

ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 33 № 1 2026

Новосибирск
Издательство Института математики

О КРАЙНИХ ТОЧКАХ МНОЖЕСТВА ХАРШАНИ

В. А. Васильев

Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: vasilev@math.nsc.ru

Аннотация. В работе даётся полное описание крайних точек множества Харшани произвольной конечной кооперативной игры с побочными платежами. Выигрыши, отвечающие каждой такой точке, задаются некоторой полной упорядоченностью всех игроков. При этом дивиденд каждой коалиции передаётся целиком тому из её участников, кто является первым (в случае отрицательности этого дивиденда) или последним (в случае неотрицательности такового) в данной коалиции в смысле заданной упорядоченности. Полученный результат дополняет известную теорему Шепли о строении ядер выпуклых кооперативных игр. Библиогр. 14.

Ключевые слова: кооперативная игра, ядро, распределение Харшани, крайняя точка многогранника Харшани.

Введение

В современной теории кооперативных игр с побочными платежами (ТУ-игры) одной из центральных задач является построение и анализ принципов оптимального распределения совокупного выигрыша между участниками. Наряду с классическими концепциями решения, такими как ядро и множество Вебера, фундаментальное значение имеет множество Харшани. Оно определяет границы справедливого распределения на основе вкладов коалиций и обобщает идею дележей через коалиционные дивиденды. Дивиденды Харшани, введенные в 1959 г., отражают «чистый» экономический эффект от кооперации внутри каждой конкретной коалиции. Распределение этих дивидендов между членами коалиций порождает класс векторов выплат Харшани. Множество Харшани определяется как выпуклая оболочка всех допустимых распределений дивидендов и представляет собой замкнутый выпуклый многогранник.

Известно, что множество Харшаньи любой кооперативной игры v совпадает с ядром некоторой другой выпуклой игры, определённым образом связанной с v . Несмотря на имеющееся уже достаточно полное представление о структуре ядер выпуклых игр, задача полной характеристики вершин многогранника Харшаньи для произвольных TU-игр долгое время оставалась нерешённой. Прямые вычисления здесь осложняются экспоненциальным ростом числа коалиций и знакопеременной природой дивидендов. В результате геометрия множества Харшаньи оказывается значительно сложнее строения классического ядра выпуклой игры.

В настоящей работе даётся полное описание крайних точек множества Харшаньи произвольной кооперативной игры n лиц. Полученный результат естественным образом сопоставляется с известной теоремой Шепли о строении ядер выпуклых кооперативных игр. В разд. 1 даётся определение множества Харшаньи $H(v)$ и приводится его представление в форме ядра некоторой выпуклой игры v_H , ассоциированной с исходной игрой v . Разд. 2 содержит подробное описание крайних точек множества Харшаньи и указывает их отличие от вершин ядер выпуклых кооперативных игр.

1. Основные определения

Напомним (см., например, [1–4]) определение классической кооперативной игры n лиц с побочными платежами (TU-кооперативной игры в другой терминологии). Таковой называется пара $\Gamma = (N, v)$, где множество $N = \{1, \dots, n\}$ описывает совокупность игроков игры Γ , а отображение $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ задаёт характеристическую функцию этой игры, указывающую максимальные гарантированные выигрыши $v(S)$ коалиций $S \subseteq N$ (по определению $v(\emptyset) = 0$). В дальнейшем, как обычно, всякую игру $\Gamma = (N, v)$ будем отождествлять с её характеристической функцией v . Простейшими примерами классических игр являются так называемые *игры единогласия*¹⁾ u^S , $S \in \sigma_0$, определяемые соотношениями

$$u^S(T) = \begin{cases} 1, & \text{если } S \subseteq T, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1)$$

где через σ_0 обозначается совокупность всех непустых коалиций игры v :

$$\sigma_0 = \{S \subseteq N \mid S \neq \emptyset\}.$$

Нетрудно убедиться, что игры единогласия составляют базис линейного пространства $V = V(N)$ всех TU-кооперативных игр n лиц, заданных на множестве N (см. [4]), а именно, для каждой игры $v \in V$ существует

¹⁾ В другой терминологии — простейшие игры [3].

