

ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 33 № 1 2026

Новосибирск
Издательство Института математики

ПРОСТЫЕ И НЕПРОСТЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ ТУРНИРЫ

А. О. Шабаркова^а, М. Б. Абросимов^б

Саратовский национальный исследовательский
гос. университет им. Н. Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, 83, 410012 Саратов, Россия

E-mail: ^аshabarkova_alex.andra@mail.ru, ^бmic@rambler.ru

Аннотация. Рассматриваются регулярные турниры относительно свойства простоты. Описаны виды турниров и их структура, и показано, какие из них простые, а какие нет. Доказывается, что для каждого нечётного n существует по крайней мере один простой регулярный n -вершинный турнир. Для каждого $n = 3k$ существует турнир, не являющийся простым. Также приводится оценка числа турниров с такими структурами для различных значений размерности. Табл. 1, ил. 3, библиогр. 10.

Ключевые слова: турнир, регулярный турнир, простой турнир, теория графов.

Введение

Напомним, что турниром называется полный направленный граф, т. е. ориентированный граф, в котором между каждой парой вершин есть в точности одна дуга. Будем обозначать турнир через $\vec{T} = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество (вершины турнира), а $\alpha \subseteq V \times V$ — отношение смежности на множестве V (дуги турнира). В каждой вершине u турнира есть петля, т. е. дуга вида (u, u) . При изображении турниров петли обычно опускаются. Основные определения следуют работе [1].

Классом эквивалентности ε на множестве S , соответствующим элементу, называется множество $\varepsilon(x) = \{y \in S \mid x \sim y\}$.

Пусть ε — некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин V орграфа $\vec{G}$. Фактор-графом орграфа $\vec{G}$ по эквивалентности ε называется оргграф $\vec{G}/\varepsilon = (V/\varepsilon, \alpha_\varepsilon)$, где V/ε — множество классов эквивалентности ε , $\alpha_\varepsilon = \{(\varepsilon(v_1), \varepsilon(v_2)) \mid \exists u_1 \in \varepsilon(v_1), u_2 \in \varepsilon(v_2): (u_1, u_2) \in \alpha\}$.

Конгруэнция турнира $\vec{T} = (V, \alpha)$ — это эквивалентность на множестве его вершин такая, что фактор-граф по ней является турниром. Тем самым конгруэнция турнира $\vec{T} = (V, \alpha)$ — это эквивалентность $\theta \subseteq$

$V \times V$ такая, что никакие две вершины, соответствующие различным θ -классам, не имеют встречных дуг. Очевидно, что любой турнир имеет по крайней мере две конгруэнции — универсальную и тождественную. Совокупность $\text{Con } \vec{T}$ всех конгруэнций турнира $\vec{T}$ образует решётку [2].

Турнир $\vec{T} = (V, \alpha)$ называется простым, если решётка $\text{Con } \vec{T}$ двухэлементна, т. е. если $\vec{T}$ не содержит собственных нетождественных конгруэнций. В англоязычной литературе можно встретить различные термины для обозначения простого турнира: simple, prime, indecomposable.

Турнир $\vec{T} = (V, \alpha)$ называется простым (примитивным или неразложимым), если он не содержит никаких нетривиальных собственных однородных множеств. Однородное множество — это непустое подмножество вершин $H \subseteq V(T)$ такое, что для любой вершины $v \notin H$ все дуги между v и вершинами из H направлены одинаково, т. е. либо все вершины из H указывают на v , либо v указывает на все вершины из H . Тривиальные однородные множества — множества, состоящие из одной вершины, и всё множество вершин V . Нетривиальное собственное однородное множество H — это то, которое не является ни одним из вышеперечисленных (т. е. $1 < |H| < |V|$).

Модулем турнира $\vec{T} = (V, \alpha)$ называется подмножество его вершин X такое, что для любых $a, b \in X$ и $x \in V \setminus X$ дуги (a, x) и (b, x) принадлежат или не принадлежат множеству α одновременно. Турнир называется простым или неразложимым, если все его модули тривиальные. Модуль называется тривиальным, если он пуст, состоит из одной вершины или совпадает с V .

