ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 32 № 4 2025

Новосибирск
Издательство Института математики

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Октябрь–декабрь 2025. Т. 32, № 4. С. 191–212

УДК 519.178 DOI: 10.33048/daio.2025.32.839

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ О НЕЗАВИСИМОМ МНОЖЕСТВЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ НАСЛЕДСТВЕННЫХ КЛАССОВ ГРАФОВ С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ И КВАЗИЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА СТЕПЕНИ ИЛИ АНТИСТЕПЕНИ ВЕРШИН

С. В. Сорочан

Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского,
пр. Гагарина, 23, 603950 Нижний Новгород, Россия
E-mail: `sergey.sorochan@itmm.unn.ru`

Аннотация. Триод — это дерево, содержащее не более трёх листьев и не более одной вершины степени 3. Задача о наибольшем независимом множестве (ННМ) разрешима за полиномиальное время для графов, не содержащих в качестве подграфа граф, у которого каждая компонента является триодом с любым фиксированным числом вершин. Если же запрещается k-вершинный порождённый подграф с триодными компонентами, то при $k > 5$ вопрос о сложности решения этой задачи остаётся открытым. Пусть F — граф, у которого каждая компонента является триодом, т. е. триодный граф. Известно, что если задача о ННМ полиномиально разрешима в классе всех графов, не содержащих F в качестве порождённого подграфа, то она полиномиально разрешима и в классе всех графов, свободных от графа $F + O_s$, получаемого из F добавлением s изолированных вершин. Если же запретить порождённый подграф вида $F + P_2$, где P_2 — цепь с двумя вершинами, то полиномиальная разрешимость задачи о ННМ в классе всех графов без порождённых $F + P_2$ доказана только для очень небольшого числа триодных графов F, а для подавляющего большинства таких графов F сложностной статус задачи о ННМ в классе графов, свободных от $F + P_2$, остаётся неизвестным.

В этой статье рассматриваются так называемые графы с логарифмическими ограничениями. Для каждой вершины такого графа выполнено хотя бы одно из следующих трёх условий:

1) степень вершины не превосходит (с точностью до мультипликативной константы) логарифма от общего числа вершин в графе;

2) относительная степень вершины (т. е. максимальное число смежных с ней вершин таких, что все эти смежные вершины несмежны с одной из них) не превосходит (с точностью до мультипликативной константы) логарифма от общего числа вершин в графе;

3) антистепень вершины (т. е. число несмежных с ней вершин) не превосходит (с точностью до мультипликативной константы) логарифма от общего числа вершин в графе.

Доказано, что для любого триодного графа F такого, что задача о ННМ полиномиально разрешима в классе графов, свободных от F, она остаётся полиномиально разрешимой и для всех графов с логарифмическими ограничениями, свободных от $F + P_2$. Также рассмотрено одно нетривиальное расширение этого множества графов, названное множеством графов с квазилогарифмическими ограничениями, и доказан аналогичный результат для всех таких графов, свободных от $F + P_2$. Предложены полиномиальные алгоритмы для решения задачи о ННМ для графов с логарифмическими и квазилогарифмическими ограничениями, свободных от $F + P_2$, и найдены верхние оценки сложности этих алгоритмов. Библиогр. 19.

Ключевые слова: независимое множество, монотонный класс, наследственный класс, НМ-простой класс, НМ-сложный класс, запрещённый подграф, триод, граф с логарифмическими ограничениями, граф с квазилогарифмическими ограничениями, полиномиальный алгоритм.

Введение

Под *классом графов* понимается множество графов, замкнутое относительно переименования вершин. Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин, и *монотонным*, если он замкнут относительно удаления вершин и рёбер. Любой наследственный класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством *запрещённых подграфов* $\mathcal{M}$: $\mathcal{X}$ состоит из всех графов, не содержащих порождённых подграфов, изоморфных графам из $\mathcal{M}$. В этом случае используется обозначение $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{M})$, а графы из $\mathcal{X}$ называют $\mathcal{M}$-*свободными.* Если $\mathcal{M}$ — конечное множество, то класс $\mathrm{Free}(\mathcal{M})$ называется *конечно определённым.* Всякий монотонный класс наследственный, поэтому он тоже может быть задан множеством запрещённых (порождённых) подграфов.

Независимое множество в графе — это множество несмежных между собой вершин. *Задача о независимом множестве* состоит в том, чтобы в заданном графе найти независимое множество наибольшей мощности. Размер наибольшего независимого множества (ННМ) графа G называется его *числом независимости* и обозначается через $\alpha(G)$. Задача о независимом множестве NP-трудна в множестве всех графов и остаётся такой для многих классов графов; называем такие классы НМ-*сложными.*

Известно также немало классов графов, для которых эта задача может быть решена за полиномиальное время, их называем НМ-*простыми*.

Кроме того, есть информация общего характера, относящаяся не к отдельным классам, а к семействам классов. Так, в [1] установлено, что конечно определённый монотонный класс $\mathcal{X}$ будет НМ-сложным, если $\mathcal{T} \subseteq X$, и НМ-простым в противном случае. Здесь $\mathcal{T}$ — класс всех графов, у которых каждая компонента связности является деревом не более чем с тремя листьями. Такое дерево называется *триодом*.

Обозначенную дихотомию пока не удалось распространить на наследственные классы, не являющиеся монотонными. В [2] доказано, что любой конечно определённый наследственный класс, включающий класс $\mathcal{T}$, будет НМ-сложным. Движение в обратном направлении связано с разработкой полиномиальных алгоритмов для наследственных классов, определяемых запрещёнными подграфами из $\mathcal{T}$. Если говорить только о классах, определяемых одним запрещённым подграфом из $\mathcal{T}$, то наибольшие продвижения здесь состоят в установлении НМ-простоты следующих классов:

- $\mathrm{Free}(mP_2)$ при любом натуральном m [3], где P_2 — цепь на двух вершинах;
- $\mathrm{Free}(K_{1,3})$ [4], где $K_{1,3}$ — четырёхвершинный триод с тремя листьями, названный *клешнёй*;
- $\mathrm{Free}(T_{1,1,2})$ [5], где $T_{1,1,2}$ — триод на пяти вершинах, названный *вилкой*, т. е. граф, получаемый из графа $K_{1,3}$ подразбиением одного ребра;
- $\mathrm{Free}(P_2 + K_{1,3})$ [6], где $P_2 + K_{1,3}$ — дизъюнктное объединение графов P_2 и $K_{1,3}$;
- $\mathrm{Free}(P_5)$ [7];
- $\mathrm{Free}(P_6)$ [8].

Также имеется ряд результатов о НМ-простоте некоторых подмножеств классов, определяемых запрещёнными подграфами из $\mathcal{T}$ (см., например, [9–13]). Кроме того, отметим работы [14, 15], содержащие идеи, которые используются в [10].

Как видно, в отличие от монотонных классов, для конечно определённых наследственных классов графов, не являющихся монотонными, имеется значительный разрыв в наших знаниях о НМ-простых и НМ-сложных классах. По-видимому, трудно рассчитывать на ликвидацию этого разрыва в ближайшем будущем, и имеет смысл испытать другие подходы к проблеме разделения НМ-простых и НМ-сложных наследственных классов. Одним из направлений может быть рассмотрение семейств классов графов, промежуточных между семействами монотонных и наследственных классов. Для этих промежуточных семейств можно надеяться получить результаты дихотомического характера типа упомянутого выше, либо хотя бы приблизиться к этому.

