in P_s(z^s)\}, \quad s \in R,$$

где  $T_s$  — линейные операторы, определяемые соотношениями

$$T_s(\tilde{z}^s) = \{\tilde{u}^s - \tilde{v}^s \mid \tilde{z}^s = (\tilde{x}^s, \tilde{u}^s, \tilde{v}^s, \tilde{\lambda}_s) \in \mathbb{R}^{l_s} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\}, \quad s \in R.$$

Важную роль в дальнейших рассуждениях играет следующая техническая

**Лемма 2.** Если в модели  $M$  отсутствует «рог изобилия» и все её регионы неограниченны по функционалу, то для любого плана  $z = (z^s)_{s \in R}$  из  $Z_M(R)$  множество

$$A(z) = \left\{ \sum_{s \in R} \tau_s w^s \mid (\tau_1, \dots, \tau_r) \in \sigma_F, (w^1, \dots, w^r) \in \prod_{s \in R} A_s(z^s) \right\}.$$

выпукло<sup>1)</sup>.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Для произвольного плана  $z = (z^s)_{s \in R} \in Z_M(R)$  установим выпуклость множества  $A(z)$ . Начнём с того, что в силу леммы 1 оно определено корректно, поскольку  $P_s(z^s) \neq \emptyset$ ,  $s \in R$ . Далее, рассмотрим произвольные элементы  $a^1$  и  $a^2$  из  $A(z)$  и какое-либо число  $\nu \in (0, 1)$ . Покажем, что вектор  $a(\nu) = \nu a^1 + (1 - \nu)a^2$  принадлежит множеству  $A(z)$ . Напомним, что по определению  $A(z)$  существуют наборы

$$\begin{aligned} z_{(1)}^s &= (x_{(1)}^s, u_{(1)}^s, v_{(1)}^s, \lambda_s^{(1)}) \in P_s(z^s), \quad s \in R, \\ z_{(2)}^s &= (x_{(2)}^s, u_{(2)}^s, v_{(2)}^s, \lambda_s^{(2)}) \in P_s(z^s), \quad s \in R, \end{aligned}$$

и нечёткие коалиции  $\tau^{(1)} = (\tau_1^{(1)}, \dots, \tau_r^{(1)})$ ,  $\tau^{(2)} = (\tau_1^{(2)}, \dots, \tau_r^{(2)})$  такие, что

$$a^1 = \sum_{s \in R} \tau_s^{(1)} (u_{(1)}^s - v_{(1)}^s), \quad a^2 = \sum_{s \in R} \tau_s^{(2)} (u_{(2)}^s - v_{(2)}^s).$$

Следовательно, полагая  $w_{(1)}^s = u_{(1)}^s - v_{(1)}^s$ ,  $w_{(2)}^s = u_{(2)}^s - v_{(2)}^s$ , имеем

$$a(\nu) = \nu \sum_{s \in R} \tau_s^{(1)} w_{(1)}^s + (1 - \nu) \sum_{s \in R} \tau_s^{(2)} w_{(2)}^s. \quad (1)$$

Далее, введём в рассмотрение нечёткую коалицию  $\tau(\nu)$ , определяемую формулой  $\tau(\nu) = \nu \tau^{(1)} + (1 - \nu) \tau^{(2)}$ . Ясно, что компоненты  $\tau(\nu)_s$  вектора  $\tau(\nu)$  имеют вид

$$\tau(\nu)_s = \nu \tau_s^{(1)} + (1 - \nu) \tau_s^{(2)}, \quad s \in R. \quad (2)$$

Определим наборы  $z^s(\nu)$  соотношениями

$$z^s(\nu) = \begin{cases} \left( \frac{\nu \tau_s^{(1)}}{\tau(\nu)_s} \right) z_{(1)}^s + \left( \frac{(1-\nu) \tau_s^{(2)}}{\tau(\nu)_s} \right) z_{(2)}^s, & \text{если } s \in N(\tau^{(1)}) \cup N(\tau^{(2)}), \\ z_{(1)}^s, & \text{если } s \in \tilde{R}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\tilde{R} = R \setminus (N(\tau^{(1)}) \cup N(\tau^{(2)}))$ .

