

ISSN 2949-5598

# ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 32 № 4 2025

Новосибирск  
Издательство Института математики

## ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ДВУСВЯЗНЫХ ГРАФАХ С ФИКСИРОВАННЫМ ДИАМЕТРОМ

*Д. Л. Белоцерковский*

Российский гос. университет нефти и газа (НИУ) им. И. М. Губкина,  
Ленинский пр., 65, 119991 Москва, Россия

E-mail: [belozer68@mail.ru](mailto:belozer68@mail.ru)

**Аннотация.** Рассматриваются две задачи теории экстремальных графов. Первая задача сформулирована и полностью доказана в виде теоремы о точной нижней границе числа рёбер для двусвязных графов с диаметром, не превосходящим некоторого фиксированного значения. В процессе доказательства разработан метод перераспределения вкладов, который в дальнейшем применяется для решения второй задачи: перечисления графов, на которых найденная граница достигается. Так как задача перечисления графов весьма трудна и ранее в общем виде не решалась, на базе разработанного метода перечислены все так называемые предельные графы. Задача нахождения всех предельных графов сформулирована и доказана в виде второй теоремы статьи. Далее объясняется, почему именно предельные графы наиболее интересны с точки зрения задачи перечисления, а также приведены приёмы генерации остальных экстремальных графов с помощью уже полученных предельных графов. Ил. 11, библиогр. 21.

**Ключевые слова:** граф, диаметр, точная нижняя граница, распределение вкладов, метод перераспределения вкладов (МПВ).

### Введение

Общая постановка рассмотренной в статье задачи сформулирована в 1970–80-х гг. в рамках проблемы топологической оптимизации сетей ЭВМ [1–3]. Требовалось генерировать графы с заданными надёжностными свойствами с минимальным числом рёбер [3–5]. Из-за трудности решаемой задачи многие публикации по этой тематике касались фиксированных значений диаметра графа [6–11]. В этой работе разрабатывается методика для произвольного диаметра и усиливаются предыдущие результаты, полученные автором [12].

Рассматриваются конечные неориентированные простые графы [13, 14]. Обозначим через  $\mathfrak{I}(n, d)$  множество двусвязных графов с  $n$  вершинами и диаметром, не превосходящим  $d$ , а через  $f(n, d)$  — минимальное число рёбер в графах из класса  $\mathfrak{I}(n, d)$ . Графы из  $\mathfrak{I}(n, d)$  с минимальным числом рёбер, равным  $f(n, d)$ , назовём *экстремальными*.

Значение  $f(n, d)$  изучалось и ранее. В частности, Боллобаш [15, с. 188; 16, с. 194] показал, что  $f(n, d)/n \rightarrow d/(d-1)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Мурти в [5, 6] и Кассетта в [7–9] доказали, что при  $d \leq 4$

$$f(n, d) = \left\lceil \frac{dn - 2d - 1}{d - 1} \right\rceil. \quad (1)$$

В [16] Боллобаш отметил нехватку идей для решения возникающих проблем. Именно поэтому интерес к подобным задачам достаточно быстро угас. Можно отметить переиздание книги Боллобаша спустя 26 лет [17], а также последующую публикацию ещё одной книги [18] и её переиздание [19] с главой, посвящённой экстремальным задачам. В дальнейшем похожие задачи рассматривались уже для случайных графов [20].

Автором в [12] предложен метод перераспределения вкладов (далее МПВ), позволяющий определять точную нижнюю границу числа рёбер в графах с ограничением на диаметр. Развитие МПВ позволяет находить графы, на которых эта граница достигается. С помощью предложенного метода автор в [12] доказал равенство (1) при  $d \geq 5$  для всех достаточно больших  $n$ .

Насколько известно автору, последняя публикация, посвящённая этим задачам, датируется 2012 годом [21]. В ней (1) доказано при любых  $d \geq 2$  и  $n \geq 4$ , для чего предложен метод анализа циклов в рассматриваемых графах. При этом в [21] отсутствуют идеи для решения задачи перечисления экстремальных графов.

В настоящей статье не только показано, что равенство (1) имеет место для любых  $d \geq 2$  и  $n \geq 5$ , но и решается задача перечисления графов с  $f(n, d)$  рёбрами. В работе все переменные  $d, k, l, m, n, p, q, i, j$  принимают только целые неотрицательные значения и, в основном, используется терминология, данная в [12].

## 1. Формулировки теорем с необходимыми пояснениями

Далее докажем следующую теорему.

**Теорема 1.** При  $d \geq 2$  и  $n \geq 5$  выполнено  $f(n, d) = \left\lceil \frac{dn - 2d - 1}{d - 1} \right\rceil$ .

Что касается графов, на которых достигается значение  $f(n, d)$ , то попытка аналитически перечислить все такие графы из теоремы 1 выглядит крайне непростой задачей из-за огромного их числа и никогда ранее

не решалась. В этой статье предложен МПВ, который позволяет, в целом, значительно продвинуться в решении этой задачи.

Обоснуем корректность оценки  $f(n, d)$ . Теорема 1 тривиальна в случае  $n \leq 2d + 1$ . Очевидно, что при этом экстремальны только циклы с  $n$  вершинами,  $n$  рёбрами и  $d = \lfloor n/2 \rfloor$ . Проверим, что  $f(n, d) = n$ . Если  $n$  нечётно, то  $d = (n - 1)/2$  и

$$f(n, d) = \left\lceil \frac{(n-1)n - 2(n-1) - 2}{n-3} \right\rceil = \lceil n \rceil = n.$$

Если  $n$  чётно, то  $d = n/2$  и

$$f(n, d) = \left\lceil \frac{n^2 - 2n - 2}{n-2} \right\rceil = \left\lceil n - \frac{2}{n-2} \right\rceil = n.$$

Если  $n > 2d + 1$ , то экстремальные графы состоят из большего числа рёбер, чем цикл, поэтому  $f(n, d) > n$ . Сделаем оценку сверху числа  $f(n, d)$ .

**Утверждение 1.** Если  $n \geq 2d + 2$ , то  $f(n, d) \leq \left\lceil \frac{dn-2d-1}{d-1} \right\rceil$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что

$$\left\lceil \frac{dn - 2d - 1}{d - 1} \right\rceil = \frac{dn - 2d - 1 + d - 1 - j}{d - 1},$$

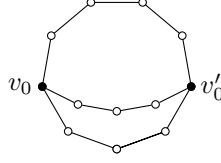
где

$$j = \begin{cases} d - 1, & \text{если } d - 1 \mid dn - 2d - 1, \\ (dn - 2d - 1) \bmod (d - 1) & \text{иначе.} \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим граф  $G$ , состоящий из  $k \geq 1$  различных цепей длины  $d$ , одной цепи длины  $d + 1$  и одной цепи длины  $j + 1$  (если  $j = d - 1$ , то цепей длины  $d$  становится  $k + 1$ ). Под длиной цепи понимаем число рёбер в ней. Концевые вершины (далее концы) у всех цепей одни и те же — это вершины  $v_0$  и  $v'_0$ , а внутренние вершины степени 2 попарно различны (степень  $\deg v$  вершины  $v$  равна числу инцидентных ей рёбер). Очевидно, что  $G \in \mathcal{J}(n, d)$ . Подсчитаем число вершин и рёбер в этом графе. Число вершин равно  $n = k(d - 1) + d + 2 + j$ , откуда  $k = (n - d - 2 - j)/(d - 1)$ , а число рёбер —

$$\begin{aligned} kd + d + 1 + j + 1 &= \frac{dn - d - j - 2}{d - 1} = \\ &= \frac{dn - 2d - 1 + (d - j - 1)}{d - 1} = \left\lceil \frac{dn - 2d - 1}{d - 1} \right\rceil. \end{aligned}$$

На рис. 1 представлен граф  $G \in \mathcal{J}(12, 4)$ , где  $k = 1$ ,  $j = d - 1$ . Утверждение 1 доказано.

Рис. 1. Предельный граф из  $\mathfrak{J}(12, 4)$ 

Из утверждения 1 также следует, что

$$f(n, d) \leq \left\lceil \frac{dn - 2d - 1}{d - 1} \right\rceil = \left\lceil 2n - 1 - \frac{(d - 2)n + d + 2}{d - 1} \right\rceil < 2n.$$

Тем самым доказано

**Утверждение 2.** Если  $n \geq 2d + 2$ , то  $n < f(n, d) < 2n$ .

Далее определим, какие графы будем перечислять с помощью утверждения 2.

Положим  $g(n, d) = (dn - 2d - 1)/(d - 1)$ , если число в правой части натурально, а при  $(dn - 2d - 1)/(d - 1) \notin \mathbb{N}$  оставим  $g(n, d)$  неопределённым. Другими словами,

$$g(n, d) = \begin{cases} f(n, d), & \text{если } j = d - 1 \text{ в (2),} \\ \text{не существует,} & \text{если } 1 \leq j \leq d - 2. \end{cases}$$

Рассмотрим некоторый экстремальный граф с  $n$  вершинами и  $m = g(n, d)$  рёбрами. Экстремальные графы с  $n + j$  вершинами,  $1 \leq j \leq d - 1$ , назовём *серией*.

По теореме 1 число рёбер в графе из серии равно

$$\begin{aligned} f(n + j, d) &= \left\lceil \frac{d(n + j) - 2d - 1}{d - 1} \right\rceil = \left\lceil \frac{dn - 2d - 1}{d - 1} + \frac{dj}{d - 1} \right\rceil = \\ &= g(n, d) + \left\lceil j + \frac{j}{d - 1} \right\rceil = g(n, d) + j + 1. \end{aligned}$$

Тем самым графы серии, имеющие на одну вершину больше, содержат и рёбер на одно больше. Графы серии при  $j = 1$  назовём *начальными*, при  $2 \leq j \leq d - 2$  — *промежуточными*, а при  $j = d - 1$  — *предельными*. Таким образом, только предельные графы содержат  $g(n + d - 1, d) = g(n, d) + d$  рёбер. Заметим, что также по теореме 1 начальный граф серии содержит на одну вершину и на два ребра больше, чем предельный граф предыдущий серии.

Поясним, чем интересна задача поиска предельных графов, введя для различных графов серии *коэффициент рёберности*

$$\beta_j = \frac{f(n + j, d)}{n + j}, \quad 1 \leq j \leq d - 1,$$

который показывает среднее число рёбер, инцидентных одной вершине графа.

**Лемма 1.** *Последовательность коэффициентов рёберности убывающая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим  $\beta_{j-1} - \beta_j$ , используя утверждение 2:

$$\begin{aligned} \beta_{j-1} - \beta_j &= \frac{f(n+j-1, d)}{n+j-1} - \frac{f(n+j, d)}{n+j} = \\ &= \frac{f(n+j-1, d)}{n+j-1} - \frac{f(n+j-1, d) + 1}{n+j} = \\ &= \frac{f(n+j-1, d) - (n+j-1)}{(n+j-1)(n+j)} > 0. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

**Следствие 1.** *Коэффициент рёберности минимален для предельных графов серии, т. е.  $\beta_{d-1} = \min_{1 \leq j \leq d-1} \beta_j$ .*

**Лемма 2.** *Коэффициент рёберности начального графа серии выше, чем у предельного графа предыдущей серии, т. е.  $\beta_1 > g(n, d)/n$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Снова воспользуемся утверждением 2:

$$\begin{aligned} \beta_1 - \frac{g(n, d)}{n} &= \frac{f(n+1, d)}{n+1} - \frac{g(n, d)}{n} = \\ &= \frac{g(n, d) + 2}{n+1} - \frac{g(n, d)}{n} = \frac{2n - g(n, d)}{n(n+1)} > 0. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Из лемм 1 и 2 следует, что коэффициент рёберности предельного графа ниже, чем у остальных графов серии и начального графа следующей серии. Говоря неформально, в этом смысле предельные графы можно считать «самыми» экстремальными, в которых в среднем одной вершине инцидентно наименьшее число рёбер. Далее установим принцип, по которому эти графы генерируются.

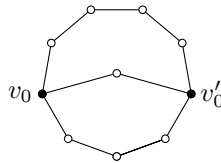


Рис. 2. Начальный граф из  $\mathcal{J}(10, 4)$

Рассмотрим, например, экстремальные графы из класса  $\mathcal{I}(n, 4)$  при  $10 \leq n \leq 12$ . Из теоремы 1 следует, что  $f(9, 4) = \lceil (4 \cdot 9 - 9) / 3 \rceil = g(9, 4) = 9$  и единственный предельный граф — это цикл из 9 вершин. При  $n = 10$  графы указанной серии имеют  $f(10, 4) = g(9, 4) + 2 = 11$  рёбер и являются начальными (один из них на рис. 2), а при  $n = 12$  имеют  $f(12, 4) = g(9, 4) + 4 = 13$  рёбер и являются предельными (рис. 1).

