

ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 33 № 1 2026

Новосибирск
Издательство Института математики

УСТОЙЧИВЫЕ ПО НЭШУ КОАЛИЦИОННЫЕ СТРУКТУРЫ В ОГРАНИЧЕННЫХ КООПЕРАТИВНЫХ ИГРАХ

В. В. Гусев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Кантемировская, 3, 194100, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: vgusev@hse.ru

Аннотация. Ограниченная кооперативная игра представляет собой кооперативную игру с трансферабельной полезностью, в которой характеристическая функция зависит от коалиционного разбиения. Коалиционное разбиение ограничивает кооперацию, а именно, допустимы только те коалиции игроков, которые принадлежат одной и той же группе разбиения. Из-за такого ограничения возникает вопрос существования устойчивых коалиционных структур. В данной работе мы рассматриваем некоторые классические значения кооперативной теории игр и показываем существование устойчивых по Нэшу коалиционных структур в ограниченных кооперативных играх. Результаты о существовании устойчивых коалиционных структур основаны на теории потенциальных функций. Табл. 2, библиогр. 14.

Ключевые слова: теория игр, устойчивое коалиционное разбиение, ограниченная кооперативная игра, потенциальная игра.

Введение

1. Ограниченные кооперативные игры. В экономических, социальных, биологических системах можно выделить агентов, которые заинтересованы в максимизации своего выигрыша. В экономике под выигрышем можно понимать денежное вознаграждение, прибыль. В социальных системах выигрыш — это статус агента, в биологии — число выделенных ресурсов. В зависимости от целей, агенты могут кооперироваться друг с другом. Коалиция способна получить больший выигрыш, нежели когда участники коалиции работают по одиночке.

Предположим, что агенты разбиваются на коалиции. От каждой коалиции её участники получают некоторый выигрыш. В таком случае каждый агент задумывается о следующем: увеличится ли его выигрыш,

если он перейдёт в другую коалицию? Если его выигрыш увеличится, то рассматриваемый игрок совершит переход из своей коалиции в другую. После перехода выигрыши остальных игроков могут кардинально измениться, и в таком случае начнётся процесс переходов между коалициями.

Мы заинтересованы в таком разбиении игроков, в котором каждый игрок не хочет покидать свою коалицию по одиночке. Если такое разбиение существует, то оно называется устойчивым по Нэшу [1]. Существование устойчивых по Нэшу коалиционных разбиений важно для приложений. Если некоторое разбиение неустойчиво, то каждая коалиция агентов понимает, что кто-то её покинет или кто-то придёт в неё. Частое изменение состава коалиций влияет на их целостность, и первоначальные цели могут быть не достигнуты, что негативно отражается на выигрышах старых игроков.

В большинстве работ по устойчивости коалиций предполагается, что выигрыш игрока явно зависит от коалиционного разбиения [2–4]. Например, если N — множество игроков, а $\Pi(N)$ — множество коалиционных разбиений, то выигрыш игрока $i \in N$ — это отображение $u_i: \Pi(N) \rightarrow \mathbb{R}$.

В этой работе выигрыши игроков зависят от коалиционной структуры неявно. Сначала определим характеристическую функцию $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$, $v(\emptyset) = 0$, которая показывает значение каждой коалиции игроков. Вводится коалиционное разбиение $\pi \in \Pi(N)$, которое ограничивает кооперацию. Определим ограниченную характеристическую функцию

$$v^\pi(K) = \sum_{B \in \pi} v(K \cap B), \quad K \subseteq N.$$

Значение $v^\pi(K)$ представляет собой сумму значений максимальных коалиций игроков, которые могут друг с другом кооперироваться. Характеристическая функция v^π является частным случаем характеристической функции из работы [5], где кооперация ограничена графом связей, а в настоящей работе — коалиционным разбиением. Пример вычисления ограниченной характеристической функции приводится в п. 1.1.

Рассматривается ограниченная кооперативная игра (N, v^π) . Присоединяясь к той или иной коалиции, каждый игрок понимает, с кем он может кооперироваться, а с кем нет. Это делает вопрос существования устойчивых коалиционных структур актуальным для рассматриваемых игр. В статье показывается существование ограниченных кооперативных игр с устойчивыми коалиционными структурами относительно некоторых классических значений игры.

2. Описание результатов. Рассматриваем равномерное, пропорциональное, равномерноостаточное значения кооперативной игры, а также Шепли и Шепли-эгалитарное значения. Покажем, что относительно всех

перечисленных значений существует ограниченная кооперативная игра с устойчивой по Нэшу коалиционной структурой. Результаты интересны тем, что изначальная характеристическая функция v принимает произвольные значения.

Полученные результаты основаны на существовании потенциальной функции [6]. В теории потенциальных игр определяется потенциальная функция, максимум которой — это равновесие по Нэшу. Теория потенциальных функций была адаптирована для коалиционных разбиений в работе [7]. Относительно рассматриваемых значений кооперативной игры найдены потенциальные функции, которые гарантируют существование ограниченных кооперативных игр с устойчивыми коалиционными разбиениями.

Также покажем, как максимизировать потенциальную функцию с помощью алгоритма динамического программирования из работы [8].