Первая попытка получения новых результатов в данном направлении предпринята в [16]. Если наследственный класс определяется одним запрещённым подграфом F, то множество запрещённых подграфов, состоящее из всех остовных надграфов графа F, определяет монотонный класс. Если ограничить добавление рёбер какими-либо правилами, то получится класс, заключённый между этими двумя. Вводя ограничения на множество добавляемых рёбер, получаем возможность определять семейства классов графов, промежуточные между семействами монотонных и наследственных классов. В [16] рассмотрено три типа ограничений на добавление рёбер к цепи P_k (с k вершинами) и доказана НМ-простота следующих наследственных классов:

• множество запрещённых подграфов состоит из всех остовных надграфов цепи P_k с минимальной степенью вершин меньше $k/2$;

• множество запрещённых подграфов состоит из всех остовных надграфов цепи P_k, в дополнительных графах которых меньше $k/2$ рёбер;

• множество запрещённых подграфов состоит из всех остовных надграфов цепи P_k, из которых с помощью операции пересечения графов можно получить P_k.

Исследования, начатые в [16], получили продолжение и развитие в статье [17]. Так как всякая простая цепь содержится в качестве порождённого подграфа в некотором триоде, следующим естественным шагом в заданном направлении стало рассмотрение аналогичных типов ограничений по отношению к триодам.

Пусть $T_{i,j,k}$ — это триод, у которого из единственной вершины степени 3 выходят простые цепи длины i, j, k соответственно, и пусть $s = i + j + k$. В продолжение результатов работы [16] в [17] рассмотрено три типа ограничений на добавление рёбер к триоду $T_{i,j,k}$, которые задают более хитро устроенные классы, промежуточные между монотонными и наследственными, а именно:

• множество запрещённых подграфов состоит из всех остовных надграфов триода $T_{i,j,k}$, у которых минимальная степень вершины меньше $\frac{1}{2}(s + i + 1)$;

• множество запрещённых подграфов состоит из всех остовных надграфов триода $T_{i,j,k}$, у которых дополнительный граф имеет меньше $s/2 - 1$ рёбер;

• множество запрещённых подграфов состоит из всех надграфов триода $T_{i,j,k}$, из которых с помощью операции пересечения графов можно получить $T_{i,j,k}$.

Для первых двух из этих классов и некоторого нетривиального подкласса третьего класса в [17] доказана НМ-простота: представлены полиномиальные алгоритмы решения задачи о ННМ в этих классах, и приведены верхние оценки сложности решающих алгоритмов.

В этой статье будут рассмотрены типы ограничений, похожие на исследованные в работах [16, 17], но привязанные к размеру входного графа, для которого будет решаться задача о ННМ. А именно, мы будем рассматривать такие графы, каждая вершина которых удовлетворяет хотя бы одному из следующих ограничений:

• степень вершины не превосходит (с точностью до мультипликативной константы) логарифма от общего числа вершин в графе;

• относительная степень вершины (максимальное число её соседей таких, что все они несмежны с одним из выбранных соседей) не превосходит логарифма от общего числа вершин в графе (с точностью до мультипликативной константы);

• антистепень вершины (число несмежных с ней вершин) не превосходит логарифма от общего числа вершин в графе (с точностью до мультипликативной константы); в дальнейшем это ограничение будет немного ослаблено повышением верхней границы для значения антистепени.

Графы, удовлетворяющие этим свойствам, для краткости будем называть *графами с логарифмическими ограничениями*, а те из них, для которых ограничение на антистепени ослабляется за счёт небольшого повышения верхней границы для их значений, будем называть *графами с квазилогарифмическими ограничениями.*

Мотивацией для рассмотрения таких ограничений являются следующие известные результаты. Пусть F — фиксированный граф, у которого каждая компонента связности является некоторым триодом. Известно, что если задача о ННМ полиномиально разрешима в классе графов $\mathrm{Free}(F)$, то она полиномиально разрешима и в классе графов $\mathrm{Free}(F+O_s)$ (граф $F+O_s$ получается из F добавлением фиксированного числа s изолированных вершин). Если же запретить порождённый подграф вида $F+P_2$, где P_2 — цепь с двумя вершинами, то полиномиальная разрешимость задачи о ННМ в классе $\mathrm{Free}(F+P_2)$ доказана только для очень небольшого числа триодных графов F (из перечисленных выше работ такие результаты получены только в [3, 6]), а для подавляющего большинства графов F, состоящих из триодных компонент, сложностной статус задачи о ННМ в классе графов $\mathrm{Free}(F+P_2)$ остаётся неизвестным.

Мы докажем, что для любого фиксированного триодного графа F такого, что задача о ННМ полиномиально разрешима в классе $\mathrm{Free}(F)$, она остаётся полиномиально разрешимой и для всех графов с логарифмическими ограничениями, принадлежащих классу $\mathrm{Free}(F+P_2)$. Затем этот результат будет распространён и на все графы с квазилогарифмическими ограничениями из класса $\mathrm{Free}(F+P_2)$. Будут предложены полиномиальные алгоритмы для решения задачи о ННМ для графов с логарифмическими и квазилогарифмическими ограничениями, и найдены верхние оценки их сложности.

В статье применяются следующие обозначения:

• $G_1 + G_2$ — дизъюнктное объединение графов G_1 и G_2;

• $\alpha(G)$ — число независимости графа G (размер его ННМ);

• $N(a)$ — множество вершин графа, смежных с вершиной a (*окрестность* вершины a);

• $\overline{N}(a)$ — множество вершин графа, несмежных с вершиной a (*антиокрестность* вершины a).

Для произвольного подмножества X множества вершин графа G введём следующие обозначения:

• $G[X]$ — подграф графа G, порождённый множеством X;

• $G - X$ — подграф, полученный удалением из графа G всех вершин множества X;

• $N(X)$ — множество всех вершин графа, смежных с вершинами из X (*окрестность* множества X);

• $\overline{N}(X)$ — множество всех вершин графа, несмежных с вершинами из X (*антиокрестность* множества X);

• $\deg_X a$ — число вершин в множестве X, смежных с вершиной a (*степень* вершины a в множестве X);

• $\overline{\deg}_X a$ — число вершин в множестве X, несмежных с вершиной a (*антистепень* вершины a в множестве X).

Если X совпадает с множеством всех вершин графа, то в двух последних обозначениях опускаем индекс X.

1. Класс графов без порождённого подграфа $F + O_s$

Этот раздел предварительный. В нём для любого фиксированного графа F, у которого каждая компонента связности является некоторым триодом, при любом фиксированном натуральном s мы рассмотрим класс $\mathrm{Free}(F + O_s)$ всех графов, не содержащих граф $F + O_s$ в качестве порождённого подграфа.

Во многих работах по тематике задачи о ННМ (наверное, первая из таких работ — это статья [2]) имеется упоминание довольно просто доказываемого результата, говорящего о том, что если задача о ННМ полиномиально разрешима в классе графов $\mathrm{Free}(F)$, то она полиномиально разрешима и в классе графов $\mathrm{Free}(F + O_s)$ при любом фиксированном натуральном s. Однако полиномиального алгоритма для нахождения ННМ в графах из класса $\mathrm{Free}(F + O_s)$ в явном виде ни в [2], ни в других работах представлено не было, как и не было выполнено оценки его трудоёмкости в формальном виде. Довольно простая идея этого алгоритма, краткое описание которой можно найти, например, в учебниках [18, 19], будет использована и несколько усовершенствована при выводе основных результатов данной статьи, поэтому здесь приведём доказательство НМ-простоты для класса $\mathrm{Free}(F + O_s)$ с выводом полиномиальной оценки трудоёмкости решающего алгоритма.

