ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 32 № 4 2025

Новосибирск
Издательство Института математики

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2025. Т. 32, № 4. С. 146–171

УДК 519.71 DOI: 10.33048/daio.2025.32.838

О СЛОЖНОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ СИСТЕМЫ ИЗ ТРЁХ МОНОМОВ СХЕМАМИ КОМПОЗИЦИИ

С. А. Корнеев[1, 2]

[1] Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, 119991 Москва, Россия

[2] Московский центр фундаментальной и прикладной математики,
Ленинские горы, 1, 119991 Москва, Россия

E-mail: korneev.sa.42@gmail.com

Аннотация. Исследуется сложность реализации систем мономов схемами композиции. Под сложностью в этой модели понимается минимальное число операций, необходимое для вычисления системы мономов по переменным, при этом допускается многократное использование результатов промежуточных вычислений. Основные результаты данной работы: для произвольной системы из трёх мономов без нулевых степеней установлена асимптотика сложности их совместной реализации схемами композиции; для произвольной системы из трёх мономов от трёх переменных без нулевых степеней установлена формула, выражающая сложность их совместной реализации схемами композиции с точностью до единицы. Табл. 1, библиогр. 21.

Ключевые слова: схема композиции, схема из функциональных элементов, система мономов, вычислительная сложность, сложность схемы.

В работе исследуется сложность (величина, равная минимальному числу операций) совместной реализации трёх мономов схемами композиции. Схемы композиции представляют собой вычислительную модель, в которой разрешено многократное применение результатов промежуточных вычислений, а в качестве единственной операции используется операция композиции двух мономов, предложенная А. И. Ширшовым [1]. Эта вычислительная модель исследовалась, например, в [2–8]. В данной работе получена формула, устанавливающая сложность реализации системы из трёх мономов от q переменных без нулевых степеней с точностью до слагаемого порядка q. Также для сложности реализации системы из трёх мономов от трёх переменных без нулевых степеней удалось получить верхнюю и нижнюю оценки, отличающиеся не более чем на единицу.

Введём основные определения, связанные со схемами композиции.

Мономом над множеством переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$ будем называть выражение вида $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_q^{a_q}$, где $a_1, a_2, \ldots, a_q$ — целые неотрицательные числа, причём $a_1 + a_2 + \cdots + a_q \geqslant 0$. Если $a_1 + a_2 + \cdots + a_q = 0$, то моном будем называть *нулевым* (с нулевым набором степеней) и обозначать символом 1. В дальнейшем будем рассматривать мономы над фиксированным множеством переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$. Будем говорить, что *моном U_1 содержится в мономе U_2* (или что *моном U_2 содержит моном U_1*) и использовать обозначение $U_1 \leqslant U_2$, если все показатели степеней монома U_1 не превосходят соответствующих показателей степеней монома U_2. Если же это условие не выполнено, то будем говорить, что *моном U_1 не содержится в мономе U_2* (*моном U_2 не содержит моном U_1*) и использовать обозначение $U_1 \nleqslant U_2$.

Следуя [1] (см. также [2, 5]), определим понятие композиции мономов. Если для мономов

$$U = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \cdots x_q^{a_{1q}}, \quad V = x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \cdots x_q^{a_{2q}}, \quad R = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_q^{b_q}$$

(возможно, $R = 1$) выполнены условия $R \leqslant U$ и $R \leqslant V$, то моном

$$(U, V)_R = \frac{UV}{R} = x_1^{a_{11}+a_{21}-b_1} x_2^{a_{12}+a_{22}-b_2} \cdots x_q^{a_{1q}+a_{2q}-b_q}$$

называется *композицией мономов U и V относительно монома R*. Отметим, что операция умножения мономов является частным случаем операции композиции, в этом случае R — нулевой моном. В дальнейшем будем считать, что применение операции композиции подразумевает выполнение условий $R \leqslant U$ и $R \leqslant V$.

Схемой композиции над системой мономов $M = \{U_1, \ldots, U_r\}$ будем называть такую последовательность мономов

$$(U_1, \ldots, U_r, U_{r+1}, \ldots, U_{r+n}), \tag{1}$$

что для любого $k = r+1, \ldots, r+n$ найдутся такие натуральные числа s и t и такой моном R_k (возможно, нулевой), что $s < k$, $t < k$ и

$$U_k = (U_s, U_t)_{R_k}. \tag{2}$$

Равенство (2) будем называть *правилом вычисления монома U_k*.

Если из контекста понятно, над какой системой мономов рассматривается схема композиции, или если это не имеет значения, то вместо «схема композиции над системой мономов» будем говорить «схема композиции» или просто «схема». Также отметим, что для монома из схемы композиции, вообще говоря, может существовать несколько разных правил вычисления. В дальнейшем, рассматривая любую схему композиции, будем считать, что соответствующий ей набор правил вычисления зафиксирован.

Если S — схема композиции вида (1), то под *сложностью* $l_{\mathrm{Sh}}(S)$ *схемы композиции* S будем понимать число n. Будем говорить, что *схема композиции* S *реализует моном* U, если $U \in S$. Аналогично будем говорить, что *схема композиции* S *реализует систему мономов* M, если для каждого монома U из системы M выполнено условие $U \in S$. Проще говоря, сложность схемы — это число мономов в ней, не считая мономов исходной системы, и схема реализует те мономы, которые она содержит.

Пусть M и M_0 — системы мономов. Следуя [2], положим $l_{\mathrm{Sh}}(M) = \min l_{\mathrm{Sh}}(S)$, где минимум берётся по всем схемам композиции, реализующим систему M над множеством переменных $\{x_1, \ldots, x_q\}$. Величину $l_{\mathrm{Sh}}(M)$ будем называть *сложностью реализации системы мономов* M *схемами композиции.* Аналогично величину $l_{\mathrm{Sh}}(M \mid M_0)$, определяемую равенством $l_{\mathrm{Sh}}(M \mid M_0) = \min l_{\mathrm{Sh}}(S)$, где минимум берётся по всем схемам композиции, реализующим систему мономов M над системой мономов M_0, будем называть *сложностью реализации системы мономов* M *над системой мономов* M_0 *схемами композиции.* Если выполнено условие $l_{\mathrm{Sh}}(S) = l_{\mathrm{Sh}}(M \mid M_0)$, то схему S будем называть *минимальной схемой композиции* (реализующей систему мономов M над системой мономов M_0). Заметим, что минимальная схема композиции не может содержать двух одинаковых элементов.

Для схемы (1) мономы $U_{r+1}, \ldots, U_{r+n}$ будем называть *существенными*, так как только они учитываются при подсчёте сложности схемы.

Заметим, что любой матрице из целых неотрицательных чисел можно поставить в соответствие систему мономов, в которой мономы соответствуют строкам матрицы, а переменные — столбцам, при этом элемент на пересечении i-й строки и j-го столбца равен степени j-й переменной в i-м мономе. Так, матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pq} \end{pmatrix}$$

будет соответствовать система мономов

$$M_A = \left\{ x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \cdots x_q^{a_{1q}},\, x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \cdots x_q^{a_{2q}},\, \ldots,\, x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \cdots x_q^{a_{pq}} \right\}.$$

Сложностью $l_{\mathrm{Sh}}(A)$ *реализации матрицы* A будем называть сложность реализации соответствующей этой матрице системы мономов M_A. Таким образом, если матрице A соответствует система мономов M_A, то $l_{\mathrm{Sh}}(A) = l_{\mathrm{Sh}}(M_A)$. В дальнейшем будем иногда допускать «вольные» конструкции типа «сложность реализации матрицы над системой мономов» и соответствующие обозначения. Рассматривая системы из одного монома, в соответствующих обозначениях будем опускать скобки и писать, например, $l_{\mathrm{Sh}}(U \mid V)$ вместо $l_{\mathrm{Sh}}(\{U\} \mid \{V\})$. Далее, говоря об асимптотике сложности реализации матриц, будем подразумевать выполнение условия $\sum a_{ij} \to \infty$.

Схемы композиции также можно определить как схемы из двухвходовых функциональных элементов (см., например, [9–11]), реализующих композицию мономов. При таком подходе каждый элемент вычисляет композицию двух мономов относительно некоторого монома R (возможно, нулевого, и, вообще говоря, своего для каждого элемента). Так как моном R существенно влияет на результат вычисления, функциональные элементы с разными мономами R считаются разными. Таким образом, рассматривая схемы композиции как схемы из функциональных элементов, мы, вообще говоря, рассматриваем схемы в бесконечном базисе. Кроме того, считается, что схема реализует все мономы, вычисляемые на выходах элементов, а также подаваемые на входы; другими словами, каждая вершина схемы считается её выходом.

Задача об исследовании различных свойств известной в алгебре операции композиции возникает естественным образом. В частности, самостоятельный интерес представляет изучение соответствующей вычислительной модели, так как она обладает различными интересными свойствами (см., например, [5, 8]). Заметим, что операция композиции является обобщением операции умножения: операция умножения является частным случаем операции композиции при $R = 1$. Тем самым имеет смысл сравнивать схемы композиции со схемами умножения, а также с другими вычислительными моделями (см., например, [12–14]). Важным достижением, полученным в этом направлении исследований, является перенос результата об асимптотике одной функции шенноновского типа из модели схем композиции на модель схем умножения [7]. В контексте данной статьи также важно отметить, что для схем умножения известны результаты об асимптотике сложности реализации матрицы размера $p \times 2$ [15], $2 \times q$ (аналогичный результат, вытекающий из предыдущего на основе принципа двойственности, см., например, [16–18]) и 3×3 [19] (см. также [20]); вместе с тем асимптотика сложности реализации матрицы размера $3 \times q$ пока неизвестна. Кроме того, во всех трёх указанных случаях, как и для матриц меньших размеров, асимптотика сложности имеет вид $\log_2 D(A)$, где $D(A)$ — максимум абсолютных величин миноров матрицы A, но уже для матрицы размера 4×4 известен пример [21] последовательности матриц, для которой асимптотика сложности имеет вид $\frac{4}{3} \log_2 D(A)$, поэтому неудивительно, что для матриц большего размера пока не удалось сформулировать правдоподобную гипотезу об асимптотике сложности их реализации. Таким образом, при увеличении размера матриц трудность получения соответствующих результатов значительно возрастает. Это замечание справедливо и для модели схем композиции.