1. Основные обозначения и определения

1.1. Кооперативные игры и дележи. Пусть $N = \{1, 2, \dots, n\}$ — множество игроков. Произвольное непустое подмножество множества N назовём *коалицией*, в частности N — *гранд-коалиция*. Через $\Pi(N)$ обозначим множество всевозможных разбиений множества N , т. е.

$$\Pi(N) = \left\{ \{B_1, B_2, \dots, B_l\} \subset 2^N \mid \bigcup_{i=1}^l B_i = N, B_i \cap B_j = \emptyset, 1 \leq i < j \leq l \right\}.$$

Произвольное разбиение $\pi \in \Pi(N)$ назовём *коалиционной структурой*. *Кооперативной игрой* называется пара (N, v) , где N — множество игроков, $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ — *характеристическая функция*, $v(\emptyset) = 0$. Обозначим через G_N множество всех кооперативных игр с множеством игроков N . Таким образом, кооперативная игра с коалиционной структурой образуется тройкой (N, v, π) , где N и v — элементы кооперативной игры (N, v) , а $\pi \in \Pi(N)$ — коалиционное разбиение.

Пусть (N, v, π) — кооперативная игра с коалиционной структурой. Кооперативная игра (N, v^π) называется *ограниченной*, если характеристическая функция v^π имеет вид

$$v^\pi(K) = \sum_{B \in \pi} v(K \cap B), \quad K \in 2^N.$$

Пример 1. Рассмотрим кооперативную игру (N, v, π) с множеством игроков $N = \{1, 2, 3, 4\}$, коалиционной структурой $\pi = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ и характеристической функцией $v(K) = |K|^2$, $K \in 2^N$. В этом случае характеристическая функция ограниченной кооперативной игры (N, v^π) принимает следующие значения:

$$\begin{aligned}
v^\pi(\emptyset) &= 0, \quad v^\pi(\{i\}) = v(\{i\}) = 1, \quad i \in N, \\
v^\pi(\{1, 2\}) &= v(\{1, 2\}) = 4, \quad v^\pi(\{3, 4\}) = v(\{3, 4\}) = 4, \\
v^\pi(\{1, 3\}) &= v(\{1\}) + v(\{3\}) = 1 + 1 = 2, \\
v^\pi(\{1, 4\}) &= v(\{1\}) + v(\{4\}) = 1 + 1 = 2, \\
v^\pi(\{2, 3\}) &= v(\{2\}) + v(\{3\}) = 1 + 1 = 2, \\
v^\pi(\{2, 4\}) &= v(\{2\}) + v(\{4\}) = 1 + 1 = 2, \\
v^\pi(\{1, 2, 3\}) &= v(\{1, 2\}) + v(\{3\}) = 4 + 1 = 5, \\
v^\pi(\{1, 2, 4\}) &= v(\{1, 2\}) + v(\{4\}) = 4 + 1 = 5, \\
v^\pi(\{1, 3, 4\}) &= v(\{1\}) + v(\{3, 4\}) = 1 + 4 = 5, \\
v^\pi(\{2, 3, 4\}) &= v(\{2\}) + v(\{3, 4\}) = 1 + 4 = 5, \\
v^\pi(\{1, 2, 3, 4\}) &= v(\{1, 2\}) + v(\{3, 4\}) = 4 + 4 = 8.
\end{aligned}$$

Значением кооперативной игры называется вектор $\varphi: G_N \rightarrow \mathbb{R}^n$, при этом число $\varphi_i(v)$ обозначает выигрыш игрока $i \in N$ в кооперативной игре (N, v) .

Равномерное значение (equal division value [9]) — это значение кооперативной игры (N, v) , в которой выигрыш игрока i равен

$$\text{ED}_i(v) = \frac{v(N)}{n}.$$

Для равномерного значения выигрыш гранд-коалиции делится между всеми игроками поровну.

Пропорциональное значение (proportional division value [10]) — это значение кооперативной игры (N, v) , в которой выигрыш игрока i равен

$$\text{PD}_i(v) = \frac{v(\{i\})}{\sum_{j \in N} v(\{j\})} \cdot v(N).$$

Число $v(\{i\})$ — это значение игрока $i \in N$, когда i ни с кем не кооперируется. Можем сказать, что число $v(\{i\})$ характеризует силу игрока i . Для пропорционального значения выигрыш гранд-коалиции делится между её участниками пропорционально силам игроков. Если $v(\{i\}) = 1$ для любого $i \in N$, то пропорциональное значение тождественно равномерному значению.

Равномерноостаточное значение (equal surplus division value) — это значение кооперативной игры (N, v) , в которой выигрыш игрока i равен

$$\text{ESD}_i(v) = v(\{i\}) + \frac{v(N) - \sum_{j \in N} v(\{j\})}{n}.$$

Для равномерноостаточного значения предполагается, что игроки работают как по одиночке, так и в гранд-коалиции. Когда игроки работают в одиночных коалициях, игрок $i \in N$ получает выигрыш $v(\{i\})$. Когда игроки работают в гранд-коалиции, её остаток делится между игроками поровну. Складывая выигрыши, получаем равномерноостаточное значение.

Значение Шепли [11] — это значение кооперативной игры (N, v) , в которой выигрыш игрока i равен

$$\text{Sh}_i(v) = \sum_{i \in K \subseteq N} \frac{\lambda_K(v)}{|K|},$$

где $\lambda_K(v) = \sum_{R \subseteq K} (-1)^{|K|-|R|} \cdot v(R)$ — дивиденды Харсани [12]. Также значение Шепли может быть рассчитано по формуле

$$\text{Sh}_i(v) = \sum_{i \in K \subseteq N} \frac{(|K| - 1)! (|N| - |K|)!}{|N|!} \cdot (v(K) - v(K \setminus \{i\})).$$

Значение Шепли — единственное значение кооперативной игры, которое удовлетворяет аксиомам эффективности, симметрии, нулевого игрока и аддитивности [11]. Такие аксиомы имеют широкое приложение и делают значение Шепли объектом исследования во многих прикладных науках.