Выясним как связаны друг с другом графы серии. Назовём *генерацией* любой приём, позволяющий получить из графа серии другой граф той же серии, но с бóльшим или меньшим числом вершин. Назовём *l-нитью* цепь длины  $l$  в графе  $G$ , все внутренние вершины которой имеют степень 2. Ребро будем считать  $l$ -нитью для  $l = 1$ . Назовём *удлинением* такое увеличение длины  $l$ -нити, которое сохраняет полученный с помощью этой операции граф в классе  $\mathcal{I}(n, d)$ , т. е. не увеличивает диаметра. Удлинение увеличивает число вершин и рёбер в графе на одинаковое значение, а также сохраняет двусвязность. Например, предельный граф из  $\mathcal{I}(12, 4)$  на рис. 1 получен из начального графа  $\mathcal{I}(10, 4)$  на рис. 2 удлинением его 2-нити на 2.

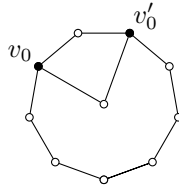


Рис. 3. Другой начальный граф из  $\mathcal{I}(10, 4)$

Не всякий начальный граф может быть «удлинён». Так, например, граф из  $\mathcal{I}(10, 4)$  на рис. 3 начальный, но удлинение любой его нити приводит к увеличению диаметра.

Обратную операцию уменьшения длины  $l$ -нити назовём *укорочением*, если длина получающейся в результате нити не менее 1. Например, 2-нить графа на рис. 2 может быть получена из 4-нити графа на рис. 1 укорочением последней на 2. Очевидно, что после укорочения граф остаётся в классе  $\mathcal{I}(n, d)$ , поэтому укорочение и удлинение генерируют некоторые графы серии.

**Лемма 3.** *Любой экстремальный граф серии из класса  $\mathcal{I}(n + j, d)$ ,  $2 \leq j \leq d - 1$ , может быть получен удлинением из некоторого начального графа класса  $\mathcal{I}(n + 1, d)$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим произвольный граф  $G_1 \in \mathcal{I}(n + j, d)$ . Уменьшим длину некоторой  $l$ -нити в  $G_1$  на единицу и проведём эту операцию  $j - 1$  раз для, возможно, разных нитей. Тем самым с помощью

укорочения получим начальный граф  $G_2 \in \mathcal{J}(n+1, d)$ , содержащий рёбер и вершин на  $j - 1$  меньше, поэтому можно сказать, что  $G_1$  сгенерирован из  $G_2$  с помощью удлинения. Лемма 3 доказана.

В качестве примера рассмотрим экстремальные графы из  $\mathcal{J}(n, d)$  для  $n \geq 2d + 1$ . Если  $n = 2d + 1$ , то единственный экстремальный граф — это цикл длины  $2d + 1$ , содержащий столько же вершин. Так как  $g(2d + 1, d) = 2d + 1$ , это предельный граф. Рассмотрим некоторые графы серии при  $2d + 2 \leq n \leq 3d$ . Для  $n = 2d + 2$  имеем число рёбер  $m = f(2d + 2, d) = 2d + 3$  и некоторое множество экстремальных начальных графов, два из которых изображены на рис. 2 и 3 при  $n = 10, d = 4$ .

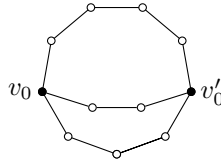


Рис. 4. Промежуточный граф из  $\mathcal{J}(11, 4)$

Удлиним 2-нить с концами  $v_0$  и  $v'_0$  графа на рис. 2. Если удлиним на 1, то получим промежуточный граф из  $\mathcal{J}(11, 4)$  (рис. 4); если на 2, то — предельный граф из  $\mathcal{J}(12, 4)$  (см. рис. 1).

Экстремальные графы серии можно разделить на три непустых множества: начальные (см. рис. 2 и 3), промежуточные, полученные из начальных удлинением не более  $d - 3$  раз (см. рис. 4), и предельные, полученные из начальных удлинением  $d - 2$  раз и которые более нельзя «удлинить» (см. рис. 1). Перечисление всех предельных графов является одной из целей этой статьи в дальнейшем.

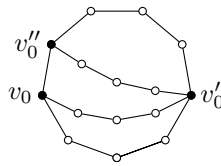


Рис. 5. Предельный граф из  $\mathcal{J}(15, 4)$

Предельные графы из  $\mathcal{J}(12, 4)$  с  $g(12, 4) = (4 \cdot 12 - 2 \cdot 4 - 1) / (4 - 1) = 13$  и из  $\mathcal{J}(15, 4)$  с  $g(15, 4) = (4 \cdot 15 - 2 \cdot 4 - 1) / (4 - 1) = 17$  рёбрами представлены на рис. 1 и 5.

Введём ещё одну операцию, позволяющую генерировать экстремальные графы. На рис. 6 представлена  $l$ -нить  $v_0 v_1 v_2 v'_0$  некоторого графа для  $l = 3$ , при этом концы нити  $v_0$  и  $v'_0$  могут иметь как степень 2, так

и бóльшую степень. Добавим к графу новую  $l$ -нить  $v_0v_3v_4v'_0$  той же длины (обозначена штриховой линией), концы которой будут совпадать с  $v_0$  и  $v'_0$ . Такую операцию будем называть *дублированием  $l$ -нити*. Нетрудно видеть, что дублирование не увеличивает диаметра и сохраняет двусвязность графа.

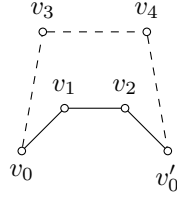


Рис. 6. Операция генерации экстремальных графов

Следующая теорема служит перечислением предельных графов при  $d \geq 3$ ,  $n \geq 7$ . При  $d \leq 4$  эта задача решена в [5–9], поэтому далее рассматриваем  $d \geq 5$ .

**Теорема 2.** Множество предельных графов из  $\mathfrak{I}(n, d)$  для  $d \geq 3$  и  $n \geq 7$  состоит из цикла длины  $2d + 1$  и графов, полученных из него дублированием либо одной и той же  $d$ -нити (см. рис. 1), либо двух разных  $d$ -нитей, имеющих общий конец  $v'_0$  (см. рис. 5).

На рис. 5 и 6 дублированы 3- и 4-нити с концами  $v_0, v'_0$  и  $v'_0, v''_0$ . Заметим также, что из предельного графа с помощью дублирования можно получать начальные графы. Например, начальный граф с 10 вершинами на рис. 3 получен дублированием 2-нити из предельного — простого цикла длины 9.

Доказательствам теорем 1 и 2 отведена оставшаяся часть статьи. Идея доказательства теоремы 1 состоит в поиске графа  $G' \in \mathfrak{I}(n, d)$  с числом рёбер  $m = (dn - 2d - 2)/(d - 1) \in \mathbb{N}$ . Заметим, что  $m < f(n, d)$ , поскольку

$$\frac{dn - 2d - 2}{d - 1} = \frac{dn - 2d - 1}{d - 1} - \frac{1}{d - 1} < \left\lceil \frac{dn - 2d - 1}{d - 1} \right\rceil = f(n, d),$$

поэтому если такой граф  $G'$  будет найден, то для всех рассматриваемых  $n$  получим  $f(n, d) = \lceil (dn - 2d - 2)/(d - 1) \rceil$ .

Будем считать граф  $G'$  предельным, а графы из  $\mathfrak{I}(n + 1, d)$  начальными, полученными из  $G'$ , например, дублированием 2-нити. Число рёбер такого начального графа равно

$$\frac{dn - 2d - 2}{d - 1} + 2 = \frac{d(n + 1) - 2d - 2}{d - 1} + \frac{d - 2}{d - 1} = \left\lceil \frac{d(n + 1) - 2d - 2}{d - 1} \right\rceil.$$

По лемме 3 остальные графы получаются с помощью удлинения, при этом в графе с  $n + i$  вершинами  $f(n + i, d) = \lceil (d(n + i) - 2d - 2)/(d - 1) \rceil$

рёбер,  $1 \leq i \leq d - 1$ . Перебрав все возможные варианты, покажем, что графа  $G'$  не существует, откуда  $f(n, d) \geq \lceil (dn - 2d - 1)/(d - 1) \rceil$ . Последнее неравенство вместе с утверждением 1 приводят к равенству  $f(n, d) = \lceil (dn - 2d - 1)/(d - 1) \rceil$ , тем самым доказывая теорему 1.

Для доказательства теоремы 2 будем искать предельные графы  $G'' \in \mathcal{I}(n, d)$  с числом рёбер  $m = g(n, d) = (dn - 2d - 1)/(d - 1)$  и найдём только те графы, которые указаны в формулировке теоремы.

Некоторые тонкости доказательств содержатся в разд. 7 с необходимыми ссылками в тексте.

## 2. Случай длинных $l$ -нитей и общая схема МПВ

Покажем, что в предельном графе  $G'$  нет длинных нитей.

**Лемма 4.** *Длина любой  $l$ -нити в предельном графе  $G' \in \mathcal{I}(n, d)$ , имеющем  $m \leq (dn - 2d - 2)/(d - 1)$  рёбер, не превосходит  $d - 1$ , т. е.  $l \leq d - 1$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Предположим, напротив, что в  $G'$  имеется  $l$ -нить,  $l \geq d$ , и рассмотрим некоторую  $d$ -нить — подграф этой  $l$ -нити (обе нити могут совпадать при  $l = d$ ). Если дублировать выбранную  $d$ -нить, то в результате получим граф из  $\mathcal{I}(n + d - 1, d)$ .

Воспользуемся теоремой 2 из [12], где доказано, что при  $d \geq 5$  графа  $G'$  не существует для любого числа вершин, начиная с некоторого  $n$ , зависящего от  $d$  и его чётности. Выберем  $k$  такое, чтобы  $n + k(d - 1)$  было не меньше, чем указанные значения в [12], и  $k$  раз дублируем отмеченную  $d$ -нить в  $G'$ . Получаем граф из  $\mathcal{I}(n + k(d - 1), d)$  с числом рёбер, равным

$$m + kd \leq \left\lceil \frac{dn - 2d - 2}{d - 1} + kd \right\rceil = \left\lceil \frac{d(n + k(d - 1)) - 2d - 2}{d - 1} \right\rceil.$$

Однако, как доказано в [12], такого графа не существует, следовательно,  $l \leq d - 1$  при  $d \geq 5$ . В [5–9] получен аналогичный результат при  $d \leq 4$ . Лемма 4 доказана.

Дальнейшие рассуждения будем применять к графу  $G$ , подразумевая под ним любой из графов  $G'$  и  $G''$ , если их различие не оговорено особо. Стало быть, пусть  $G$  — искомый граф с  $m \leq (dn - 2d - 1)/(d - 1)$  рёбрами.

Начнём с того, что припишем каждому ребру графа  $G$  вклад, равный 2. Ребро  $uv$  отдаёт вклады двум инцидентным вершинам  $u$  и  $v$ : значение  $\alpha_{uv}^u \geq 0$  — вершине  $u$  и значение  $\alpha_{uv}^v \geq 0$  — вершине  $v$ , при этом  $\alpha_{uv}^u + \alpha_{uv}^v = 2$ . Такой перенос вкладов с рёбер на вершины будем называть методом перераспределения вкладов (МПВ). Далее для простоты будем писать  $\alpha_{uv}^u = \alpha_u$ ,  $\alpha_{uv}^v = \alpha_v$ , если ребро  $uv$  очевидно из контекста.

Обозначив через  $N(v)$  множество соседей вершины  $v \in V(G)$ , назовём её *условной степенью* величину

$$\deg' v = \sum_{u \in N(v)} \alpha_{uv}^v.$$

Если здесь  $\alpha_{uv}^v = 1$  для каждого ребра  $uv$ , то  $\deg' v = \deg v$ . В любом случае имеет место равенство  $\sum_{v \in V(G)} \deg' v = \sum_{v \in V(G)} \deg v = 2m$ .