Понятно, что из формулы (1) и из включений  $z_{(1)}^s, z_{(2)}^s \in P_s(z^s)$  в силу линейности функций  $t_s$  вытекают неравенства  $t_s(z^s(\nu)) > t_s(z^s)$ ,  $s \in R$ .

<sup>1)</sup> Напомним, что согласно определению модели  $M$  векторы  $u^s, v^s$ ,  $s \in R$ , принадлежат одному и тому же пространству  $\mathbb{R}^n$ , поэтому фигурирующие здесь векторы  $w^s = \tilde{u}^s - \tilde{v}^s$ ,  $s \in R$ , также из пространства  $\mathbb{R}^n$ .

Отсюда с учётом выпуклости множеств  $Z_s$  для всех векторов  $z^s(\nu)$ , определяемых формулами (2) и (3), получаем включения

$$z^s(\nu) \in P_s(z^s), \quad s \in R. \quad (4)$$

Используя формулы (2), (3), нетрудно убедиться, что для каждого региона  $s$  из  $N(\tau^{(1)}) \cup N(\tau^{(2)})$  выполняются соотношения

$$\begin{aligned} u^s(\nu) &= \left( \frac{\nu \tau_s^{(1)}}{\tau(\nu)_s} \right) u_{(1)}^s + \left( \frac{(1-\nu) \tau_s^{(2)}}{\tau(\nu)_s} \right) u_{(2)}^s, \\ v^s(\nu) &= \left( \frac{\nu \tau_s^{(1)}}{\tau(\nu)_s} \right) v_{(1)}^s + \left( \frac{(1-\nu) \tau_s^{(2)}}{\tau(\nu)_s} \right) v_{(2)}^s. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что при  $s \in \tilde{R}$  все компоненты  $\tau(\nu)_s$  нулевые, получаем равенство

$$\sum_{s \in R} \tau(\nu)_s (u^s(\nu) - v^s(\nu)) = \nu \sum_{s \in N(\tau^{(1)})} \tau_s^{(1)} w_{(1)}^s + (1-\nu) \sum_{s \in N(\tau^{(2)})} \tau_s^{(2)} w_{(2)}^s, \quad (5)$$

где, как и ранее,  $w_{(1)}^s = u_{(1)}^s - v_{(1)}^s$ ,  $w_{(2)}^s = u_{(2)}^s - v_{(2)}^s$ . Однако, в силу (1) правая часть равенства (5) и есть в точности вектор  $a(\nu)$ . Значит, ввиду включения  $\sum_{s \in R} \tau(\nu)_s (u^s(\nu) - v^s(\nu)) \in A(z)$ , вытекающего из соотношений (3) и (4), получаем требуемое: вектор  $a(\nu) = \nu a^1 + (1-\nu) a^2$  принадлежит множеству  $A(z)$ . Лемма 2 доказана.

Переходя к анализу условий эквивалентности вальрасовских распределений и распределений, не блокируемых нечёткими коалициями, напомним, что первые всегда принадлежат нечёткому ядру  $C_F(M)$ . А именно, справедливо следующее утверждение из [3] (ниже, для автономности изложения, приводится и его краткое доказательство).