Граф называется регулярным, если все его вершины имеют одинаковые степени захода и исхода.

Списком смежности вершины v орграфа $\vec{T} = (V, \alpha)$ называется множество $N^+(v) = \{u \in V \mid (v, u) \in \alpha\}$. В списке смежности каждой вершины v турнира сама вершина v также присутствует. Для удобства записи для турнира вершину v не будем указывать в её списке смежности. Списком смежности орграфа называется совокупность списков смежности всех его вершин.

Эксцентриситет вершины графа — наибольшее из расстояний от этой вершины до всех остальных. Под расстоянием от вершины v до вершины u понимается длина кратчайшего пути от v до u . Диаметр графа — это наибольший из эксцентриситетов всех его вершин.

Строению турниров посвящено много работ (см., например, [3]), простые турниры рассмотрены в работе [4]. Структуре и использованию простых в смысле неразложимости графов посвящено также достаточно много работ [5, 6]. В [7] рассмотрено свойство простоты турнира в зависимости от диаметра, а именно, описана структура турнира и найдено

количество простых турниров с числом вершин больше 5, чей диаметр на 1 и 2 меньше размерности турнира. В настоящей работе обратимся к регулярным турнирам. Рассмотрим этот класс графов относительно уже упомянутого выше свойства простоты, а также опишем их структуру и найдём их число. Начнём с простого регулярного турнира.

1. Простые регулярные турниры

Теорема 1. *Для каждого нечётного n существует по крайней мере один простой регулярный турнир. При некоторой нумерации вершин список смежности такого турнира представим в виде*

$$\alpha = \left\{ (v_i, v_{(i+j) \bmod n}) \mid j \in 1, \frac{n-1}{2}, i \in \overline{1, n} \right\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что данный турнир простой. Для того чтобы турнир был простым, он должен иметь только две конгруэнции: тождественную и универсальную, которые есть всегда, значит, осталось показать, что не существует нетривиальной нетождественной конгруэнции. Докажем методом от противного. Рассмотрим два случая: когда в один класс конгруэнции входят вершины, которые не являются соседними, и когда в один класс конгруэнции входят соседние вершины.

СЛУЧАЙ 1. Объединим вершины v_i и v_{i+k} в один класс конгруэнции. Тогда все вершины турнира будут разбиты на две части относительно этого класса и все вершины меньшей части, очевидно, будут входить в рассматриваемый класс конгруэнции, поскольку дуги её вершин будут иметь разное направление для v_i и для v_{i+k} . Рассмотрим две соседние вершины из полученного класса конгруэнции. Вершина, противоположная дуге между ними, также будет входить в класс конгруэнции, поскольку будет иметь разнонаправленные дуги в эти соседние вершины. Таким образом, перебирая последовательно все соседние пары вершин, обнаружим, что в полученный класс конгруэнции будут включены все вершины турнира.

СЛУЧАЙ 2. Объединим соседние вершины v_i и v_{i+1} в один класс конгруэнции, при этом вершина, противоположная дуге между ними, также будет входить в этот класс конгруэнции. Затем, рассматривая различные объединения вершин из класса конгруэнции, получим ситуацию из случая 1, где вершины всего турнира можно разделить на две разновеликие части. Дальнейшее включение вершин проведём согласно случаю 2.

Таким образом, перебирая все возможные начальные пары вершин, видим, что при любом их выборе рассматриваемый турнир имеет двухэлементную решётку конгруэнций.

Значит, турнир простой. Теорема 1 доказана.

На рис. 1 демонстрируются простые регулярные турниры на трёх и пяти вершинах с описанной в теореме 1 структурой.