### 3. Подграфы $G_1$ и $G_2$ и классификация вершин

Пусть  $G_1$  и  $G_2$  — подграфы графа  $G$ , а  $V_0 \subseteq V(G)$  — разделяющее множество вершин такое, что

$$G_1 \cup G_2 = G, \quad V(G_1) \cap V(G_2) = V_0, \quad E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset.$$

Предположим, что граф  $G_i$  имеет  $n_i$  вершин и  $m_i$  рёбер,  $i = 1, 2$ , а  $n_0 = |V_0|$ . Для оценки  $m_1$  снизу будем распределять вклады в графе  $G_1$ , а  $m_2 \geq n_2 - 1$  в силу того, что  $G_2$  связан. Если в  $V_0$  имеются смежные вершины, то рёбра между ними будем считать принадлежащими  $G_2$ .

Обозначим через  $V_p$  множество вершин графа  $G_1$ , находящихся на расстоянии  $p \in \mathbb{N}$  от  $V_0$ , максимальное из которых обозначим через  $q = p_{\max}$ .

Очевидно, что  $V(G_1) = \bigcup_{p=0}^q V_p$ . Следует заметить, что некоторые  $V_p$  могут быть пустыми. Если потребуется, графы  $G_1, G_2$ , множество  $V_0$  и максимальное расстояние  $p_{\max}$  будем выбирать по усмотрению.

Граф  $G_1$  «разберём» на различные цепи  $v_0 \dots v_p v_{p+1} \dots v_{\bar{p}}$ , где  $\bar{p} \leq q$ , в которых будет осуществляться перераспределение вкладов. Часто цепи будут рассматриваться по возрастанию индекса  $p$ . Будем говорить, что цепь *начинается* в  $v_0$  и *заканчивается* в  $v_{\bar{p}}$ , имеет *первое* ребро  $v_0 v_1$  и *последнее* ребро  $v_{\bar{p}-1} v_{\bar{p}}$ . Вершины  $v_0$  и  $v_{\bar{p}}$  назовём *началом* и *концом* цепи соответственно, а остальные вершины цепи *внутренние*. Вклад последнего ребра  $v_{\bar{p}-1} v_{\bar{p}}$  в вершину  $v_{\bar{p}}$  назовём *последним вкладом* цепи. Для вершины  $v_p$  вклады от рёбер, инцидентных соседям из  $V_{p-1}$ , назовём *предыдущими*, а от рёбер, инцидентных соседям из  $V_{p+1}$ , *последующими*.

Далее классифицируем вершины графа  $G_1$ , которые поделим на два типа: сильные и несильные. Вершину  $v_p \in V_p$ ,  $p \geq 1$ , имеющую хотя бы двух соседей из  $V_{p-1}$ , будем называть *сильной*, а если  $|N(v_p) \cap V_{p-1}| = 1$ , то вершина  $v_p$  *несильная*. Также будем считать сильными все вершины из  $V_0$ . Если  $\deg v_p \geq 3$ , то вершину  $v_p$  назовём *узлом*, иначе  $\deg v_p = 2$  и вершину  $v_p$  будем называть *неузлом*. Таким образом узлы и неузлы могут быть сильными и несильными.

Если у несильного узла из  $V_p$  нет соседей в  $V_p$ , то такую вершину назовём *1-узлом*. Тем самым у 1-узла ровно один сосед в  $V_{p-1}$  и не менее двух

в  $V_{p+1}$ . Если два несильных узла из  $V_p$  смежны, то эти вершины назовём *2-узлами*. Остальные узлы будут сильными, их назовём *3-узлами*.

Классифицируем концы цепи. Если  $\bar{p} \leq q$ , то при  $\deg v_{\bar{p}} = 2$  конец  $v_{\bar{p}}$  назовём *особым*, а при  $\deg v_{\bar{p}} \geq 3$  — *ординарным*. Из сказанного следует, что особый конец может иметь двух соседей в  $V_{\bar{p}-1}$  и, следовательно, быть сильным. Если особый конец имеет одного соседа в  $V_{\bar{p}-1}$ , то назовём его *слабым*. Заметим, что ординарный конец является либо 2-, либо 3-узлом.

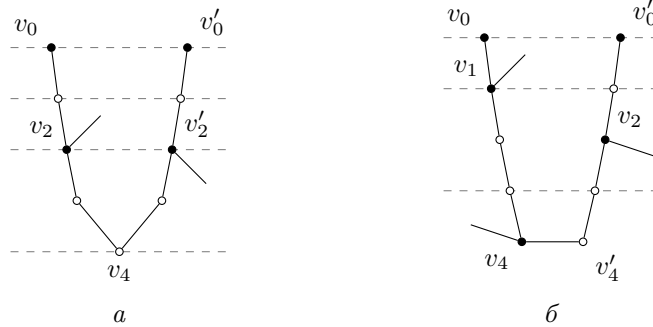


Рис. 7. Примеры различных узлов подграфа  $G_1$

На рис. 7 представлены возможные различные варианты вершин и цепей для  $q = 4$ . Белые вершины — неузлы, штриховой линией показаны «уровни» — подмножества  $V_p, 0 \leq p \leq 4$ . На рис. 7а изображены вершины: сильные  $v_0, v'_0$ , сильная особая  $v_4$ , 1-узел  $v'_2$ , 3-узел  $v_2$ . Цепь  $v'_0 \dots v_4$  состоит из двух подцепей — нитей  $v'_0 \dots v'_2$  и  $v'_2 \dots v_4$ . На рис. 7б представлены 3-узел  $v_1$ , 2-узел  $v_2$ , ординарная вершина  $v_4$  и особая слабая  $v'_4$ . В рассуждениях могут рассматриваться различные цепи: например,  $v_0 \dots v_4 \dots v'_0$  на рис. 7а или  $v_0 \dots v_4 v'_4 \dots v'_0$  на рис. 7б.

#### 4. Структура доказательства теоремы 1, цепи, рёбра, вклады в $G_1$ и $G_2$

Если после распределения вкладов для вершины  $v$  графа  $G_1 \setminus V_0$  получим  $\deg' v \geq 2d/(d-1)$ , то вершину  $v$  назовём *удачной*, а само неравенство — *условием удачности*. Пусть

$$C_1 = \sum_{v \in G_1 \setminus V_0} \deg' v - \frac{2d(n_1 - |V_0|)}{d-1}.$$

Если в графе  $G_1 \setminus V_0$  все вершины удачны, то  $C_1 \geq 0$ . Вершина  $v$  *неудачна*, если  $\deg' v < 2d/(d-1)$ .

При анализе цепи  $v_0 v_1 \dots v_{\bar{p}}$  в  $G_1$  важную роль играют внутренние узлы цепи, для которых имеет место

**Лемма 5.** Если все внутренние вершины цепи  $v_0v_1 \dots v_{\overline{p}}$  являются 1-узлами и все вершины этой цепи, кроме  $v_0$ , удачные, то условие удачности выполнено так же для всех вершин, кроме  $v_0$ , если внутренние вершины представляют собой произвольные узлы.

Применяя лемму 5 и предполагая, что все узловые внутренние вершины цепи  $v_0v_1 \dots v_{\overline{p}}$  суть 1-узлы, будем выстраивать и корректировать схему МПВ так, чтобы все вершины рассматриваемой цепи, кроме  $v_0$ , были удачными (здесь под  $v_0$  понимается произвольная вершина из  $V_0$ ).

Рассмотрим нити наибольшей длины  $l_{\max} = L$  в графе  $G$ . Из всех подобных нитей подграфа  $G_2$  выберем нить  $T$  с концами  $v_0$  и  $v'_0$  такую, что вершина  $v_0$  имеет минимальную степень среди всех концевых вершин множества длиннейших нитей. Следовательно,  $\deg v_0 \leq \deg v'_0$ . Тогда  $V_0 = \{v_0, v'_0\}$ ,  $m_2 \geq n_2 - 1$ . В подграфе  $G_2$ , кроме  $n_2 - 1$  рёбер нити  $T$ , может иметься ребро  $v_0v'_0$ , поэтому  $m_2 = n_2 - 1 + C_2$ , где  $C_2 \in \{0, 1\}$ , и

$$\sum_{v \in G_2} \deg' v = 2n_2 - 2 + 2C_2.$$

Далее предполагается, что в сумме  $2n_2 - 2$  есть некоторый вклад, который обозначим через  $C$  и перераспределим в рамках МПВ, добавив к вкладам каждого ребра из  $E(G_1)$ , инцидентного  $v_0$  и вершинам из  $V_1$ , чтобы дополнить условные степени некоторых неудачных вершин.

Значения  $C, C_1, C_2$  будем называть *избытком*. Если вершина  $v$  неудачна, то величину  $2d/(d-1) - \deg' v$  назовём *недостатком*. Если для доказательства удачности не используется избыток  $C$ , то такой случай назовём *стандартным*, если используется — *трудным*. Все эти случаи рассмотрены при доказательстве леммы 6.

**Лемма 6.** Если в графе  $G$  длиннейшая нить имеет длину  $L \leq d - 1$ , то все вершины графа  $G_1 \setminus V_0$  удачны.

Доказательства лемм 5 и 6 представлены в разд. 7. Оценим значение  $C$ .

**Утверждение 3.** Для графа  $G$  имеет место оценка  $C \geq \frac{4}{d-1}$ .

**Доказательство.** Из леммы 6 следует, что в графе  $G$  вершины подграфа  $G_1$  удачны. Тогда, используя соотношения  $n = n_1 + n_2 - 2$ ,  $n_2 = L + 1 \leq d$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{2dn - 4d - 2}{d - 1} &\geq 2m = \sum_{v \in G_2} \deg' v + \sum_{v \in G_1} \deg' v \geq \\ &\geq 2n_2 - 2 - C + 2C_2 + \frac{2d(n_1 - 2)}{d - 1}, \end{aligned}$$

откуда

$$C \geq 2C_2 + \frac{4}{d-1} \geq \frac{4}{d-1}.$$

Утверждение 3 доказано.

### 5. Окончание доказательства теоремы 1

**Утверждение 4.** Графа  $G'$  не существует.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть граф  $G'$  существует, а  $G_2 = T$  — его нить наибольшей длины с концами  $v_0$  и  $v'_0$ . Тогда  $|V_0| = 2$  и в силу леммы 6 получаем

$$2m = \sum_{v \in G_1} \deg' v + \sum_{v \in G_2} \deg' v = \frac{2dn - 4d - 4}{d-1},$$

следовательно,

$$\sum_{v \in G_2} \deg' v = 2n_2 - 2 - C + 2C_2, \quad \sum_{v \in G_1} \deg' v = \frac{2d(n_1 - 2)}{d-1} + C_1.$$

Далее, используя оценку из утверждения 3 и соотношения  $n = n_1 + n_2 - 2$ ,  $n_2 = L + 1 \leq d$  (последнее неравенство следует из леммы 4), запишем равенство

$$2n_2 - 2 - C + 2C_2 + \frac{2d(n_1 - 2)}{d-1} + C_1 = \frac{2d(n_1 + n_2 - 2) - 4d - 4}{d-1}.$$

В результате получим  $2C_2 + C_1 \leq -2/(d-1)$ , что противоречит очевидному условию  $2C_2 + C_1 \geq 0$ . Утверждение 4 доказано.

Этим завершается доказательство теоремы 1.

### 6. Окончание доказательства теоремы 2

Найдём граф  $G'' \in \mathfrak{J}(n, d)$  с  $g(n, d) = (dn - 2d - 1)/(d-1)$  рёбрами для  $d \geq 3$ . Для  $G''$  выполнены условия лемм 5 и 6, а дальнейшее рассмотрение будет зависеть от значения  $L$ .

СЛУЧАЙ 1. Если  $L \leq d - 2$ , то из леммы 6 и условия  $C \geq 4/(d-1)$  следует равенство

$$2m = 2L - C + \frac{2d(n - L - 1)}{d-1} = \frac{2dn - 4d - 2}{d-1},$$

поэтому  $L = d - 1$  и таких графов нет.

В дальнейшем назовём вершину  $v \in V(G_1)$  *строго удачной* (СУ), если  $\deg' v = 2d/(d-1)$ , и *удачной с избытком* или *очень удачной*, если  $\deg' v > 2d/(d-1)$ . Удачная цепь содержит только удачные вершины, строго удачная — только строго удачные, а цепь с избытком — удачные и очень удачные.

СЛУЧАЙ 2. Если  $L = d - 1$ , то по лемме 6 все вершины графа  $G_1 \setminus V_0$  удачны. В стандартном случае имеем

$$2m = 2(d - 1) - 0 + \frac{2d(n - d)}{d - 1} = \frac{2dn - 4d - 2}{d - 1},$$

что приводит к противоречию  $2 = -2$ . В трудном случае используем утверждение 3:

$$2m = 2(d - 1) - \frac{4}{d - 1} + \frac{2d(n - d)}{d - 1} = \frac{2dn - 4d - 2}{d - 1},$$

откуда  $0 = 0$ , так что все вершины графа  $G_1 \setminus V_0$  СУ и нет цепей с избытком.