**Утверждение 1.** *Для любой модели пространственной экономики  $M$  справедливо вложение*

$$W(M) \subseteq C_F(M). \quad (6)$$

**Доказательство.** Докажем (6), приводя к противоречию противоположное предположение. Пусть  $\bar{z} = (\bar{z}^s)_{s \in R}$  — произвольное распределение из  $W(M)$ , а  $\bar{p}$  — отвечающие ему равновесные цены. Допуская, что  $\bar{z}$  блокируется какой-либо нечёткой коалицией  $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_r)$ , непосредственно из определения блокирования выводим, что существуют региональные планы  $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)$ ,  $s \in R(\tau)$ , такие, что

$$\sum_{s \in R(\tau)} \tau_s u^s \geq \sum_{s \in R(\tau)} \tau_s v^s, \quad (7)$$

и, кроме того,

$$t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s), \quad s \in R(\tau). \quad (8)$$

В силу того, что распределение  $\bar{z}$  вальрасовское, из (8) вытекают неравенства  $\bar{p} \cdot u^s < \bar{p} \cdot v^s$ ,  $s \in R(\tau)$ . Умножая эти соотношения на соответствующие компоненты вектора  $\tau$  и складывая получающиеся неравенства, имеем

$$\bar{p} \cdot \sum_{s \in R(\tau)} \tau_s u^s < \bar{p} \cdot \sum_{s \in R(\tau)} \tau_s v^s.$$

Однако последнее неравенство противоречит неотрицательности вектора цен  $\bar{p}$  и неравенству (7), полученному из предположения о том, что нечёткая коалиция  $\tau$  блокирует распределение  $\bar{z}$  с помощью региональных планов  $z^s$ ,  $s \in R(\tau)$ . Утверждение 1 доказано.

Воспользуемся приведёнными леммами 1, 2 и утверждением 1 для доказательства главного результата работы — приводимой ниже теоремы эквивалентности равновесных распределений и распределений, не блокируемых нечёткими коалициями, в рассматриваемой модели пространственной экономики.

**Теорема 1.** *Если в модели  $M$  отсутствует «рог изобилия» и каждый её регион строго автаркический и неограниченный по функционалу, то множество вальрасовских планов этой модели совпадает с её нечётким ядром:*

$$W(M) = C_F(M).$$

**Доказательство.** В силу утверждения 1 для доказательства теоремы достаточно установить справедливость вложения  $C_F(M) \subseteq W(M)$ . Поскольку в случае пустого нечёткого ядра такое вложение выполняется очевидным образом, в дальнейшем считаем, что  $C_F(M) \neq \emptyset$ . Итак, пусть  $\bar{z} = (\bar{z}^s)_{s \in R}$  — произвольное распределение из  $C_F(M)$ . Нетрудно видеть, что непосредственно из определения блокирования вытекает соотношение

$$A(\bar{z}) \cap \mathbb{R}_+^n = \emptyset. \quad (9)$$

Далее, в силу леммы 2 в условиях нашей теоремы множество  $A(\bar{z})$  выпуклое. Следовательно, в силу очевидной выпуклости положительного ортанта на основании соотношения (9) выпуклые множества  $A(\bar{z})$  и  $\mathbb{R}_+^n$  удовлетворяют условию известной теоремы отделимости Минковского (см., например, [2, 9, 10]), согласно которой для непустых непересекающихся множеств  $A(\bar{z})$  и  $\mathbb{R}_+^n$  существует ненулевой вектор  $\bar{p} \in \mathbb{R}^n$  такой, что выполняется неравенство

$$\sup_{a \in A(\bar{z})} \bar{p} \cdot a \leq \inf_{b \in \mathbb{R}_+^n} \bar{p} \cdot b. \quad (10)$$

Покажем, что пара  $(\bar{p}, \bar{z})$  образует вальрасовское равновесие модели  $M$ . Начнём с проверки неотрицательности вектора  $\bar{p}$ . Легко видеть, что неотрицательность этого вектора есть прямое следствие неравенства (10). Действительно, допуская, что хотя бы одна из компонент  $\bar{p}$  меньше нуля, получаем, что правая часть упомянутого неравенства была бы равна  $-\infty$ , что противоречило бы конечности его левой части. Значит, вектор  $\bar{p}$  принадлежит конусу  $\mathbb{R}_+^n$ . Поскольку  $\bar{p} \geq 0$ , оба сомножителя в каждом из скалярных произведений в правой части неравенства (10) неотрицательны. Стало быть, эта правая часть равна нулю. Таким образом, неравенство (10) имеет следующую конкретизацию:  $\sup_{a \in A(\bar{z})} \bar{p} \cdot a \leq 0$ .