Введём несколько обозначений, которые будут использоваться в дальнейшем.

Если задана матрица $A = (a_{ij})$ размера $p \times q$, то положим

$$t_i(A) = \lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} a_{ik} \rceil, \quad t_{ij}(A) = \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{a_{ik}}{a_{jk}} \right\rceil.$$

Если из контекста ясно, из какой матрицы берутся коэффициенты, то будем для краткости писать просто t_i, t_{ij}.

Для произвольных мономов

$$\begin{aligned} &U_1 = x_1^{a_{11}} x_2^{a_{12}} \cdots x_q^{a_{1q}}, \\ &U_2 = x_1^{a_{21}} x_2^{a_{22}} \cdots x_q^{a_{2q}}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &U_p = x_1^{a_{p1}} x_2^{a_{p2}} \cdots x_q^{a_{pq}} \end{aligned}$$

введём обозначения

$$U_{\max}(U_1, U_2, \ldots, U_p) = x_1^{\max a_{k1}} x_2^{\max a_{k2}} \cdots x_q^{\max a_{kq}},$$
$$U_{\min}(U_1, U_2, \ldots, U_p) = x_1^{\min a_{k1}} x_2^{\min a_{k2}} \cdots x_q^{\min a_{kq}},$$

где максимумы и минимумы берутся по всем $k = 1, 2, \ldots, p$. Если данная система мономов $\{U_1, U_2, \ldots, U_p\}$ обозначена через M, то будем также использовать обозначения

$$U_{\max}(M) = U_{\max}(U_1, U_2, \ldots, U_p), \quad U_{\min}(M) = U_{\min}(U_1, U_2, \ldots, U_p).$$

Сделаем ещё одно замечание, касающееся интерпретации используемых обозначений. Если задана некоторая последовательность мономов S, то можно рассматривать её по крайней мере в трёх разных контекстах.

1. Можно рассматривать последовательность мономов S просто как последовательность мономов. Здесь важно, что мономы идут в определённом порядке. При выделении подпоследовательности будем считать, что этот порядок сохраняется.

2. Можно рассматривать последовательность мономов S как схему над некоторой системой мономов M. При этом должен существовать соответствующий набор правил вычисления. Заметим, что сложность схемы S зависит от выбора системы мономов M. Таким образом, одной и той же последовательности мономов может соответствовать несколько схем разной сложности.

3. Можно рассматривать последовательность мономов S как систему мономов (множество, состоящее из элементов последовательности).

Здесь порядок мономов не важен, но важно, что мы можем говорить о схемах над системой мономов S и определять мономы $U_{\max}(S)$ и $U_{\min}(S)$.

Для доказательства основной теоремы потребуется ряд вспомогательных утверждений.

Первая лемма очевидна. По сути, она говорит о возможности синтеза схемы из двух (или нескольких) частей.

Лемма 1. *Если существуют схемы, реализующие систему мономов M_1 над системой мономов M_0 и систему мономов M над системой мономов M_1, то*

$$l_{\mathrm{Sh}}(M \mid M_0) \leqslant l_{\mathrm{Sh}}(M_1 \mid M_0) + l_{\mathrm{Sh}}(M \mid M_1).$$

В следующей лемме, доказанной в работе [6], сформулированы необходимые и достаточные условия существования правила вычисления.

Лемма 2. *Для мономов U, U_1 и U_2 совокупность условий*

$$U_1 \leqslant U, \quad U_2 \leqslant U, \quad U \leqslant U_1U_2$$

выполняется тогда и только тогда, когда найдётся моном U_3 (возможно, нулевой) такой, что $U = (U_1, U_2)_{U_3}$.

Следующие две леммы устанавливают сложность реализации монома над мономом и монома над системой его переменных соответственно. Лемма 4 доказана в [2]. Доказательство леммы 3, а также другое доказательство леммы 4, можно найти в [6].

Лемма 3. *Пусть мономы $U = x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_q^{a_q}$ и $V = x_1^{b_1}x_2^{b_2}\cdots x_q^{b_q}$ удовлетворяют условиям $a_k \geqslant b_k > 0$, $k = 1, \ldots, q$. Тогда*

$$l_{\mathrm{Sh}}(U \mid V) = \left\lceil \log \max_{1\leqslant k\leqslant q} \frac{a_k}{b_k} \right\rceil.$$

Лемма 4. *Для монома $U = x_1^{a_1}\cdots x_q^{a_q}$ справедливо равенство*

$$l_{\mathrm{Sh}}(U) = \lceil \log \max_{1\leqslant k\leqslant q} a_k \rceil + q - 1.$$

Следующая лемма позволяет заменять систему мономов одним мономом, что в некоторых случаях существенно упрощает доказательство нижних оценок сложности.

Лемма 5. *Пусть существует схема, реализующая систему мономов M над системой мономов $M_0 = \{U_0, U_1, U_2, \ldots, U_q\}$, моном U_0 содержится в каждом из мономов системы M, а каждый моном системы M_0 содержится в мономе U_0. Тогда $l_{\mathrm{Sh}}(M \mid M_0) = l_{\mathrm{Sh}}(M \mid U_0)$.*

Доказательство. Неравенство $l_{\mathrm{Sh}}(M \mid M_0) \leqslant l_{\mathrm{Sh}}(M \mid U_0)$ очевидно. Докажем обратное неравенство.

Пусть S — минимальная схема, реализующая систему мономов M над системой мономов M_0. Заменим каждый моном U в схеме S мономом $U' = U_{\max}(U, U_0)$ и удалим из полученной последовательности все мономы U_0, кроме первого. Полученную в результате последовательность мономов обозначим через S'.

Докажем, что последовательность S' образует схему, реализующую систему мономов M над мономом U_0. Ясно, что она начинается с монома U_0. Моном U_0 содержится в каждом из мономов системы M, значит, при такой замене мономы системы M не изменятся, поэтому каждый из них входит в последовательность S'. Осталось показать, что для последовательности S' существует подходящий набор правил вычисления. Пусть $U' \in S' \setminus \{U_0\}$ и правило вычисления для монома U (из которого был получен моном U') в схеме S имеет вид $U = (U_1, U_2)_{U_3}$. Тогда по лемме 2 выполнены условия $U_1 \leqslant U$, $U_2 \leqslant U$ и $U \leqslant U_1U_2$. Легко проверить, что тогда $U_1' \leqslant U'$, $U_2' \leqslant U'$ и $U' \leqslant U_1'U_2'$. Снова применяя лемму 2, получаем, что существует такой моном U_3' (возможно, нулевой), что $U' = (U_1', U_2')_{U_3'}$. Таким образом, последовательность S' действительно образует схему, реализующую систему мономов M над мономом U_0. Нетрудно заметить, что $l_{\mathrm{Sh}}(S') \geqslant l_{\mathrm{Sh}}(S)$. Отсюда получаем

$$l_{\mathrm{Sh}}(M \,|\, M_0) = l_{\mathrm{Sh}}(S) = l_{\mathrm{Sh}}(S') \geqslant l_{\mathrm{Sh}}(M \,|\, U_0),$$

что и требовалось. Лемма 5 доказана.

Для доказательства основной теоремы будет использоваться лишь один частный случай леммы 5. Сформулируем соответствующее утверждение отдельно.

Лемма 6. *Пусть существует схема, реализующая моном U над системой мономов M_0, причём каждый моном системы M_0 содержится в мономе U. Тогда*

$$l_{\mathrm{Sh}}(U \,|\, M_0) \geqslant l_{\mathrm{Sh}}(U \,|\, U_{\max}(M_0)).$$

Доказательство. Из условия следует, что моном $U_{\max}(M_0)$ содержится в мономе U. Также очевидно, что каждый моном системы M_0 содержится в мономе $U_{\max}(M_0)$. Отсюда, применяя лемму 5, получаем

$$l_{\mathrm{Sh}}(U \,|\, M_0) \geqslant l_{\mathrm{Sh}}(U \,|\, M_0 \cup \{U_{\max}(M_0)\}) = l_{\mathrm{Sh}}(U \,|\, U_{\max}(M_0)),$$

что и требовалось. Лемма 6 доказана.

Следующая лемма устанавливает верхнюю и нижнюю оценки сложности реализации монома над системой мономов.

Лемма 7. *Пусть матрице $A = (a_{ij})$ размера $p \times q$, не содержащей нулевых столбцов, соответствует система мономов $M = \{U_1, U_2, \ldots, U_p\}$,* *каждый моном которой содержится в мономе* $U_0 = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_q^{a_q}$. *Тогда*

$$l_{\mathrm{Sh}}(U_0 \,|\, M) \leqslant \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{a_k}{\max(a_{1k}, a_{2k}, \ldots a_{qk})} \right\rceil + \min(p,q) - 1,$$

$$l_{\mathrm{Sh}}(U_0 \,|\, M) \geqslant \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{a_k}{\max(a_{1k}, a_{2k}, \ldots a_{qk})} \right\rceil.$$

Доказательство. Верхняя оценка. Для каждого $j = 1, 2, \ldots, q$ выберем из системы M моном с наибольшим показателем переменной x_j и обозначим через M_0 систему, состоящую из всех таких мономов. Ясно, что число мономов в этой системе не превосходит $\min(p,q)$. Пусть $M_0 = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, и пусть этой системе мономов соответствует матрица $B = (b_{ij})$. Положим $V_0 = U_{\min}(V_1 \cdot V_2 \cdot \cdots \cdot V_n, U_0)$. Тогда каждый моном из системы M не превосходит монома V_0, который, в свою очередь, не превосходит монома U_0. Легко видеть, что $l_{\mathrm{Sh}}(V_0 \,|\, M_0) \leqslant n - 1$.

Если $U_0 = V_0$, то логарифм в формулировке леммы равен нулю. Тогда

$$l_{\mathrm{Sh}}(U_0 \,|\, M) = l_{\mathrm{Sh}}(V_0 \,|\, M) \leqslant n - 1 \leqslant \min(p,q) - 1,$$

что и требовалось.

