

ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 33 № 1 2026

Новосибирск
Издательство Института математики

ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ДРОНОВ, ПОКРЫВАЮЩИХ БАРЬЕР В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕТРИКЕ

А. И. Ерзин

Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: adilerzin@math.nsc.ru

Аннотация. На плоскости рассматривается отрезок прямой — барьер, мониторинг (покрытие) которого осуществляется одинаковыми мобильными сенсорами (дронами) с ограниченной длиной траектории. Каждый дрон стартует из своего депо к некоторой точке барьера, перемещается вдоль барьера и возвращается в своё депо, пройдя путь ограниченной длины. Часть барьера, вдоль которой двигался дрон, считается покрытой этим дроном. Барьер покрыт, если каждая его точка покрыта хотя бы одним дроном. Требуется определить число дронов в каждом депо и найти траекторию каждого дрона так, чтобы весь барьер был покрыт, и общая длина путей (траекторий) дронов была минимальной. Для решения этой задачи с евклидовым расстоянием известен алгоритм динамического программирования, который строит оптимальное решение с псевдополиномиальной трудоёмкостью. В этой статье для решения задачи в прямоугольной метрике предлагается полиномиальный алгоритм, который строит оптимальное решение с квадратичной трудоёмкостью от числа депо. Ил. 3, библиогр. 19.

Ключевые слова: покрытие барьера, линейная маршрутизация, мобильный сенсор (дрон), оптимальное решение.

Введение

Многие протяжённые объекты с некоторой долей абстракции представимы в виде отрезка прямой на плоскости («барьера»). Этими объектами могут быть дороги, трубопроводы, ЛЭП и пр. сооружения, требующие постоянного мониторинга, т. е. проверки целостности и исправности. Использование для этой цели обходчиков (людей) не всегда целесообразно,

а часто просто невозможно. В настоящее время для мониторинга протяжённых объектов всё чаще используют автономные беспилотные летательные устройства (дроны). Для мониторинга дрон оснащён необходимым оборудованием. Считается, что дрон покрывает некоторую область, если все точки этой области находятся в сфере действия его оборудования. Во многих публикациях, посвящённых покрытию барьера, считается, что дрон покрывает круг [1–6]. Мониторинг протяжённого объекта называется *барьерным покрытием*. Дрон, как автономное устройство, имеет ограниченный запас энергии, что ограничивает длину его траектории без возобновления энергии. Исследователи рассматривают задачи оптимального покрытия барьера с использованием трёх критериев: минимизация числа дронов, минимизация максимальной длины пути, пройденного дроном, и минимизация общей длины траекторий дронов. Для обозначения последней задачи часто используется аббревиатура MinSum. В этой статье рассматривается именно задача MinSum.

В традиционной постановке, когда каждый дрон находится в некоторой начальной точке на плоскости (депо) и покрывает круг некоторого радиуса с центром в месте расположения дрона, задача рассматривалась, например, в [2, 4–6, 9–11]. В этих статьях для каждого дрона ищется такое конечное положение, что весь барьер покрыт, а общая длина траекторий дронов минимальна (возвращаться в депо дрону не надо) [1–3, 5, 6]. Известно, что такая задача NP-трудна, когда круги покрытия дронов разные [2, 3]. Если же круги одинаковые, то сложностной статус задачи не известен. Для последнего случая в [5] предложен алгоритм, который с трудоёмкостью $O(m^4)$ строит $\sqrt{2}$ -приближённое решение задачи, где m — число дронов. Позже в [6] трудоёмкость была уменьшена до $O(m^2)$.

В [7, 8] приведены достаточно подробные обзоры литературы, относящейся к барьерному покрытию. Там же есть ссылки на работы [12] с постановкой задачи маршрутизации и оптимизации траекторий (routing and trajectory optimization problem) и [13], где поставлена задача маршрутизации дрона на графе (drone arc routing problem) и показана её связь с задачей маршрутизации почтальона на графе (postman arc routing problem), а также [14], в которой предложены две задачи маршрутизации с ограничением на длину пути.