В доказательстве леммы 6 показано (см. разд. 7), что избыток  $C = 4/(d - 1)$  используется, только если  $\deg v_0 = 3$ , поэтому для поиска графа  $G''$  рассмотрим в качестве подграфа  $G_2$  нить  $T$  с концом  $v_0$ , положив  $V_0 = \{\bar{v}_0, \tilde{v}_0, v'_0\}$  (рис. 8).

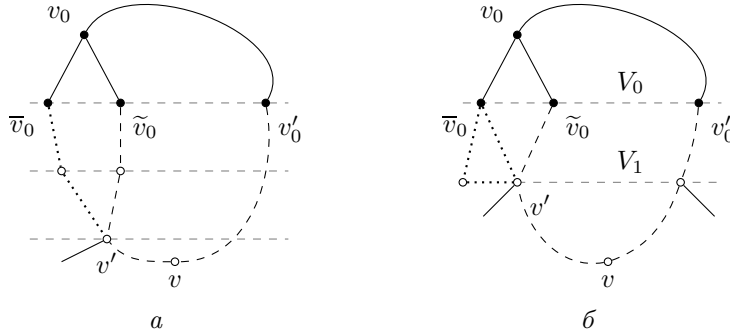


Рис. 8. Варианты цепи  $\tilde{v}_0 \dots v \dots v'_0$  длины  $d + 1$

Пусть для любой вершины  $v$  графа  $G_1$  длина цепи  $\bar{v}_0 \dots v \dots v'_0$  или  $\tilde{v}_0 \dots v \dots v'_0$  с рёбрами из  $G_1$  не превосходит  $2d + 1 - d = d + 1$ . Сформулируем общую схему МПВ для всех вершин графа  $G_1$ , которую с небольшими изменениями будем применять и далее (такая же схема применялась в [12]).

**ПРАВИЛО 1 (П1).** Каждое ребро  $v_0v$  или  $v'_0v$ , где  $v \in V_1$ , даёт вклад 2 вершине  $v$  и не даёт никакого вклада вершинам  $v_0$  и  $v'_0$ .

Пусть вершина  $u \in V_p$ ,  $1 \leq p \leq q - 1$ , получает суммарный вклад  $\alpha$  от соседей из  $V_{p-1}$  и смежна  $k \geq 1$  соседям из  $V_{p+1}$ . Тогда выполнено

**ПРАВИЛО 2 (П2).** Каждое ребро  $uv$  для  $u \in V_p$  и  $v \in V_{p+1}$  даёт вершине  $u$  вклад  $\alpha_u = \frac{1}{k}(2d/(d - 1) - \alpha)$ , если  $\alpha < 2d/(d - 1)$ , и  $\alpha_u = 0$ , если  $\alpha \geq 2d/(d - 1)$ , а вершине  $v$  — вклад  $\alpha_v = 2 - \alpha_u$ .

ПРАВИЛО 3 (ПЗ). Каждое ребро  $uv$ , где  $\{u, v\} \subseteq V_p$ ,  $1 \leq p \leq q$ , даёт вклад 1 вершинам  $u$  и  $v$ .

Заметим, что  $q \leq \lceil d/2 \rceil$ . Тогда, применяя П1–ПЗ, для цепи  $\bar{v}_0 \dots v \dots v'_0$  длины не более  $l \leq d - 1$  имеем  $q \leq \lfloor (d - 1)/2 \rfloor$ , так что для неё не выполнено условие СУ и эта цепь с избытком, поэтому таких цепей нет. Если  $l = d > L$ , то существует ребро вне цепи  $\bar{v}_0 \dots v \dots v'_0$ , инцидентное внутренней вершине этой цепи, которое по П2 передаёт цепи ненулевой вклад, так что условие СУ также нарушается.

Рассмотрим цепь  $\tilde{v}_0 \dots v \dots v'_0$  длины  $d + 1$ . По правилам МПВ для выполнения СУ необходимо, чтобы суммарный вклад всех  $d$  внутренних вершин цепи был равен  $2d + 2 + 2/(d - 1)$ . Все рёбра цепи дают суммарный вклад  $2d + 2$ , поэтому суммарный недостаток равен  $2/(d - 1)$ . По П2 он может быть компенсирован двумя способами.

Все вершины цепи  $\tilde{v}_0 \dots v \dots v'_0$  неузловые, за исключением следующих: 1) 1-узел  $v' \in V_2$ , смежный вершине из  $V_3$  вне указанной цепи (рис. 8а); 2) два 1-узла из  $V_1$ , один из которых, например  $v'$ , лежит в  $V_1$  (рис. 8б) (в обоих случаях цепь  $\tilde{v}_0 \dots v'_0$  показана штриховой линией). Однако в первом случае (рис. 8а) имеется цикл длины  $2d + 1$ , содержащий вершины  $v'$  и  $\bar{v}_0$ , так что цепь  $\bar{v}_0 \dots v'$  длины 2 нарушает СУ для  $v'$ . Во втором случае (рис. 8б) СУ нарушается либо ребром  $\bar{v}_0 v'$ , либо цепью  $\bar{v}_0 \dots v'$  длины 2, поэтому искомым графов при  $L = d - 1$  нет.

СЛУЧАЙ 3. Если  $L = d > d - 1$ , то лемма 6 не применима. Пусть  $V_0$  — множество концов  $d$ -нитей и  $|V_0| = n_0$ . Здесь два возможных случая:  $n_0 = 2$  и  $n_0 \geq 3$ . В качестве  $G_1$  рассматриваются наборы нитей длины не более  $d - 1$ . Предположим, что, как и при  $L = d - 1$ , любая вершина  $v$  графа  $G_1$  принадлежит цепи  $v_0 \dots v \dots v'_0$  длины не более  $d + 1$  (рис. 9).

При  $n_0 = 2$  покажем, что все вершины графа  $G_1 \setminus V_0$  удачны. Здесь цепь  $v_0 \dots v \dots v'_0$  имеет длину  $d + 1$  и суммарный вклад  $2d + 2$  для всех вершин цепи. По П1–ПЗ вклад от рёбер вне цепи не менее  $2/(d - 1)$ . Следовательно, цепь удачна, поэтому

$$m = d + \frac{d(n - d - 1)}{d - 1} = \frac{dn - 2d}{d - 1} > g(n, d)$$

и граф не экстремален.

Пусть  $n_0 \geq 3$  и  $v_0, v'_0$  — пара концов некоторой  $d$ -нити в  $G''$ . Допустим, что  $v''_0 \notin \{v_0, v'_0\}$  — конец другой  $d$ -нити (рис. 9). Тогда для выполнения ограничения на диаметр второй конец  $\bar{v}_0$  второй  $d$ -нити совпадает с  $v_0$  или  $v'_0$ . Пусть  $\bar{v}_0 = v'_0$ , а  $v''_0$  смежна не только с  $v_0$ , но и со всеми остальными вершинами из множества  $V_0 \setminus v'_0$ . Тем самым в  $V_0$  имеется не менее  $(n_0 - 1)(n_0 - 2)/2$  рёбер. По П1–ПЗ, как и при  $n_0 = 2$ , все вершины графа  $G_1 \setminus V_0$  удачны, а вершины графа  $G_2 \setminus V_0$  принадлежат  $d$ -нитям, где

на  $d - 1$  вершин приходится  $d$  рёбер, так что они тоже удачны. Тогда

$$m = \frac{(n_0 - 1)(n_0 - 2)}{2} + \frac{d(n - n_0)}{d - 1} = \frac{dn - 2d - 1}{d - 1},$$

откуда  $n_0 = 3$ , так что в  $V_0$  имеется ровно одно ребро  $v''_0 v_0$  и все вершины графа  $G_1 \setminus V_0$  СУ. Если  $G_1 \setminus V_0 = \emptyset$ , то получаем граф на рис. 5. Покажем, что это единственный вариант при  $L = d$  и других графов нет.

Пусть  $G_1 \setminus V_0 \neq \emptyset$ . Тогда для любой вершины  $v$  графа  $G_1 \setminus V_0$  цепь  $v_0 \dots v \dots v'_0$  длины  $d + 1$  СУ и по П1–П3 имеет вклад от рёбер вне этой цепи, равный  $2/(d - 1)$ . Для доказательства того, что  $G_1 \setminus V_0 = \emptyset$ , достаточно найти хотя бы одну цепь с избытком в  $G_1$ .

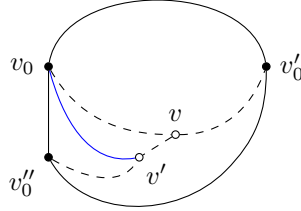


Рис. 9. Случай  $G_1 \setminus V_0 \neq \emptyset$

Пусть имеется ребро  $vv'$  вне цепи  $v_0 \dots v \dots v'_0$ . Рассмотрим подграф — дерево с корнем  $v$  и висячими вершинами  $v_0, v'_0, v''_0$  (штриховая линия на рис. 9). Тогда подцепь  $v''_0 \dots v' \dots v \dots v'_0$  и  $d$ -нить  $v'_0 v''_0$  образуют цикл длины  $2d + 1$ , а подцепь  $v'_0 \dots v \dots v' \dots v''_0$ , ребро  $v''_0 v_0$  и  $d$ -нить  $v_0 \dots v'_0$  — цикл длины  $2d + 2$ , что нарушает ограничение на диаметр  $d$ . Следовательно, в указанном дереве имеется ещё хотя бы одна ветвь длины не более  $d - 1$ , например выделенная ветвь  $v_0 \dots v'$ . С добавленной ветвью в дереве имеется не более  $x \leq 3d$  рёбер и  $x - 3$  вершин из  $G_1$ . Условие СУ выполняется, только если  $x = 3d$ , но цепь  $v_0 \dots v$  не может быть  $d$ -нитью, так что ей инцидентно ещё хотя бы одно ребро графа  $G_1$ , дающее вклад, который нарушает СУ. Полученное противоречие доказывает равенство  $G_1 \setminus V_0 = \emptyset$ .

СЛУЧАЙ 4. Если  $L \geq d + 1$ , то в качестве  $G_2$  выберем нить  $T' \subseteq T$  длины  $l = d + 1$  с концами  $v_0, v'_0$ . Тогда

$$m_1 = \frac{dn - 2d - 1}{d - 1} - (d + 1) = \frac{d(n - (d + 2))}{d - 1},$$

так что  $n - (d + 2)$  вершинам графа  $G_1 \setminus V_0$  инцидентно  $d(n - (d + 2))/(d - 1)$  рёбер. Эти вершины образуют цепи, которые попарно не пересекаются

и являются  $d$ -нитями, так как иначе в  $G_1$  имелись бы цепи длины меньше  $d$ , что нарушает условие СУ. Соответствующий граф представлен на рис. 1.

Для окончания доказательства теоремы 2 следует отметить, что в случаях 2–4 предполагается, что все вершины подграфов  $G_1$  и  $G_2$  принадлежат циклу длины не более  $2d + 1$ . Если это не так, то для выполнения ограничения на диаметр  $d$  в  $G_1$  должны существовать цепи длины не более  $d$ , имеющие инцидентные рёбра вне цепи, которые в соответствии с П1–П3 нарушают условия СУ. Теорема 2 доказана.

### 7. Дополнения к доказательствам теорем

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 5. Сначала для любой вершины  $v \in V_p$  рассмотрим вклад ребра  $v_p v_{p+1}$ , где  $v_{p+1} \in V_{p+1}$ . На рис. 10 показаны все виды узлов  $v_p$  степени 3.

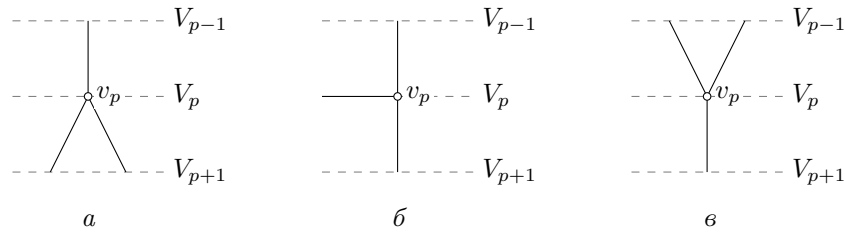


Рис. 10. Узлы степени 3: а) 1-узел; б) 2-узел; в) 3-узел

Пусть вершина  $v_p$  получает вклад  $\alpha$  от соседа из  $V_{p-1}$ . Применим П1–П3. Если  $\deg v_p = 2$ , то вклад ребра  $v_p v_{p+1}$  вершине  $v_p$  в силу её удачности равен  $2d/(d-1) - \alpha$ , а вклад ребра  $v_p v_{p+1}$  вершине  $v_{p+1}$  равен  $\bar{\alpha} = 2 - (2d/(d-1) - \alpha) = \alpha - 2/(d-1)$ . Пусть  $v_p$  узел степени  $k \geq 3$ . Определим, при каком типе узла вклад  $\bar{\alpha}$  минимален.