Если же $U_0 \neq V_0$, то, используя леммы 1 и 3, получаем

$$\begin{aligned} l_{\mathrm{Sh}}(U_0 \,|\, M) &\leqslant l_{\mathrm{Sh}}(U_0 \,|\, M_0) \leqslant l_{\mathrm{Sh}}(U_0 \,|\, V_0) + l_{\mathrm{Sh}}(V_0 \,|\, M_0) \leqslant \\ &\leqslant \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{a_k}{\min(b_{1k} + b_{2k} + \cdots + b_{nk}, a_k)} \right\rceil + n - 1 \leqslant \\ &\leqslant \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{a_k}{\min(\max(b_{1k}, b_{2k}, \ldots, b_{nk}), a_k)} \right\rceil + \min(p,q) - 1 = \\ &= \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{a_k}{\max(a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{pk})} \right\rceil + \min(p,q) - 1, \end{aligned}$$

что и требовалось.

Нижняя оценка. Положим $V_0 = U_{\max}(U_1, U_2, \ldots U_p)$. Тогда каждый моном из системы M не превосходит монома V_0, который, в свою очередь, не превосходит монома U_0. Используя леммы 3 и 5, получаем

$$\begin{aligned} l_{\mathrm{Sh}}(U_0 \,|\, M) &\geqslant l_{\mathrm{Sh}}(U_0 \,|\, M \cup \{V_0\}) = \\ &= l_{\mathrm{Sh}}(U_0 \,|\, V_0) = \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{a_k}{\max(a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{qk})} \right\rceil, \end{aligned}$$

что и требовалось. Лемма 7 доказана.

Следующие две леммы основные — они устанавливают соответственно верхнюю и нижнюю оценки сложности реализации системы из трёх мономов без нулевых степеней над мономом, состоящим из всех переменных.

Введём несколько дополнительных обозначений. Во-первых, для матрицы $A = (a_{ij})$ положим

$$X_{ijk} = 2^{\max(t_i - \max(t_{ij}, t_{ik}),\, t_j - \max(t_{ji}, t_{jk}))},$$

$$Y_{ijk} = 2^{\max(t_{ij}, t_{ik}, 0) - \max(t_{ik}, 0)},$$

$$d_{kl}^{ij} = \min(a_{il}, a_{jl}Y_{ijk}, a_{kl}, X_{ijk}Y_{ijk}).$$

Во-вторых, обобщим обозначения t_i и t_{ij} следующим образом с учётом добавления вспомогательного монома $U_0 = x_1^{a_{01}} x_2^{a_{02}} \cdots x_q^{a_{0q}}$:

$$t_0(A) = \lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} a_{0k} \rceil, \quad t_{i0}(A) = \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{a_{ik}}{a_{0k}} \right\rceil, \quad i = 1, 2, 3.$$

Лемма 8. *Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $3 \times q$ из натуральных чисел. Тогда*

$$l_{\mathrm{Sh}}(A \,|\, x_1 x_2 \cdots x_q) \leqslant \max_{(i_1, i_2, i_3) \in S_3} \biggl(t_{i_1} + t_{i_2 i_1} + \\ + \left\lceil \log \max_{1 \leqslant l \leqslant q} \frac{a_{i_3 l}}{\max\bigl(d_{i_3 l}^{i_1 i_2}, d_{i_3 l}^{i_2 i_1}\bigr)} \right\rceil \biggr) + 1.$$

Доказательство. Пусть $\{U_1, U_2, U_3\}$ — соответствующая матрице A система мономов. Сначала докажем вспомогательное неравенство

$$t_i - t_{ij} \leqslant t_j, \quad i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j. \tag{3}$$

Пусть максимум в выражении для t_i достигается при $k = s$, т. е.

$$t_i = \lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} a_{ik} \rceil = \lceil \log a_{is} \rceil.$$

Тогда, используя неравенство $\lceil x \rceil - \lceil y \rceil \leqslant \lceil x - y \rceil$, получаем

$$t_i - t_{ij} = \lceil \log a_{is} \rceil - \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{a_{ik}}{a_{jk}} \right\rceil \leqslant \lceil \log a_{is} \rceil - \left\lceil \log \frac{a_{is}}{a_{js}} \right\rceil \leqslant \lceil \log a_{js} \rceil \leqslant t_j.$$

Неравенство (3) доказано.

Так как порядок строк матрицы никак не влияет на сложность её реализации, без ограничения общности будем считать, что выполнено условие

$$t_1 - t_{12} = \min_{\substack{i,j = 1,2,3, \\ i \neq j}} (t_i - t_{ij}). \tag{4}$$

Тогда из (3) и (4) получаем

$$t_{12} \geqslant t_1 - (t_2 - t_{21}) \geqslant 0. \tag{5}$$

Положим

$$a_{0k} = \min(a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, 2^{t_2 - \max(t_{21}, t_{23})}), \quad U_0 = x_1^{a_{01}} x_2^{a_{02}} \cdots x_q^{a_{0q}},$$

$$b_{1k} = \min\left(a_{0k} \cdot 2^{t_{10} - \max(t_{13}, 0)}, a_{1k}, a_{3k}\right), \quad V_1 = x_1^{b_{11}} x_2^{b_{12}} \cdots x_q^{b_{1q}},$$
$$b_{2k} = \min\left(a_{0k} \cdot 2^{t_{20} - \max(t_{23}, 0)}, a_{2k}, a_{3k}\right), \quad V_2 = x_1^{b_{21}} x_2^{b_{22}} \cdots x_q^{b_{2q}},$$
$$k = 1, 2, \ldots, q.$$

Нетрудно заметить, что для мономов U_1, U_2, U_3, U_0, V_1, V_2 выполнены условия $U_0 \leqslant V_1$, $U_0 \leqslant V_2$, $V_1 \leqslant U_1$, $V_2 \leqslant U_2$, $V_1 \leqslant U_3$, $V_2 \leqslant U_3$. Из этих неравенств и отсутствия нулевых степеней во всех рассматриваемых мономах следует существование соответствующих схем. Отсюда, применяя лемму 1, получаем неравенство

$$\begin{aligned} l_{\mathrm{Sh}}(A \mid x_1 x_2 \cdots x_q) \leqslant l_{\mathrm{Sh}}(U_0 \mid x_1 x_2 \cdots x_q) + l_{\mathrm{Sh}}(V_1 \mid U_0) +& \\ + l_{\mathrm{Sh}}(U_1 \mid V_1) + l_{\mathrm{Sh}}(V_2 \mid U_0) + l_{\mathrm{Sh}}(U_2 \mid V_2) + l_{\mathrm{Sh}}(U_3 \mid \{V_1, V_2\}).& \quad (6) \end{aligned}$$

Обозначим через Σ сумму первых пяти слагаемых в этой формуле. Тогда

$$l_{\mathrm{Sh}}(A \mid x_1 x_2 \cdots x_q) \leqslant \Sigma + l_{\mathrm{Sh}}(U_3 \mid \{V_1, V_2\}). \quad (7)$$

Используя лемму 3, будем оценивать сверху величину Σ. Для первого слагаемого получаем

$$\begin{aligned} l_{\mathrm{Sh}}(U_0 \mid x_1 x_2 \cdots x_q) = \lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} a_{0k} \rceil \leqslant& \\ \leqslant \lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \min\left(a_{2k}, 2^{t_2 - \max(t_{21}, t_{23})}\right) \rceil \leqslant \lceil \log \min\left(2^{t_2}, 2^{t_2 - \max(t_{21}, t_{23})}\right) \rceil =& \\ = \lceil \log 2^{\min(t_2,\, t_2 - \max(t_{21}, t_{23}))} \rceil = t_2 - \max(t_{21}, t_{23}, 0).& \quad (8) \end{aligned}$$

Для второго и третьего слагаемых имеем

$$\begin{aligned} l_{\mathrm{Sh}}(V_1 \mid U_0) + l_{\mathrm{Sh}}(U_1 \mid V_1) =& \\ = \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{b_{1k}}{a_{0k}} \right\rceil + \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{a_{1k}}{b_{1k}} \right\rceil \leqslant \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{a_{0k} \cdot 2^{t_{10} - \max(t_{13}, 0)}}{a_{0k}} \right\rceil +& \\ + \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \max\left(\frac{a_{1k}}{a_{0k}} \cdot 2^{-(t_{10} - \max(t_{13}, 0))}, \frac{a_{1k}}{a_{1k}}, \frac{a_{1k}}{a_{3k}}\right) \right\rceil =& \\ = (t_{10} - \max(t_{13}, 0)) + \max(t_{13}, 0) = t_{10}.& \quad (9) \end{aligned}$$

Для четвёртого и пятого слагаемых аналогично

$$l_{\mathrm{Sh}}(V_2 \mid U_0) + l_{\mathrm{Sh}}(U_2 \mid V_2) \leqslant t_{20}. \quad (10)$$

Используя неравенства (4) и (5), для t_{10} имеем

$$\begin{aligned} t_{10} = \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{a_{1k}}{a_{0k}} \right\rceil =& \\ = \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \max\left(\frac{a_{1k}}{a_{1k}}, \frac{a_{1k}}{a_{2k}}, \frac{a_{1k}}{a_{3k}}, \frac{a_{1k}}{2^{t_2 - \max(t_{21}, t_{23})}}\right) \right\rceil =& \end{aligned}$$

$$= \max(0, t_{12}, t_{13}, t_1 - (t_2 - \max(t_{21}, t_{23}))) = \max(t_{12}, t_{13}, 0) = t_{12}. \quad (11)$$

Далее, для t_{20} получаем

$$t_{20} = \left\lceil \log \max_{1\leqslant k\leqslant q} \frac{a_{2k}}{a_{0k}} \right\rceil =$$
$$= \left\lceil \log \max_{1\leqslant k\leqslant q} \max\left(\frac{a_{2k}}{a_{1k}}, \frac{a_{2k}}{a_{2k}}, \frac{a_{2k}}{a_{3k}}, \frac{a_{2k}}{2^{t_2 - \max(t_{21}, t_{23})}} \right) \right\rceil =$$
$$= \max(t_{21}, 0, t_{23}, t_2 - (t_2 - \max(t_{21}, t_{23}))) = \max(t_{21}, t_{23}, 0). \quad (12)$$