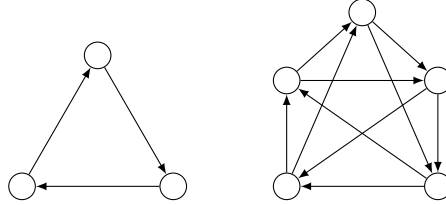


Рис. 1. Простые регулярные турниры со структурой из теоремы 1

Регулярный турнир также может не быть простым. Рассмотрим этот вопрос в следующем разделе.

2. Регулярные турниры, не являющиеся простыми

Теорема 2. Для турнира размерности $n = 3k$ при $k > 5$ существует не менее $2C_{|k|}^3 + |k|^2$ различных с точностью до изоморфизма регулярных турниров, не являющихся простыми, где $|k|$ — число неизоморфных регулярных турниров размерности k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим три регулярных турнира $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3$ размерности k . Объединим их в турнир размерности $3k$ следующим образом: дуги из всех вершин турнира $\vec{T}_1$ будут вести во все вершины турнира $\vec{T}_2$, дуги из всех вершин $\vec{T}_2$ — во все вершины $\vec{T}_3$, а дуги из всех вершин $\vec{T}_3$ — во все вершины $\vec{T}_1$. Очевидно, что полученный турнир простым не является: подтурниры $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3$ образуют нетривиальные классы конгруэнции, при этом он регулярный.

Определим, сколько турниров может быть получено по рассмотренной схеме. Данные по числу регулярных n -вершинных турниров при значениях $k \leq 25$ известны: 1, 1, 3, 15, 1223, 1 495 297, 18 400 989 629, 2 406 183 070 160 597 и т. д. [8, 9]. С ростом числа вершин их количество сильно растёт [10]. При $k = 1$ получим вырожденный случай, а именно, построенный по данной схеме турнир с выделением в отдельный класс конгруэнции каждой вершины будет обладать тождественной конгруэнцией и, следовательно, будет простым. При $k = 3, 5$ есть только один регулярный турнир, а значит, по предложенной схеме может быть получен также только один регулярный турнир, не являющийся простым, с числом вершин 9 и 15.

При $k \geq 7$ число регулярных k -вершинных турниров не менее 3. Обозначим через $|k|$ число регулярных турниров размерности k . Поскольку

в турнире, полученном по описанной схеме, используются три подтурнира, имеются три возможности:

- 1) взять все подтурниры изоморфными;
- 2) взять два изоморфных подтурнира, а третий отличным от них;
- 3) взять три разных турнира.

СЛУЧАЙ 1 даёт нам $|k|$ неизоморфных турниров.

СЛУЧАЙ 2. Можем выбрать турнир, который будет использован дважды, $|k|$ способами и турнир, который будет использован единожды, $|k| - 1$ способом. Конкретный выбор турниров $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3$ не имеет значения, так как в результате соединения получим изоморфные схемы. В отличие от следующего случая.

СЛУЧАЙ 3. Три турнира можно выбрать $C_{|k|}^3$ способами. Вместе с тем, существует два различных способа назначения выбранных турниров турнирам $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3$: $\vec{T}_1, \vec{T}_2, \vec{T}_3$ и $\vec{T}_1, \vec{T}_3, \vec{T}_2$. Итого получается $2C_{|k|}^3$ неизоморфных турниров.

Суммируя три случая, получаем итоговое значение $2C_{|k|}^3 + |k|^2$. Теорема 2 доказана.

В качестве примера турнира, удовлетворяющего условию теоремы 2, приведём турнир, имеющий 15 вершин, фактор-граф которого состоит из трёх вершин, а каждому классу конгруэнции принадлежат пять вершин. Данный турнир изображён на рис. 2.

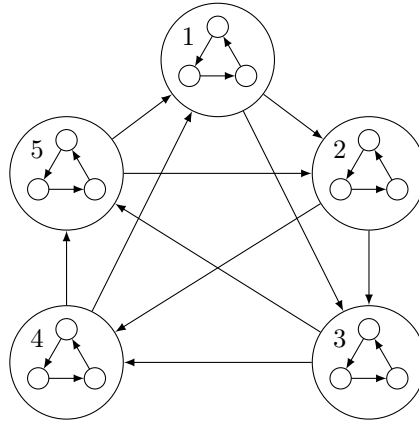


Рис. 2. Турнир с 15 вершинами, имеющий структуру из теоремы 2

Обобщим полученный результат.