Шепли-эгалитарное значение [13] — это значение кооперативной игры (N, v) , в которой выигрыш игрока i равен

$$\text{ShED}_i(v) = \alpha \cdot \text{Sh}_i(v) + (1 - \alpha) \cdot \text{ED}_i(v),$$

где $\alpha \in [0; 1]$. Шепли-эгалитарное значение представляет собой средневзвешенное значения Шепли и равномерного значения.

1.2. Устойчивость ограниченных кооперативных игр и потенциальные функции. Чтобы сформулировать определение ограниченной кооперативной игры с устойчивым по Нэшу коалиционным разбиением, введём следующие обозначения.

Пусть $\pi \in \Pi(N)$ — некоторое разбиение. Через $\pi(i)$ обозначим коалицию разбиения π , содержащую игрока i , т. е. $i \in \pi(i) \in \pi$. Если $B \in \pi$, то множество $\pi - B$ получается путём удаления коалиции B из разбиения π . Аналогично если $A, B \in \pi$, то $\pi - (A, B) = (\pi - A) - B$ — множество, полученное из π удалением коалиций A и B . Например, для $\pi = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{6, 7, 8\}\}$ имеем

$$\pi - \{2, 3\} = \{\{1\}, \{4, 5\}, \{6, 7, 8\}\}, \quad \pi - (\{1\}, \{6, 7, 8\}) = \{\{2, 3\}, \{4, 5\}\}.$$

Положим

$$D_i(\pi) = \{\pi\} \cup \{\pi - (\pi(i), B) \cup \{\pi(i) \setminus \{i\}, B \cup \{i\}\} \mid B \in \pi - \pi(i) \cup \{\emptyset\}\},$$

т. е. множество $D_i(\pi)$ состоит из разбиения π и коалиционных структур, которые получаются при переходе игрока i в другую коалицию, причём игрок i может создать коалицию из одного себя. Например, для $\pi = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$

$$D_1(\pi) = \{\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}, \{\{1\}, \{2\}, \{3, 4\}\}, \{\{2\}, \{1, 3, 4\}\}\}.$$

Рассмотрим ограниченную кооперативную игру (N, v^π) для кооперативной игры с коалиционной структурой (N, v, π) . Будем говорить, что коалиционная структура $\pi \in \Pi(N)$ ограниченной кооперативной игры (N, v^π) *устойчива по Нэшу* относительно значения φ , если для любого $i \in N$ выполняются неравенства

$$\varphi_i(v^\pi) - \varphi_i(v^\rho) \geq 0, \quad \rho \in D_i(\pi).$$

Иначе говоря, коалиционная структура π устойчива по Нэшу, если никакому игроку не выгодно покидать свою коалицию в π поодиночке.

1.3. Потенциальные функции. Чтобы исследовать вопрос существования устойчивых по Нэшу коалиционных разбиений, будем пользоваться теорией потенциальных функций. Адаптируем классическое определение потенциальной игры из работы [6].

Будем говорить, что для кооперативной игры (N, v) существует *потенциальная функция* $P: \Pi(N) \rightarrow \mathbb{R}$ относительно значения φ , если для любых $\pi \in \Pi(N)$ и $i \in N$ выполняются равенства

$$\varphi_i(v^\pi) - \varphi_i(v^\rho) = P(\pi) - P(\rho), \quad \rho \in D_i(\pi).$$

Будем говорить, что для кооперативной игры (N, v) существует *весовая потенциальная функция* $P: \Pi(N) \rightarrow \mathbb{R}$ с весами $w_1, w_2, \dots, w_n > 0$ относительно значения φ , если для любых $\pi \in \Pi(N)$ и $i \in N$ выполняются равенства

$$\varphi_i(v^\pi) - \varphi_i(v^\rho) = w_i \cdot (P(\pi) - P(\rho)), \quad \rho \in D_i(\pi).$$

Покажем, что потенциальная функция P достигает своего максимума на устойчивой коалиционной структуре ограниченной кооперативной игры. Поскольку множество $\Pi(N)$ конечно, найдётся $\pi^* \in \arg \max_{\pi \in \Pi(N)} P(\pi)$.

Так как разбиение π^* максимизирует потенциальную функцию P на множестве $\Pi(N)$ и включение $D_i(\pi^*) \subseteq \Pi(N)$ имеет место для любого $i \in N$, то

$$P(\pi^*) - P(\rho) \geq 0, \quad \rho \in D_i(\pi^*), \quad i \in N.$$

Разность потенциальных функций равна разности значений игроков для соответствующих ограниченных кооперативных игр, следовательно,

$$\varphi_i(v^{\pi^*}) - \varphi_i(v^\rho) \geq 0, \quad \rho \in D_i(\pi^*), \quad i \in N.$$

Значит, по определению $\pi^* \in \Pi(N)$ — устойчивая по Нэшу коалиционная структура ограниченной кооперативной игры (N, v^{π^*}) .

Аналогичные рассуждения справедливы для весовых потенциальных функций.

Далее рассмотрим вопрос существования устойчивых по Нэшу коалиционных разбиений относительно указанных выше значений.