С помощью (8)–(12) приходим к оценке

$$\Sigma \leqslant (t_2 - \max(t_{21}, t_{23}, 0)) + t_{12} + \max(t_{21}, t_{23}, 0) = t_2 + t_{12}. \quad (13)$$

Осталось оценить величину $l_{\mathrm{Sh}}(U_3 \,|\, \{V_1, V_2\})$. Используя (4), (11), (12), а также неравенства $t_{10} \geqslant t_{13}$, $t_{20} \geqslant t_{23}$, для b_{1l}, b_{2l}, $l = 1, 2, \ldots, q$, имеем

$$b_{1l} = \min(a_{0l} \cdot 2^{t_{10} - \max(t_{13}, 0)}, a_{1l}, a_{3l}) =$$
$$= \min(a_{1l} \cdot 2^{t_{10} - \max(t_{13}, 0)}, a_{2l} \cdot 2^{t_{10} - \max(t_{13}, 0)}, a_{3l} \cdot 2^{t_{10} - \max(t_{13}, 0)},$$
$$2^{(t_2 - \max(t_{21}, t_{23})) + (t_{10} - \max(t_{13}, 0))}, a_{1l}, a_{3l}) =$$
$$= \min(a_{1l}, a_{2l} \cdot 2^{t_{10} - \max(t_{13}, 0)}, a_{3l}, 2^{(t_2 - \max(t_{21}, t_{23})) + (t_{10} - \max(t_{13}, 0))}) =$$
$$= \min(a_{1l}, a_{2l} \cdot 2^{t_{12} - \max(t_{13}, 0)}, a_{3l}, 2^{(t_2 - \max(t_{21}, t_{23})) + (t_{12} - \max(t_{13}, 0))}) =$$
$$= \min(a_{1l}, a_{2l} \cdot 2^{\max(t_{12}, t_{13}, 0) - \max(t_{13}, 0)}, a_{3l},$$
$$2^{\max(t_1 - \max(t_{12}, t_{13}), t_2 - \max(t_{21}, t_{23})) + (\max(t_{12}, t_{13}, 0) - \max(t_{13}, 0))}) =$$
$$= \min(a_{1l}, a_{2l} \cdot Y_{123}, a_{3l}, X_{123} \cdot Y_{123}) = d_{3l}^{12},$$

$$b_{2l} = \min(a_{0l} \cdot 2^{t_{20} - \max(t_{23}, 0)}, a_{2l}, a_{3l}) =$$
$$= \min(a_{1l} \cdot 2^{t_{20} - \max(t_{23}, 0)}, a_{2l} \cdot 2^{t_{20} - \max(t_{23}, 0)}, a_{3l} \cdot 2^{t_{20} - \max(t_{23}, 0)},$$
$$2^{(t_2 - \max(t_{21}, t_{23})) + (t_{20} - \max(t_{23}, 0))}, a_{2l}, a_{3l}) =$$
$$= \min(a_{1l} \cdot 2^{t_{20} - \max(t_{23}, 0)}, a_{2l}, a_{3l}, 2^{(t_2 - \max(t_{21}, t_{23})) + (t_{20} - \max(t_{23}, 0))}) =$$
$$= \min(a_{1l} \cdot 2^{\max(t_{21}, t_{23}, 0) - \max(t_{23}, 0)}, a_{2l}, a_{3l},$$
$$2^{\max(t_1 - \max(t_{12}, t_{13}), t_2 - \max(t_{21}, t_{23})) + (\max(t_{21}, t_{23}, 0) - \max(t_{23}, 0))}) =$$
$$= \min(a_{1l} \cdot Y_{213}, a_{2l}, a_{3l}, X_{213} \cdot Y_{213}) = d_{3l}^{21}.$$

Используя лемму 7, получаем

$$l_{\mathrm{Sh}}(U_3 \,|\, \{V_1, V_2\}) \leqslant \left\lceil \log \max_{1\leqslant l\leqslant q} \frac{a_{3l}}{\max(b_{1l}, b_{2l})} \right\rceil + 1 \leqslant$$
$$\leqslant \left\lceil \log \max_{1\leqslant l\leqslant q} \frac{a_{3l}}{\max\left(d_{3l}^{12}, d_{3l}^{21}\right)} \right\rceil + 1. \quad (14)$$

Наконец, подставляя (13) и (14) в (7), приходим к оценке

$$l_{\mathrm{Sh}}(A \,|\, x_1x_2\cdots x_q) \leqslant t_2 + t_{12} + \left\lceil \log \max_{1\leqslant l\leqslant q} \frac{a_{3l}}{\max\left(d_{3l}^{12}, d_{3l}^{21}\right)} \right\rceil + 1 \leqslant$$
$$\leqslant \max_{(i_1,i_2,i_3)\in S_3} \left(t_{i_1} + t_{i_2i_1} + \left\lceil \log \max_{1\leqslant l\leqslant q} \frac{a_{i_3l}}{\max\left(d_{i_3l}^{i_1i_2}, d_{i_3l}^{i_2i_1}\right)} \right\rceil \right) + 1,$$

что и требовалось. Лемма 8 доказана.

Следующая лемма устанавливает нижнюю оценку для той же самой величины.

Лемма 9. *Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $3 \times q$ из натуральных чисел. Тогда*

$$l_{\mathrm{Sh}}(A \,|\, x_1x_2\cdots x_q) \geqslant \max_{(i_1,i_2,i_3)\in S_3} \Bigg(\max\left(t_{i_1} + t_{i_2i_1}, t_{i_2} + t_{i_1i_2}\right) +$$
$$+ \left\lceil \log \max_{1\leqslant l\leqslant q} \frac{a_{i_3l}}{\max\left(d_{i_3l}^{i_1i_2}, d_{i_3l}^{i_2i_1}\right)} \right\rceil \Bigg).$$

Доказательство. Пусть $\{U_1, U_2, U_3\}$ — соответствующая матрице A система мономов. Пусть S — произвольная схема, реализующая систему мономов $\{U_1, U_2, U_3\}$ над мономом $x_1x_2\cdots x_q$. Выделим из схемы S несколько подсхем в соответствии с табл. 1.

Таблица 1

$\langle 1\rangle$	$\langle 2\rangle$	$\langle 3\rangle$	$\langle 4\rangle$
$S_0 = \{U \in S \mid U \leqslant U_1,\ U \leqslant U_2,\ U \leqslant U_3\}$	S_0	$\{x_1x_2\cdots x_q\}$	$U \leqslant U_1$, $U \leqslant U_2$, $U \leqslant U_3$, $U \neq x_1x_2\cdots x_q$
$S_{13} = \{U \in S \mid U \leqslant U_1,\ U \leqslant U_3\}$	S_{13}	S_0	$U \leqslant U_1$, $U \not\leqslant U_2$, $U \leqslant U_3$
$S_{23} = \{U \in S \mid U \leqslant U_2,\ U \leqslant U_3\}$	S_{23}	S_0	$U \not\leqslant U_1$, $U \leqslant U_2$, $U \leqslant U_3$
$S_1 = \{U \in S \mid U \leqslant U_1\}$	$\{U_1\}$	S_{13}	$U \leqslant U_1$, $U \not\leqslant U_3$
$S_2 = \{U \in S \mid U \leqslant U_2\}$	$\{U_2\}$	S_{23}	$U \leqslant U_2$, $U \not\leqslant U_3$
$S_3 = \{U \in S \mid U \leqslant U_3\}$	$\{U_3\}$	$S_{13} \cup S_{23}$	$U \not\leqslant U_1$, $U \not\leqslant U_2$, $U \leqslant U_3$

Эту таблицу нужно читать построчно следующим образом. Выделим из схемы S подпоследовательность мономов $\langle 1\rangle$. Эта подпоследовательность мономов образует схему, реализующую систему мономов $\langle 2\rangle$ над системой мономов $\langle 3\rangle$. Любой существенный моном U этой схемы удовлетворяет условиям $\langle 4\rangle$. Напомним, что моном U называется существенным для схемы S над системой мономов M, если $U \in S \setminus M$, поэтому сложность схемы равна числу её существенных мономов.

Как нетрудно видеть из четвёртого столбца табл. 1, каждый существенный моном схемы S может быть существенным не более чем для одной из схем S_0, S_{13}, S_{23}, S_1, S_2, S_3. Отсюда

$$l_{\mathrm{Sh}}(S) \geqslant l_{\mathrm{Sh}}(S_0) + l_{\mathrm{Sh}}(S_{13}) + l_{\mathrm{Sh}}(S_{23}) + l_{\mathrm{Sh}}(S_1) + l_{\mathrm{Sh}}(S_2) + l_{\mathrm{Sh}}(S_3). \quad (15)$$

Положим

$$\begin{gathered} U_0 = x_1^{a_{01}} x_2^{a_{02}} \cdots x_q^{a_{0q}} = U_{\max}(S_0), \\ V_1 = x_1^{b_{11}} x_2^{b_{12}} \cdots x_q^{b_{1q}} = U_{\max}(S_{13}), \\ V_2 = x_1^{b_{21}} x_2^{b_{22}} \cdots x_q^{b_{2q}} = U_{\max}(S_{23}), \\ V_3 = U_{\max}(S_{13} \cup S_{23}) = U_{\max}(V_1, V_2). \end{gathered}$$

Используя леммы 3 и 6, получаем

$$\begin{gathered} l_{\mathrm{Sh}}(S_0) \geqslant l_{\mathrm{Sh}}(U_0 \,|\, x_1 x_2 \cdots x_q), \\ l_{\mathrm{Sh}}(S_{13}) \geqslant l_{\mathrm{Sh}}(V_1 \,|\, S_0) \geqslant l_{\mathrm{Sh}}(V_1 \,|\, U_0), \\ l_{\mathrm{Sh}}(S_{23}) \geqslant l_{\mathrm{Sh}}(V_2 \,|\, S_0) \geqslant l_{\mathrm{Sh}}(V_2 \,|\, U_0), \\ l_{\mathrm{Sh}}(S_1) = l_{\mathrm{Sh}}(U_1 \,|\, S_{13}) \geqslant l_{\mathrm{Sh}}(U_1 \,|\, V_1), \\ l_{\mathrm{Sh}}(S_2) = l_{\mathrm{Sh}}(U_2 \,|\, S_{23}) \geqslant l_{\mathrm{Sh}}(U_2 \,|\, V_2), \\ l_{\mathrm{Sh}}(S_3) = l_{\mathrm{Sh}}(U_3 \,|\, S_{13} \cup S_{23}) \geqslant l_{\mathrm{Sh}}(U_3 \,|\, V_3). \end{gathered}$$