Положим  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_i$ , если  $v_p - i$ -узел степени  $k$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Если  $v_p - 1$ -узел (рис. 10а), то  $v_p$  смежна с  $k - 1$  вершинами из  $V_{p+1}$  и

$$\bar{\alpha}_1 = 2 - \frac{1}{k-1} \left( \frac{2d}{d-1} - \alpha \right).$$

Если  $v_p - 2$ -узел (рис. 10б), то  $v_p$  смежна хотя бы с одной вершиной из  $V_p$  и не более  $k - 2$  вершинами из  $V_{p+1}$ . Получаем

$$\bar{\alpha}_2 \geq 2 - \frac{1}{k-2} \left( \frac{2d}{d-1} - \alpha - 1 \right).$$

Если  $v_p - 3$ -узел (рис. 10в), то  $v_p$  смежна хотя бы с двумя вершинами из  $V_{p-1}$ , сумма вклада от которых не менее чем  $2\alpha$ , и имеет не более

$k - 2$  смежных вершин из  $V_{p-1}$ . Тогда

$$\bar{\alpha}_3 \geq 2 - \frac{1}{k-2} \left( \frac{2d}{d-1} - 2\alpha \right).$$

Очевидно, что  $\bar{\alpha}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , минимально при  $k = 3$ .

**Утверждение 5.** Если  $\alpha \geq \frac{2}{3} + \frac{2}{3(d-1)}$ , то  $\bar{\alpha}_1 = \min\{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3\}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что  $\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \geq 0$  и  $\bar{\alpha}_3 - \bar{\alpha}_1 \geq 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 &\geq 2 - \frac{\frac{2d}{d-1} - \alpha - 1}{k-2} - 2 + \frac{\frac{2d}{d-1} - \alpha}{k-1} \geq \\ &\geq \frac{\alpha + k - 1 - \frac{2d}{d-1}}{(k-1)(k-2)} \geq \frac{\frac{2d}{3(d-1)} + 2 - \frac{2d}{d-1}}{(k-1)(k-2)} \geq \\ &\geq \frac{2d-6}{3(d-1)(k-1)(k-2)} > 0, \end{aligned}$$

а также

$$\bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1 \geq 2 - \frac{\frac{2d}{d-1} - 2\alpha}{k-2} - 2 + \frac{\frac{2d}{d-1} - \alpha}{k-1} \geq \frac{\alpha k - \frac{2d}{d-1}}{(k-1)(k-2)} \geq 0.$$

Утверждение 5 доказано.

Таким образом, для 1-узла  $v_p$  вклад ребра  $v_p v_{p+1}$  вершине  $v_{p+1}$  минимальный. Это значит, что если в цепи все узлы являются 1-узлами, то конец цепи  $v_0 \dots v_p v_{p+1} \dots v_{\bar{p}}$  получает минимальный последний вклад. Следовательно, условная степень  $\deg' v_{\bar{p}}$ , состоящая из суммы таких последних вкладов, в этом случае минимальна, поэтому для всех других типов узлов значение  $\deg' v_{\bar{p}}$  будет не меньше. Лемма 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 6. Из правил П1–П3 получаем, что все внутренние вершины графа  $G_1 \setminus V_0$  будут удачными, и нам остаётся проанализировать последние вклады для всех концов цепей и их условные степени. Например, для сильной особой  $v_4$  на рис. 7а, слабой особой  $v'_4$ , ординарной  $v_4$  на рис. 7б.

Необходимо показать, что вершина  $v_q$  цепи  $v_0 \dots v_p v_{p+1} \dots v_q$  удачна. Из удачности  $v_q$  следует удачность  $v_{\bar{p}}$  при  $\bar{p} \leq q$ , что доказывает лемму 6. Так как  $d(v_q, v) = d$  для любой вершины  $v$  нити  $T$  наибольшей длины в графе  $G$ , то расстояние от  $v_q$  до середины  $T$  максимально, поэтому  $q = d - \lfloor L/2 \rfloor$ , и дальнейшее рассмотрение зависит от чётности  $L$ .

Определим сумму наименьших последних вкладов для концов цепей. Пусть в цепи  $v_0 \dots v_p v_{p+1} \dots v_q$  имеется  $k \geq 0$  узлов. Положим  $z' = v_0$ ,  $z = v_q$ , а саму цепь обозначим через  $z'z$ . Пусть  $\alpha_{zz'}$  — последний вклад цепи  $z'z$  вершине  $z$ . По лемме 5 все узлы цепи  $z'z$  считаем 1-узлами, которые обозначим через  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$ . Пусть  $x_i$ ,  $i \in \overline{1, k+1}$ , — длины нитей

в цепи  $z'z$  с концами в вершинах  $v_0, v_q$  и 1-узлах  $\bar{v}_i, i \in \overline{1, k}$ . Нумерацию 1-узлов произведём в направлении от  $z$  к  $z'$ , так что длина нити  $z \dots \bar{v}_1$  равна  $x_1$ , а  $\bar{v}_k \dots z' = x_{k+1}$ . Далее будем полагать, что  $\deg \bar{v}_1 = a \geq 3$  и  $\deg \bar{v}_i = 3$  при  $i \in \overline{2, k}$ . Оценим вклад  $\alpha_{zz'}$ .

**Утверждение 6.** *Имеют место неравенства*

$$\alpha_{zz'} \geq \frac{2d - 2x_1}{d - 1} - \sum_{i=2}^{k+1} \frac{2x_i}{2^{i-2}(a-1)(d-1)} \geq \frac{2d}{d-1} - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{2x_i}{2^{i-1}(d-1)}. \quad (3)$$

**Доказательство.** Воспользуемся индукцией по числу  $k$  1-узлов в цепи  $z'z$ . Если  $k = 1$ , то  $z'z$  состоит из нитей  $z' \dots \bar{v}_1$  и  $\bar{v}_1 \dots z$  длины  $x_2$  и  $x_1$  соответственно. Из П2 следует, что от первой нити вершине  $\bar{v}_1$  поступает вклад  $\alpha = 2 - 2(x_2 - 1)/(d - 1)$ , а от второй —

$$\frac{1}{a-1} \left( \frac{2d}{d-1} - \alpha \right) = \frac{2x_2}{(d-1)(a-1)}.$$

Отсюда получаем первое из неравенств (3):

$$\alpha_{zz'} \geq 2 - \frac{2(x_1 - 1)}{d-1} - \frac{2x_2}{(d-1)(a-1)} = \frac{2d - 2x_1}{d-1} - \frac{2x_2}{(d-1)(a-1)}.$$

Пусть при  $k$  утверждение верно, рассмотрим случай  $k + 1$ , в котором на цепи  $z'z$  имеются 1-узлы  $\bar{v}_{k+1}, \dots, \bar{v}_2$  степени 3. По предположению индукции вклад нити  $\bar{v}_2 \dots \bar{v}_1$  вершине  $\bar{v}_1$  равен

$$\alpha = \frac{2d - 2x_2}{d-1} - \sum_{i=3}^{k+1} \frac{2x_i}{2^{i-2}(d-1)}.$$

Тогда из П2 следует оценка

$$\alpha_{zz'} \geq 2 - \frac{2(x_1 - 1)}{d-1} - \frac{\frac{2d}{d-1} - \alpha}{a-1} = \frac{2d - 2x_1}{d-1} - \sum_{i=2}^{k+1} \frac{2x_i}{2^{i-2}(a-1)(d-1)}.$$

Второе из неравенств (3) очевидно и при  $a = 3$  даёт равенство. Утверждение 6 доказано.

**Замечание 1.** При  $k = 0$  цепь  $z'z$  длины  $x_1$  состоит только из неузлов и в силу П1 и П2 имеем

$$\alpha_{zz'} \geq 2 - \frac{2(x_1 - 1)}{d-1} = \frac{2d - 2x_1}{d-1}.$$

Пусть вершина  $z$  сильная. Тогда в графе  $G$  имеется ещё одна цепь  $v'_0 \dots v'_p v'_{p+1} \dots v_q, v_q = z$ , содержащая  $s \geq 0$  узлов, которые по лемме 5 также можно считать 1-узлами. Положим  $z'' = v'_0$ , саму цепь обозначим через  $z''z$ , а последний вклад цепи  $z''z$  вершине  $z$  — через  $\alpha_{zz''}$ . Пусть  $y_j, j \in \overline{1, s+1}$ , — длины нитей в цепи  $z''z$  и первый, считая от  $z$ , 1-узел

цепи  $z''z$  имеет степень  $b \geq 3$ . Аналогично неравенствам (3) получаем нижнюю оценку для  $\alpha_{zz''}$ .

**Утверждение 7.** *Имеют место неравенства*

$$\alpha_{zz''} \geq \frac{2d - 2y_1}{d - 1} - \sum_{j=2}^{s+1} \frac{2y_j}{2^{j-2}(b-1)(d-1)} \geq \frac{2d}{d-1} - \sum_{j=1}^{s+1} \frac{2y_j}{2^{j-1}(d-1)}. \quad (4)$$

Далее рассмотрим систему из неравенств, ограничивающих сумму вкладов конца цепи  $z$  и длину нитей цепи, и уравнения, накладывающего условие на длину всей цепи:

$$\begin{aligned} \deg' z &\geq \alpha_{zz'} + \alpha_{zz''}, \\ \sum_i x_i &= \sum_j y_j = d - \lfloor L/2 \rfloor, \\ x_i, y_j &\leq L, \quad i \in \overline{1, k+1}, j \in \overline{1, s+1}. \end{aligned} \quad (5)$$

Решим систему (5) в зависимости от чётности  $L$  для доказательства удачности вершины  $z$ .

**7.1. Чётная наибольшая длина нити в графе  $G$ .** Пусть  $L$  чётно. Тогда  $\sum x_i = \sum y_j = d - L/2$ , а в виду неравенств (3) и (4) получаем

$$\begin{aligned} \deg' z &\geq \frac{4d}{d-1} - \sum_{i=1}^{k+1} \frac{2x_i}{2^{i-1}(d-1)} - \sum_{j=1}^{s+1} \frac{2y_j}{2^{j-1}(d-1)} = \frac{4d}{d-1} - \\ &- \frac{x_1 + y_1}{d-1} - \frac{2d-L}{d-1} + \sum_{i \geq 3} \frac{x_i(1-1/2^{i-2})}{d-1} + \sum_{j \geq 3} \frac{y_j(1-1/2^{j-2})}{d-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что суммы по  $i$  и  $j$  в (6) неотрицательны.

**Стандартные случаи.** Если вершина  $z$  сильная особая, то имеем  $x_1 + y_1 \leq L$  и из (6) получаем

$$\deg' z \geq \frac{4d}{d-1} - \frac{L}{d-1} - \frac{2d-L}{d-1} = \frac{2d}{d-1},$$

так что  $z$  удачна.

Если вершина  $z$  сильная ординарная, то рассмотрим два возможных случая: (а)  $L \leq (2d-2)/3$ , (б)  $L \geq (2d-2)/3 + 2 = (2d+4)/3$ .

(а) Сложим (3) и (4), применяя неравенство  $x_1 + y_1 \leq 2L$ :

$$\alpha_{zz'} + \alpha_{zz''} \geq \frac{4d}{d-1} - \frac{2L}{d-1} - \frac{2d-L}{d-1} = \frac{2d-L}{d-1} \geq \frac{4d+2}{3(d-1)}.$$

Для ординарной вершины  $z$  также выполнено правило ПЗ, поэтому если  $z$  имеет ровно двух соседей из  $V_{q-1}$  и одного из  $V_q$ , то

$$\deg' z \geq \frac{4d+2}{3(d-1)} + 1 \geq \frac{2d}{d-1} + \frac{1}{3},$$

иначе  $z$  имеет не менее трёх соседей из  $V_{q-1}$  и

$$\deg' z \geq 3\alpha_{zz'} \geq \frac{2d+1}{d-1}.$$

Далее будем использовать избытки таких вершин для выполнения удачности смежных вершин.