2. Существование устойчивых коалиционных разбиений

2.1. Равномерное, пропорциональное и равномерноостаточное значения. Пусть дана кооперативная игра с коалиционной структурой (N, v, π) и (N, v^π) — ограниченная кооперативная игра. Для ограниченной кооперативной игры равномерное, пропорциональное и равномерноостаточное значения имеют вид

$$\begin{aligned} \text{ED}_i(v^\pi) &= \frac{v^\pi(N)}{n}, \quad \text{PD}_i(v^\pi) = \frac{v^\pi(\{i\})}{\sum_{j \in N} v^\pi(\{j\})} \cdot v^\pi(N), \\ \text{ESD}_i(v^\pi) &= v^\pi(\{i\}) + \frac{v^\pi(N) - \sum_{j \in N} v^\pi(\{j\})}{n} \end{aligned}$$

соответственно.

Сформулируем теорему о существовании устойчивых разбиений.

Теорема 1. 1. Для любой кооперативной игры (N, v) существует весовая потенциальная функция

$$P(\pi) = v^\pi(N) = \sum_{B \in \pi} v(B)$$

относительно равномерного, пропорционального и остаточного значений.

2. Для любой кооперативной игры (N, v) существует ограниченная кооперативная игра с коалиционным разбиением, устойчивым по Нэшу относительно равномерного, пропорционального и равномерноостаточного значений одновременно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Покажем, что $P(\pi) = v^\pi(N)$ — весовая потенциальная функция.

РАВНОМЕРНОЕ ЗНАЧЕНИЕ. Для любых $i \in N$, $\pi \in \Pi(N)$ и $\rho \in D_i(\pi)$ справедливы равенства

$$\text{ED}_i(v^\pi) - \text{ED}_i(v^\rho) = \frac{v^\pi(N)}{n} - \frac{v^\rho(N)}{n} = \frac{1}{n} \cdot (v^\pi(N) - v^\rho(N)).$$

Следовательно, $ED_i(v^\pi) - ED_i(v^\rho) = w_i \cdot (P(\pi) - P(\rho))$ для $w_i = \frac{1}{n}$, $i \in N$, и по определению $P(\pi) = v^\pi(N)$ — весовая потенциальная функция.

ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ. Так как

$$v^\pi(\{i\}) = \sum_{B \in \pi} v(\{i\} \cap B) = v(\{i\}),$$

для любых $i \in N$, $\pi \in \Pi(N)$ и $\rho \in D_i(\pi)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} PD_i(v^\pi) - PD_i(v^\rho) &= \\ &= \frac{v^\pi(\{i\})}{\sum_{j \in N} v^\pi(\{j\})} \cdot v^\pi(N) - \frac{v^\rho(\{i\})}{\sum_{j \in N} v^\rho(\{j\})} \cdot v^\rho(N) = \\ &= \frac{v(\{i\})}{\sum_{j \in N} v(\{j\})} \cdot (v^\pi(N) - v^\rho(N)). \end{aligned}$$

Следовательно, $PD_i(v^\pi) - PD_i(v^\rho) = w_i \cdot (P(\pi) - P(\rho))$ для

$$w_i = \frac{v(\{i\})}{\sum_{j \in N} v(\{j\})}, \quad i \in N,$$

и по определению $P(\pi) = v^\pi(N)$ — весовая потенциальная функция.

РАВНОМЕРНООСТАТОЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ. Для любых $i \in N$, $\pi \in \Pi(N)$ и $\rho \in D_i(\pi)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} ESD_i(v^\pi) - ESD_i(v^\rho) &= \\ &= v^\pi(\{i\}) + \frac{v^\pi(N) - \sum_{j \in N} v^\pi(\{j\})}{n} - v^\rho(\{i\}) - \frac{v^\rho(N) - \sum_{j \in N} v^\rho(\{j\})}{n} = \\ &= \frac{v^\pi(N) - \sum_{j \in N} v(\{j\})}{n} - \frac{v^\rho(N) - \sum_{j \in N} v(\{j\})}{n} = \frac{1}{n} \cdot (v^\pi(N) - v^\rho(N)). \end{aligned}$$

Следовательно, $ESD_i(v^\pi) - ESD_i(v^\rho) = w_i \cdot (P(\pi) - P(\rho))$ для $w_i = \frac{1}{n}$, $i \in N$, и по определению $P(\pi) = v^\pi(N)$ — весовая потенциальная функция.

2. Из п. 1 следует, что для рассматриваемых значений кооперативной игры существует одна и та же весовая потенциальная функция $P(\pi) = v^\pi(N)$. Следовательно, её максимум достигается на коалиционной структуре ограниченной кооперативной игры, устойчивой относительно каждого из рассматриваемых значений. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 следует, что коалиционная структура π^* ограниченной кооперативной игры, устойчивая относительно равномерного, пропорционального или равномерноостаточного значения, является решением оптимизационной задачи

$$\pi^* \in \arg \max_{\pi \in \Pi(N)} \sum_{B \in \pi} v(B).$$

Известно, что количество коалиционных структур для n игроков имеет экспоненциальный порядок, т. е. $\Pi(N) = O(n^n)$. В [8] был предложен алгоритм динамического программирования для рассматриваемой оптимизационной задачи, который работает за время $O(2^n)$.