Подставляя эти неравенства в (15), имеем

$$\begin{aligned} l_{\mathrm{Sh}}(S) \geqslant l_{\mathrm{Sh}}(U_0 \,|\, x_1 x_2 \cdots x_q) + l_{\mathrm{Sh}}(V_1 \,|\, U_0) + l_{\mathrm{Sh}}(V_2 \,|\, U_0) + {} \\ + l_{\mathrm{Sh}}(U_1 \,|\, V_1) + l_{\mathrm{Sh}}(U_2 \,|\, V_2) + l_{\mathrm{Sh}}(U_3 \,|\, V_3). \end{aligned}$$

Если считать мономы U_1, U_2 и U_3 зафиксированными, то правую часть последнего неравенства можно рассматривать как функцию, зависящую от мономов U_0, V_1 и V_2 (моном V_3 однозначно определяется через мономы V_1 и V_2). Обозначим эту функцию через Σ и будем искать её минимум. Для краткости записи введём обозначения:

$$\begin{gathered} s_0 = l_{\mathrm{Sh}}(U_0 \,|\, x_1 x_2 \cdots x_q), \quad s_{10} = l_{\mathrm{Sh}}(V_1 \,|\, U_0), \quad s_{20} = l_{\mathrm{Sh}}(V_2 \,|\, U_0), \\ s_1 = l_{\mathrm{Sh}}(U_1 \,|\, V_1), \quad s_2 = l_{\mathrm{Sh}}(U_2 \,|\, V_2), \quad s_3 = l_{\mathrm{Sh}}(U_3 \,|\, V_3). \end{gathered}$$

Тогда полученная оценка принимает вид

$$l_{\mathrm{Sh}}(S) \geqslant \Sigma = s_0 + s_{10} + s_{20} + s_1 + s_2 + s_3. \quad (16)$$

Опираясь на лемму 3, проведём следующее рассуждение. Если зафиксировать величины s_0, s_{10} и s_{20}, то для показателей степеней мономов U_0, V_1 и V_2 должны быть выполнены следующие неравенства:

$$\begin{gathered} a_{0k} \leqslant \min\,(2^{s_0}, a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}), \\ b_{1k} \leqslant \min\,(a_{0k} \cdot 2^{s_{10}}, a_{1k}, a_{3k}), \end{gathered}$$

$$b_{2k} \leqslant \min(a_{0k} \cdot 2^{s_{20}}, a_{2k}, a_{3k}),$$
$$k = 1, 2, \ldots, q.$$

При увеличении этих показателей степеней без нарушения данных неравенств величины s_1, s_2 и s_3 не увеличатся. Таким образом, подход к поиску минимума функции Σ заключается в следующем: положим

$$a_{0k} = \min(2^{s_0}, a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}),$$
$$b_{1k} = \min(a_{0k} \cdot 2^{s_{10}}, a_{1k}, a_{3k}),$$
$$b_{2k} = \min(a_{0k} \cdot 2^{s_{20}}, a_{2k}, a_{3k}),$$
$$k = 1, 2, \ldots, q,$$

и будем рассматривать Σ как функцию от переменных s_0, s_{10} и s_{20}. Значения s'_0, s'_{10} и s'_{20} назовём *оптимальными* для переменных s_0, s_{10} и s_{20} соответственно, если при их подстановке функция Σ принимает минимальное значение. Заметим, что оптимальных значений может быть несколько, но в рамках доказательства нам достаточно найти одну тройку таких значений. Для функции Σ и всех промежуточных функций, зависящих от переменных s_0, s_{10} и s_{20}, будем использовать штрих, чтобы обозначить подстановку в них оптимальных значений этих переменных. Таким образом, $\Sigma' = \Sigma(s'_0, s'_{10}, s'_{20}) = \min\limits_{s_0, s_{10}, s_{20}} \Sigma(s_0, s_{10}, s_{20})$.

Пусть значения переменных s_0 и s_{20} зафиксированы. При каком значении переменной s_{10} функция Σ будет принимать минимальное значение? Положим $s_{10} = 0$ и будем последовательно увеличивать её значение на единицу. При этом могут изменяться только слагаемые s_{10}, s_1 и s_3. Для слагаемого s_1 запишем следующее выражение:

$$\begin{aligned} s_1 = l_{\mathrm{Sh}}(U_1 \mid V_1) = \\ &= \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{a_{1k}}{b_{1k}} \right\rceil = \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{a_{1k}}{\min(a_{0k} \cdot 2^{s_{10}}, a_{1k}, a_{3k})} \right\rceil = \\ &= \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \max\left(\frac{a_{1k}}{a_{0k} \cdot 2^{s_{10}}}, \frac{a_{1k}}{a_{1k}}, \frac{a_{1k}}{a_{3k}} \right) \right\rceil = \max(t_{10} - s_{10}, t_{13}, 0). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что если $s_{10} < t_{10} - \max(t_{13}, 0)$, то при увеличении значения переменной s_{10} на 1 слагаемое s_1 уменьшится на 1, в противном случае $s_{10} \geqslant t_{10} - \max(t_{13}, 0)$, и при увеличении s_{10} на 1 слагаемое s_1 не изменится. Что касается слагаемого

$$s_3 = l_{\mathrm{Sh}}(U_3 \mid V_3) = \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{a_{3k}}{\max(b_{1k}, b_{2k})} \right\rceil,$$

то оно при увеличении значения переменной s_{10} на 1 либо не изменится, либо уменьшится на 1. Таким образом, при увеличении значения переменной s_{10} вплоть до $t_{10} - \max(t_{13}, 0)$ значение функции Σ не увеличивается, а при дальнейшем её увеличении — не уменьшается. Следовательно, формула

$$s'_{10} = t'_{10} - \max(t_{13}, 0)$$

будет доставлять оптимальное значение переменной s_{10} при любых фиксированных значениях остальных двух переменных. Отметим, что эта формула, строго говоря, представляет функцию, которая зависит от оптимального значения s'_0, так как через неё определяется величина t'_{10}. Также из полученных формул следует, что

$$s'_1 = \max(t_{13}, 0).$$

Далее, рассуждая аналогично, получаем формулы

$$s'_{20} = t_{20} - \max(t_{23}, 0), \quad s'_2 = \max(t_{23}, 0).$$

Подставляя полученное в функцию Σ, имеем

$$\begin{aligned} \Sigma' = s'_0 + (t'_{10} - \max(t_{13}, 0)) + (t'_{20} - \max(t_{23}, 0)) + \\ + \max(t_{13}, 0) + \max(t_{23}, 0) + s'_3 = s'_0 + t'_{10} + t'_{20} + s'_3 = \\ = \min_{s_0}(s_0 + t_{10}(s_0) + t_{20}(s_0) + s_3(s_0)). \quad (17) \end{aligned}$$

Определим оптимальное значение для переменной s_0. Положим $s_0 = 0$ и будем последовательно увеличивать её значение на единицу. Представим слагаемые суммы из (17) в более удобном для анализа виде:

$$\begin{aligned} t_{10} &= \left\lceil \log \max \frac{a_{1k}}{a_{0k}} \right\rceil = \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \max\left(\frac{a_{1k}}{2^{s_0}}, \frac{a_{1k}}{a_{1k}}, \frac{a_{1k}}{a_{2k}}, \frac{a_{1k}}{a_{3k}}\right) \right\rceil = \\ &= \max(t_1 - s_0, t_{12}, t_{13}, 0), \\ t_{20} &= \left\lceil \log \max \frac{a_{2k}}{a_{0k}} \right\rceil = \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \max\left(\frac{a_{2k}}{2^{s_0}}, \frac{a_{2k}}{a_{1k}}, \frac{a_{2k}}{a_{2k}}, \frac{a_{2k}}{a_{3k}}\right) \right\rceil = \\ &= \max(t_2 - s_0, t_{21}, t_{23}, 0), \\ s_3 &= \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{a_{3k}}{\max(b_{1k}, b_{2k})} \right\rceil = \\ &= \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{a_{3k}}{\max(\min(a_{0k} \cdot 2^{s_{10}}, a_{1k}, a_{3k}), \min(a_{0k} \cdot 2^{s_{20}}, a_{2k}, a_{3k}))} \right\rceil. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что ключевыми для поиска оптимального значения являются величины $t_1 - \max(t_{12}, t_{13}, 0)$ и $t_2 - \max(t_{21}, t_{23}, 0)$. Обозначим их через r_1 и r_2 соответственно. Что произойдёт со слагаемыми при увеличении значения переменной s_0 на 1? Рассмотрим три случая. Если $s_0 < \min(r_1, r_2)$, то второе и третье слагаемое уменьшатся на 1. Если

$\min(r_1, r_2) \leqslant s_0 < \max(r_1, r_2)$, то одно из слагаемых t_{10} и t_{20} уменьшится на 1, а второе не изменится. Наконец, если $s_0 \geqslant \max(r_1, r_2)$, то оба этих слагаемых не изменятся. Первое слагаемое в любом случае, очевидно, увеличится на 1. Что касается последнего, четвёртого слагаемого, то нам достаточно заметить, что оно не может увеличиться и не может уменьшиться больше чем на 1. Отсюда следует, что значение

$$s_0' = \max(r_1, r_2) = \\ = \max(t_1 - \max(t_{12}, t_{13}, 0), t_2 - \max(t_{21}, t_{23}, 0)) = \log X_{123}$$