Пусть $\mathcal{X}$ — произвольный наследственный класс графов, а G — n-вершинный граф из $\mathcal{X}$. Через $t_n(G)$ обозначим сложность решения задачи о ННМ для графа G, а через $t_n(\mathcal{X})$ — сложность её решения в множестве всех n-вершинных графов из класса $\mathcal{X}$. Если $\mathcal{X}_n$ — это множество всех n-вершинных графов из $\mathcal{X}$, то очевидно, что $t_n(\mathcal{X}) = \max\limits_{G\in\mathcal{X}_n} t_n(G)$.

Теорема 1. *Пусть F — произвольный граф с триодными компонентами такой, что задача о* ННМ *в классе* $\mathrm{Free}(F)$ *полиномиально разрешима и сложность решения в этом классе равна* $t_n(\mathrm{Free}(F)) = O(n^k)$, *где k — некоторая натуральная константа. Тогда для любой фиксированной натуральной константы s задача о* ННМ *в классе* $\mathrm{Free}(F + O_s)$ *тоже полиномиально разрешима, причём* $t_n(\mathrm{Free}(F + O_s)) = O(n^{k+s})$.

Доказательство. Вывод оценки сложности решения задачи о ННМ в классе $\mathrm{Free}(F+O_s)$ использует простую идею самого общего (а потому экспоненциального в общем случае) алгоритма поиска ННМ в произвольном графе [18, 19].

Наибольшее независимое множество любого графа есть объединение наибольших независимых множеств его компонент связности. Тем самым, не ограничивая общности, можно считать, что входной граф G связный. Его ННМ можно найти следующим способом. Возьмём произвольную вершину a графа G, не являющуюся изолированной вершиной. Если она не принадлежит никакому ННМ графа G, то $\alpha(G) = \alpha(G-a)$, а если принадлежит хотя бы одному ННМ, то ясно, что $\alpha(G) = \alpha(G - N(a)) = \alpha(G[\overline{N}(a)]) + 1$. Следовательно, для решения задачи о ННМ в графе G достаточно решить её по отдельности для каждого из графов $G - a$ и $G - N(a)$, а затем выбрать из двух независимых множеств то, у которого мощность больше: $\alpha(G) = \max\{\alpha(G - a), \alpha(G[\overline{N}(a)]) + 1\}$.

В каждом из графов $G - a$ и $G[\overline{N}(a)]$ число вершин меньше, чем в G. Это приводит к рекурсивному алгоритму нахождения ННМ графа G и его числа независимости $\alpha(G)$. Для произвольного графа G верхняя оценка сложности такого алгоритма может быть экспоненциальной, но если $G \in \mathrm{Free}(F + O_s)$, то легко установить наличие полиномиальной верхней оценки.

Действительно, для каждого связного графа G и любой его неизолированной вершины a имеем

$$t_n(G) \leqslant t_{n-1}(G - a) + t_{n-1-\deg a}(G[\overline{N}(a)]).$$

Пусть сначала $s = 1$. Используем условие $G \in \mathrm{Free}(F + O_1)$. В силу свойства наследственности $G - a \in \mathrm{Free}(F + O_1)$, а граф $G[\overline{N}(a)]$

удовлетворяет более сильному требованию: $G[\overline{N}(a)] \in \mathrm{Free}(F)$. В самом деле, если предположить, что в графе $G[\overline{N}(a)]$ имеется порождённый подграф, изоморфный F, то вместе с вершиной a он бы давал порождённый подграф $F + O_1$, что невозможно. Следовательно,

$$t_n(G) \leqslant t_{n-1}(\mathrm{Free}(F + O_1)) + t_{n-2}(\mathrm{Free}(F)) \leqslant t_{n-1}(\mathrm{Free}(F + O_1)) + O(n^k).$$

Итерируя это неравенство по n, получаем $t_n(\mathrm{Free}(F + O_1)) = O(n^{k+1})$.

Далее доказательство легко завершить, применеяя индукцию по s. Таким образом, $t_n(\mathrm{Free}(F + O_s)) = O(n^{k+s})$. Теорема 1 доказана.

2. Графы с логарифмическими ограничениями из класса $\mathrm{Free}(F + P_2)$

В этом и следующем разделах для фиксированного триодного графа F рассмотрим наследственный класс графов, свободных от $F + P_2$. Если предполагать, что класс графов $\mathrm{Free}(F)$ НМ-простой, то в идеале из этого предположения хотелось бы вывести результат о НМ-простоте класса $\mathrm{Free}(F{+}P_2)$ подобно тому, как это доказано в теореме 1 для класса $\mathrm{Free}(F + O_s)$. Однако, к сожалению, очевидного обобщения доказательства теоремы 1 на класс графов $\mathrm{Free}(F + P_2)$ получить пока не удалось, ввиду чего высказанное предположение остаётся под вопросом и пока является в общем случае нерешённой проблемой. В попытке получить желаемый результат хотя бы для какого-нибудь нетривиально устроенного подмножества графов из класса $\mathrm{Free}(F{+}P_2)$ введём дополнительные ограничения на степени или антистепени вершин входного графа, причём эти ограничения будут логарифмическими функциями от размера графа.

Помимо общеизвестных понятий степени и антистепени вершины нам понадобится здесь ещё одно новое понятие — относительной степени вершины. *Относительной степенью* вершины a в графе G, которую обозначим через $\deg(a \,|\, N(a))$, назовём максимальное число смежных с a вершин этого графа таких, что все выбранные вершины несмежны с одной из них:

$$\deg(a \,|\, N(a)) = \max_{x \in N(a)} |N(a) \cap \overline{N}(x)|.$$

Будет доказано, что подмножество графов из класса $\mathrm{Free}(F{+}P_2)$, у которых каждая вершина имеет либо степень, либо относительную степень, либо антистепень, ограниченную с точностью до мультипликативной константы логарифмом от числа вершин графа, образует НМ-простой класс.

Выпишем формальное определение графа с логарифмическими ограничениями. *Графом с логарифмическими ограничениями* назовём граф, для каждой вершины a которого выполняется хотя бы одно из следующих трёх условий:

(a) $|N(a)| = \deg a \leqslant p \log_2 n$;
(b) $\deg(a \,|\, N(a)) \leqslant (p-1)\log_2 n$;
(c) $|\overline{N}(a)| = \overline{\deg}\, a \leqslant (k+p)\log_2 n$.
Здесь p и k — фиксированные натуральные константы.

Теорема 2. *Пусть F — произвольный граф с триодными компонентами такой, что задача о* ННМ *в классе* $\mathrm{Free}(F)$ *полиномиально разрешима и сложность её решения в этом классе равна* $t_n(\mathrm{Free}(F)) = O(n^k)$, *где k — некоторая натуральная константа. Пусть $G \in$* $\mathrm{Free}(F + P_2)$ *— n-вершинный граф с логарифмическими ограничениями для k и некоторого натурального p. Тогда задача о* ННМ *для графа G полиномиально разрешима:* ННМ *для графа G можно найти за время* $t_n(G) = O(n^{k+p+2})$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, без ограничения общности считаем, что граф G связен, поэтому снова для любой его неизолированной вершины a воспользуемся доказанным в теореме 1 неравенством

$$t_n(G) \leqslant t_{n-1}(G-a) + t_{n-1-\deg a}(G[\overline{N}(a)]).$$

Произвольным образом выберем вершину a графа G. В силу того, что для графа выполняются логарифмические ограничения, имеет место хотя бы один из трёх рассматриваемых ниже случаев.