единственное представление в виде линейной комбинации игр u^S , определяемых формулой (1):

$$v = \sum_{S \in \sigma_0} v_S u^S, \quad v \in V. \quad (2)$$

Коэффициенты v_S , участвующие в разложении (2) игры v , называются *дивидендами Харшаньи* этой игры²⁾.

Далее, как обычно, для $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $S \in \sigma_0$ используются сокращения

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i, \quad S \in \sigma_0.$$

Для описания множества Харшаньи [7] игры v введём необходимые определения. Обозначим через Δ^S грань симплекса $\sigma_F^* = \{\alpha \in \mathbb{R}_+^N \mid \alpha(N) = 1\}$, отвечающую коалиции $S \in \sigma_0$:

$$\Delta^S = \{\alpha^S = (\alpha_i^S)_{i \in N} \in \mathbb{R}_+^N \mid \alpha^S(N) = 1, \alpha_{N \setminus S}^S = 0\}, \quad S \in \sigma_0, \quad (3)$$

где, как обычно, через x_S обозначается сужение вектора $x = (x_i)_{i \in N}$ из $\mathbb{R}^N$ на множество S , т. е. $x_S = (x_i)_{i \in S} \in \mathbb{R}^S$.

Определение 1. Вектор $x \in \mathbb{R}^N$ называется *распределением Харшаньи* (сокращённо *H-распределением*) игры v , если существуют распределения $\alpha^S \in \Delta^S$, $S \in \sigma_0$, такие, что справедливо представление

$$x = \sum_{S \in \sigma_0} v_S \alpha^S. \quad (4)$$

Совокупность *H-распределений* игры v

$$H(v) = \left\{ \sum_{S \in \sigma_0} v_S \alpha^S \mid \alpha^S \in \Delta^S, S \in \sigma_0 \right\} \quad (5)$$

называется её *множеством Харшаньи*³⁾ (см. [5–7]).

Замечание 1. Как видно из определения 1, множество Харшаньи является взвешенной суммой $\sum_{S \in \sigma_0} v_S \Delta^S$ конечного числа выпуклых многогранников (каждый из которых согласно (3) представляет собой симплекс той или иной размерности). Следовательно (см. [8, 9]), множество $H(v)$ — тоже выпуклый многогранник (т. е. является выпуклым компактом, представимым в виде пересечения конечного числа полупространств). Список указанных полупространств для $H(v)$ найден в работе [7], где также приведен и список крайних точек множества $H(v)$,

²⁾ Детальное описание общих свойств дивидендов Харшаньи и возможности их использования для анализа несимметричных значений игр с побочными платежами см., например, в [5, 6].

³⁾ В литературе используется также синоним *многогранник Харшаньи*.

но соответствующее доказательство дано лишь в эскизной форме. Цель настоящей заметки состоит в восполнении имеющихся в [7] пробелов.

Для описания крайних точек $H(v)$ понадобятся два вспомогательных результата из [7], представляющих и самостоятельный интерес.

Лемма 1. Для произвольной игры $v \in V(N)$ справедлива формула

$$v(S) = \sum_{T \subseteq S} v_T, \quad S \in \sigma_0. \quad (6)$$

В частности, для большой коалиции N выполняется равенство

$$v(N) = \sum_{T \subseteq N} v_T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду равенства $v = \sum_{T \in \sigma_0} v_T u^T$ и соотношений $u^T(S) = 1$ при $T \subseteq S$ и $u^T(S) = 0$ при $T \not\subseteq S$ (справедливых для любой коалиции $S \in \sigma_0$ в силу определения простейших игр u^T) получаем

$$v(S) = \sum_{T \in \sigma_0} v_T u^T(S) = \sum_{T \subseteq S} v_T, \quad S \in \sigma_0.$$

Тем самым и при $S = N$ имеем требуемое равенство

$$v(N) = \sum_{S \in \sigma_0} v_T u^T(N) = \sum_{T \subseteq N} v_T.$$

Лемма 1 доказана.