(б) Преобразуем (3) и (4), применив равенства  $\sum_i x_i = \sum_j y_j = d - L/2$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{zz'} + \alpha_{zz''} &\geq \frac{1}{d-1} \left( 4d - 2 \left( \sum_i x_i + \sum_j y_j \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i \geq 2} x_i (2 - 1/2^{i-2}) + \sum_{j \geq 2} y_j (2 - 1/2^{j-2}) \right) \geq \\ &\geq \frac{4d}{d-1} - \frac{4(d - \frac{L}{2})}{d-1} = \frac{2L}{d-1} \geq \frac{4d+8}{3(d-1)}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\deg' z \geq \alpha_{zz'} + \alpha_{zz''} + 1$ , получаем  $\deg' z \geq 2d/(d-1)$ , если вершина  $z$  имеет ровно двух соседей из  $V_{q-1}$ , иначе  $z$  имеет не менее трёх соседей из  $V_{q-1}$  и

$$\deg' z \geq \frac{3L}{d-1} \geq \frac{2d+4}{d-1},$$

так что условие удачности имеет избыток, как и в случае (а).

Далее проведём анализ различных вариантов слабой вершины  $z$ .

Если вершина  $z$  слабая особая и не лежит на нити  $T$ , то рассмотрим два возможных варианта: (1с)  $z$  смежна со слабой особой  $\bar{z}$ , (2с)  $z$  смежна с ординарной  $\bar{z}$ .

(1с) Так как  $z \notin V(T)$ , то  $x_1 + y_1 \leq L - 2$ . В силу неравенств (3), (4) и наличия ребра  $z\bar{z}$  имеем

$$\deg' z + \deg' \bar{z} \geq \alpha_{zz'} + \alpha_{\bar{z}z''} + 2 \geq \frac{4d}{d-1} - \frac{L-2}{d-1} - \frac{2d-L}{d-1} + 2 = \frac{4d}{d-1},$$

так что вершины  $z$  и  $\bar{z}$  удачны.

(2с) Вновь рассмотрим два случая по величине  $L$ : (а)  $L \leq (2d-2)/3$ , (б)  $L \geq (2d-2)/3 + 2 = (2d+4)/3$ .

(а) Введём дополнительное правило, которое использует избыток ординарных вершин и корректирует правило ПЗ.

ПРАВИЛО 4 (П4). Если  $L \leq (2d - 2)/3$ , то ребро  $z\bar{z}$ , где  $z \in V_q \setminus V(T)$  слабая особая, а  $\bar{z} \in V_q$  ординарная, даёт вклад  $\frac{4}{3} - \frac{1}{2(d-1)}$  вершине  $z$  и вклад  $\frac{2}{3} - \frac{1}{2(d-1)}$  вершине  $\bar{z}$ . Для остальных смежных вершин из  $V_p$ ,  $1 \leq p \leq q$ , выполнено правило ПЗ.

Используя неравенства (3), получаем

$$\begin{aligned} \alpha_{zz'} &\geq \frac{2d}{d-1} - \sum_{i \geq 1} \frac{2x_i}{2^{i-1}(d-1)} = \\ &= \frac{2d}{d-1} - \frac{x_1}{d-1} - \sum_{i \geq 1} \frac{x_i}{d-1} + \sum_{i \geq 2} \frac{x_i(1 - 1/2^{i-2})}{d-1}. \end{aligned}$$

Здесь последняя сумма неотрицательна,  $\sum_i x_i = d - L/2$ , а из смежности вершин  $z$  и  $\bar{z}$  следует, что  $x_1 \leq L - 2$ , поэтому

$$\alpha_{zz'} \geq \frac{2d}{d-1} - \frac{L-2}{d-1} - \frac{d-L/2}{d-1} = \frac{d-L/2+2}{d-1}.$$

Применяя П4, с учётом неравенства  $L \leq (2d - 2)/3$  для  $z$  получаем

$$\deg' z \geq \frac{d-L/2+2}{d-1} + \frac{4}{3} - \frac{1}{2(d-1)} \geq \frac{2d}{d-1},$$

а для ординарной вершины  $\bar{z}$  —

$$\deg' \bar{z} \geq \frac{d-L/2}{d-1} + 2 \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{2(d-1)} \right) \geq \frac{2d}{2(d-1)}.$$

(б) Для этого случая в дополнение к П1–ПЗ понадобится

ПРАВИЛО 4' (П4'). Если  $L \geq (2d + 4)/3$ , то для слабой особой вершины  $z \in V_q$  и ординарной  $\bar{z} \in V_q$  ребро  $z\bar{z}$  даёт вклад  $4/3$  вершине  $z$  и  $2/3$  вершине  $\bar{z}$ . Для остальных смежных вершин из  $V_p$ ,  $1 \leq p \leq q$  выполнено правило ПЗ.

Имеем

$$\begin{aligned} \deg' z &\geq \frac{2d}{d-1} - \frac{2(d-L/2)}{d-1} + \frac{4}{3} = \frac{L}{d-1} + \frac{4}{3} \geq \frac{2d}{d-1}, \\ \deg' \bar{z} &\geq \frac{L}{d-1} + 2 \cdot \frac{2}{3} \geq \frac{2d}{d-1}, \end{aligned}$$

что доказывает удачность вершин  $z$  и  $\bar{z}$ .

Заметим, что здесь не используется, что  $z \notin V(T)$ , и поэтому если  $L \geq (2d + 4)/3$ , а вершина  $z \in V(T)$  слабая особая и смежна с ординарной  $\bar{z}$ , то  $z$  и  $\bar{z}$  также удачны.

При анализе (2с) показана удачность ординарной вершины  $\bar{z}$ , смежной со слабой особой  $z$ . Если ординарная  $\bar{z}$  смежна другим вершинам, то её удачность также следует из П2–П3.

Определим оставшиеся трудные случаи: (1т)  $z, \bar{z} \in V(T)$  — слабые особые смежные вершины, (2т) слабая особая вершина  $z \in V(T)$  смежна ординарной  $\bar{z}$  при  $L \leq (2d - 2)/3$ . Рассмотрим важные подслучаи случаев (1т) и (2т), не использующие избыток  $C$ .

**Утверждение 8.** Если  $\sum_{i \geq 2} x_i + \sum_{j \geq 2} y_j \leq 2$ , то в случаях (1т) и (2т) вершины  $z$  и  $\bar{z}$  удачны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1т) Поскольку  $x_1 + y_1 = L - 1$  и  $L \leq d - 1$ , имеем

$$\begin{aligned} \deg' z + \deg' \bar{z} &\geq \alpha_{zz'} + \alpha_{\bar{z}\bar{z}''} + 2 \geq \\ &\geq \frac{4d}{d-1} - \frac{2(x_1 + y_1)}{d-1} + 2 - \sum_{i \geq 2} \frac{x_i}{2^{i-2}(d-1)} - \sum_{j \geq 2} \frac{y_j}{2^{j-2}(d-1)} \geq \\ &\geq \frac{6d - 2L}{d-1} - \sum_{i \geq 2} \frac{x_i}{2^{i-2}(d-1)} - \sum_{j \geq 2} \frac{y_j}{2^{j-2}(d-1)} \geq \\ &\geq \frac{4d + 2}{d-1} - \sum_{i \geq 2} \frac{x_i}{2^{i-2}(d-1)} - \sum_{j \geq 2} \frac{y_j}{2^{j-2}(d-1)}, \end{aligned}$$

и если  $\sum_{i \geq 2} x_i + \sum_{j \geq 2} y_j \leq 2$ , то  $\deg' z + \deg' \bar{z} \geq 4d/(d-1)$ .

(2т) Определим ПРАВИЛО П4'', дословно повторяющее П4', за исключением ограничения на  $L$ : здесь  $L \leq (2d - 2)/3$ .

Поскольку  $x_1 \leq L - 1$ ,  $y_1 \leq L$  и  $\sum_{i \geq 2} x_i + \sum_{j \geq 2} y_j \leq 2$ , имеем

$$\begin{aligned} \deg' z + \deg' \bar{z} &\geq \frac{4d}{d-1} + \frac{2}{3} - \\ &- \frac{2(x_1 + y_1)}{d-1} + 2 - \sum_{i \geq 2} \frac{x_i}{2^{i-2}(d-1)} - \sum_{j \geq 2} \frac{y_j}{2^{j-2}(d-1)} \geq \\ &\geq \frac{20d - 12L - 2}{3(d-1)} - \sum_{i \geq 2} \frac{x_i}{2^{i-2}(d-1)} - \sum_{j \geq 2} \frac{y_j}{2^{j-2}(d-1)} \geq \\ &\geq \frac{4d + 2}{d-1} - \sum_{i \geq 2} \frac{x_i}{2^{i-2}(d-1)} - \sum_{j \geq 2} \frac{y_j}{2^{j-2}(d-1)}, \end{aligned}$$

откуда  $\deg' z + \deg' \bar{z} \geq 4d/(d-1)$ . Утверждение 8 доказано.

Положим  $\deg v_0 = r$ , при этом либо  $r = 3$ , либо  $r \geq 4$ . Покажем, что случай  $r \geq 4$  стандартный.

(1т) Пусть  $r \geq 4$ . Напомним, что в этом случае вершины  $z$  и  $\bar{z}$  принадлежат нити  $T$ , концы которой обозначим через  $\bar{v}_1$  и  $\bar{v}'_1$ . Так как вершины  $\bar{v}_1$  и  $\bar{v}'_1$  — 1-узлы, при этом  $\deg \bar{v}_1 = a \geq r \geq 4$ ,  $\deg \bar{v}'_1 = b \geq r \geq 4$ , для оценки  $\deg' z + \deg' \bar{z}$  применим (3)–(5) и неравенство  $\sum_{i \geq 2} x_i + \sum_{j \geq 2} y_j \geq 3$ :

$$\begin{aligned} \deg' z + \deg' \bar{z} &\geq \frac{4d - 2(x_1 + y_1)}{d - 1} - \\ &\quad - \sum_{i \geq 2} \frac{2x_i}{2^{i-2} \cdot 3(d-1)} - \sum_{j \geq 2} \frac{2y_j}{2^{j-2} \cdot 3(d-1)} \geq \\ &\quad \geq \frac{4d - (L-1)}{d-1} - \frac{2d-L}{d-1} + 2 + \\ &\quad + \sum_{i \geq 2} x_i \left(1 - \frac{2}{2^{i-2} \cdot 3(d-1)}\right) + \sum_{j \geq 2} y_j \left(1 - \frac{2}{2^{j-2} \cdot 3(d-1)}\right) \geq \\ &\quad \geq \frac{4d-1}{d-1} + \frac{\sum_{i \geq 2} x_i + \sum_{j \geq 2} y_j}{3(d-1)} \geq \frac{4d-1}{d-1} + \frac{3}{3(d-1)} \geq \frac{4d}{d-1}. \end{aligned}$$

(2т) Вновь  $r \geq 4$ . В этом случае ординарная вершина  $\bar{z}$  является концом нити  $T$ , поэтому  $\deg \bar{z} \geq 4$ . Применим правило П4' и оценим  $\deg' z$ , используя ограничение  $L \leq (2d-2)/3$ :

$$\begin{aligned} \deg' z &\geq \frac{2d - 2x_1}{d-1} - \sum_{i \geq 2} \frac{2x_i}{2^{i-2} \cdot 3(d-1)} + \frac{4}{3} \geq \\ &\geq \frac{2d - (L-1)}{d-1} - \frac{d-L/2}{d-1} + \frac{4}{3} \geq \frac{2d+4}{3(d-1)} + \frac{4}{3} = \frac{2d}{d-1}. \end{aligned}$$

При этом для  $\bar{z}$  имеем

$$\deg' \bar{z} \geq \frac{2d-L}{d-1} - \frac{d-L/2}{d-1} + \frac{3 \cdot 2}{3} \geq \frac{2d}{d-1}.$$

Тем самым вершины  $z$  и  $\bar{z}$  удачны.

**Трудные случаи и использование избытка.** Пусть  $r = 3$  и вершина  $v_0$  смежна с двумя вершинами из  $V_1$ . Тогда, возможно, имеются две различные цепи вида  $v_0 \dots v_q$ , относящиеся к трудным случаям. Конец такой цепи  $z = v_q$  может быть неудачен, поэтому его вкладу добавим избыток  $C/2 = 2/(d-1)$ . Из утверждения 8 следует, что здесь  $\sum_{i \geq 2} x_i + \sum_{j \geq 2} y_j \geq 3$ .