Случай 1: $|\overline{N}(a)| = \overline{\deg}\, a \leqslant (k+p)\log_2 n$. Так как антистепень вершины a ограничена сверху логарифмом от числа вершин графа G, ННМ графа $G[\overline{N}(a)]$ можно найти простым перебором всех подмножеств его вершин. Среди таких подмножеств рассмотрим только независимые и выберем наибольшее из них. Сложность такого перебора и проверок независимости подмножеств не превосходит $2^{\overline{\deg}\, a}(\overline{\deg}\, a)^2$, откуда получаем

$$\begin{aligned} t_n(G) \leqslant t_{n-1}(G-a) + t_{\overline{\deg}\, a}(G[\overline{N}(a)]) \leqslant t_{n-1}(G-a) + {}\\ + 2^{(k+p)\log_2 n}((k+p)\log_2 n)^2 \leqslant t_{n-1}(G-a) + n^{k+p+1}. \end{aligned}$$

Случай 2: $|N(a)| = \deg a \leqslant p\log_2 n$. Так как степень вершины a ограничена сверху логарифмом от числа вершин графа G, ННМ графа $G - a$ можно найти, сочетая идею переборного метода с полиномиальным алгоритмом для некоторых порождённых подграфов графа $G[\overline{N}(a)]$, принадлежащих классу $\mathrm{Free}(F)$.

Действительно, переберём все непустые подмножества множества вершин $N(a)$ (их число не превосходит $2^{\deg a}$). Далее проверим, будет ли каждое из них независимым (число операций для проверки независимости каждого такого множества не превосходит $\deg^2(a)$). Затем каждое такое независимое множество M дополним наибольшим независимым множеством в графе $G[\overline{N}(M) \cap \overline{N}(a)]$. После этого среди всех полученных независимых множеств выберем наибольшее, оно и будет ННМ в графе $G - a$ при условии, что $\alpha(G - a) > \alpha(G[\overline{N}(a)])$. В противном случае $\alpha(G - a) = \alpha(G[\overline{N}(a)])$, и существует ННМ графа $G - a$, совпадающее с ННМ графа $G[\overline{N}(a)]$.

При этом важно то, что для каждого из указанных независимых множеств M граф $G[\overline{N}(M) \cap \overline{N}(a)]$ обязательно принадлежит классу $\mathrm{Free}(F)$. В самом деле, если предположить, что для какого-нибудь M в графе $G[\overline{N}(M) \cap \overline{N}(a)]$ есть порождённый подграф, изоморфный графу F, то вместе с вершиной a и любой одной вершиной из M в графе G существовал бы порождённый подграф $F + P_2$; противоречие. Отсюда

$$\begin{aligned} t_n(G) &\leqslant t_{n-1}(G - a) + t_{n-1-\deg a}(G[\overline{N}(a)]) \leqslant \\ &\leqslant 2^{\deg a} \deg^2(a) t_{\overline{\deg a}}(\mathrm{Free}(F)) + t_{n-1-\deg a}(G[\overline{N}(a)]) \leqslant \\ &\leqslant 2^{p \log_2 n}(p \log_2 n)^2 O(n^k) + t_{n-1-\deg a}(G[\overline{N}(a)]) \leqslant \\ &\leqslant t_{n-1-\deg a}(G[\overline{N}(a)]) + O(n^{k+p+1}). \end{aligned}$$

Случай 3: $\deg(a \,|\, N(a)) \leqslant (p-1)\log_2 n$. Так как относительная степень вершины a ограничена сверху логарифмом от числа вершин графа G, как и в случае 2, ННМ графа $G - a$ можно найти, сочетая идею переборного метода с полиномиальным алгоритмом для некоторых порождённых подграфов графа $G[\overline{N}(a)]$, принадлежащих классу $\mathrm{Free}(F)$. Только при этом незначительно изменится обоснование полиномиальной оценки сложности отыскания ННМ в графе $G - a$.

В самом деле, в случае 3 для отыскания ННМ графа $G - a$ можно перебрать вершины $x \in N(a)$, для каждой из которых найти все независимые множества $M \subseteq N(a) \cap \overline{N}(x)$ (по условию число таких множеств не превосходит $2^{\deg(a \,|\, N(a))}$). Каждое найденное независимое множество $M \cup \{x\}$ нужно дополнить наибольшим независимым множеством в графе $G[\overline{N}(M \cup \{x\}) \cap \overline{N}(a)]$. После этого остаётся среди всех полученных независимых множеств выбрать наибольшее, оно и будет ННМ в графе $G - a$ при условии, что $\alpha(G - a) > \alpha(G[\overline{N}(a)])$. В противном случае $\alpha(G - a) = \alpha(G[\overline{N}(a)])$, и существует ННМ графа $G - a$, совпадающее с ННМ графа $G[\overline{N}(a)]$.

Обоснование того, что для каждого из перебираемых независимых множеств $M \cup \{x\}$ граф $G[\overline{N}(M \cup \{x\}) \cap \overline{N}(a)]$ обязательно принадлежит классу $\mathrm{Free}(F)$, остаётся таким же, как аналогичное обоснование в случае 2. Следовательно, в случае 3 получаем

$$\begin{aligned} t_n(G) &\leqslant t_{n-1}(G - a) + t_{n-1-\deg a}(G[\overline{N}(a)]) \leqslant \\ &\leqslant n 2^{\deg(a \,|\, N(a))} \deg^2(a \,|\, N(a)) t_{\overline{\deg a}}(\mathrm{Free}(F)) + t_{n-1-\deg a}(G[\overline{N}(a)]) \leqslant \end{aligned}$$

$$\leqslant n2^{(p-1)\log_2 n}((p-1)\log_2 n)^2 O(n^k) + t_{n-1-\deg a}(G[\overline{N}(a)]) \leqslant$$
$$\leqslant t_{n-1-\deg a}(G[\overline{N}(a)]) + O(n^{k+p+1}).$$

Таким образом, в каждом из рассмотренных трёх случаев получен результат следующего вида: сложность решения задачи о ННМ в графе $G \in \mathrm{Free}(F + P_2)$ с логарифмическими ограничениями удовлетворяет неравенству
$$t_n(G) \leqslant t_{n-1}(G') + O(n^{k+p+1}).$$
Здесь G' — некоторый порождённый подграф графа G с числом вершин, не превосходящим $n-1$. Ясно, что для каждой вершины графа G' выполняется хотя бы одно из логарифмических ограничений (a), (b) или (c), где логарифм в каждом из ограничений для вершин из G' берётся от числа вершин n исходного графа G.

Итерирование полученного неравенства по n приводит к требуемой верхней оценке сложности $t_n(G) = O(n^{k+p+2})$. Теорема 2 доказана.

3. Графы с квазилогарифмическими ограничениями из класса $\mathrm{Free}(F + P_2)$

По-видимому, утверждение, доказанное в теореме 2, можно считать отправной точкой в предполагаемой серии результатов о нетривиальных НМ-простых подклассах класса графов $\mathrm{Free}(F + P_2)$. В этом разделе рассмотрим нетривиальное расширение множества всех графов с логарифмическими ограничениями из класса $\mathrm{Free}(F + P_2)$ и докажем НМ-простоту для такого расширения.

Графом с квазилогарифмическими ограничениями назовём граф, для каждой вершины a которого выполняется хотя бы одно из следующих трёх условий:

(a) $|N(a)| = \deg a \leqslant p\log_2 n$;

(b) $\deg(a \,|\, \underline{N(a)}) \leqslant (p-1)\log_2 n$;

(d) $|\overline{N}(a)| = \overline{\deg}\, a \leqslant (k+p+1)(\ln n)(p\log_2\log_2 n)^{1-\varepsilon}$.

Здесь p и k — фиксированные натуральные константы, а $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая константа.