Так как множество коалиционных структур дискретно, существование потенциальной функции гарантирует, что любая последовательность наилучших ответов конечна. Это говорит о следующем. Если изначально имеется неустойчивая ограниченная кооперативная игра, то игроки могут переходить по одиночке из коалиции в коалицию, чтобы увеличить свой выигрыш. В таком случае число переходов конечно и соответствующая последовательность коалиционных структур сходится к некоторому устойчивому разбиению.

Отметим, что относительно рассматриваемых значений кооперативной игры может не существовать устойчивой по Нэшу коалиционной структуры в игре (N, v, π) . Здесь предполагается, что выигрыш игрока рассчитывается по соответствующей формуле для коалиции, в которой находится игрок. Продемонстрируем такое отличие на примере кооперативной игры с тремя игроками.

Пример 2. Пусть $N = \{1, 2, 3\}$, а характеристическая функция принимает значения

$$\begin{aligned} v(\emptyset) &= 0, & v(\{1\}) &= 3, & v(\{2\}) &= 5, & v(\{3\}) &= 3, \\ v(\{1, 2\}) &= 9, & v(\{1, 3\}) &= 5, & v(\{2, 3\}) &= 8, & v(\{1, 2, 3\}) &= 8. \end{aligned}$$

Рассмотрим кооперативную игру с коалиционной структурой (N, v, π) , в которой равномерное значение рассчитывается для коалиции, в которой находится игрок, т. е.

$$ED_i(N, v, \pi) = \frac{v(\pi(i))}{|\pi(i)|}.$$

Покажем, что относительно равномерного значения не существует устойчивой по Нэшу коалиционной структуры. Разбиение $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ неустойчиво, потому что игроку 3 выгодно присоединиться к игроку 2, т. е. $v(\{3\}) < \frac{v(\{2, 3\})}{2}$, $3 < \frac{8}{2}$. Разбиение $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$ неустойчиво, так как игроку 2 выгодно покинуть коалицию $\{2, 3\}$ и присоединиться к игроку 1,

т. е. $\frac{v(\{2,3\})}{2} < \frac{v(\{1,2\})}{2}$, $\frac{8}{2} < \frac{9}{2}$. Разбиение $\{\{2\}, \{1,3\}\}$ неустойчиво, потому что игроку 1 выгодно покинуть коалицию $\{1,3\}$ и присоединиться к игроку 2, т. е. $\frac{v(\{1,3\})}{2} < \frac{v(\{2,3\})}{2}$, $\frac{5}{2} < \frac{8}{2}$. Разбиение $\{\{3\}, \{1,2\}\}$ неустойчиво, поскольку игроку 2 выгодно покинуть коалицию $\{1,2\}$ и создать одиночную коалицию, т. е. $\frac{v(\{1,2\})}{2} < v(\{2\})$, $\frac{9}{2} < 5$. И наконец, разбиение $\{\{1,2,3\}\}$ неустойчиво, потому что игроку 2 выгодно создать одиночную коалицию, т. е. $\frac{v(\{1,2,3\})}{3} < v(\{2\})$, $\frac{8}{3} < 5$. Таким образом, устойчивой по Нэшу коалиционной структуры не существует.

Найдём устойчивое коалиционное разбиение ограниченной кооперативной игры, которое существует согласно теореме 1. Для этого вычислим значения потенциальной функции $P(\pi) = \sum_{B \in \pi} v(B)$ и найдём её максимум:

$$\begin{aligned} P(\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}) &= v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\}) = 3 + 5 + 3 = 11, \\ P(\{\{1\}, \{2,3\}\}) &= v(\{1\}) + v(\{2,3\}) = 3 + 8 = 11, \\ P(\{\{2\}, \{1,3\}\}) &= v(\{2\}) + v(\{1,3\}) = 5 + 5 = 10, \\ P(\{\{3\}, \{1,2\}\}) &= v(\{3\}) + v(\{1,2\}) = 3 + 9 = 12, \\ P(\{\{1,2,3\}\}) &= v(\{1,2,3\}) = 8. \end{aligned}$$

Максимальное значение потенциальной функции равно 12 при $\pi^* = \{\{3\}, \{1,2\}\}$. Следовательно, π^* — устойчивое коалиционное разбиение ограниченной кооперативной игры (N, v^{π^*}) .

2.2. Значение Шепли. Покажем существование устойчивой коалиционной структуры ограниченной кооперативной игры относительно значения Шепли.

Значение Шепли игрока $i \in N$ в ограниченной кооперативной игре (N, v^{π}) задаётся формулами

$$\text{Sh}_i(v^{\pi}) = \sum_{i \in K \subseteq N} \frac{\lambda_K(v^{\pi})}{|K|}, \quad \lambda_K(v^{\pi}) = \sum_{R \subseteq K} (-1)^{|K|-|R|} \cdot v^{\pi}(R).$$

Пусть $B \subseteq N$, $B \neq \emptyset$. Для игры (N, v, π) определим характеристическую функцию

$$v_B(K) = v(K \cap B), \quad K \subseteq N.$$

Тогда $v^{\pi}(K)$ можем представить в виде

$$v^{\pi}(K) = \sum_{B \in \pi} v_B(K), \quad K \subseteq N.$$

Значением *Аумана — Дрезе* [14] кооперативной игры с коалиционной структурой (N, v, π) называется значение Шепли, вычисленное для коалиции, в которой находится игрок:

$$AD_i(N, v, \pi) = \sum_{i \in K \subseteq \pi(i)} \frac{\lambda_K(v)}{|K|}.$$

Сформулируем теорему о существовании устойчивых коалиционных структур для значения Шепли.