В работе [15], первой из посвящённых задаче, близкой к рассматриваемой в этой статье, доказаны свойства решения в случае, когда в каждом депо находится один дрон. Предложена эффективная реализация динамического программирования для построения допустимого решения в прямоугольной метрике, а также найдены некоторые частные случаи полиномиальной разрешимости задачи. В отличие от [15], в [7, 8] число дронов в каждом депо — это искомая величина. В [7] рассмотрен случай,

когда общее число дронов не ограничено, и предложен псевдополиномиальный алгоритм для построения оптимального решения при условии, что каждый дрон покрывает отрезок барьера длины не менее некоторого заданного $\delta > 0$. Трудоёмкость предложенного алгоритма $O(mL^3/\delta)$, где m — число депо, а L — длина барьера. В [8] рассмотрена обобщённая задача с ограничением сверху на число дронов некоторым $n > 0$. Для её решения разработаны два алгоритма. Первый алгоритм ищет оптимальное покрытие оптимальным числом дронов n^* с трудоёмкостью $O(L^2/\delta^2)$. Если $n^* \leq n$, то построенное решение оптимально и для случая ограниченного числа дронов. Иначе второй из указанных алгоритмов строит оптимальное покрытие с трудоёмкостью $O(mnL^2/\delta^2)$.

Новизна результатов, представленных в этой статье, характеризуется тем, что предложенный алгоритм в случае прямоугольной метрики L_1 строит оптимальное решение задачи MinSum с трудоёмкостью $O(m^2)$.

1. Постановка задачи

Барьер — это отрезок $[0, L]$ оси OX на плоскости XOY . Известны координаты (x_i, y_i) , $y_i \geq 0$, каждого депо $d_i \in D$, $i = 1, \dots, m$, в котором можно разместить произвольное число дронов. Пронумеруем депо слева направо согласно абсциссам, т. е. номер i депо d_i меньше номера j депо d_j тогда и только тогда, когда $x_i < x_j$. При равенстве абсцисс депо с большей ординатой, очевидно, можно исключить. Ограничим максимальную длину траектории каждого дрона величиной $q > 0$. Для покрытия барьера траектория каждого дрона начинается в его депо, проходит вдоль отрезка барьера и заканчивается в том же депо, откуда исходит. Часть барьера, вдоль которой прошёл дрон, считается *покрытой* этим дроном. Будем говорить, что дроны из депо d_i *покрывают* отрезок $[a_i, b_i] \subseteq [0, L]$, если каждый из них стартует из депо d_i , перемещается вдоль барьера, возвращается в своё депо, проходя путь не длиннее q , и совокупно дроны покрывают отрезок $[a_i, b_i]$.

Определение 1. *Покрытием C барьера $[0, L]$ называется множество отрезков $[a_i, b_i] \subseteq [0, L]$ таких, что каждый из них покрывается дронами одного депо $d_i \in D$, при этом $\bigcup_{i=1}^m [a_i, b_i] \supseteq [0, L]$ и длина траектории каждого дрона не превосходит q .*

Чтобы задать покрытие C , требуется определить число дронов в каждом депо $d_i \in D$, отрезок барьера $[a_i, b_i] \subseteq [0, L]$, покрываемый дронами этого депо, а также траектории всех дронов.

Задача MinSum. *Требуется определить число дронов в каждом депо, а также траекторию движения каждого дрона так, чтобы покрыть барьер $[0, L]$ и минимизировать общую длину траекторий дронов.*

В евклидовой метрике оптимальная траектория каждого дрона — это треугольник с одной вершиной в депо, одной стороной на барьере и периметром, не превосходящим q . В прямоугольной метрике L_1 траектория дрона из некоторого депо — это граница прямоугольника с периметром не более q , нижней стороной на барьере и депо, находящимся на верхней стороне. При этом очевидно, что в оптимальном решении в одном депо не будет размещено более двух дронов. Далее в статье рассматривается только прямоугольная метрика.

Нам понадобятся следующие определения и утверждения.

Определение 2. Покрытие, при котором для произвольной пары депо $d_i, d_j \in D$ неравенство $b_i \leq a_j$ выполняется тогда и только тогда, когда $i < j$, называется *сохраняющим порядок* (ПСП).

Оптимальное ПСП можно построить с помощью динамического программирования, так как свойство сохранения порядка обеспечивает выполнение принципа оптимальности Беллмана.

Лемма 1 [7]. Для задачи MinSum существует оптимальное покрытие, при котором дроны из одного депо покрывают один отрезок барьера.

Лемма 2 [7]. Для задачи MinSum существует оптимальное покрытие, сохраняющее порядок.

В случае, когда в каждом депо находится не более одного дрона, лемма 2 не верна [15].