Используя лемму 1, получим её обобщение, имеющее важное значение для описания крайних точек многогранника $H(v)$. Введём необходимые обозначения. Пусть $S_1, \dots, S_m$ — множество m произвольных непустых попарно не пересекающихся коалиций игры v . Зададим семейство $[S_1, \dots, S_m]$ формулой

$$[S_1, \dots, S_m] = \left\{ T \subseteq \bigcup_{i=1}^m S_i \mid T \cap S_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, m \right\}.$$

Напомним [2], что величина $v_m(S_1, \dots, S_m)$, определяемая соотношением

$$v_m(S_1, \dots, S_m) = \sum_{K \subseteq M} (-1)^{m-|K|} v\left(\bigcup_{i \in K} S_i\right), \quad v \in V(N), \quad (7)$$

где $M = \{1, \dots, m\}$, называется *полиномиальной разностью* (порядка m) функции v (на разбиении $\{S_1, \dots, S_m\}$). Приведём используемое далее выражение полиномиальной разности функции $v \in V(N)$ через её дивиденды Харшаньи.

Утверждение 1. Для произвольной игры $v \in V(N)$ и любого семейства её m непустых попарно не пересекающихся коалиций $S_1, \dots, S_m$ выполняется равенство

$$v_m(S_1, \dots, S_m) = \sum_{T \in [S_1, \dots, S_m]} v_T, \quad v \in V(N). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу (6), распишем альтернированную сумму через соответствующие дивиденды Харшаньи её слагаемых. Отметим сразу, что среди них, очевидным образом, фигурируют (с соответствующим знаком) лишь те дивиденды v_T , для которых T содержится в объединении коалиций S_i : $T \subseteq \sum_{i=1}^m S_i$. Возможны два случая:

- 1) T пересекается с каждой из коалиций S_i , $i = 1, \dots, m$;
- 2) T не пересекается хотя бы с одной из коалиций S_i .

Ясно, что в первом случае дивиденд v_T фигурирует только в одном слагаемом альтернированной суммы $\sum_{K \subseteq M} (-1)^{m-|K|} v(\bigcup_{i \in K} S_i)$, а именно, в слагаемом $v(\bigcup_{i \in M} S_i)$. Следовательно, в итоговую сумму он входит с коэффициентом $+1$.

Рассматривая второй случай, положим $L = \{i \in M \mid S_i \cap T = \emptyset\}$. В этом случае $L \neq \emptyset$, поэтому, вычисляя коэффициент a_T при v_T в альтернированной сумме, согласно формулам (6) и (7) с точностью до знака имеем $a_T = \sum_{k=0}^l (-1)^k C_l^k$. Отсюда по известной комбинаторной формуле получаем $a_T = (1-1)^l = 0$. Итак, в силу произвольности выбора T имеем требуемое равенство (8). Утверждение 1 доказано.

В заключение раздела напомним используемое в дальнейшем понятие классического ядра $C(v)$ игры v , которое задаётся формулой

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = v(N), x(S) \geq v(S), S \in \sigma_0\}$$

и определяет совокупность дележей игры v , не блокируемых никакой коалицией $S \in \sigma_0$ (см., например, [4, 10, 11]). В дальнейшем будем опираться на следующую характеристику множества Харшаньи, полученную в [7].