Теорема 2. 1. Для произвольной кооперативной игры с коалиционной структурой (N, v, π) выполняются равенства

$$Sh_i(v^\pi) = AD_i(N, v, \pi), \quad i \in N.$$

2. Для любой кооперативной игры (N, v) существует ограниченная кооперативная игра с коалиционным разбиением, устойчивым по Нэшу относительно значений *Аумана — Дрезе* и *Шепли*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Дивиденды Харсани удовлетворяют равенству

$$\lambda_K(v_B) = \begin{cases} \lambda_K(v), & \text{если } K \subseteq B, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Значение Шепли обладает свойствами аддитивности и нулевого игрока. Используя эти свойства и свойства дивидендов Харсани, выполним следующие преобразования:

$$\begin{aligned} Sh_i(v^\pi) &= Sh_i\left(\sum_{B \in \pi} v_B\right) = \sum_{B \in \pi} Sh_i(v_B) = Sh_i(v_{\pi(i)}) = \\ &= \sum_{i \in K \subseteq N} \frac{\lambda_K(v_{\pi(i)})}{|K|} = \sum_{i \in K \subseteq \pi(i)} \frac{\lambda_K(v)}{|K|} = AD_i(N, v, \pi). \end{aligned}$$

Следовательно, для любого $i \in N$

$$Sh_i(v^\pi) = AD_i(N, v, \pi).$$

2. Относительно значения *Аумана — Дрезе* существует потенциальная функция [7]

$$P(\pi) = \sum_{B \in \pi} \sum_{\emptyset \neq K \subseteq B} \frac{\lambda_K(v)}{|K|}.$$

Предположим, что разбиение $\pi^* \in \Pi(N)$ максимизирует потенциальную функцию $P(\pi)$. С учётом п. 1 коалиционная структура π^* ограниченной кооперативной игры (N, v^{π^*}) , устойчивая относительно значения *Аумана — Дрезе*, устойчива и относительно значения Шепли. Теорема 2 доказана.

2.3. Шепли-эгалитарное значение. Шепли-эгалитарное значение игрока $i \in N$ в ограниченной кооперативной игре (N, v^π) вычисляется для некоторого $\alpha \in [0; 1]$ по формуле

$$\text{ShED}_i(v^\pi) = \alpha \cdot \text{Sh}_i(v^\pi) + (1 - \alpha) \cdot \text{ED}_i(v^\pi),$$

Теорема 3. Для любой кооперативной игры (N, v) существует ограниченная кооперативная игра с коалиционным разбиением, устойчивым по Нэшу относительно Шепли-эгалитарного значения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введём в рассмотрение вспомогательную характеристическую функцию

$$w^\pi(K) = \begin{cases} v^\pi(N), & \text{если } K = N, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Игра (N, w^π) симметрична относительно выбора игрока, следовательно, значения Шепли любых двух игроков одинаковы. Так как сумма значений Шепли всех игроков равна $w^\pi(N)$, для любого $i \in N$ имеем

$$\text{Sh}_i(w^\pi) = \frac{w^\pi(N)}{n} = \frac{v^\pi(N)}{n} = \text{ED}_i(v^\pi).$$

Учитывая свойство линейности значения Шепли, преобразуем Шепли-эгалитарное значение следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{ShED}_i(v^\pi) &= \alpha \cdot \text{Sh}_i(v^\pi) + (1 - \alpha) \cdot \text{ED}_i(v^\pi) = \\ &= \alpha \cdot \text{Sh}_i(v^\pi) + (1 - \alpha) \cdot \text{Sh}_i(w^\pi) = \text{Sh}_i(\alpha \cdot v^\pi + (1 - \alpha) \cdot w^\pi) = \\ &= \text{Sh}_i(\alpha \cdot v^\pi + (1 - \alpha) \cdot w^\pi), \end{aligned}$$

т. е.

$$\text{ShED}_i(v^\pi) = \text{Sh}_i(u^\pi), \quad u^\pi = \alpha \cdot v^\pi + (1 - \alpha) \cdot w^\pi.$$

Так как Шепли-эгалитарное значение представляет собой значение Шепли некоторой ограниченной кооперативной игры, утверждение теоремы 3 следует из п. 2 теоремы 2. Теорема 3 доказана.

3. Пример для значения Шепли

Согласно теореме 2 для любой кооперативной игры с коалиционной структурой существует ограниченная кооперативная игра с устойчивым по Нэшу коалиционным разбиением. Чтобы найти устойчивое разбиение, достаточно максимизировать потенциальную функцию. В этом разделе показано, как максимизировать потенциальную функцию с помощью динамического алгоритма из [8].