Очевидно, что множество графов с квазилогарифмическими ограничениями является расширением множества всех графов с логарифмическими ограничениями и получается за счёт замены условия (c) более слабым ограничением (d) на антистепени вершин. Докажем НМ-простоту множества всех графов с квазилогарифмическими ограничениями из класса $\mathrm{Free}(F + P_2)$.

Введём одно вспомогательное понятие, связанное с числовыми последовательностями определённого вида. Бесконечную монотонно неубывающую неотрицательную числовую последовательность $\{l_n\}_{n\geqslant 0}$ назовём *сублинейной последовательностью*, если $l_n = o(n)$, т. е. если она растёт медленнее последовательности натуральных чисел. Сублинейную последовательность назовём *типичной*, если при любом натуральном n и при всех таких i, что $n - l_n \leqslant i \leqslant n$, выполняются соотношения $l_i = l_{n+1} - o(1)$. Смысл понятия типичной сублинейной последовательности заключается в том, что для всех номеров i из диапазона $n - l_n \leqslant i \leqslant n+1$ разница между любыми двумя элементами данной последовательности с номерами из этого диапазона ничтожно мала (стремится к нулю при n, стремящемся к бесконечности) и ей фактически можно пренебречь, хотя при этом сама последовательность может быть расходящейся.

Стоит отметить, что многие хорошо известные примеры сублинейных числовых последовательностей, которые построены на основе соответствующих классических сублинейных функций, являются примерами типичных сублинейных последовательностей. Так, к числу типичных относятся стандартная логарифмическая последовательность $l_n = p \log_2 n$ при любом $p > 0$ и стандартная степенная последовательность $l_n = n^\varepsilon$ при любом ε таком, что $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Действительно, для логарифмической последовательности $l_n = p \log_2 n$ при $n \to \infty$ справедливо

$$l_{n+1} - l_{n-l_n} = p \log_2(n+1) - p \log_2(n - p \log_2 n) = p \log_2 \frac{n+1}{n - p \log_2 n} \to 0.$$

Аналогично для степенной последовательности $l_n = n^\varepsilon$ выполняется

$$\begin{aligned} l_{n+1} - l_{n-l_n} &= (n+1)^\varepsilon - (n - n^\varepsilon)^\varepsilon = \\ &= n^\varepsilon \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^\varepsilon - n^\varepsilon \Big(1 - \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\Big)^\varepsilon = \frac{(1+n^{-1})^\varepsilon - (1 - n^{\varepsilon-1})^\varepsilon}{n^{-\varepsilon}} \sim \\ &\sim \frac{\varepsilon\,(1+n^{-1})^{\varepsilon-1} \cdot (-n^{-2}) - \varepsilon (1 - n^{\varepsilon-1})^{\varepsilon-1} \cdot (1-\varepsilon) n^{\varepsilon-2}}{(-\varepsilon) \cdot n^{-\varepsilon-1}} = \\ &= \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{\varepsilon-1} \cdot \frac{1}{n^{1-\varepsilon}} + (1-\varepsilon) \cdot \Big(1 - \frac{1}{n^{1-\varepsilon}}\Big)^{\varepsilon-1} \cdot \frac{1}{n^{1-2\varepsilon}} \to 0 \end{aligned}$$

при $n \to \infty$ и любом $\varepsilon \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$. Во втором примере при переходе к эквивалентной последовательности мы воспользовались правилом Лопиталя.

Из второго примера видно, что не все сублинейные числовые последовательности типичные: ясно, что простейшими из контрпримеров являются степенные последовательности $l_n = n^\varepsilon$ при любом $\varepsilon \in \big[\frac{1}{2}, 1\big)$. Также можно привести контрпримеры, имеющие довольно искусственный характер построения, что, однако, не умаляет факта их существования. Так, примером нетипичной сублинейной последовательности является последовательность вида

$$l_n = 2^k \quad \text{при } n = 10^k, 10^k + 1, \ldots, 10^{k+1} - 1,\ k \in \mathbb{N}_0.$$

В самом деле, нетрудно видеть, что при любых k и $n = 10^k - 1$ условие близости нарушается даже для некоторых соседних элементов, а именно при $n \to \infty$ имеем

$$l_{n+1} - l_n = l_{10^k} - l_{10^k - 1} = 2^k - 2^{k-1} = 2^{k-1} = \\ = 2^{\lg(n+1)-1} = \frac{1}{2}(n+1)^{\lg 2} \not\to 0.$$

Далее нас будут интересовать исключительно типичные сублинейные последовательности. Более того, конкретное применение при выводе основного результата этого раздела найдёт только последовательность вида $l_n = p \log_2 n$. Сначала докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть имеется бесконечная монотонно неубывающая неотрицательная числовая последовательность $\{f_n\}_{n \geqslant 0}$, каждый элемент которой удовлетворяет рекуррентному неравенству*

$$f_{n+1} \leqslant f_n + f_{n-l_n} \quad n \geqslant l_n,$$

где $\{l_n\}_{n \geqslant 0}$ — любая типичная монотонно неубывающая неотрицательная сублинейная числовая последовательность. Тогда при любом сколь угодно малом $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$ и любом $l_n \geqslant 2^{1/\varepsilon^2}$ имеет место верхняя оценка

$$f_n = O\big(\big(1 + l_n^{\varepsilon-1}\big)^n\big), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Доказательство. Индукция по n:

$$f_{n+1} \leqslant f_n + f_{n-l_n} = O\big(\big(1 + l_n^{\varepsilon-1}\big)^n + \big(1 + l_{n-l_n}^{\varepsilon-1}\big)^{n-l_n}\big).$$

По условию последовательность l_n является типичной сублинейной последовательностью, поэтому, во-первых, $l_n = o(n)$, а во-вторых, при любом натуральном n и при всех i таких, что $n - l_n \leqslant i \leqslant n$, справедливы равенства $l_i = l_{n+1} - o(1)$. Отсюда, опуская для удобства индекс $n+1$ в обозначении l_{n+1} (т. е. вместо l_{n+1} будем записывать только l), при каждом натуральном n получаем

$$\big(1 + l_n^{\varepsilon-1}\big)^n + \big(1 + l_{n-l_n}^{\varepsilon-1}\big)^{n-l_n} = O\big(\big(1 + l^{\varepsilon-1}\big)^n + \big(1 + l^{\varepsilon-1}\big)^{n-l}\big).$$

Далее нетрудно проверить, что справедлива цепочка соотношений

$$(1 + l^{\varepsilon-1})^n + (1 + l^{\varepsilon-1})^{n-l} = \\ = (1 + l^{\varepsilon-1})^{n+1} - (1 + l^{\varepsilon-1})^{n-l}(l^{\varepsilon-1}((1 + l^{\varepsilon-1})^{l^{1-\varepsilon}})^{l^\varepsilon} - 1) \leqslant \\ \leqslant (1 + l^{\varepsilon-1})^{n+1} - (1 + l^{\varepsilon-1})^{n-l}(l^{\varepsilon-1}\, 2^{l^\varepsilon} - 1) \leqslant (1 + l^{\varepsilon-1})^{n+1},$$

где использовано известное неравенство $(1 + 1/x)^x \geqslant 2$ при $x = l^{1-\varepsilon} \geqslant 1$ и неравенство $l^{\varepsilon-1}\, 2^{l^\varepsilon} \geqslant 1$, которое, как нетрудно проверить, выполняется при всех $l \geqslant 2^{1/\varepsilon^2}$, если $0 < \varepsilon \leqslant \frac{1}{4}$. Таким образом, из предположения, что $f_n = O\big((1+l_n^{\varepsilon-1})^n\big)$, получаем $f_{n+1} = O\big((1+l_{n+1}^{\varepsilon-1})^{n+1}\big)$. Лемма 1 доказана.