(1т) С учётом сказанного получаем

$$\deg' z + \deg' \bar{z} \geq \alpha_{zz'} + \alpha_{\bar{z}\bar{z}''} + 2 \geq \frac{6d-2}{d-1} - \frac{2(x_1 + y_1)}{d-1} - \frac{x_2 + y_2}{d-1} -$$

$$\begin{aligned}
-\sum_{i \geq 3} \frac{x_i}{2^{i-2}(d-1)} - \sum_{j \geq 3} \frac{y_j}{2^{j-2}(d-1)} &\geq \frac{6d-2-(L-1)-2(d-L/2)}{d-1} + \\
&+ \sum_{i \geq 3} \frac{x_i(1-1/2^{i-2})}{d-1} + \sum_{j \geq 3} \frac{y_j(1-1/2^{j-2})}{d-1} \geq \frac{4d-1}{d-1} + \frac{x_3+y_3}{2(d-1)},
\end{aligned}$$

откуда удачность вершины  $z$  следует без применения избытка в случае  $x_3 + y_3 \geq 2$ . Если  $x_3 + y_3 \leq 1$  и

$$\sum_{i \geq 4} x_i(1-1/2^{i-2}) + \sum_{j \geq 4} y_j(1-1/2^{j-2}) = 0,$$

то недостаток для  $\deg' z + \deg' \bar{z}$  составляет не более  $1/(d-1)$ , следовательно, избыток, добавляемый для удачности вершин  $z$  и  $\bar{z}$ , не может быть меньше  $1/(d-1)$ .

Пусть  $x_3 = 1$ ,  $y_3 = 0$  и цепь  $zz'$  состоит из трёх нитей:  $z\bar{v}_1$  длины  $x_1$ ,  $\bar{v}_1\bar{v}_2$  длины  $x_2$ ,  $\bar{v}_2z'$  длины  $x_3 = 1$ , а цепь  $\bar{z}z''$  из двух нитей:  $\bar{z}\bar{u}_1$  длины  $y_1$ ,  $\bar{u}_1z''$  длины  $y_2$ , где  $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{u}_1$  — 1-узлы. В цепях с недостатком некорректно считать, что  $\deg \bar{v}_2 = 3$ . Действительно, если  $\bar{v}_2 \in V_1$ , то вершина  $\bar{v}_2$  смежна с  $\deg \bar{v}_2 - 1$  вершинами из  $V_2$  и подцепи, начинающиеся в  $\bar{v}_2$ , могут заканчиваться концами, у которых также имеется недостаток. Стало быть, избыток  $C/2 = 2/(d-1)$  для каждой подцепи следует разделить на  $\deg \bar{v}_2 - 1$  частей, и остаётся открытым вопрос о его достаточности для удачности конца цепи. Те же рассуждения необходимо привести для вершин  $\bar{v}_1$  и  $\bar{u}_1$ , поэтому для конца  $z$ , например, избыток будет составлять

$$\frac{C}{2(\deg \bar{v}_1 - 1)(\deg \bar{v}_2 - 1)}.$$

Тогда, полагая  $\deg \bar{v}_1 = a$ ,  $\deg \bar{v}_2 = b$ ,  $\deg \bar{u}_1 = c$ , применяя (3), (4) и умножая избыток на  $d-1$ , приходим к тому, что можно ликвидировать недостаток величины  $1/(d-1) \cdot (d-1) = 1$ :

$$\begin{aligned}
1 \cdot \left(1 - \frac{2}{(a-1)(b-1)}\right) + x_2 \left(1 - \frac{2}{a-1}\right) + \\
+ y_2 \left(1 - \frac{2}{c-1}\right) + \frac{2}{(a-1)(b-1)} \geq 1.
\end{aligned}$$

Поскольку все слагаемые в левой части неравенства неотрицательны, получаем  $1 \geq 1$ , так что вершины  $z$  и  $\bar{z}$  удачны.

Пусть  $x_3 = y_3 = 0$ . Снова запишем условие удачности с учётом того, что  $\bar{v}_2$  нет:

$$x_2 \left(1 - \frac{2}{a-1}\right) + y_2 \left(1 - \frac{2}{c-1}\right) + \frac{2}{a-1} \geq 1.$$

Так как  $x_2 \geq 1$ , имеем  $1 \geq 1$ , поэтому вершины  $z$  и  $\bar{z}$  удачны.

(2г) Применяя П1–П4, получаем удачность ординарной  $\bar{z}$ :

$$\deg' \bar{z} \geq \frac{d-L/2}{d-1} + 2 \left( \frac{2}{3} + \frac{1}{2(d-1)} \right) \geq \frac{2d}{d-1},$$

при этом для слабой особой вершины  $z$  имеем

$$\begin{aligned} \deg' z &\geq \frac{d-L/2+1}{d-1} + \frac{4}{3} - \frac{1}{2(d-1)} + \sum_{i \geq 3} \frac{x_i(1-1/2^{i-2})}{d-1} \geq \\ &\geq \frac{2d}{d-1} - \frac{1}{2(d-1)} + \sum_{i \geq 3} \frac{x_i(1-1/2^{i-2})}{d-1}, \end{aligned}$$

так что  $z$  удачна, если  $x_3 \geq 1$ . Если  $x_3 = 0$ , то недостаток составляет не более  $\frac{1}{2(d-1)}$ . Пусть вершина  $\bar{v}_1$  делит цепь на две нити  $z\bar{v}_1$  и  $\bar{v}_1 z'$  и по-прежнему  $\deg \bar{v}_1 = a$ . С учётом этого запишем условие удачности, как это сделано в случае (1г), добавив избыток  $C/2$ :

$$\frac{C}{2(a-1)} + x_2 \left( 1 - \frac{2}{a-1} \right) \geq \frac{1}{2},$$

т. е.  $1 \geq 1/2$ , следовательно, вершина  $z$  удачна.

**Замечание 2.** При чётном  $L$  во всех случаях оказываются справедливыми неравенства  $\alpha > \alpha_{zz'} \geq \frac{2}{3} + \frac{2}{3(d-1)}$ , так что имеет место утверждение 5.

**7.2. Нечётная наибольшая длина нити в графе  $G$ .** Пусть  $L$  нечётно. Тогда в нити  $T$  есть две смежные вершины, расположенные от  $z' = v_0$  и  $z'' = v'_0$  на расстоянии  $(L-1)/2$  (на рис. 11 они обведены дополнительно), а равенства в (5) принимают вид  $\sum_i x_i = \sum_j y_j = d - (L-1)/2$ .

Рассмотрим два варианта в зависимости от  $\deg v_0 = r$ : (1н)  $r = 3$ ,  $z \notin T$  или  $r \geq 4$ , (2н)  $r = 3$ ,  $z \in T$ .

(1н) Разделим этот случай на два подслучая: (а)  $z$  сильная, (б)  $z$  слабая. Будем применять П1–П3 и неравенства (3) и (4).

(а) Если вершина  $z$  сильная особая, то

$$\deg' z \geq \alpha_{zz'} + \alpha_{zz''} \geq \frac{4d}{d-1} - \frac{L-1}{d-1} - \frac{2d-L+1}{d-1} = \frac{2d}{d-1}.$$

В случае  $r \geq 4$  ближайшие к вершине  $z$  1-узлы  $\bar{v}_1$  и  $\bar{v}_2$  имеют степени  $\deg' \bar{v}_1 \geq 4$  и  $\deg' \bar{v}_2 \geq 4$ , поэтому

$$\deg' z \geq \alpha_{zz'} + \alpha_{zz''} \geq$$

$$\geq \frac{4d}{d-1} - \frac{L}{d-1} - \frac{2d-L+1}{d-1} + \frac{x_2+y_2+2(x_3+y_3)}{3(d-1)}.$$

Если при этом  $x_3 + y_3 \geq 1$  и  $x_2 + y_2 \geq 1$  или  $x_3 + y_3 = 0$  и  $x_2 + y_2 \geq 3$ , то вершина  $z$  удачна. Если  $x_2 + y_2 \leq 2$ , то

$$\deg' z \geq \frac{4d - 2L - (x_2 + y_2)}{d-1} \geq \frac{4d - 2d + 2 - 2}{d-1},$$

так что вершина  $z$  вновь удачна.

Если вершина  $z$  сильная ординарная, при этом не является концом нити  $T$  и  $L \leq (2d-1)/3$ , то

$$\alpha_{zz'} + \alpha_{zz''} \geq \frac{4d - 2(L-1) - (2d-L+1)}{d-1} = \frac{2d-L+1}{d-1} \geq \frac{4d+4}{3(d-1)},$$

так что

$$\deg' z \geq \alpha_{zz'} + \alpha_{zz''} + 1 \geq \frac{4d+4}{3(d-1)} + 1 \geq \frac{2d}{d-1}$$

либо

$$\deg' z \geq 3\alpha_{zz'} \geq \frac{3(2d-L+1)}{2(d-1)} \geq \frac{2d+2}{d-1}.$$

Если же  $L \geq (2d+5)/3$ , то

$$\alpha_{zz'} + \alpha_{zz''} \geq \frac{4d - 4(d - (L-1)/2)}{d-1} \geq \frac{2L-2}{d-1} \geq \frac{4d+4}{3(d-1)},$$

откуда

$$\deg' z \geq \alpha_{zz'} + \alpha_{zz''} + 1 \geq \frac{2d}{d-1}$$

либо

$$\deg' z \geq 3\alpha_{zz'} \geq \frac{2d+2}{d-1}.$$

Если сильная ординарная вершина  $z$  — конец нити  $T$ , то  $\deg z \geq 4$ , так что  $z$  удачна.

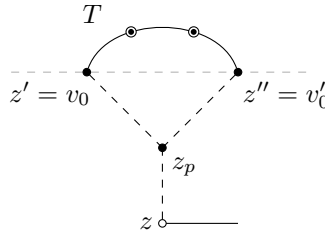


Рис. 11. Случай  $r = 3$ ,  $z \notin T$  или  $r \geq 4$  для слабой  $z$

(б) Поскольку  $z$  слабая, только одна цепь  $zz'$  имеет длину  $d - (L-1)/2$ . Для выполнения условия  $d(z, v) \leq d$  для  $v \in V(T)$  необходимо, чтобы

в цепи  $zz'$  был 3-узел  $z_p$  такой, что  $p = d(z_p, z') = d(z_p, z'')$  (рис. 11). Таким образом, цепи  $z'z$  и  $z''z$  разбиваются на две подцепи каждая:  $z'z_p$ ,  $z_pz$  и  $z''z_p$ ,  $z_pz$  соответственно.

Введём дополнительные обозначения. Пусть  $\gamma$  — длина цепи  $zz_p$ , значения  $\alpha_p$  и  $\alpha'_p$  — вклады вершине  $z_p$  от  $v_{p-1}z_p$  и  $v'_{p-1}z_p$ , а  $\alpha''_p$  — вклад вершине  $z_p$  от  $z_p v_{p+1}$ . Длины нитей, из которых состоят цепи  $z_pz'$  и  $z_pz''$ , обозначим через  $x'_i$  и  $y'_j$ . Ближайшая задача состоит из двух частей: 1) получить верхнюю оценку  $\alpha''_p$  и нижнюю — для  $2 - \alpha''_p$ , 2) вычислить  $\alpha_{zz'}$  и оценить  $\deg' z$ . Запишем для  $\deg' z_p$  систему, аналогичную (5):

$$\begin{aligned} \deg' z_p &\geq \alpha_p + \alpha'_p + \alpha''_p, \\ \sum_i x_i &= \sum_j y_j = p = d - \frac{L-1}{2} - \gamma, \\ x'_i, y'_j &\leq L, \quad i \in \overline{1, k+1}, j \in \overline{1, s+1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Применим (3), (4), П1–П3 и ограничения из (7). Если  $L \leq (2d-3)/3$ , то

$$\begin{aligned} \alpha_p + \alpha'_p &\geq \frac{4d - x'_1 - y'_1}{d-1} - \frac{\sum_i x'_i + \sum_j y'_j}{d-1} + \\ &\quad + \sum_{i \geq 2} \frac{x'_i(1 - 1/2^{i-2})}{d-1} + \sum_{j \geq 2} \frac{y'_j(1 - 1/2^{j-2})}{d-1} \geq \\ &\geq \frac{4d - 2L - (2d - (L-1) - 2\gamma)}{d-1} \geq \frac{2d - L - 1 + 2\gamma}{d-1} \geq \frac{4d + 6\gamma}{3(d-1)}, \end{aligned}$$

так что

$$\alpha''_p \leq \frac{2d}{d-1} - \alpha_p - \alpha'_p \leq \frac{2d - 6\gamma}{3(d-1)},$$

откуда получаем

$$\alpha_{zz'} \geq 2 - \alpha''_p - \frac{2(\gamma-1)}{d-1} = \frac{4d}{3(d-1)}.$$

Следовательно, при  $d \geq 5$

$$\deg' z \geq \frac{4d}{3(d-1)} + 1 \geq \frac{7d-3}{3(d-1)} \geq \frac{2d}{d-1}.$$

Если  $L \geq (2d+3)/3$ , то

$$\alpha_p + \alpha'_p \geq \frac{4d}{d-1} - 2 \cdot \frac{\sum_i x'_i + \sum_j y'_j}{d-1} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i \geq 2} \frac{x'_i(2 - 1/2^{i-2})}{d-1} + \sum_{j \geq 2} \frac{y'_j(2 - 1/2^{j-2})}{d-1} \geq \\
& \geq \frac{4d - 4(d - (L-1)/2 - \gamma)}{d-1} = \frac{2L - 2 + 4\gamma}{d-1} \geq \frac{4d + 12\gamma}{3(d-1)},
\end{aligned}$$

поэтому

$$\alpha''_p \leq \frac{2d - 12\gamma}{3(d-1)}, \quad \alpha_{zz'} \geq \frac{4d + 10\gamma}{3(d-1)},$$

так что  $\deg' z \geq 2d/(d-1)$ . В любом случае вершина  $z$  оказывается удачной.