Ввиду очевидных вложений  $A_s(\bar{z}^s) \subseteq A(\bar{z})$ ,  $s \in R$ , получаем

$$\bar{p} \cdot w^s \leq 0, \quad w^s \in A_s(\bar{z}^s), \quad s \in R, \quad (11)$$

откуда с учётом определения множеств  $A_s(\bar{z}^s)$  следуют импликации

$$t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s) \Rightarrow \bar{p} \cdot u^s \leq \bar{p} \cdot v^s, \quad z^s \in Z_s, \quad s \in R. \quad (12)$$

Покажем, что для объёмов экспорта и импорта в рассматриваемом распределении  $\bar{z}$  из ядра  $C_F(M)$  в ценах  $\bar{p}$  для каждого из регионов выполняются точные равенства  $\bar{p} \cdot \bar{u}^s = \bar{p} \cdot \bar{v}^s$ ,  $s \in R$ . Как будет видно из дальнейшего, для этого достаточно установить справедливость неравенств  $\bar{p} \cdot \bar{u}^s \leq \bar{p} \cdot \bar{v}^s$  для всех  $s \in R$ . Итак, пусть  $s$  — произвольный регион модели  $M$ . Зафиксируем какой-либо набор  $z_*^s \in P_s(\bar{z}^s)$  и положим  $z^s(\mu) = \mu z_*^s + (1 - \mu)\bar{z}^s$ , где  $\mu \in (0, 1)$  произвольное. Ввиду линейности целевых функций  $t_s$  выполняются неравенства  $t_s(z^s(\mu)) > t_s(\bar{z}^s)$  для всех  $\mu \in (0, 1)$ . В силу (12) из этих неравенств вытекают неравенства

$$\bar{p} \cdot u^s(\mu) \leq \bar{p} \cdot v^s(\mu), \quad \mu \in (0, 1), \quad (13)$$

где  $u^s(\mu)$  и  $v^s(\mu)$  — объёмы экспорта и импорта в региональном плане  $z^s(\mu)$ . Далее, из построения  $z^s(\mu)$  вытекают равенства

$$u^s(\mu) = \bar{u}^s + \mu(u_*^s - \bar{u}^s), \quad v^s(\mu) = \bar{v}^s + \mu(v_*^s - \bar{v}^s)$$

для каждого  $\mu \in (0, 1)$ . Переходя в (13) к пределу при  $\mu \rightarrow 0$ , получаем требуемое неравенство  $\bar{p} \cdot \bar{u}^s \leq \bar{p} \cdot \bar{v}^s$ . Тем самым в силу произвольности выбора  $s$  справедливы неравенства

$$\bar{p} \cdot \bar{u}^s \leq \bar{p} \cdot \bar{v}^s, \quad s \in R, \quad (14)$$

суммируя которые по  $s \in R$ , получаем

$$\bar{p} \cdot \sum_{s \in R} \bar{u}^s \leq \bar{p} \cdot \sum_{s \in R} \bar{v}^s.$$

Ясно, что это неравенство вместе с требованием  $\sum_{s \in R} \bar{u}^s \geq \sum_{s \in R} \bar{v}^s$  и условием  $\bar{p} \geq 0$  влечёт

$$\bar{p} \cdot \sum_{s \in R} \bar{u}^s = \bar{p} \cdot \sum_{s \in R} \bar{v}^s.$$

Однако с учётом (14) из последнего равенства следуют искомые соотношения: для каждого региона  $s \in R$  выполняется равенство  $\bar{p} \cdot \bar{u}^s = \bar{p} \cdot \bar{v}^s$ .