Следствие 1. *В условиях леммы* 1 *имеет место верхняя оценка* $f_n = O(e^{n\,l_n^{\varepsilon-1}})$.

Доказательство вытекает непосредственно из леммы 1 и известного неравенства $(1+1/x)^x \leqslant e$ при $x = l_n^{1-\varepsilon}$. Следствие 1 доказано.

Лемма 2. *Пусть p и k — натуральные константы, а F — граф с триодными компонентами, для которого задача о* ННМ *в классе* $\mathrm{Free}(F)$ НМ-*проста и* $t_n(\mathrm{Free}(F)) = O(n^k)$. *Тогда при любом сколь угодно малом* $\varepsilon \in \big(0, \frac{1}{4}\big]$ *для любого графа* $H \in \mathrm{Free}(F + P_2)$, *имеющего* $m+1$ *вершин, при всех* $m \geqslant 2^{(1/p)\cdot 2^{1/\varepsilon^2}}$ *верна следующая верхняя оценка сложности решения задачи о* ННМ*:*

$$t_{m+1}(H) = O(e^{m(p\log_2 m)^{\varepsilon-1}}).$$

Доказательство. Если хотя бы для одной вершины a графа H выполняется хотя бы одно из логарифмических ограничений (a), (b) или (c), то, поступая так же, как при доказательстве теоремы 2, полиномиально сведём задачу о ННМ графа H к аналогичной задаче для некоторого его порождённого подграфа $H' \in \mathrm{Free}(F + P_2)$ с меньшим числом вершин. Продолжим выполнять такие действия до тех пор, пока на некотором шаге сведéния не окажется, что все вершины графа, являющегося результатом сведéния, перестанут удовлетворять каждому из трёх логарифмических ограничений (a), (b) и (c). Другими словами, на некотором шаге сведéния может оказаться, что у некоторого порождённого подграфа H' графа H значения степеней, относительных степеней и антистепеней всех вершин ограничены снизу логарифмом от числа вершин $m+1$ исходного графа H (с точностью до мультипликативных констант). Если такого шага не будет, то теорема 2 гарантирует полиномиальную оценку сложности $t_{m+1}(H)$ решения задачи о ННМ в графе H.

Рассмотрим случай, когда такой шаг всё-таки есть. Не ограничивая общности, можно считать, что это уже самый первый шаг, иначе выполним полиномиальное сведéние к графу с меньшим числом вершин. Итак, пусть каждая вершина a графа H не удовлетворяет ни одному из логарифмических (относительно числа вершин $m+1$) ограничений (a), (b) и (c). В силу невыполнения ограничения (a) для каждой вершины a графа H имеет место неравенство $\deg a > p\log_2 m$, из которого следует, что антистепень вершины a ограничена сверху: $\overline{\deg}\, a \leqslant m - p\log_2 m$. Это означает, что сложность $t_{m+1}(H)$ решения задачи о ННМ в $(m+1)$-вершинном графе $H \in \mathrm{Free}(F + P_2)$ удовлетворяет неравенству

$$t_{m+1}(H) \leqslant t_m(H-a) + t_{\overline{\deg a}}(H[\overline{N}(a)]) \leqslant \\ \leqslant t_m(\mathrm{Free}(F+P_2)) + t_{m-p\log_2 m}(\mathrm{Free}(F+P_2)).$$

Положим $f_m = t_m(\mathrm{Free}(F+P_2))$ и применим лемму 1 при $n = m$ и при $l_m = p\log_2 m \geqslant 2^{1/\varepsilon^2}$. Заметим, что это заведомо можно сделать при любом сколь угодно малом $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$ и любом $m \geqslant 2^{(1/p)\cdot 2^{1/\varepsilon^2}}$ (нижняя оценка на m является фиксированной константой). По следствию 1 при $l_m = p\log_2 m$ получаем, что

$$t_{m+1}(H) = O(e^{m(p\log_2 m)^{\varepsilon-1}})$$

при любом сколь угодно малом $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$ и любом $m \geqslant 2^{(1/p)\cdot 2^{1/\varepsilon^2}}$. Лемма 2 доказана.

Следствие 2. *Пусть p и k — натуральные константы, а F — граф с триодными компонентами, для которого задача о* ННМ *в классе* $\mathrm{Free}(F)$ НМ-*проста и* $t_n(\mathrm{Free}(F)) = O(n^k)$. *Пусть G — любой n-вершинный граф из класса* $\mathrm{Free}(F+P_2)$, *а H — любой его $(m+1)$-вершинный порождённый подграф, для числа вершин которого выполняются неравенства*

$$2^{(1/p)\cdot 2^{1/\varepsilon^2}} \leqslant m \leqslant (k+p+1)(p\log_2\log_2 n)^{1-\varepsilon}\ln n,$$

где $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$ — сколь угодно малое число. Тогда сложность $t_{m+1}(H)$ решения задачи о ННМ *в графе H ограничена сверху полиномом от числа вершин n графа G, а именно $t_{m+1}(H) = O(n^{k+p+1})$.*

Доказательство. В справедливости следствия 2 нетрудно убедиться непосредственной подстановкой максимально возможного (в условиях этого следствия) значения $m = (k+p+1)(p\log_2\log_2 n)^{1-\varepsilon}\ln n$ в правую часть равенства

$$t_{m+1}(H) = O(e^{m(p\log_2 m)^{\varepsilon-1}}),$$

доказанного в лемме 2. Следствие 2 доказано.

Основным результатом этого раздела служит

Теорема 3. *Пусть F — произвольный граф с триодными компонентами такой, что задача о* ННМ *в классе* $\mathrm{Free}(F)$ *полиномиально разрешима, и сложность решения в этом классе равна* $t_n(\mathrm{Free}(F)) = O(n^k)$, *где k — некоторая натуральная константа. Пусть* $G \in \mathrm{Free}(F+P_2)$ — *n-вершинный граф с квазилогарифмическими ограничениями для k, некоторого натурального p и сколь угодно малого $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$. Тогда задача о* ННМ *для графа G полиномиально разрешима:* ННМ *для графа G можно найти за время $t_n(G) = O(n^{k+p+2})$.*

Доказательство. Воспользуемся той же идеей, что и при доказательстве теоремы 2. Отталкиваясь от справедливого для любого графа G неравенства

$$t_n(G) \leqslant t_{n-1}(G-a) + t_{\overline{\deg}\, a}(G[\overline{N}(a)]),$$

рассмотрим три случая, соответствующих квазилогарифмическим ограничениям на степень, относительную степень и антистепень произвольно выбранной в G неизолированной вершины a.

Обоснования полиномиальных оценок сложности в случаях 2 и 3 остаются такими же, как и в доказательстве теоремы 2, поскольку эти случаи соответствуют логарифмическим ограничениям (a) и (b).

Осталось рассмотреть модификацию случая 1, когда логарифмическое ограничение (c) на антистепень вершины a заменяется квазилогарифмическим ограничением (d). Однако в этом случае число вершин графа $G[\overline{N}(a)]$ удовлетворяет всем ограничениям, указанным в лемме 2 и следствии 2. Тем самым в силу следствия 2 задача о ННМ в графе $G[\overline{N}(a)]$ полиномиально разрешима:

$$t_{\overline{\deg}\, a}(G[\overline{N}(a)]) = O(n^{k+p+1}).$$

Отсюда в модифицированном случае 1 (т. е. для квазилогарифмического ограничения на антистепень вершины a) имеем неравенство

$$t_n(G) \leqslant t_{n-1}(G-a) + O(n^{k+p+1}),$$

аналогичное полученным в случаях 2 и 3 при доказательстве теоремы 2.