Теорема 3. Для турнира размерности $n = tk$ существует не менее $\overline{C}_{|k|}^t$ различных с точностью до изоморфизма регулярных турниров,

не являющихся простыми, где m нечётное, $|k|$ — число регулярных турниров размерности k , а $\overline{C}_{|k|}^m$ — число сочетаний с повторениями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим m регулярных турниров размерности k и объединим их в турнир размерности mk следующим образом: за основу возьмём регулярный турнир размерности m , но его обычные вершины заменим регулярными турнирами размерности k . Турнир такой структуры для $m = 5$ и $k = 3$ изображён на рис. 3.

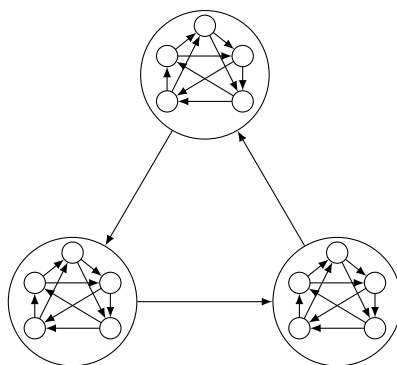


Рис. 3. Турнир с 15 вершинами

Очевидно, что полученный турнир регулярный. Нижняя граница числа турниров, имеющих подобную структуру, находится аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 2. Необходимо только изменить число вершин в основном турнире. Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Как видно из рис. 2 и 3, никаких иных ограничений, кроме нечётности, на k и m не накладывается. Любое из этих чисел может быть меньше или больше другого, а также они могут быть равны друг другу.

Таким образом, существуют как минимум один вид простых регулярных турниров и группа непростых регулярных турниров. Есть ли другие

Таблица 1

Число непростых регулярных турниров на n вершинах

n	Общее число	Непростые	Регулярные	Непростые рег.
6	56	41	—	—
7	456	259	3	0
8	6 880	2 872	—	—
9	191 536	54 881	15	1
10	9 733 056	1 826 895	—	—
11	903 753 248	106 876 819	1 223	3

виды простых и непростых регулярных турниров? Для ответа на этот вопрос проведён вычислительный эксперимент, в ходе которого подсчитано число всех турниров до размерности 11 включительно, а также число регулярных среди всех и число непростых среди регулярных турниров. Результаты подсчётов приведены в табл. 1. Так как регулярных турниров с чётным числом вершин не существует, в соответствующих местах стоят прочерки. Полученные результаты показывают, что существуют простые регулярные турниры, имеющие иную структуру, чем описано в теореме 1, а также, что существуют непростые регулярные турниры, не подходящие под условия теорем 2 и 3.

Замечание 2. Интересно провести сравнение результатов о простоте турнира относительно его регулярности с полученными ранее данными о простоте турнира относительно значения его диаметра. Как мы наблюдаем, регулярность не накладывает строгих ограничений на простоту: регулярный турнир может как быть простым, так и не быть. В этом она соотносится со значением диаметра, на 2 меньшим, чем число вершин турнира. Турниры с таким диаметром также могут как быть простыми, так и нет. В отличие от них турниры, обладающие диаметром, на 1 меньшим их размерности, всегда простые [7].