Для завершения доказательства равновесности распределения  $\bar{z}$  остаётся установить справедливость импликаций

$$t_s(z^s) > t_s(\bar{z}^s) \Rightarrow \bar{p} \cdot u^s < \bar{p} \cdot v^s, \quad z^s \in Z_s. \quad (15)$$

Пусть набор  $z^s = (x^s, u^s, v^s, \lambda_s)$  принадлежит множеству  $P_s(\bar{z}^s)$ . Согласно (11) имеем неравенство  $\bar{p} \cdot u^s \leq \bar{p} \cdot v^s$ . Допустим, что здесь реализуется равенство  $\bar{p} \cdot u^s = \bar{p} \cdot v^s$ . В силу строгой автаркичности регионов модели  $M$  существует набор  $\hat{z}^s = (\hat{x}^s, \hat{u}^s, \hat{v}^s, \hat{\lambda}_s) \in Z_s$  такой, что  $\hat{u}^s \gg \hat{v}^s$ . Для каждого числа  $\mu \in (0, 1)$  определим набор  $\hat{z}^s(\mu) = z^s + \mu(\hat{z}^s - z^s)$ . Ввиду непрерывности целевой функции  $t_s$  при достаточно малом значении  $\mu = \hat{\mu}$  набор  $\hat{z}^s(\hat{\mu})$  строго предпочитается  $\bar{z}^s$ , т. е. выполняется включение  $\hat{z}^s(\hat{\mu}) \in P_s(\bar{z}^s)$ . Значит, согласно соотношениям (11) имеем

$$\bar{p} \cdot (u^s + \hat{\mu}(\hat{u}^s - u^s)) \leq \bar{p} \cdot (v^s + \hat{\mu}(\hat{v}^s - v^s)),$$

но вследствие условия  $\bar{p} \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$  из предположений  $\hat{u}^s \gg \hat{v}^s$ ,  $\hat{\mu} > 0$  и равенства  $\bar{p} \cdot u^s = \bar{p} \cdot v^s$  получаем неравенство

$$\bar{p} \cdot ((u^s - v^s) + \hat{\mu}(\hat{u}^s - \hat{v}^s)) = \hat{\mu} \bar{p} \cdot (\hat{u}^s - \hat{v}^s) > 0,$$

противоречащее (11). Тем самым установлена справедливость (15). Теорема 1 доказана.

### Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных научных исследований СО РАН (проект № FWNF-2022-2019). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

### Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

### Литература

1. Гранберг А. Г., Суслов В. И., Суспицын С. А. Многорегиональные системы: Экономико-математическое исследование. Новосибирск: Наука. Сиб. науч. изд-во, 2007. 372 с.
2. Экланд И. Элементы математической экономики. М.: Мир, 1983. 248 с.

3. **Vasil'ev V. A.** Walras equilibrium in multiregionl economic systems // Proc. 2017 Int. Multi-Conf. Engineering, Computer, and Informmition Sciences (IEEE SIBIRCON 2017) (Novosibirsk, Russia, Sept. 18–22, 2017). Piscataway: IEEE, 2017. P. 176–181.
4. **Васильев В. А.** О равновесиях Эдджворта для некоторых видов неклассических рынков // Модели и методы оптимизации. Новосибирск: Наука, 1994. С. 3–52. (Тр. РАН. Сиб. отделение, Инст. математики; Т. 28).
5. **Суслов В. И.** Измерение эффектов межрегиональных взаимодействий: Модели, методы, результаты. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1991. 250 с.
6. **Рубинштейн А. Г.** Моделирование экономических взаимодействий в территориальных системах. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983. 240 с.
7. **Обэн Ж.-П.** Нелинейный анализ и его экономические приложения. М.: Мир, 1988. 264 с.
8. **Голдман А. Дж.** Теоремы разложения и отделимости для многогранных выпуклых множеств // Линейные неравенства и смежные вопросы. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. С. 162–171.
9. **Рокафеллар Р. Т.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.
10. **Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.** Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974. 480 с.