В завершение доказательства теоремы 3 объединяем все три случая и замечаем, что сложность решения задачи о ННМ для любого входного графа $G \in \mathrm{Free}(F + P_2)$ с квазилогарифмическими ограничениями удовлетворяет неравенству

$$t_n(G) \leqslant t_{n-1}(G') + O(n^{k+p+1}),$$

в котором G' — некоторый порождённый подграф графа G с числом вершин, не превосходящим $n-1$, для каждой вершины которого, очевидно, выполняется хотя бы одно из квазилогарифмических ограничений (a), (b) или (d), где логарифм в каждом из ограничений для вершин из G' берётся от числа вершин n исходного графа G.

Итерирование полученного неравенства по n приводит к требуемой верхней оценке сложности $t_n(G) = O(n^{k+p+2})$. Теорема 3 доказана.

Заключение

В статье введены понятия графов с логарифмическими ограничениями и графов с квазилогарифмическими ограничениями. Доказано, что для каждого графа F с триодными компонентами из НМ-простоты класса графов $\mathrm{Free}(F)$ следует НМ-простота множества графов с логарифмическими ограничениями из класса $\mathrm{Free}(F+P_2)$ и НМ-простота множества графов с квазилогарифмическими ограничениями из класса $\mathrm{Free}(F+P_2)$.

По всей видимости, результаты, представленные в данной статье, можно считать отправной точкой исследований, связанных с обнаружением нетривиальных НМ-простых множеств графов, являющихся подмножествами класса графов $\mathrm{Free}(F+P_2)$ в случае НМ-простого класса $\mathrm{Free}(F)$.

Перспективы дальнейших исследований такого типа можно связывать с надеждой на получение аналогичных результатов для подмножеств графов из класса $\mathrm{Free}(F + P_2)$ с более слабыми (по сравнению с логарифмической функцией) типами ограничений либо на степени, либо на относительные степени, либо на антистепени вершин. Конечно, с этой точки зрения вслед за логарифмической функцией наиболее пристальное внимание привлекают, в первую очередь, степенные функции вида n^ε. Подобно рассмотренной в этой статье логарифмической функции такие степенные функции также являются примерами типичных сублинейных функций при любом ε таком, что $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, а потому их вполне можно рассматривать в качестве верхних границ значений указанных трёх численных характеристик вершин графа, пусть даже при очень малых значениях положительной действительной константы $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

К сожалению, в настоящий момент непонятно, каким образом можно получить обобщения результатов, доказанных для множеств графов с логарифмическими и квазилогарифмическими ограничениями из класса $\mathrm{Free}(F + P_2)$, на множества графов со степенными ограничениями вида n^ε даже при сколь угодно малом значении положительной константы $\varepsilon < \frac{1}{2}$. В самом деле, из результатов, доказанных в статье, для случая степенных ограничений верно только утверждение леммы 1, но из него очевидным образом не выводится полиномиальная оценка сложности решения задачи о ННМ для графов из класса $\mathrm{Free}(F + P_2)$ со степенными ограничениями. Говоря точнее, оценка сложности для графов со степенными ограничениями, которая напрямую выводится для них из леммы 1, оказывается уже экспоненциальной в отличие от полиномиальной оценки, полученной в следствии 2 для графов с квазилогарифмическими ограничениями.

Тем не менее, можно надеяться на то, что более детальное изучение случаев других типичных сублинейных ограничений на численные характеристики вершин графов из класса $\mathrm{Free}(F + P_2)$, по всей видимости, может способствовать расширению горизонтов и перспектив для дальнейших исследований.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт бюджета Нижегородского гос. университета им. Н. И. Лобачевского. Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. **Алексеев В. Е., Коробицын Д. В.** О сложности некоторых задач на наследственных классах графов // Дискрет. математика. 1992. Т. 4, № 4. С. 34–40.
2. **Алексеев В. Е.** О влиянии локальных ограничений на сложность определения числа независимости графа // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Изд-во Горьк. ун-та, 1982. С. 3–13.
3. **Алексеев В. Е.** О числе тупиковых независимых множеств в графах из наследственных классов // Комбинаторно-алгебраические методы в дискретной оптимизации. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1991. С. 5–8.
4. **Minty G.** On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs // J. Comb. Theory, Ser. B. 1980. V. 28, No. 3. P. 284–304.
5. **Алексеев В. Е.** Полиномиальный алгоритм для нахождения наибольших независимых множеств в графах без вилок // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1999. Т. 6, № 4. С. 3–19.
6. **Lozin V. V., Mosca R.** Independent sets in extension of $2K_2$-free graphs // Discrete Appl. Math. 2005. V. 146. P. 74–80.
7. **Lokshantov D., Vatshelle M., Villanger Y.** Independent set in P_5-free graphs in polynomial time // Proc. 25th Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms (Portland, OR, USA, Jan. 5–7, 2014). Philadelphia, PA: SIAM, 2014. P. 570–581.
8. **Grzesik A., Klimošová T., Pilipczuk Mar., Pilipczuk Mic.** Polynomial-time algorithm for maximum weight independent set on P_6-free graphs. Ithaca, NY, 2017. (e-Print Archive / Cornell Univ.; arXiv:1707.05491).
9. **Karthick T., Maffray F.** Weighted independent sets in classes of P_6-free graphs // Discrete Appl. Math. 2016. V. 209. P. 217–226.
10. **Lozin V. V., Monnot J., Ries B.** On the maximum independent set problem in subclasses of subcubic graphs // J. Discrete Algorithms. 2015. V. 31. P. 104–112.
11. **Lozin V. V., Rautenbach D.** Some results on graphs without long induced paths // Inf. Process. Lett. 2003. V. 88. P. 167–171.
12. **Малышев Д. С., Сироткин Д. В.** Полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве в одном классе субкубических планарных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2017. Т. 24, № 3. С. 35–60.

13. **Abrishami T., Chudnovsky M., Dibek C., Rzążewski P.** Polynomial-time algorithm for maximum independent set unbounded-degree graphs with no long induced claws // Proc. 2022 Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms (Alexandria, VA, USA, Jan. 9–12, 2022). Philadelphia, PA: SIAM, 2022. P. 1448–1470. DOI: 10.1137/1.9781611977073.61.
14. **Alekseev V. E., Lozin V. V., Malyshev D. S., Milanič M.** The maximum independent set problem in planar graphs // Mathematical foundations of computer science 2008. Proc. 33rd Int. Symp. (Toruń, Poland, Aug. 25–29, 2008). Heidelberg: Springer, 2008. P. 96–107. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 5162).
15. **Малышев Д. С.** Классы субкубических планарных графов, для которых задача о независимом множестве полиномиально разрешима // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. V. 20, No. 3. P. 26–44.
16. **Алексеев В. Е., Сорочан С. В.** Новые случаи полиномиальной разрешимости задачи о независимом множестве для графов с запрещёнными путями // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2018. Т. 25, № 2. С. 5–18.
17. **Сорочан С. В.** Новые случаи полиномиальной разрешимости задачи о независимом множестве для графов с запрещёнными триодами // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2023. Т. 30, № 1. С. 85–109.
18. **Алексеев В. Е., Захарова Д. В.** Теория графов. Н. Новгород: Изд-во Нижегор. гос. ун-та, 2018. 118 с.
19. **Алексеев В. Е., Таланов В. А.** Графы. Модели вычислений. Алгоритмы. Н. Новгород: Изд-во Нижегор. гос. ун-та, 2005. 308 с.

Сорочан Сергей Владимирович

Статья поступила
17 июля 2025 г.