Литература

1. Богомолов А. М., Салий В. Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Физматлит, 1997. 368 с.
2. Киреева А. В. Конгруэнции турниров // Студенты — ускорению научного прогресса: Сб. студ. науч. работ. Вып. 2. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990. С. 3–5.
3. Moon J. W. Topics on tournaments. New York: Holt, Rinehart, Winston, 1968. 138 p.
4. Erdős P., Fried E., Hajnal A., Milner E. C. Some remarks on simple tournaments // Algebra Univers. 1972. V. 2, No. 2. P. 238–245.
5. Habib M., Maurer M. C. On the X -join decomposition for undirected graphs // Discrete Appl. Math. 1979. V. 1. P. 201–207.
6. Alrowily I. A. Some structural results on prime graphs // J. Adv. Math. 2019. V. 17. P. 362–369.
7. Шабаркова А. О., Абросимов М. Б. Связь простоты турнира с различными значениями его диаметра // Int. J. Open Inf. Technol. 2022. Т. 10, № 6. С. 28–32.
8. Haglin D. J. Number of unlabeled regular tournaments with $2n + 1$ nodes // The on-line encyclopedia of integer sequences. Highland Park, NJ: OEIS Found., 2025. URL: oeis.org/A096368 (accessed: 19.10.2025).
9. Brinkmann G. Generating regular directed graphs // Discrete Math. 2012. V. 313. P. 1–7.

-
- 10. McKay B.** The asymptotic numbers of regular tournaments, Eulerian digraphs and Eulerian oriented graphs // *Combinatorica*. 1990. V. 10. P. 367–377.

Шабаркова Александра Олеговна
Абросимов Михаил Борисович

Статья поступила
10 ноября 2025 г.
После доработки —
1 декабря 2025 г.
Принята к публикации
22 декабря 2025 г.

SIMPLE AND NON-SIMPLE REGULAR TOURNAMENTS

A. O. Shabarkova^a and M. B. Abrosimov^b

Saratov State University,
83 Astrakhanskaya Street, 410012 Saratov, Russia
E-mail: ^ashabarkova_alex.andra@mail.ru, ^bmic@rambler.ru

Abstract. We consider regular tournaments with respect to the property of simplicity. The types of tournaments and their structure are described, while it is shown which of them are simple and which are not. We prove that for every odd n there exists at least one simple regular n -vertex tournament and for every $n = 3k$ there is a tournament that is not simple. An estimate for the number of tournaments with such structures for different dimension values is also given. Tab. 1, illustr. 3, bibliogr. 10.

Keywords: tournament, regular tournament, simple tournament, prime tournament, graph theory.

References

1. **A. M. Bogomolov** and **V. N. Saliy**, *Algebraic Foundations of the Theory of Discrete Systems* (Fizmatlit, Moscow, 1997) [Russian].
2. **A. V. Kireeva**, Congruences of tournaments, in *Students — To Acceleration of Scientific Progress*, Vol. 2 (Izd. Saratov. Univ., Saratov, 1990), pp. 3–5 [Russian].
3. **J. W. Moon**, *Topics on Tournaments* (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968).
4. **P. Erdős**, **E. Fried**, **A. Hajnal**, and **E. C. Milner**, Some remarks on simple tournaments, *Algebra Univers.* **2** (2), 238–245 (1972).
5. **M. Habib** and **M. C. Maurer**, On the X -join decomposition for undirected graphs, *Discrete Appl. Math.* **1**, 201–207 (1979).
6. **I. A. Alrowily**, Some structural results on prime graphs, *J. Adv. Math.* **17**, 362–369 (2019).
7. **A. O. Shabarkova** and **M. B. Abrosimov**, Relation between the simplicity of a tournament and various values of its diameter, *Int. J. Open Inf. Technol.* **10** (6), 28–32 (2022) [Russian].

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **20** (1) (2026).

-
8. **D. J. Haglin**, Number of unlabeled regular tournaments with $2n + 1$ nodes, in *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS Found., Highland Park, NJ, 2025), URL: oeis.org/A096368 (accessed: 19.10.2025).
 9. **G. Brinkmann**, Generating regular directed graphs, *Discrete Math.* **313**, 1–7 (2012).
 10. **B. McKay**, The asymptotic numbers of regular tournaments, Eulerian digraphs and Eulerian oriented graphs, *Combinatorica* **10**, 367–377 (1990).

Aleksandra O. Shabarkova
Mikhail B. Abrosimov

Received November 10, 2025
Revised December 1, 2025
Accepted December 22, 2025