будет оптимальным для переменной s_0. Подставляя его в формулы, получаем

$$t_{10}' = \max(t_1 - s_0', t_{12}, t_{13}, 0) = \\ = \max(t_1 - \max(t_1 - \max(t_{12}, t_{13}, 0), t_2 - \max(t_{21}, t_{23}, 0)), t_{12}, t_{13}, 0) = \\ = \max(\min(\max(t_{12}, t_{13}, 0), t_1 - t_2 + \max(t_{21}, t_{23}, 0)), \max(t_{12}, t_{13}, 0)) = \\ = \max(t_{12}, t_{13}, 0),$$

аналогично

$$t_{20}' = \max(t_{21}, t_{23}, 0).$$

Отсюда

$$s_0' + t_{10}' + t_{20}' = \max(t_1 + \max(t_{21}, t_{23}, 0), t_2 + \max(t_{12}, t_{13}, 0)). \tag{18}$$

Исходя из формул (16)–(18), получаем оценку

$$l_{\mathrm{Sh}}(S) \geqslant \max(t_1 + t_{21}, t_2 + t_{12}) + s_3'. \tag{19}$$

Теперь выразим величины b_{1l}' и b_{2l}', $l = 1, \ldots, q$. Имеем

$$b_{1l}' = \min(a_{0l}' \cdot 2^{s_{10}'}, a_{1l}, a_{3l}) = \\ = \min(\min(2^{s_0'}, a_{1l}, a_{2l}, a_{3l}) \cdot 2^{s_{10}'}, a_{1l}, a_{3l}) = \\ = \min(2^{s_0' + s_{10}'}, a_{1l} \cdot 2^{s_{10}'}, a_{2l} \cdot 2^{s_{10}'}, a_{3l} \cdot 2^{s_{10}'}, a_{1l}, a_{3l}) = \\ = \min(a_{1l}, a_{2l} \cdot 2^{s_{10}'}, a_{3l}, 2^{s_0' + s_{10}'}) = \\ = \min(a_{1l}, a_{2l} \cdot 2^{t_{10}' - \max(t_{13}, 0)}, a_{3l}, 2^{s_0' + t_{10}' - \max(t_{13}, 0)}) = \\ = \min(a_{1l}, a_{2l} \cdot 2^{\max(t_{12}, t_{13}, 0) - \max(t_{13}, 0)}, a_{3l}, 2^{s_0' + \max(t_{12}, t_{13}, 0) - \max(t_{13}, 0)}) = \\ = \min(a_{1l}, a_{2l} \cdot Y_{123}, a_{3l}, X_{123} \cdot Y_{123}) = d_{3l}^{12}.$$

Равенство $b_{2l}' = d_{3l}^{21}$ доказывается аналогично. С учётом этого получаем

$$s_3' = \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{a_{3k}}{\max(d_{3k}^{12}, d_{3k}^{21})} \right\rceil.$$

Наконец, подставляя последнее в (19), имеем

$$l_{\mathrm{Sh}}(S) \geqslant \max\left(t_1 + t_{21}, t_2 + t_{12}\right) + \left\lceil \log \max_{1 \leqslant k \leqslant q} \frac{a_{3k}}{\max\left(d_{3k}^{12}, d_{3k}^{21}\right)} \right\rceil.$$

Оценки, получаемые из этой перестановкой индексов, доказываются аналогично. Объединяя их все, приходим к неравенству

$$l_{\mathrm{Sh}}(A \mid x_1 x_2 \cdots x_q) \geqslant \max_{(i_1,i_2,i_3) \in S_3} \Biggl(\max\left(t_{i_1} + t_{i_2 i_1}, t_{i_2} + t_{i_1 i_2}\right) + \\ + \left\lceil \log \max_{1 \leqslant l \leqslant q} \frac{a_{i_3 l}}{\max\left(d_{i_3 l}^{i_1 i_2}, d_{i_3 l}^{i_2 i_1}\right)} \right\rceil \Biggr),$$

что и требовалось. Лемма 9 доказана.

Сформулируем и докажем основную теорему.

Теорема 1. *Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $3 \times q$ из натуральных чисел. Тогда*

$$l_{\mathrm{Sh}}(A) = \max_{(i_1,i_2,i_3) \in S_3} \left(t_{i_1} + t_{i_2 i_1} + \left\lceil \log \max_{1 \leqslant l \leqslant q} \frac{a_{i_3 l}}{\max\left(d_{i_3 l}^{i_1 i_2}, d_{i_3 l}^{i_2 i_1}\right)} \right\rceil \right) + \Delta(A),$$

где $\Delta(A)$ — некоторая функция от матрицы A, которая может принимать только целые неотрицательные значения не больше q.

Доказательство. Используя леммы 1, 4 и 8, получаем верхнюю оценку

$$l_{\mathrm{Sh}}(A) \leqslant l_{\mathrm{Sh}}(A \mid x_1 x_2 \cdots x_q) + l_{\mathrm{Sh}}(x_1 x_2 \cdots x_q) \leqslant \\ \leqslant \max_{(i_1,i_2,i_3) \in S_3} \left(t_{i_1} + t_{i_2 i_1} + \left\lceil \log \max_{1 \leqslant l \leqslant q} \frac{a_{i_3 l}}{\max\left(d_{i_3 l}^{i_1 i_2}, d_{i_3 l}^{i_2 i_1}\right)} \right\rceil \right) + q.$$

С помощью леммы 9 получаем нижнюю оценку

$$l_{\mathrm{Sh}}(A) \geqslant l_{\mathrm{Sh}}(A \mid x_1 x_2 \cdots x_q) \geqslant \max_{(i_1,i_2,i_3) \in S_3} \Biggl(\max\left(t_{i_1} + t_{i_2 i_1}, t_{i_2} + t_{i_1 i_2}\right) + \\ + \left\lceil \log \max_{1 \leqslant l \leqslant q} \frac{a_{i_3 l}}{\max\left(d_{i_3 l}^{i_1 i_2}, d_{i_3 l}^{i_2 i_1}\right)} \right\rceil \Biggr) \geqslant \max_{(i_1,i_2,i_3) \in S_3} \Biggl(t_{i_1} + t_{i_2 i_1} + \\ + \left\lceil \log \max_{1 \leqslant l \leqslant q} \frac{a_{i_3 l}}{\max\left(d_{i_3 l}^{i_1 i_2}, d_{i_3 l}^{i_2 i_1}\right)} \right\rceil \Biggr).$$

Теорема 1 доказана.

При доказательстве теоремы мы привели нижнюю оценку к виду верхней оценки. Можно действовать наоборот. В этом случае формула становится длиннее, но, во-первых, первое слагаемое будет равно сложности реализации соответствующей подсистемы из двух мономов над мономом $x_1 x_2 \cdots x_q$, а во-вторых, выражение не будет изменяться при перестановке индексов i_1 и i_2, что позволяет брать максимум по трём величинам, а не по шести. Сформулируем и докажем соответствующий результат.

Утверждение 1. *Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $p \times 3$ из натуральных чисел. Тогда*

$$l_{\mathrm{Sh}}(A) = \max_{\substack{(i_1,i_2,i_3)\in S_3,\\ i_1<i_2}} \Bigg(\max\left(t_{i_1} + t_{i_2 i_1}, t_{i_2} + t_{i_1 i_2}\right) + \\ + \left\lceil \log \max_{1\leqslant l\leqslant q} \frac{a_{i_3 l}}{\max\left(d_{i_3 l}^{i_1 i_2}, d_{i_3 l}^{i_2 i_1}\right)} \right\rceil \Bigg) + \Delta(A),$$

где $\Delta(A)$ — некоторая функция от матрицы A, которая может принимать только целые неотрицательные значения не больше q.

Доказательство. Нижняя оценка сразу следует из леммы 9. Используя леммы 1, 4 и 8, получаем верхюю оценку

$$l_{\mathrm{Sh}}(A) \leqslant l_{\mathrm{Sh}}(A \,|\, x_1 x_2 \cdots x_q) + l_{\mathrm{Sh}}(x_1 x_2 \cdots x_q) \leqslant \\ \leqslant \max_{(i_1,i_2,i_3)\in S_3} \left(t_{i_1} + t_{i_2 i_1} + \left\lceil \log \max_{1\leqslant l\leqslant q} \frac{a_{i_3 l}}{\max\left(d_{i_3 l}^{i_1 i_2}, d_{i_3 l}^{i_2 i_1}\right)} \right\rceil \right) + q \leqslant \\ \leqslant \max_{\substack{(i_1,i_2,i_3)\in S_3,\\ i_1<i_2}} \Bigg(\max\left(t_{i_1} + t_{i_2 i_1}, t_{i_2} + t_{i_1 i_2}\right) + \\ + \left\lceil \log \max_{1\leqslant l\leqslant q} \frac{a_{i_3 l}}{\max\left(d_{i_3 l}^{i_1 i_2}, d_{i_3 l}^{i_2 i_1}\right)} \right\rceil \Bigg) + q.$$

Утверждение 1 доказано.

Отметим, что для величины $l_{\mathrm{Sh}}(A)$ мы использовали довольно грубую нижнюю оценку — фактически такую же, какая была получена в лемме 9 для величины $l_{\mathrm{Sh}}(A \,|\, x_1 x_2 \cdots x_q)$. Из-за этого «зазор» между верхней и нижней оценками увеличился. Если применять леммы 8 и 9 для оценки величины $l_{\mathrm{Sh}}(A \,|\, x_1 x_2 \cdots x_q)$, то получится следующий результат.

Утверждение 2. *Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $3 \times q$ из натуральных чисел. Тогда*

$$l_{\mathrm{Sh}}(A \,|\, x_1 x_2 \cdots x_q) = \\ = \max_{(i_1,i_2,i_3)\in S_3} \left(t_{i_1} + t_{i_2 i_1} + \left\lceil \log \max_{1\leqslant l\leqslant q} \frac{a_{i_3 l}}{\max\left(d_{i_3 l}^{i_1 i_2}, d_{i_3 l}^{i_2 i_1}\right)} \right\rceil \right) + \delta(A),$$

где $\delta(A)$ — некоторая функция от матрицы A, которая может принимать только значения 0 *и* 1.