Для кооперативной игры (N, v) положим

$$w(B) = \sum_{\emptyset \neq K \subseteq B} \frac{\lambda_K(v)}{|K|}, \quad B \subseteq N, \quad w(\emptyset) = 0.$$

Подставляя дивиденды Харсани в явном виде, преобразуем функцию w следующим образом:

$$\begin{aligned} w(B) &= \sum_{\emptyset \neq K \subseteq B} \frac{\lambda_K(v)}{|K|} = \sum_{\emptyset \neq K \subseteq B} v(K) \sum_{s=0}^{|N|-|K|} (-1)^s \frac{C_{|N|-|K|}^s}{s+|K|} = \\ &= \sum_{\emptyset \neq K \subseteq B} \frac{(|K|-1)! \cdot (|N|-|K|)!}{|N|!} \cdot v(K). \end{aligned}$$

Для нахождения устойчивой коалиционной структуры ограниченной кооперативной игры достаточно решить следующую задачу дискретной оптимизации:

$$\pi^* \in \arg \max_{\pi \in \Pi(N)} \sum_{B \in \pi} w(B).$$

В [8] показано, что максимум оптимизируемой функции совпадает с наибольшим значением функции

$$f(K) = \begin{cases} w(K), & \text{если } |K| = 1, \\ \max\{w(K), \max_{\{K_1, K_2\} \in \Pi(K)} f(K_1) + f(K_2)\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Изначальная оптимизируемая функция определена на множестве коалиционных разбиений, а функция f — на подмножествах множества N . Это позволяет уменьшить время нахождения максимума с $O(n^n)$ до $O(2^n)$.

Таблица 1

Значения функций v и w

K	v	w	K	v	w	K	v	w
$\{1\}$	1	1	$\{1,3\}$	7	$5\frac{1}{2}$	$\{1,2,3\}$	21	$16\frac{1}{3}$
$\{2\}$	8	8	$\{1,4\}$	9	8	$\{1,2,4\}$	17	16
$\{3\}$	3	3	$\{2,3\}$	12	$11\frac{1}{2}$	$\{1,3,4\}$	18	$14\frac{1}{2}$
$\{4\}$	6	6	$\{2,4\}$	10	12	$\{2,3,4\}$	19	$18\frac{1}{6}$
$\{1,2\}$	13	11	$\{3,4\}$	15	12	$\{1,2,3,4\}$	22	$21\frac{3}{4}$

Пусть $N = \{1, 2, 3, 4\}$, значения функций v и w представлены в табл. 1. Найдём коалиционную структуру, которая максимизирует потенциальную функцию. Для этого найдём значения функции f , вычисления которых отображены в табл. 2.

Функция f принимает наибольшее значение 23 при $K = \{1, 2, 3, 4\}$, которое соответствует коалиционной структуре $\pi^* = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. Значит, разбиение π^* является коалиционной структурой ограниченной кооперативной игры, устойчивой относительно значения Шепли.

Таблица 2

Вычисление функции f

$ K $	K	K_1, K_2	$w(K)$	$w(K_1) + w(K_2)$	$f(K)$
2	$\{1, 2\}$	$\{1\}, \{2\}$	11	9	11
	$\{1, 3\}$	$\{1\}, \{3\}$	$5\frac{1}{2}$	4	$5\frac{1}{2}$
	$\{1, 4\}$	$\{1\}, \{4\}$	8	7	8
	$\{2, 3\}$	$\{2\}, \{3\}$	$11\frac{1}{2}$	11	$11\frac{1}{2}$
	$\{2, 4\}$	$\{2\}, \{4\}$	12	14	14
	$\{3, 4\}$	$\{3\}, \{4\}$	12	9	12
3	$\{1, 2, 3\}$	$\{1\}, \{2, 3\}$	$16\frac{1}{3}$	$12\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{3}$
		$\{2\}, \{1, 3\}$		$12\frac{1}{2}$	
		$\{3\}, \{1, 2\}$		14	
	$\{1, 2, 4\}$	$\{1\}, \{2, 4\}$	16	15	17
		$\{2\}, \{1, 4\}$		16	
		$\{4\}, \{1, 2\}$		17	
	$\{1, 3, 4\}$	$\{1\}, \{3, 4\}$	$14\frac{1}{2}$	13	$14\frac{1}{2}$
		$\{3\}, \{1, 4\}$		11	
4	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{4\}, \{1, 3\}$	$21\frac{3}{4}$	$11\frac{1}{2}$	23
		$\{4\}, \{1, 3\}$		20	
		$\{2\}, \{3, 4\}$		21	
		$\{3\}, \{2, 4\}$		$22\frac{1}{2}$	
		$\{3\}, \{2, 4\}$		20	
		$\{1, 2\}, \{3, 4\}$		$22\frac{1}{3}$	
		$\{1, 2\}, \{3, 4\}$		23	
		$\{1, 3\}, \{2, 4\}$		$19\frac{1}{2}$	
		$\{1, 3\}, \{2, 4\}$		$19\frac{1}{2}$	
		$\{1, 4\}, \{2, 3\}$		$19\frac{1}{2}$	

Заключение

Большая часть работ в кооперативной теории игр посвящена нахождению аксиоматически справедливого дележа. Однако если относительно рассматриваемого дележа не существует устойчивого разбиения, то делёж не приемлем на практике из-за будущих манипуляций игроков.