Теорема 1. Для произвольной игры $v \in V(N)$ справедливо представление $H(v) = C(v_H)$, где

$$v_H(S) = v(S) - v_2^-(S, N \setminus S), \quad S \in \sigma_0. \quad (9)$$

Здесь и далее используется сокращение $v_2^-(S, N \setminus S) = (v^-)_2(S, N \setminus S)$, где через v^- обозначается функция

$$v^-(S) = \sum_{T \subseteq S} \max \{-v_T, 0\}, \quad S \subseteq N. \quad (10)$$

2. Вершины многогранника Харшаньи

Как отмечалось в разд. 1, полиэдральное множество $H(v)$, определённое формулами (4) и (5), задаётся системой линейных неравенств, характеризующих ядро другой кооперативной игры v_H , порождаемой функцией v . А именно, оказывается [7], что для всех кооперативных игр n лиц справедливо представление

$$H(v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = v(N), x(S) \geq v_H(S), S \subseteq N\} \quad (11)$$

при $v \in V(N)$. Также в [7] установлено, что для любой игры $v \in V(N)$ ассоциированная с ней игра v_H выпукла⁴⁾. Именно этот факт вместе с равенством (11) и известной теоремой Шепли о крайних точках ядер выпуклых кооперативных игр [12] используется в настоящем разделе для описания крайних точек многогранника Харшаньи. Как видно из приводимой ниже теоремы 2, и здесь определяющую роль играет способ распределения дивидендов Харшаньи между участниками соответствующих коалиций, определяемый их «иерархией». Этот способ, выявляющий единоличных собственников тех или иных дивидендов, указывается приводимым ниже построением.

Через $\Pi = \Pi(N)$ будем обозначать совокупность всех перестановок (взаимно однозначных отображений $\pi: N \rightarrow N$) множества N . При этом под упорядочением, определяемым перестановкой π , понимается расположение игроков из N в последовательность $(i_1, \dots, i_n)$, удовлетворяющую условию $\pi(i_k) = k$ для всех $k = 1, \dots, n$. Другими словами, номер игрока $i \in N$, определяемый перестановкой π , задаётся числом $\pi(i)$, при этом из двух игроков i и j старшим считается тот, чей номер ($\pi(i)$ или $\pi(j)$) больше.

Кроме того, как и в общем случае полуупорядоченных пространств (см. [13, 14]), через v^+ и v^- обозначаются положительная и отрицательная полиномиальные вариации функции $v \in V(N)$ соответственно:

$$v^+ = \sum_{S \in \sigma_0} \max\{v_S, 0\} u^S, \quad v^- = \sum_{S \in \sigma_0} \max\{-v_S, 0\} u^S \quad (12)$$

⁴⁾ Игра $u \in V(N)$ называется *выпуклой*, если для любых коалиций S и T выполняется неравенство $v(S \cup T) + v(S \cap T) \geq v(S) + v(T)$.

(несколько иной вариант определения функции v^- приводился в формуле (10)). Легко видеть, что из очевидного равенства $v = v^+ - v^-$ и соотношений (8)–(10) и (12) вытекает равенство

$$v_H(S) = \sum_{T \subseteq S} v_T - \sum_{T \in [S, N \setminus S]} (v^-)_T, \quad S \subseteq N, v \in V(N). \quad (13)$$

Теорема 2 (крайние точки $H(v)$). Множество $ex H(v)$ крайних точек многогранника Харшаньи состоит из маргинальных дележей v_H^π , $\pi \in \Pi$, выпуклой игры v_H , определяемых согласно соответствующему упорядочению $\pi = (i_1, \dots, i_n)$ по формуле

$$v_H^\pi(i_{k+1}) = v_H(S_{k+1}^\pi) - v_H(S_k^\pi), \quad k = 0, \dots, n-1,$$

где $S_k^\pi = \{i_1, \dots, i_k\}$, $k = 1, \dots, n$, а функция v_H задана формулой (13). При этом значения выигрышей $v_H^\pi(i_{k+1})$, выраженных в дивидендах Харшаньи игры v , задаются соотношениями⁵⁾

$$v_H^\pi(i_{k+1}) = v(i_{k+1}) + v_2^+(i_{k+1}, S_k^\pi) - v_2^-(i_{k+1}, N \setminus S_{k+1}^\pi) \quad (14)$$