Возможно ли сохранить такой же «зазор» при переходе к величине $l_{\mathrm{Sh}}(A)$, т. е. заменить $\Delta(A)$ на $\delta(A)$ в формулировке теоремы 1? Можно обобщить этот вопрос так: является ли реализация монома, состоящего из всех переменных, оптимальным первым шагом для реализации матрицы без нулей? Сформулируем гипотезу, соответствующую положительному ответу на этот вопрос.

Гипотеза 1. *Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $p \times q$ из натуральных чисел. Тогда*

$$l_{\mathrm{Sh}}(A) = l_{\mathrm{Sh}}(A \,|\, x_1 x_2 \cdots x_q) + q - 1.$$

Известно, что эта гипотеза верна для матриц размера $2 \times q$ (см. [6, утверждение 4]) и $p \times 2$ (см. [8, лемма 6]). Докажем, что она верна и для матриц размера $p \times 3$.

Лемма 10. *Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица размера $p \times 3$ из натуральных чисел. Тогда*

$$l_{\mathrm{Sh}}(A) = l_{\mathrm{Sh}}(A \,|\, x_1 x_2 x_3) + 2.$$

Доказательство. Верхняя оценка сразу следует из леммы 1. Докажем нижнюю оценку.

Пусть M — система мономов, соответствующая матрице A, а S — минимальная схема, реализующая эту систему мономов. Рассмотрим множество мономов из схемы S, содержащих хотя бы две переменные. Для каждого $i = 1, 2, 3$ выберем из этого множества моном V_i, в котором степень при переменной x_i минимальна (если таких мономов несколько, то выберем первый из них) и обозначим эту степень через a_i. Положим $V_0 = x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3}$ и заметим, что для любого монома U из системы M выполнено условие $V_0 \leqslant U$.

Выделим из схемы S подпоследовательность $S_0 = \{U \in S \mid U \leqslant V_0\}$. Легко видеть, что она образует схему, реализующую систему мономов $\{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, x_3^{a_3}\}$.

Заменим каждый моном U в схеме S мономом $U' = U_{\max}(U, V_0)$. Полученная при такой замене последовательность мономов S' образует схему, реализующую систему мономов M над мономом V_0. Действительно, легко видеть, что для любого монома U из системы M выполнено условие $U' = U$, откуда получаем $U \in S'$. Кроме того, из условий $U_1 \leqslant U$, $U_2 \leqslant U$ и $U \leqslant U_1 U_2$ следует выполнение условий $U_1' \leqslant U'$, $U_2' \leqslant U'$ и $U' \leqslant U_1' U_2'$, поэтому из леммы 2 вытекает, что для последовательности мономов S' найдётся набор правил вычисления. Отметим, что при переходе от схемы S к схеме S' число мономов не изменилось, но число существенных мономов увеличилось на два, поэтому $l_{\mathrm{Sh}}(S') = l_{\mathrm{Sh}}(S) + 2$.

Удалим из схемы S' все повторяющиеся мономы, оставив только первый экземпляр каждого из них. Получим схему S'', которая также реализует систему мономов M над мономом V_0.

Выделим из схемы S подпоследовательность мономов $S_0 = \{U \in S \mid U \leqslant V_0\}$. Заметим, что эта последовательность образует схему, реализующую систему мономов $\{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, x_3^{a_3}\}$, причём если $U \in S_0$, то $U' = V_0$, поэтому схема S' содержит хотя бы $|S_0|$ мономов V_0 (здесь и далее $|S_0|$ обозначает число мономов в схеме S_0). Так как $|S_0| = l_{\mathrm{Sh}}(S_0) + 3$, число мономов V_0, удалённых при переходе от схемы S' к схеме S'', будет не меньше $l_{\mathrm{Sh}}(S_0) + 2$.

Чтобы оценить величину $l_{\mathrm{Sh}}(S'')$, рассмотрим три случая.

Случай 1. Если схема S_0 содержит моном от трёх переменных или два монома от двух переменных, то

$$l_{\mathrm{Sh}}(S_0) \geqslant l_{\mathrm{Sh}}\bigl(\{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, x_3^{a_3}\}\bigr) + 2.$$

Как было показано выше, число мономов V_0, удалённых при переходе от схемы S' к схеме S'', будет не меньше $l_{\mathrm{Sh}}(S_0) + 2$, поэтому

$$l_{\mathrm{Sh}}(S'') \leqslant l_{\mathrm{Sh}}(S') - (l_{\mathrm{Sh}}(S_0) + 2) \leqslant l_{\mathrm{Sh}}(S') - l_{\mathrm{Sh}}\bigl(\{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, x_3^{a_3}\}\bigr) - 4.$$

Случай 2. Если схема S_0 содержит ровно один моном от двух переменных, то

$$l_{\mathrm{Sh}}(S_0) \geqslant l_{\mathrm{Sh}}\bigl(\{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, x_3^{a_3}\}\bigr) + 1.$$

Можно без ограничения общности считать, что это моном $x_1^{a_1} x_2^{a_2}$. Тогда моном V_3 не может содержаться в мономе V_0. Пусть его правило вычисления в схеме S имеет вид $V_3 = \bigl(x_3^{a_3}; W_3\bigr)_{R_3}$. Значит, схема S содержит мономы V_3 и W_3, которые не содержатся в схеме S_0, а при переходе к схеме S' будут заменены одним и тем же мономом $V_3' = W_3'$. Следовательно, при переходе к схеме S'' будут удалены не только мономы V_0, получающиеся из схемы S', но и хотя бы один моном V_3'. Отсюда

$$l_{\mathrm{Sh}}(S'') \leqslant l_{\mathrm{Sh}}(S') - (l_{\mathrm{Sh}}(S_0) + 2) - 1 \leqslant l_{\mathrm{Sh}}(S') - l_{\mathrm{Sh}}\bigl(\{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, x_3^{a_3}\}\bigr) - 4.$$

Случай 3. Если схема S_0 не содержит мономов от двух переменных, то будем использовать тривиальную оценку

$$l_{\mathrm{Sh}}(S_0) \geqslant l_{\mathrm{Sh}}\bigl(\{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, x_3^{a_3}\}\bigr).$$

В этом случае все три монома V_1, V_2, V_3 различны и не содержатся в мономе V_0. Для каждого $i = 1, 2, 3$ проведём следующее рассуждение (аналогичное рассуждению из предыдущего случая). Пусть правило вычисления монома V_i в схеме S имеет вид $V_i = \bigl(x_3^{a_3}; W_i\bigr)_{R_i}$. Значит, схема S содержит мономы V_i и W_i, которые не содержатся в схеме S_0, а при переходе к схеме S' будут заменены одним и тем же мономом $V_i' = W_i'$. Следовательно, при переходе к схеме S'' будут удалены не только мономы V_0, получающиеся из схемы S', но и хотя бы по одному моному V_1', V_2', V_3'. Отсюда

$$l_{\mathrm{Sh}}(S'') \leqslant l_{\mathrm{Sh}}(S') - (l_{\mathrm{Sh}}(S_0) + 2) - 3 \leqslant l_{\mathrm{Sh}}(S') - l_{\mathrm{Sh}}\bigl(\{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, x_3^{a_3}\}\bigr) - 5.$$

Итак, в любом случае справедливо неравенство

$$l_{\mathrm{Sh}}(S'') \leqslant l_{\mathrm{Sh}}(S') - l_{\mathrm{Sh}}\bigl(\{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, x_3^{a_3}\}\bigr) - 4,$$

откуда, используя лемму 1 и свойства рассматриваемых схем, получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} l_{\mathrm{Sh}}(A) = l_{\mathrm{Sh}}(M) \leqslant l_{\mathrm{Sh}}(V_0) + l_{\mathrm{Sh}}(M \mid V_0) \leqslant \\ \leqslant \bigl(l_{\mathrm{Sh}}\bigl(\{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, x_3^{a_3}\}\bigr) + 2\bigr) + l_{\mathrm{Sh}}(S'') \leqslant \\ \leqslant \bigl(l_{\mathrm{Sh}}\bigl(\{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, x_3^{a_3}\}\bigr) + 2\bigr) + \bigl(l_{\mathrm{Sh}}(S') - l_{\mathrm{Sh}}\bigl(\{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, x_3^{a_3}\}\bigr) - 4\bigr) = \\ = l_{\mathrm{Sh}}(S') - 2 = l_{\mathrm{Sh}}(S) = l_{\mathrm{Sh}}(A). \end{aligned}$$

Отметим, что при использовании оценки из случая 3 правая часть станет меньше на единицу, что приведёт к противоречию. Значит, схема S_0 обязана содержать хотя бы один моном от двух переменных. Из полученной цепочки неравенств следует равенство

$$l_{\mathrm{Sh}}(A) = l_{\mathrm{Sh}}(V_0) + l_{\mathrm{Sh}}(M \mid V_0).$$

Наконец, с помощью лемм 1, 3 и 4 получаем

$$\begin{aligned} l_{\mathrm{Sh}}(A) = l_{\mathrm{Sh}}(V_0) + l_{\mathrm{Sh}}(M \mid V_0) = \\ = l_{\mathrm{Sh}}(V_0 \mid x_1x_2x_3) + 2 + l_{\mathrm{Sh}}(A \mid V_0) \geqslant l_{\mathrm{Sh}}(A \mid x_1x_2x_3) + 2, \end{aligned}$$

что и требовалось. Лемма 10 доказана.

Используя утверждение 2 и лемму 10, приходим к следующему результату.

Утверждение 3. *Пусть* $A = (a_{ij})$ — *матрица размера* 3×3 *из натуральных чисел. Тогда*

$$l_{\mathrm{Sh}}(A) = \max_{(i_1,i_2,i_3)\in S_3} \left(t_{i_1} + t_{i_2 i_1} + \left\lceil \log \max_{1\leqslant l\leqslant q} \frac{a_{i_3 l}}{\max\bigl(d_{i_3 l}^{i_1 i_2}, d_{i_3 l}^{i_2 i_1}\bigr)} \right\rceil\right) + 2 + \delta(A),$$

где $\delta(A)$ — *некоторая функция от матрицы* A, *которая может принимать только значения* 0 *и* 1.