Обозначим через $f_i(a, b)$ функцию, равную минимальной длине траекторий дронов из депо d_i , которые покрывают отрезок $[a, b]$. Необходимо решить следующую задачу оптимального разбиения отрезка на подотрезки, которая известна как ЗАДАЧА О БЛИЖАЙШЕМ СОСЕДЕ [16]:

$$\sum_{i=1}^m f_i(z_{i-1}, z_i) \rightarrow \min_z, \quad (1)$$

$$0 = z_0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_m = L, \quad (2)$$

где z_i — точки разбиения барьера. Таким образом, требуется оптимально разбить барьер на m подотрезков (некоторые из них могут быть пустыми).

В [7] приведена схема динамического программирования, которая позволяет решить задачу (1), (2) с трудоёмкостью $O(mL^3/\delta)$ при условии, что каждый дрон покрывает отрезок барьера, длина которого кратна $\delta > 0$.

В прямоугольной метрике предложенный в [7] алгоритм также построит оптимальное решение с псевдополиномиальной трудоёмкостью. В этой статье на основе свойств метрики L_1 предлагается полиномиальный алгоритм для решения задачи MinSum (1), (2).

2. Алгоритм решения задачи в метрике L_1

Для каждого депо d_k определим максимальный отрезок $[A_k, B_k]$, который могут покрыть дроны этого депо:

$$A_k = \max\{0, x_k - q/2 + y_k\}, \quad B_k = \min\{L, x_k + q/2 - y_k\}.$$

Если $\bigcup_{k=1}^m [A_k, B_k] \supseteq [0, L]$, то рассматриваемая задача MinSum имеет решение.

Если известны функции $f_k(x, l)$, $k = 1, \dots, m$, $x \in [0, L]$, $l \in [x, L]$, то произвольное покрытие однозначно определяется разбиением барьера на m частей (отрезков), каждый из которых покрывается дронами из одного депо. Введём функционал $S_k(l)$, равный минимальной длине всех траекторий дронов из депо $d_1, \dots, d_k$, покрывающих совокупно отрезок $[0, l]$. Очевидно выполнение следующих рекуррентных соотношений для построения оптимального ПСП:

$$S_1(l) = \begin{cases} f_1(0, l), & \text{если } l \leq B_1, \\ +\infty & \text{иначе,} \end{cases} \quad x_1(l) = l, \quad (3)$$

$$S_k(l) = \begin{cases} \min_{A_k \leq x \leq l} \{f_k(x, l) + S_{k-1}(x)\} = \\ = f_k(x_k(l), l) + S_{k-1}(x_k(l)), & \text{если } l \leq B_k, \\ +\infty & \text{иначе,} \end{cases} \quad k = 2, \dots, m, \quad (4)$$

где $x_k(l)$ — условно оптимальное решение. Главная цель статьи — эффективная реализация соотношений (3), (4). Для этого нужно рассматривать не все допустимые значения l , а найти отрезки принадлежности l , в которых $S_k(l)$ имеет одно аналитическое выражение.

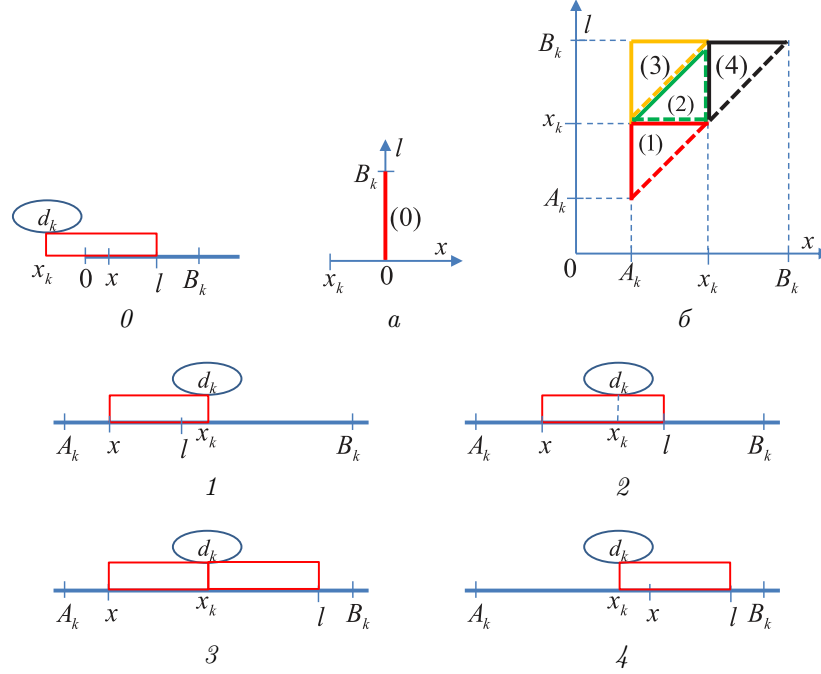
Рассмотрим подробно процедуру вычисления значений $f_k(x, l)$ для всех допустимых значений переменных и фиксированного депо k .