*Васильев Валерий Александрович*

Статья поступила

14 мая 2025 г.

После доработки —

11 июня 2025 г.

Принята к публикации

22 сентября 2025 г.

THE FUZZY CORE AND WALRAS EQUILIBRIA  
OF A MODEL FOR SPATIAL ECONOMY

V. A. Vasil'ev

Sobolev Institute of Mathematics,  
4 Acad. Koptug, 4, 630090 Novosibirsk, Russia  
E-mail: [vasilev@math.nsc.ru](mailto:vasilev@math.nsc.ru)

**Abstract.** We consider some assumptions guaranteeing equivalence of unblockable and equilibrium plans in the famous model of spatial economy proposed by Acad. A. G. Granberg and his team. A continuous version of Edgeworth conjecture, namely the coincidence of the fuzzy core and equilibrium allocations, is studied. It is worth emphasizing that, besides having their own value, the coincidence conditions are of substantial interest for the equilibrium existence problem in spatial economies with unbounded regional activities. The fuzzy core equivalence theorem presented in the paper is based on the assumptions of strict regional autarchy, which is an analog of the Slater condition, and so-called regional unboundedness by functional. The main requirement for the regional system as a whole is the absence of “cornucopia”. Bibliogr. 10.

**Keywords:** spatial economy, Walrasian equilibrium, fuzzy core, autarchy, “cornucopia”.

**References**

1. **A. G. Granberg, V. I. Suslov, and S. A. Suspitsyn**, *Multi-Regional Systems: Economical and Mathematical Research* (Nauka, Sib. Nauchn. Izd., Novosibirsk, 2007) [Russian].
2. **I. Ekeland**, *Éléments d'Économie Mathématique* (Herman, Paris, 1979 [French]; Mir, Moscow, 1983 [Russian]).
3. **V. A. Vasil'ev**, Walras equilibrium in multiregionl economic systems, in *Proc. 2017 Int. Multi-Conf. Engineering, Computer, and Informmtion Sciences (IEEE SIBIRCON 2017)* (Novosibirsk, Russia, Sept. 18–22, 2017) (IEEE, Piscataway, 2017), pp. 176–181.

4. **V. A. Vasil'ev**, On Edgeworth equilibria for non-classic markets of some kinds, in *Models and Optimization Methods* (Nauka, Novosibirsk, 1994), pp. 3–52 (Tr. RAN, Sib. Otd., Inst. Mat., V. 28) [Russian] [*Sib. Adv. Math.* **6** (3), 96–150 (1996)].
5. **V. I. Suslov**, *Measuring the Effects of Interregional Interactions: Models, Methods, Results* (Nauka, Sib. Otd., Novosibirsk, 1991) [Russian].
6. **A. G. Rubinshtein**, *Modeling Economic Interactions in Territorial Systems* (Nauka, Sib. Otd., Novosibirsk, 1983) [Russian].
7. **J.-P. Aubin**, *L'Analyse Non Linéaire et Ses Motivations Économiques* (Masson, Paris, 1984 [French]; Mir, Moscow, 1988 [Russian]).
8. **A. J. Goldman**, Resolution and separation theorems for polyhedral convex sets, in *Linear Inequalities and Related Systems* (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1956), pp. 41–52; (Izd. Inostr. Lit., Moscow, 1959), pp. 162–171 [Russian].
9. **R. T. Rockafellar**, *Convex Analysis* (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970; Mir, Moscow, 1973 [Russian]).
10. **A. D. Ioffe** and **V. M. Tikhomirov**, *Theory of Extremal Problems* (Nauka, Moscow, 1974) [Russian].

Valery A. Vasil'ev

Received May 14, 2025

Revised June 11, 2025

Accepted September 22, 2025