В этой статье рассмотрен вопрос существования устойчивых коалиционных структур в ограниченных кооперативных играх. Найдены потенциальные функции относительно некоторых классических значений

игры. Определение потенциальной функции адаптировано таким образом, что её максимум — это устойчивая коалиционная структура ограниченной кооперативной игры.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт Российского научного фонда (проект № 25–21–00227, rscf.ru/project/25-21-00227). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. **Bogomolnaia A., Jackson M. O.** The stability of hedonic coalition structures // *Games Econ. Behav.* 2002. V. 38, No. 2. P. 201–230.
2. **Casajus A.** On the stability of coalition structures // *Econ. Lett.* 2008. V. 100, No. 2. P. 271–274.
3. **Cechlárová K., Romero-Medina A.** Stability in coalition formation games // *Int. J. Game Theory.* 2001. V. 29, No. 4. P. 487–494.
4. **Yi S. S.** Stable coalition structures with externalities // *Games Econ. Behav.* 1997. V. 20, No. 2. P. 201–237.
5. **Myerson R. B.** Graphs and cooperation in games // *Math. Oper. Res.* 1977. V. 2, No. 3. P. 225–229.
6. **Monderer D., Shapley L. S.** Potential games // *Games Econ. Behav.* 1996. V. 14, No. 1. P. 124–143.
7. **Gusev V. V.** Nash-stable coalition partition and potential functions in games with coalition structure // *Eur. J. Oper. Res.* 2021. V. 295, No. 3. P. 1180–1188.
8. **Yun Yeh D.** A dynamic programming approach to the complete set partitioning problem // *BIT Numer. Math.* 1986. V. 26, No. 4. P. 467–474.
9. **Béal S., Casajus A., Huettnner F., Rémila E., Solal P.** Characterizations of weighted and equal division values // *Theory Decision.* 2016. V. 80, No. 4. P. 649–667.
10. **Zou Z., van den Brink R., Chun Y., Funaki Y.** Axiomatizations of the proportional division value // *Soc. Choice Welf.* 2021. V. 57, No. 1. P. 35–62.
11. **Shapley L. S.** A value for n -person games // *Contributions to the theory of games*. V. 2. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1953. P. 307–318.
12. **Harsanyi J. C.** A bargaining model for the cooperative n -person game // *Contributions to the theory of games*. V. 4. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1959. P. 325–355.
13. **Choudhury D., Borkotokey S., Kumar R., Sarangi S.** The egalitarian Shapley value: A generalization based on coalition sizes // *Ann. Oper. Res.* 2021. V. 301, No. 1. P. 55–63.

-
14. **Aumann R. J., Dreze J. H.** Cooperative games with coalition structures // Int. J. Game Theory. 1974. V. 3, No. 4. P. 217–237.

Гусев Василий Васильевич

Статья поступила

3 сентября 2025 г.

После доработки —

11 октября 2025 г.

Принята к публикации

22 декабря 2025 г.

NASH-STABLE COALITION PARTITIONS IN RESTRICTED COOPERATIVE GAMES

V. V. Gusev

HSE University,
3 Kantemirovskaya Street, 194100 St. Petersburg, Russian Federation
E-mail: vgusev@hse.ru

Abstract. A restricted cooperative game is a cooperative game with transferable utility in which the characteristic function depends on the coalition partition. The coalition partition restricts cooperation, namely, only those coalitions of players who belong to the same partition group are allowed. This limitation raises the question of the existence of stable coalition partitions. In this paper, we consider some classical values of cooperative game theory and show the existence of Nash-stable coalition structures in restricted cooperative games. The results on the existence of stable coalition structures are based on the theory of potential functions. Tab. 2, bibliogr. 14.

Keywords: game theory, stable coalition partition, restricted cooperative game, potential game.

References

1. **A. Bogomolnaia** and **M. O. Jackson**, The stability of hedonic coalition structures, *Games Econ. Behav.* **38** (2), 201–230 (2002).
2. **A. Casajus**, On the stability of coalition structures, *Econ. Lett.* **100** (2), 271–274 (2008).
3. **K. Cechlárová** and **A. Romero-Medina**, Stability in coalition formation games, *Int. J. Game Theory* **29** (4), 487–494 (2001).
4. **S. S. Yi**, Stable coalition structures with externalities, *Games Econ. Behav.* **20** (2), 201–237 (1997).
5. **R. B. Myerson**, Graphs and cooperation in games, *Math. Oper. Res.* **2** (3), 225–229 (1977).
6. **D. Monderer** and **L. S. Shapley**, Potential games, *Games Econ. Behav.* **14** (1), 124–143 (1996).

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **20** (1) (2026).

7. **V. V. Gusev**, Nash-stable coalition partition and potential functions in games with coalition structure, *Eur. J. Oper. Res.* **295** (3), 1180–1188 (2021).
8. **D. Yun Yeh**, A dynamic programming approach to the complete set partitioning problem, *BIT Numer. Math.* **26** (4), 467–474 (1986).
9. **S. Béal**, **A. Casajus**, **F. Huettner**, **E. Rémila**, and **P. Solal**, Characterizations of weighted and equal division values, *Theory Decision*. **80** (4), 649–667 (2016).
10. **Z. Zou**, **R. van den Brink**, **Y. Chun**, and **Y. Funaki**, Axiomatizations of the proportional division value, *Soc. Choice Welf.* **57** (1), 35–62 (2021).
11. **L. S. Shapley**, A value for n -person games, in *Contributions to the Theory of Games*, Vol. II (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1953), pp. 307–318.
12. **J. C. Harsanyi**, A bargaining model for the cooperative n -person game, in *Contributions to the Theory of Games*, Vol. IV (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1959), pp. 325–355.
13. **D. Choudhury**, **S. Borkotokey**, **R. Kumar**, and **S. Sarangi**, The egalitarian Shapley value: A generalization based on coalition sizes, *Ann. Oper. Res.* **301** (1), 55–63 (2021).
14. **R. J. Aumann** and **J. H. Dreze**, Cooperative games with coalition structures, *Int. J. Game Theory* **3** (4), 217–237 (1974).

Vasily V. Gusev

Received September 3, 2025

Revised October 11, 2025

Accepted December 22, 2025