Имеем $f_k(x, x) = 0$; $f_k(x, l) = +\infty$, если $[x, l] \not\subseteq [A_k, B_k]$.

Пусть $x \in [A_k, B_k]$, $l \in (x, B_k]$. Возможны следующие случаи (рис. 1):

- 0) $x_k \leq 0$: $f_k(x, l) = f_k(0, l) = 2(l - x_k + y_k)$;
- 1) $x_k > 0$, $l \in [A_k, x_k]$: $f_k(x, l) = f_k(x, x_k) = 2(x_k - x + y_k)$;
- 2) $l > x_k > 0$, $p_k(l) = l - q/2 + y_k \leq x < x_k$: $f_k(x, l) = 2(l - x + y_k)$;
- 3) $l > x_k > 0$, $x < p_k(l) < x_k$: $f_k(x, l) = 2(l - x + 2y_k)$;
- 4) $x \geq x_k > 0$: $f_k(x, l) = f_k(x_k, l) = 2(l - x_k + y_k)$.

На рис. 1а показана область определения функции $f_k(x, l)$ при $x_k \leq 0$ (случай 0), а на рис. 1б показаны четыре области определения функции $f_k(x, l)$ при $x_k > 0$ (случаи 1–4). В каждой области (0)–(4) функция $f_k(x, l)$ линейна. Более того, в областях (0), (1) и (4) она зависит от одной переменной.


 Рис. 1. Варианты покрытия отрезка $[x, l]$

в зависимости от положения депо и значений переменных x и l (0–4):

- а) допустимая область переменной l функции $f_k(0, l)$ в случае 0;
 б) допустимые области переменных (x, l) функции $f_k(x, l)$ в случаях 1–4

Лемма 3. Если $x_i \leq 0$, $x_j \leq 0$, $B_i \geq B_j$, то $f_i(0, l) \leq f_j(0, l)$ для всех $l \in (0, L]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $B_i = x_i + (q - 2y_i)/2 \geq B_j = x_j + (q - 2y_j)/2$. Значит, $x_i - y_i \geq x_j - y_j$, откуда следует требуемое неравенство $f_i(0, l) = 2(l - x_i + y_i) \leq f_j(0, l) = 2(l - x_j + y_j)$. Лемма 3 доказана.

Очевидно, что справедлива также

Лемма 4. Если $x_i \geq L$, $x_j \geq L$, $A_i \leq A_j$, то $f_i(x, L) \leq f_j(x, L)$ для всех $x \in [0, L]$.

Из сказанного выше следует, что нужно оставить не более одного депо слева от барьера и не более одного депо справа от барьера. Далее примем это утверждение в качестве аксиомы. При таком условии только депо 1 может находиться левее барьера и только депо m может находиться правее барьера.

Рассмотрим сначала случай с единственным депо 1. Имеем

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \min\{L, x_1 + q/2 - y_1\},$$