для всех $k = 0, \dots, n-1$. Иначе говоря, в крайних точках многогранника $H(v)$ распределение дивидендов Харшаньи между участниками игры v при упорядочении π осуществляется (согласно (14)) по следующим правилам:

- 1) все неотрицательные дивиденды v_T целиком достаются старшим (при упорядочении π) участникам этих коалиций;
- 2) все отрицательные дивиденды v_T целиком достаются младшим⁶⁾ (при упорядочении π) участникам этих коалиций.

Для доказательства теоремы 2 воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2. Пусть T_1 , T_2 и T_3 — непустые попарно дизъюнктные (непересекающиеся) коалиции из множества N . Тогда для произвольной игры $v \in V(N)$ выполняется равенство

$$v_2(T_1, T_2 \cup T_3) = v_2(T_1, T_2) + v_2(T_1, T_3) + v_3(T_1, T_2, T_3), \quad (15)$$

где, как и ранее,

$$v_3(T_1, T_2, T_3) = v(T_1 \cup T_2 \cup T_3) - \sum_{\{i,j\} \subseteq \{1,2,3\}} v(T_i \cup T_j) + \sum_{i=1}^3 v(T_i).$$

⁵⁾ Ниже вводим сокращения $v_2^+(i, S \setminus i) = (v^+)_2(i, S \setminus i)$, $v_2^-(i, S \setminus i) = (v^-)_2(i, S \setminus i)$.

⁶⁾ Младшим (старшим) в T при упорядочении π называется игрок $i \in T$, для которого выполняется условие $\pi(i) \leq \pi(k)$ для всех $k \in T$ ($\pi(i) \geq \pi(k)$ для всех $k \in T$). Другими словами, это игрок, первым (последним) в смысле π вступивший в коалицию T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из утверждения 1, согласно которому

$$v_m(T_1, \dots, T_m) = \sum_{T \in [T_1, \dots, T_m]} v_T, \quad v \in V(N), \quad (16)$$

где $T_1, \dots, T_m$ — m произвольных непустых попарно не пересекающихся подмножеств N , а множество $[T_1, \dots, T_m]$ определяется формулой

$$[T_1, \dots, T_m] = \left\{ T \subseteq \bigcup_{i=1}^m T_i \mid T \cap T_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, m \right\}. \quad (17)$$

Действительно, нетрудно проверить, что в силу определения (17) для любых трёх непустых попарно не пересекающихся множеств T_1, T_2, T_3 справедливо тождество

$$[T_1, T_2 \cup T_3] = [T_1, T_2] \cup [T_1, T_3] \cup [T_1, T_2, T_3].$$

Отсюда на основании (16) получаем искомое равенство (15):

$$v_2(T_1, T_2 \cup T_3) = v_2(T_1, T_2) + v_2(T_1, T_3) + v_3(T_1, T_2, T_3).$$

Лемма 2 доказана.

Кроме того, при доказательстве теоремы 2 используется следующее важное свойство функций v_H .

Утверждение 2 (о маргинальных значениях функции v_H). Если коалиция S непустая, а игрок r содержится в её дополнении (т. е. r принадлежит $N \setminus S$), то справедлива формула

$$v_H(S \cup r) - v_H(S) = v(r) + v_2^+(r, S) - v_2^-(r, N \setminus (S \cup r)), \quad v \in V(N). \quad (18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $T_1 = S$, $T_2 = \{r\}$ и $T_3 = N \setminus (S \cup r)$ и используя лемму 2, получаем

$$\begin{aligned} v_2^-(S, N \setminus S) &= v_2^-(S, r \cup N \setminus (S \cup r)) = \\ &= v_2^-(S, r) + v_2^-(S, N \setminus (S \cup r)) + v_3^-(S, r, N \setminus (S \cup r)), \end{aligned} \quad (A1)$$

$$\begin{aligned} v_2^-(S \cup r, N \setminus (S \cup r)) &= v_2^-(S, N \setminus (S \cup r)) + \\ &+ v_2^-(r, N \setminus (S \cup r)) + v_3^-(S, r, N \setminus (S \cup r)). \end{aligned} \quad (A2)$$