(2н) Чтобы избежать анализа трудных случаев для нечётного  $L$ , рассмотрим в качестве графа  $G_2$  нить  $T$  вместе с вершиной  $v_0$  и смежными с ней вершинами  $\bar{v}_0, \tilde{v}_0 \notin V(T)$ . В этом случае  $V_0 = \{\bar{v}_0, \tilde{v}_0, v'_0\}$ ,  $m_2 = L+2$ . Если  $C_2 = 1$ , то вершины  $\tilde{v}_0$  и  $v'_0$  смежны. В  $G_2$  есть вершина, удалённая от  $V_0$  на расстояние  $(L+1)/2$ , поэтому для  $G_1$  равенства во второй строке (5) принимают вид

$$\sum_i x_i = \sum_j y_j = d - \frac{L+1}{2}.$$

Остальные неравенства, включая оценки (3) и (4), остаются теми же, что и для чётного  $L$ . Это означает, что нижняя оценка  $\deg' z$  увеличивается на  $\frac{1}{2(d-1)}$ , а для  $\deg' z + \deg' \bar{z}$ , где вершины  $z$  и  $\bar{z}$  слабые, — на  $\frac{1}{d-1}$ .

Такое изменение оценок исключает необходимость рассмотрения трудных случаев, так как величина недостатка в случае чётного  $L$  не превосходила  $\frac{1}{d-1}$ . Таким образом, все случаи МПВ для указанного графа  $G_2$  стандартны, а все вершины из  $G_1 \setminus V_0$  удачны. В  $G_2$  вершинам  $\bar{v}_0$  и  $\tilde{v}_0$  можно положить условную степень 2, но так как избыток  $C$  не использован, припишем вклады по  $\frac{2}{d-1}$  к  $\deg' \bar{v}_0$  и  $\deg' \tilde{v}_0$ . В результате получим удачные вершины  $\bar{v}_0$  и  $\tilde{v}_0$ . Лемма 6 доказана.

### Заключение

В настоящей работе разработан МПВ, позволяющий найти минимальное число рёбер в графах из  $\mathcal{I}(n, d)$  для  $d \geq 5$  и перечислить предельные графы, на которых это число рёбер достигается, что усиливает предыдущие результаты по этой теме. Поставленные в статье задачи решаются с помощью систем линейных уравнений и неравенств с несколькими параметрами, отражающими различные свойства рассматриваемых графов. Указанный метод может быть перспективным для решения других задач экстремальной теории графов.

Автор выражает глубокую благодарность проф. Д. Ю. Ханукаевой кафедры высшей математики РГУ нефти и газа (НИУ) им. И. М. Губкина, ценные замечания которой помогли улучшить текст статьи.

### Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт бюджета Российского гос. университета нефти и газа (НИУ) им. И. М. Губкина. Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

### Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

### Литература

1. **Жожикашвили В. А., Вишневский В. М.** Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВМ. М.: Радио и связь, 1988. 192 с.
2. **Зайченко Ю. П.** Задачи проектирования структуры распределённых вычислительных сетей // Автоматика. 1981. № 4. С. 27–40.
3. **Вишневский В. М., Савинецкий А. Б., Федотов Е. В.** Анализ и реализация одного метода повышения производительности сети пакетной коммутации // Автоматика и вычисл. техника. 1987. № 2. С. 24–30.
4. **Фараджев И. А.** Генерирование неизоморфных графов с заданным распределением степеней вершин // Алгоритмические исследования в комбинаторике. М.: Наука, 1978. С. 11–19.
5. **Murty U. S. R.** On some extremal graphs // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1968. V. 19. P. 69–74.
6. **Murty U. S. R.** Extremal nonseparable graphs of diameter 2 // Proof techniques in graph theory. Proc. 2nd Ann Arbor Graph Theory Conf. (Ann Arbor, USA, Feb., 1968). New York: Acad. Press, 1969. P. 111–117.
7. **Caccetta L.** Extremal graphs of diameter 3 // J. Austral. Math. Soc. 1979. V. A28, No. 1. P. 63–84.
8. **Caccetta L.** On extremal graphs with given diameter and connectivity // Ann. New York Acad. Sci. Topics Graph Theory. 1979. V. 328. P. 76–94.
9. **Caccetta L.** Extremal graphs of diameter 4 // J. Comb. Theory, Ser. B. 1976. V. 21. P. 104–115.
10. **Белоцерковский Д. Л.** Характеризация некоторых экстремальных графов с диаметром не превосходящим трёх // Дискрет. математика. 1997. Т. 9, № 1. С. 134–146.
11. **Белоцерковский Д. Л.** Об одной задаче перечисления образующих графов с ограничением на диаметр // Пробл. управления. 2010. № 1. С. 2–6.
12. **Belotserkovsky D. L.** The smallest number of edges in a 2-connected graph with specified diameter // Discrete Math. 2007. V. 307, No. 19–20. P. 2376–2384.
13. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
14. **Харари Ф., Палмер Э.** Перечисление графов. М.: Мир, 1977. 327 с.

15. **Bollobas B.** Strongly two-connected graphs // Proc. 7th Southeastern Conf. Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Baton Rouge, USA, Feb. 9–12, 1976). Winnipeg, Man.: Utilitas Math., 1976. P. 161–170. (Congr. Numer.; V. 17).
16. **Bollobas B.** Extremal graph theory. London: Acad. Press, 1978. 488 p.
17. **Bollobas B.** Extremal graph theory. Mineola: Dover Publ., 2004. 512 p.
18. **Bollobas B.** Modern graph theory. New York: Springer, 1998. 394 p. (Graduate Texts Math.; V. 184).
19. **Bollobas B.** Modern graph theory. Heidelberg: Springer, 2013. 408 p.
20. **Lovasz L.** Large networks and graph limits. Hoboken, NJ: AMS, 2012. 475 p.
21. **Jarry A., Laugier A.** On the minimum number of edges of two-connected graphs with given diameter // Discrete Math. 2012. V. 312. P. 757–762.

*Белоцерковский Дмитрий Леонидович*

Статья поступила  
18 октября 2024 г.

После доработки —  
2 июня 2025 г.

Принята к публикации  
22 июня 2025 г.

ON EXTREME BICONNECTED GRAPHS  
WITH SPECIFIED DIAMETER

D. L. Belotserkovsky

Gubkin Russian State University of Oil and Gas,  
65 Leninskiy Avenue, 119991 Moscow, Russia  
E-mail: [belozer68@mail.ru](mailto:belozer68@mail.ru)

**Abstract.** The article considers two problems in the extremal graph theory. The first problem is formulated and completely proved as a theorem on the exact lower bound for the number of edges in a biconnected graph of diameter not exceeding a given value. A discharging method is developed and used to solve the second problem: Enumerating the graphs for which the lower bound is attained. Since the problem of enumerating graphs is very difficult and has not been solved in general form before, all the so-called limit graphs are enumerated on the basis of the discharging method. The problem of finding all limit graphs is formulated and proved as the second theorem in the article. Further, we explain why limit graphs are the most promising for the enumeration problem, and give some techniques for constructing extremal graphs using the limit graphs already obtained. Illustr. 11, bibliogr. 21.

**Keywords:** graph, diameter, exact lower bound, charging method, discharging method (DM).

**References**

1. **V. A. Zhozhikashvili** and **V. M. Vishnevskiy**, *Queueing Networks: Theory and Application to Computer Networks* (Radio Svyaz, Moscow, 1988) [Russian].
2. **Yu. P. Zaychenko**, Problems of design for distributed computing networks, *Avtomatika*, No. 4, 27–40 (1981) [Russian].
3. **V. M. Vishnevskiy**, **A. B. Savinetskiy**, and **E. V. Fedotov**, Analysis and implementation of one method to improve the performance of a packet switching network, *Autom. Vychisl. Tekh.*, No. 2, 24–30 (1987) [Russian].
4. **I. A. Faradzhev**, Generating non-isomorphic graphs with a given distribution of vertex degrees, in *Algorithmic Research in Combinatorics* (Nauka, Moscow, 1978), pp. 11–19 [Russian].

---

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **19** (4) (2025).

5. **U. S. R. Murty**, On some extremal graphs, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* **19**, 69–74 (1968).
6. **U. S. R. Murty**, Extremal nonseparable graphs of diameter 2, in *Proof Techniques in Graph Theory*, Proc. 2nd Ann Arbor Graph Theory Conf. (Ann Arbor, USA, Feb., 1968) (Acad. Press, New York, 1969), pp. 111–117.
7. **L. Caccetta**, Extremal graphs of diameter 3, *J. Austral. Math. Soc.* **A28** (1), 63–84 (1979).
8. **L. Caccetta**, On extremal graphs with given diameter and connectivity, *Ann. New York Acad. Sci. Topics Graph Theory* **328**, 76–94 (1979).
9. **L. Caccetta**, Extremal graphs of diameter 4, *J. Comb. Theory, Ser. B*, **21**, 104–115 (1976).
10. **D. L. Belotserkovsky**, Characterization of some extremal graphs with diameter not exceeding three, *Diskretn. Mat.* **9** (1), 134–146 (1997) [Russian] [*Discrete Math. Appl.* **7** (2), 163–176 (1997)].
11. **D. L. Belotserkovsky**, On a problem of enumeration of generating graphs with a diameter constraint, *Probl. Upr.*, No. 1, 2–6 (2010) [Russian].
12. **D. L. Belotserkovsky**, The smallest number of edges in a 2-connected graph with specified diameter, *Discrete Math.* **307** (19–20), 2376–2384 (2007).
13. **F. Harary**, *Graph Theory* (Addison-Wesley, London, 1969; Mir, Moscow, 1973 [Russian]).
14. **F. Harary** and **E. M. Palmer**, *Graphical Enumeration* (Acad. Press, New York, 1973; Mir, Moscow, 1977 [Russian]).
15. **B. Bollobas**, Strongly two-connected graphs, in *Proc. 7th Southeastern Conf. Combinatorics, Graph Theory, and Computing* (Baton Rouge, USA, Feb. 9–12, 1976) (Utilitas Math., Winnipeg, Man., 1976), pp. 161–170 (Congr. Numer., Vol. 17).
16. **B. Bollobas**, *Extremal Graph Theory* (Acad. Press, London, 1978).
17. **B. Bollobas**, *Extremal Graph Theory* (Dover Publ., Mineola, 2004).
18. **B. Bollobas**, *Modern Graph Theory* (Springer, New York, 1998) (Graduate Texts Math., Vol. 184).
19. **B. Bollobas**, *Modern Graph Theory* (Springer, Heidelberg, 2013).
20. **L. Lovasz**, *Large Networks and Graph Limits* (AMS, Hoboken, NJ, 2012).
21. **A. Jarry** and **A. Laugier**, On the minimum number of edges of two-connected graphs with given diameter, *Discrete Math.* **312**, 757–762 (2012).

Dmitry L. Belotserkovsky

Received October 18, 2024

Revised June 2, 2025

Accepted June 22, 2025