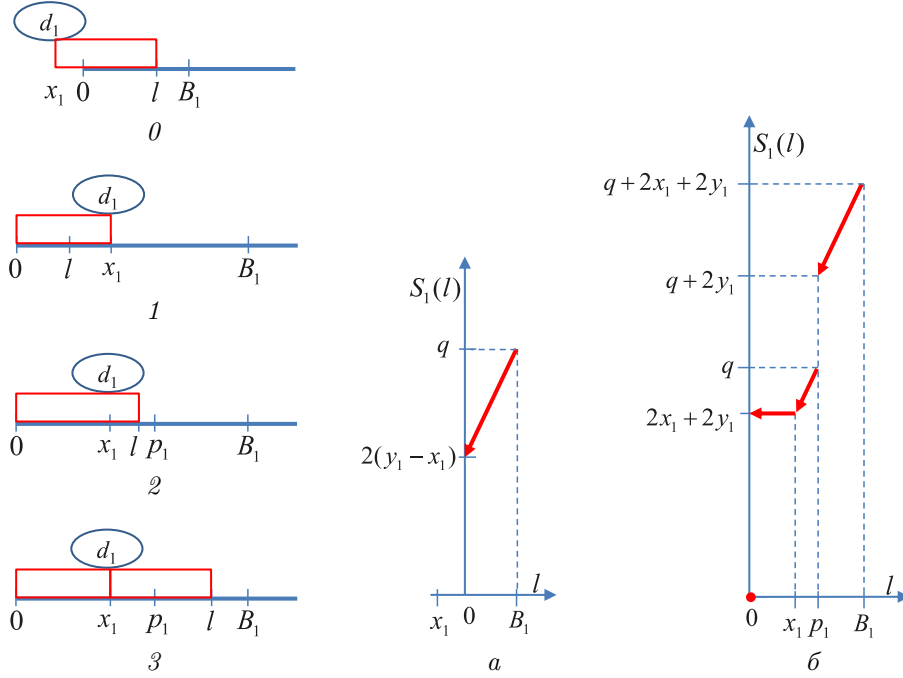


Рис. 2. Варианты покрытия отрезка $[0, l]$ в зависимости от x_1 и l (0–3).
График функционала $S_1(l)$: а) при $x_1 \leq 0$; б) при $x_1 > 0$

$$S_1(l) = \begin{cases} f_1(0, l), & \text{если } l \leq B_1, \\ +\infty & \text{иначе,} \end{cases} \quad x_1(l) = l.$$

Иллюстрация возможных вариантов покрытия отрезка $[0, l]$ представлена на рис. 2:

- 0) $x_1 \leq 0$: $S_1(l) = f_1(0, l) = 2(l - x_1 + y_1)$;
- 1) $A_1 = 0 < l \leq x_1$: $S_1(l) = f_1(0, x_1) = 2(x_1 + y_1)$;
- 2) $x_1 < l \leq p_1 = q/2 - y_1$: $S_1(l) = f_1(0, l) = 2(l + y_1)$;
- 3) $l > p_1 = q/2 - y_1$: $S_1(l) = f_1(0, l) = 2(l + y_1)$.

Таким образом получаем конечное множество *точек переключения* $P_1 \subseteq \{0, x_1, q/2 - y_1, B_1\}$. Между соседними точками переключения функционал $S_1(l)$ представляет собой определённую линейную функцию.

Пусть посчитаны кусочно линейные функции $S_i(l)$ и найдены условно-оптимальные решения $x_i(l)$ для $i = 1, \dots, k - 1$, а также точки переключения P_{k-1} . Если l принадлежит отрезку между соседними точками переключения, то функционал $S_{k-1}(l)$ имеет вид конкретной линейной функции. Рассмотрим процесс вычисления $S_k(l)$. Это делается по формуле (4). Согласно лемме 3 $x_k > 0$ при $k > 1$. Следовательно, возможны следующие четыре случая:

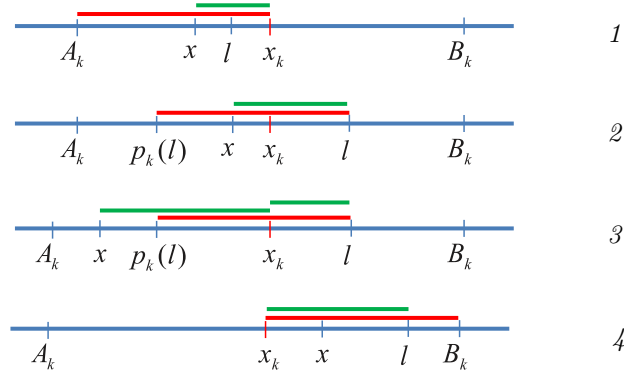


Рис. 3. Варианты покрытия отрезка $[x, l]$ дронами депо k

$$1) l \in [A_k, x_k]: S_k(l) = \min_{A_k \leq x \leq l} \{2(x_k - x + y_k) + S_{k-1}(x)\};$$

$$2) l \in (x_k, B_k] \text{ и } p_k(l) \leq x < x_k: S_k(l) = \min_{p_k(l) \leq x < x_k} \{2(l - x + y_k) +$$

$$S_{k-1}(x)\};$$

$$3) l > x_k \text{ и } x < p_k(l) < x_k: S_k(l) = \min_{A_k \leq x < l} \{2(l - x + 2y_k) + S_{k-1}(x)\};$$

$$4) x \geq x_k: S_k(l) = 2(l - x_k + y_k) + S_{k-1}(x_k).$$

Рассмотрим эти случаи детально. На рис. 3 длина красной линии равна $l - p_k(l)$ — длине максимального отрезка, который может покрыть один дрон из депо k . Зелёные линии показывают отрезки, которые покрываются одним (случаи 1, 2, 4) или двумя (случай 3) дронами из депо k .