Автор посвящает статью памяти Юрия Владимировича Мерекина (1935–2025). В работе [2] Ю. В. Мерекина впервые введено понятие схемы композиции, а полученный им результат о сложности реализации одного монома [2, теорема 2] лёг в основу исследований соответствующей вычислительной модели.

Финансирование работы

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования России в рамках программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики (соглашение № 075–15–2025–345). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. **Ширшов А. И.** Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 2. С. 292–296.
2. **Мерекин Ю. В.** О порождении слов с использованием операции композиции // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 2003. Т. 10, № 4. С. 70–78.
3. **Merekin Yu. V.** Some bounds on the complexity of words // Southeast Asian Bull. Math. 2006. V. 30, No. 6. P. 1081–1121.
4. **Трусевич Е. Н.** О сложности реализации схемами композиции систем из двух мономов от двух переменных // Мат. VIII Молодёж. науч. шк. по дискретной математике и её приложениям. Ч. 2 (Москва, Россия, 24–29 окт. 2011 г.). М.: ИПМ РАН, 2011. С. 40–44.
5. **Трусевич Е. Н.** О сложности вычисления некоторых систем одночленов схемами композиции // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. 2014. № 5. С. 18–22.
6. **Корнеев С. А.** О сложности реализации системы из двух мономов схемами композиции // Дискрет. математика. 2020. Т. 32, № 2. С. 15–31.
7. **Корнеев С. А.** Об асимптотическом поведении функций шенноновского типа, характеризующих сложность вычисления систем мономов // Учён. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 162, № 3. С. 300–310.
8. **Корнеев С. А.** О сложности реализации системы мономов от двух переменных схемами композиции // Прикл. дискрет. математика. 2021. № 53. С. 103–119.
9. **Лупанов О. Б.** Асимптотические оценки сложности управляющих систем. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2024. 124 с.
10. **Сэвидж Дж. Э.** Сложность вычислений. М.: Факториал, 1998. 368 с.
11. **Храпченко В. М.** Нижние оценки сложности схем из функциональных элементов // Кибернетический сборник. Новая сер. Вып. 21. М.: Мир, 1984. С. 3–54.
12. **Кочергин В. В.** Задачи Р. Беллмана и Д. Кнута и их обобщения: Сложность аддитивных вычислений. Saarbrücken: Palmarium Acad. Publ., 2012. 396 с.
13. **Кочергин В. В.** О задачах Беллмана и Кнута и их обобщениях // Фундамент. и прикл. математика. 2015. Т. 20, № 6. С. 159–188.

14. Кочергин В. В. Задачи Беллмана, Кнута, Лупанова, Пиппенджера и их вариации как обобщения задачи об аддитивных цепочках // Математические вопросы кибернетики. Вып. 20. М.: Физматлит, 2022. С. 119–256.
15. Кочергин В. В. О сложности вычисления систем одночленов от двух переменных // Тр. VII Междунар. конф. «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Покровское, Россия, 4–6 мар. 2006 г.). М.: МАКС Пресс, 2006. С. 185–190.
16. Сидоренко А. Ф. Сложность аддитивных вычислений семейства целочисленных линейных форм // Зап. науч. сем. ЛОМИ. Т. 105. Теоретические применения методов математической логики. III. Л.: Наука, 1981. С. 53–61.
17. Knuth D. E., Papadimitriou C. H. Duality in addition chains // Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci. 1981. V. 13. P. 2–4.
18. Olivos J. On vectorial addition chains // J. Algorithms. 1981. V. 2, No. 1. P. 13–21.
19. Кочергин В. В. О сложности совместного вычисления трёх одночленов от трёх переменных // Математические вопросы кибернетики. Вып. 15. М.: Физматлит, 2006. С. 79–154.
20. Кочергин В. В. Простое доказательство верхней оценки сложности вычисления трёх одночленов трёх переменных // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. 2019. № 2. С. 3–8.
21. Кочергин В. В. Об одном соотношении двух мер сложности вычисления систем одночленов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. 2009. № 4. С. 8–13.

Корнеев Сергей Александрович

Статья поступила
18 июня 2025 г.
После доработки —
20 августа 2025 г.
Принята к публикации
22 сентября 2025 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2025. Vol. 32, No. 4. P. 146–171

UDC 519.71 DOI: 10.33048/daio.2025.32.838

ON THE COMPLEXITY OF IMPLEMENTATION OF A SYSTEM OF THREE MONOMIALS BY COMPOSITION CIRCUITS

S. A. Korneev[1, 2]

[1] Lomonosov Moscow State University,
1 Leninskie Gory, 119991, Moscow, Russia
[2] Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics
1 Leninskie Gory, 119991, Moscow, Russia
E-mail: `korneev.sa.42@gmail.com`

Abstract. We study circuit complexity of monomial system computation. In the considered computational model, the complexity means the minimal number of composition operations sufficient to compute the monomial system. Multiple use of results in intermediate calculations is allowed. We consider a three-monomial system without zeros. The main results of this paper are as follows. A formula for asymptotic growth of circuit complexity of system computation is established. In case of three variables, a more accurate formula is obtained, which expresses circuit complexity of system computation with precision of one. Tab. 1, bibliogr. 21.

Keywords: composition circuit, circuit of functional elements, set of monomials, computational complexity, circuit complexity.

References

1. **A. I. Shirshov,** Some algorithmic problems for Lie algebras, *Sib. Mat. Zh.* **3** (2), 292–296 (1962) [Russian].
2. **Yu. V. Merekin,** On the generation of words using the composition operation, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1*, **10** (4), 70–78 (2003) [Russian].
3. **Yu. V. Merekin,** Some bounds on the complexity of words, *Southeast Asian Bull. Math.* **30** (6), 1081–1121 (2006).
4. **E. N. Trusevich,** On the complexity of implementation of a system of two monomials in two variables by composition circuits, in *Proc. VIII Youth Sci. Sch. Discrete Mathematics and Its Applications*, Pt. 2 (Moscow, Russia, Oct. 24–29, 2011) (IPM RAN, Moscow, 2011), pp. 40–44 [Russian].

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **19** (4) (2025).

5. **E. N. Trusevich,** Complexity of certain systems of monomials in calculation by composition circuits, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1*, No. 5, 18–22 (2014) [Russian] [*Mosc. Univ. Math. Bull.* **69** (5), 193–197 (2014), DOI: 10.3103/S0027132214050039].

6. **S. A. Korneev,** On the complexity of implementation of a system of two monomials by composition circuits, *Diskretn. Mat.* **32** (2), 15–31 (2020) [Russian] [*Discrete Math. Appl.* **31** (2), 113–125 (2021), DOI: 10.1515/dma-2021-0010].

7. **S. A. Korneev,** On the asymptotic behavior of Shannon-type functions characterizing the computing complexity of systems of monomials, *Uchyon. Zap. Kazan. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* **162** (3) 300–310 (2020) [Russian].

8. **S. A. Korneev,** The complexity of implementation of a system of monomials in two variables by composition circuits, *Prikl. Diskretn. Mat.*, No. 53, 103–119 (2021) [Russian].

9. **O. B. Lupanov,** *Asymptotic Estimates for the Complexity of Control Systems* (Izd. Mosk. Univ., Moscow, 2024) [Russian].

10. **J. E. Savage,** *The Complexity of Computing* (Wiley, New York, 1976; Faktorial, Moscow, 1998 [Russian]).

11. **V. M. Khrapchenko,** Lower Bounds for the Complexity of Circuits of Functional Elements, in *Cybernetics Collection, New Series*, Vol. 21 (Mir, Moscow, 1984), pp. 3–54.

12. **V. V. Kochergin,** *The R. Bellman's and D. Knuth's Problems and Their Generalizations: The Complexity of Additive Computing* (Palmarium Acad. Publ., Saarbrücken, 2012).

13. **V. V. Kochergin,** On Bellman's and Knuth's problems and their generalizations, *Fundam. Prikl. Mat.* **20** (6), 159–188 (2015) [Russian] [*J. Math. Sci.* **233** (1), 103–124 (2018), DOI: 10.1007/s10958-018-3928-4].

14. **V. V. Kochergin,** The Bellman, Knuth, Lupanov, Pippenger problems and their variations as generalizations of the additive circuits problem, in *Mathematical Problems of Cybernetics*, Vol. 20 (Fizmatlit, Moscow, 2022), pp. 119–256 [Russian].

15. **V. V. Kochergin,** On the computation complexity of systems of monomials in two variables, in *Proc. VII Int. Conf. "Discrete Models in Control Systems Theory"* (Pokrovskoe, Russia, Mar. 4–6, 2006) (MAKS Press, Moscow, 2006), pp. 185–190 [Russian].

16. **A. F. Sidorenko,** Complexity of additive computations of systems of linear forms, in *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, Vol. 105. Theoretical Applications of Methods of Mathematical Logics, Pt. III (Nauka, Leningrad, 1981), pp. 53–61 [Russian] [*J. Sov. Math.* **22** (3), 1310–1315 (1983), DOI: 10.1007/BF01084394].

17. **D. E. Knuth** and **C. H. Papadimitriou,** Duality in addition chains, *Bull. Eur. Assoc. Theor. Comput. Sci.* **13**, 2–4 (1981).

18. **J. Olivos,** On vectorial addition chains, *J. Algorithms* **2** (1), 13–21 (1981).

19. **V. V. Kochergin,** On the complexity of joint computing of tree monomials it tree variables, in *Mathematical Problems of Cybernetics*, Vol. 15 (Fizmatlit, Moscow, 2006), pp. 79–154 [Russian].

20. V. V. Kochergin, A simple proof for the upper bound of the computational complexity of three monomials in three variables, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1*, No. 2, 3–8 (2019) [Russian] [*Mosc. Univ. Math. Bull.* **74** (2), 43–48 (2019), DOI: `10.3103/S0027132219020013`].

21. V. V. Kochergin, Relation between two measures of the computation complexity for systems of monomials, *Vestn. Mosk. Univ., Ser. 1*, No. 4, 8–13 (2009) [Russian] [*Mosc. Univ. Math. Bull.* **64** (4), 144–149 (2009), DOI: `10.3103/S0027132209040020`].

Sergey A. Korneev

Received June 18, 2025
Revised August 20, 2025
Accepted September 22, 2025