Кроме того, в силу (6), (13) и очевидного равенства $v = v^+ - v^-$ выполняется соотношение

$$v(S \cup r) - v(S) = v(r) + v_2^+(r, S) - v_2^-(r, S). \quad (A3)$$

Введём обозначения

$$B_1 = v_2^-(S, N \setminus S), \quad B_2 = v_2^-(S \cup r, N \setminus (S \cup r)), \quad B_3 = v(S \cup r) - v(S).$$

Согласно формуле, задающей функцию v_H , имеем

$$v_H(S \cup r) - v_H(S) = B_1 - B_2 + B_3. \quad (19)$$

При этом в силу соотношений (A1) и (A3) выполняется равенство

$$B_1 + B_3 = v(r) + v_2^+(r, S) + v_2^-(S, N \setminus (S \cup r)) + v_3^-(S, r, N \setminus (S \cup r)).$$

Тогда с учётом (A2) получаем равенство

$$B_1 - B_2 + B_3 = v(r) + v_2^+(r, S) - v_2^-(r, N \setminus (S \cup r)),$$

которое согласно (19) и есть требуемая формула (18). Утверждение 2 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Нетрудно проверить, что (14) очевидным образом вытекает из утверждения 2, если положить $r = i_{k+1}$, $S = S_k^\pi$ и воспользоваться формулой (18). Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Интересно отметить, что для крайних точек ядра $C(v)$ выпуклой игры v согласно теореме Шепли [12] распределение дивидендов Харшаньи между участниками коалиций при упорядочении π осуществляется по другому правилу: все дивиденды v_T независимо от их знака достаются целиком старшим при упорядочении π участникам коалиций T .

Соединяя теорему 2 и замечание 2, получаем установленное ранее важное следствие (см., например, [6]).

Следствие 1. Если все дивиденды Харшаньи игры v , кроме отвечающих одноэлементным коалициям, неотрицательные, то её ядро совпадает с множеством Харшаньи: $C(v) = H(v)$. Другими словами, для указанных игр (называемых почти положительными [3]) делёж неблокируем тогда и только тогда, когда он является распределением Харшаньи рассматриваемой игры.

Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева (проект № FWNF-2026-0022). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. 708 с.
2. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971. 232 с.
3. Печерский С. Л., Яновская Е. Б. Кооперативные игры: Решения и аксиомы. СПб.: Изд-во Европ. ун-та в С.-Петербурге, 2004. 460 с.

4. Розенмюллер И. Кооперативные игры и рынки. М.: Мир, 1974. 160 с.
5. Dehez P. On Harsanyi dividends and asymmetric values // Int. Game Theory Rev. 2017. V. 19, No. 3. Article ID 1750012. 36 p.
6. Vasil'ev V. A. Cores and generalized NM-solutions for some classes of cooperative games // Russian contributions to game theory and equilibrium theory. Heidelberg: Springer, 2006. P. 91–149. (Theory Decis. Libr. C; V. 39).
7. Васильев В. А. Об H -дележах кооперативных игр // Оптимизация. Вып. 24. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1980. С. 18–32.
8. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Либроком, 2011. 176 с.
9. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.
10. Бондарева О. Н. Теория ядра для игры n лиц // Вестн. ЛГУ. Сер. Математика, механика, астрономия. 1962. Т. 13, № 3. С. 141–142.
11. Бондарева О. Н. Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр // Пробл. кибернетики. Вып. 10. М.: Физматгиз, 1963. С. 119–140.
12. Shapley L. S. Cores of convex games // Int. J. Game Theory. 1971. V. 1. P. 11–26.
13. Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961. 408 с.
14. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.