После доработки —
30 июля 2025 г.

Принята к публикации
22 сентября 2025 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
October–December 2025. Vol. 32, No. 4. P. 191–212

UDC 519.178 DOI: 10.33048/daio.2025.32.839

POLYNOMIAL SOLVABILITY OF THE INDEPENDENT SET PROBLEM FOR SOME HEREDITARY CLASSES OF GRAPHS WITH LOGARITHMIC AND QUASI-LOGARITHMIC CONSTRAINTS ON VERTEX DEGREES OR ANTI-DEGREES

S. V. Sorochan

Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin Avenue, 603950 Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: `sergey.sorochan@itmm.unn.ru`

Abstract. A triode is a tree with at most three leaves and at most one vertex of degree 3. The maximum independent set (MIS) problem is solvable in polynomial time for graphs that do not contain as a subgraph a graph whose each component is a triode with any fixed number of vertices. If a k-vertex induced subgraph with triode components is forbidden, then, for $k > 5$, the question about the solution complexity for this problem remains open. Let F be a graph whose each component is a triode, that is a triode graph. It is known that, if the MIS problem is polynomially solvable in the class of all graphs not containing F as an induced subgraph, then the problem is also polynomially solvable in the class of all graphs free of $F + O_s$. The graph $F + O_s$ is obtained from F by adding s isolated vertices. If we forbid $F + P_2$ as an induced subgraph and P_2 is a path with two vertices, then the polynomial solvability of the MIS problem in the class of all graphs free of $F + P_2$ is proved only for a very small number of triode graphs F while, for the vast majority of such graphs F, the complexity status of the MIS problem in the class of $(F + P_2)$-free graphs remains unknown.

In this article so-called logarithmic constraint graphs are considered. Each vertex in such a graph satisfies at least one of the following three conditions:

1) the degree of a vertex does not exceed (up to a multiplicative constant) the logarithm of the total number of vertices in the graph;

2) the relative degree of a vertex (that is the maximum number of vertices adjacent to it such that all these adjacent vertices are not adjacent to one of them) does not exceed (up to a multiplicative constant) the logarithm of the total number of vertices in the graph;

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **19** (4) (2025).

3) the antidegree of a vertex (that is the number of vertices that are not adjacent to it) does not exceed (up to a multiplicative constant) the logarithm of the total number of vertices in the graph.

It is proved that, for any triode graph F such that the MIS problem is polynomially solvable in the class of F-free graphs, it remains polynomially solvable for all $(F + P_2)$-free graphs with logarithmic constraints. We also consider one non-trivial extension of the latter graph set that consists of graphs with quasi-logarithmic constraints. A similar result is proved for all such $(F + P_2)$-free graphs. We propose polynomial algorithms to solve the MIS problem for graphs with logarithmic and quasi-logarithmic constraints which are free of $F + P_2$, and upper bounds for the algorithm complexity are found. Bibliogr. 19.

Keywords: independent set, monotonic class, hereditary class, IS-easy class, IS-hard class, forbidden subgraph, triode, logarithmic constraint graphs, quasi-logarithmic constraint graphs, polynomial algorithm.

References

1. **V. E. Alekseev** and **D. V. Korobitsyn,** On the complexity of some problems on hereditary classes of graphs, *Diskretn. Mat.* **4** (4), 34–40 (1992) [Russian].
2. **V. E. Alekseev,** On the influence of local constraints on the complexity of determining the independence number of a graph, in *Combinatorial and Algebraic Methods in Applied Mathematics* (Izd. Gork. Univ., Gorky, 1982), pp. 3–13 [Russian].
3. **V. E. Alekseev,** On the number of maximum independent sets in graphs of hereditary classes, in *Combinatorial and Algebraic Methods in Discrete Optimization* (Izd. NNGU, Nizh. Novgorod, 1991), pp. 5–8 [Russian].
4. **G. Minty,** On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs, *J. Comb. Theory, Ser. B*, **28** (3), 284–304 (1980).
5. **V. E. Alekseev,** A polynomial algorithm for finding largest independent sets in fork-free graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1*, **6** (4), 3–19 (1999) [Russian] [*Discrete Appl. Math.* **135** (1–3), 3–16 (2004)].
6. **V. V. Lozin** and **R. Mosca,** Independent sets in extension of $2K_2$-free graphs, *Discrete Appl. Math.* **146**, 74–80 (2005).
7. **D. Lokshantov, M. Vatshelle,** and **Y. Villanger,** Independent set in P_5-free graphs in polynomial time, in *Proc. 25th Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms* (Portland, OR, USA, Jan. 5–7, 2014) (SIAM, Philadelphia, PA, 2014), pp. 570–581.
8. **A. Grzesik, T. Klimošová, Mar. Pilipczuk,** and **Mic. Pilipczuk,** Polynomial-time algorithm for maximum weight independent set on P_6-free graphs (Ithaca, NY, 2017) (e-Print Archive / Cornell Univ., arXiv:1707.05491).
9. **T. Karthick** and **F. Maffray,** Weighted independent sets in classes of P_6-free graphs, *Discrete Appl. Math.* **209**, 217–226 (2016).

10. **V. V. Lozin, J. Monnot,** and **B. Ries,** On the maximum independent set problem in subclasses of subcubic graphs, *J. Discrete Algorithms* **31**, 104–112 (2015).
11. **V. V. Lozin** and **D. Rautenbach,** Some results on graphs without long induced paths, *Inf. Process. Lett.* **88**, 167–171 (2003).
12. **D. S. Malyshev** and **D. V. Sirotkin,** Polynomial-time solvability of the independent set problem in a certain class of subcubic planar graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **24** (3), 35–60 (2017) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **11** (3), 400–414 (2017), DOI:].
13. **T. Abrishami, M. Chudnovsky, C. Dibek,** and **P. Rzążewski,** Polynomial-time algorithm for maximum independent set unbounded-degree graphs with no long induced claws, in *Proc. 2022 Annu. ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms* (Alexandria, VA, USA, Jan. 9–12, 2022) (SIAM, Philadelphia, PA, 2022), pp. 1448–1470, DOI: `10.1137/1.9781611977073.61`.
14. **V. E. Alekseev, V. V. Lozin, D. S. Malyshev,** and **M. Milanič,** The maximum independent set problem in planar graphs, in *Mathematical Foundations of Computer Science 2008*, Proc. 33rd Int. Symp. (Toruń, Poland, Aug. 25–29, 2008) (Springer, Heidelberg, 2008), pp. 96–107 (Lect. Notes Comput. Sci., V. 5162).
15. **D. S. Malyshev,** Classes of subcubic planar graphs for which the independent set problem is polynomially solvable, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **20** (3), 26–44 (2013) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **7** (4), 537–548 (2013)].
16. **V. E. Alekseev** and **S. V. Sorochan,** New cases of the polynomial solvability of the independent set problem for graphs with forbidden paths, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **25** (2), 5–18 (2018) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **12** (2) 213–219 (2018)].
17. **S. V. Sorochan,** New cases of polynomial solvability of the independent set problem for graphs with forbidden triodes, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **30** (1), 85–109 (2023) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **17** (1) 185–198 (2023)].
18. **V. E. Alekseev** and **D. V. Zakharova,** *Graph Theory* (Izd. Nizhegor. Gos. Univ., Nizh. Novgorod, 2018) [Russian].
19. **V. E. Alekseev** and **V. A. Talanov,** *Graphs. Computing Models. Algorithms* (Izd. Nizhegor. Gos. Univ., Nizh. Novgorod, 2005) [Russian].

Sergey V. Sorochan

Received July 17, 2025
Revised July 30, 2025
Accepted September 22, 2025