Васильев Валерий Александрович

Статья поступила
4 февраля 2026 г.
После доработки —
11 февраля 2026 г.
Принята к публикации
22 февраля 2026 г.

ON THE EXTREME POINTS OF THE HARSANYI SET

V. A. Vasil'ev

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: vasilev@math.nsc.ru

Abstract. A complete description of the extreme points of the Harsanyi set of a cooperative n -player game is given. We establish that each extreme Harsanyi payoff of any such game, as an extreme imputation in the core of a convex game, is determined by some linear ordering of the players. However, in contrast to the extreme core imputations of a convex game, in Harsanyi payoffs each coalitional dividend is assigned either to the last (when the dividend is nonnegative), or to the first member of the coalition (when the dividend is negative). The terms “last” and “first” are applied with respect to the mentioned linear ordering. Note that, according to the famous Shapley theorem on the core of a convex game, the extreme core imputation determined by such linear ordering assigns each coalitional dividend exactly to the last participant of the coalition (independently of the sign of the dividend under consideration). Bibliogr. 14.

Keywords: cooperative game, core, Harsanyi payoff, extreme point of Harsanyi polyhedron.

References

1. **J. von Neumann** and **O. Morgenstern**, *Theory of Games and Economic Behavior* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1953; Nauka, Moscow, 1970 [Russian]).
2. **G. Owen**, *Game Theory* (Saunders, Philadelphia, 1968; Mir, Moscow, 1971 [Russian]).
3. **S. L. Pecherskiy** and **E. B. Yanovskaya**, *Cooperative Games: Solutions and Axioms* (Izd. Eur. Univ. St. Petersburg, St. Petersburg, 2004) [Russians].
4. **J. Rosenmüller**, *Kooperative Spiele und Märkte* (Springer, Heidelberg, 1971 [German]; Mir, Moscow, 1974 [Russian]).

5. **P. Dehez**, On Harsanyi dividends and asymmetric values, *Int. Game Theory Rev.* **19** (3), ID 1750012 (2017).
6. **V. A. Vasil'ev**, Cores and generalized NM-solutions for some classes of cooperative games, in *Russian Contributions to Game Theory and Equilibrium Theory* (Springer, Heidelberg, 2006), pp. 91–149 (Theory Decis. Libr. C, Vol. 39).
7. **V. A. Vasil'ev**, On H -divisions of cooperative games, in *Optimization*, Vol. 24 (Inst. Mat. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1980), pp. 18–32 [Russian].
8. **G. G. Magaril-Ilyayev** and **V. M. Tikhomirov**, *Convex Analysis and Its Applications* (Leebrokom, Moscow, 2011) [Russian].
9. **R. T. Rockafellar**, *Convex Analysis* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1970; Mir, Moscow, 1973 [Russian]).
10. **O. N. Bondareva**, Core theory for a game of n people, *Vestn. Leningr. Gos. Univ., Ser. Mat., Mekh., Astron.* **13** (3), 141–142 (1962) [Russian].
11. **O. N. Bondareva**, Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games, in *Problems of Cybernetics*, Vol. 10 (Fizmatgiz, Moscow, 1963), pp. 119–140 [Russian].
12. **L. S. Shapley**, Cores of convex games, *Int. J. Game Theory* **1**, 11–26 (1971).
13. **B. Z. Vulikh**, *Introduction to the Theory of Semi-Ordered Spaces* (Fizmatgiz, Moscow, 1961) [Russian].
14. **L. V. Kantorovich** and **G. P. Akilov**, *Functional Analysis* (Nauka, Moscow, 1977) [Russian].

Valery A. Vasil'ev

Received February 4, 2026

Revised February 11, 2026

Accepted February 22, 2026