1) Здесь функции f_k и S_{k-1} зависят только от x , при этом они обе кусочно линейные. Значит, минимум достигается в граничных точках и точках разрыва или излома, которые выше названы точками переключения. Если l известно, то известно, какие точки переключения из P_{k-1} находятся на отрезке $[A_k, l]$, и для нахождения $S_k(l)$ достаточно сравнить значения $f_k(x, x_k) + S_{k-1}(x)$ только в этих точках x и выбрать минимальное. При этом не нужно вычислять функции в континууме значений l , достаточно рассмотреть отрезки $[A_k, l]$, для которых множество точек переключения одинаковое. В результате получим несколько отрезков, разделённых точками переключения P_k , в каждом из которых функция $S_k(l)$ имеет одно линейное представление.

2) В этом случае отрезок $[x, l]$ покрывается одним дроном из депо k . Функция $f_k(x, l)$ линейна по каждой из переменных, причём $x \in [p_k(l), l]$. Зная l , однозначно определяем множество точек переключения из P_{k-1} , попадающих в отрезок $[p_k(l), l]$. Как и в предыдущем случае, достаточно рассмотреть отрезки значений l , при которых в отрезок $[p_k(l), l]$ попадает одно и то же подмножество точек переключения. В результате получим

несколько отрезков, разделённых точками переключения P_k , в каждом из которых функция $S_k(l)$ имеет одно линейное представление.

3) При $x < p_k(l)$ отрезок $[x, l]$ может быть покрыт только двумя дронами. Здесь для вычисления значений $S_k(l)$ нужно рассматривать точки переключения x из отрезка $[A_k, p_k(l)]$. В результате получим отрезки для l такие, что в отрезке $[A_k, p_k(l)]$ одно и то же множество точек переключения и $S_k(l)$ представлена одной линейной функцией.

4) В этом случае f_k зависит только от l , а S_{k-1} — константа. Следовательно, сразу получаем линейную функцию для $S_k(l)$.

В результате рассмотрения всех случаев получаем конечное число отрезков между соседними точками переключения из множества P_k , в которых $S_k(l)$ имеет одно линейное представление.

На последнем шаге прямого хода определяем отрезок $[x_m(L), L]$, который покрывается дронами депо m . На обратном ходе строим оптимальное решение, используя условно оптимальные значения $x_k(l)$, полученные при выполнении прямого хода.

Теорема 1. *Предложенный алгоритм динамического программирования для построения оптимального решения задачи MinSum в случае прямоугольной метрики может быть реализован с трудоёмкостью $O(m^2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Наиболее трудоёмкой частью алгоритма является прямой ход. На каждом шаге k прямого хода для отрезка значений l находится минимум $f_k(x, l) + S_{k-1}(x)$ путём перебора значений x из подмножества точек переключения. На каждом шаге алгоритма добавляется $O(1)$ точек переключения. Всего прямой ход выполняет m шагов. На каждом шаге рассматривается $O(m)$ отрезков принадлежности l , и для каждого отрезка ищется оптимальное значение x в подмножестве точек переключения. Следовательно, всего $O(m)$ точек переключения, и трудоёмкость алгоритма ограничена функцией $O(m^3)$. Однако при увеличении l с использованием равенств (4) в отрезок $[A_k, l]$ добавляется всего одно значение x . Таким образом, для нахождения условно оптимального решения $x_k(l)$ достаточно найти значение $f_k(x, l) + S_{k-1}(x)$ только в добавленной точке переключения. При такой организации вычислений трудоёмкость алгоритма снижается до $O(m^2)$.

Заключение

В статье рассматривается задача покрытия отрезка $[0, L]$ на плоскости (барьера) одинаковыми мобильными устройствами (дронами) с ограниченным запасом энергии, который определяет максимальную длину q траектории каждого дрона. Дрон стартует из своего депо, движется вдоль отрезка барьера и возвращается в своё депо, проделав путь длины

не более q . Отрезок барьера, вдоль которого двигался дрон, считается покрытым этим дроном. В задаче MinSum требуется определить число дронов в каждом депо и их траектории так, чтобы покрыть барьер, при этом суммарная длина траекторий всех дронов должна быть минимальной.

Ранее в [15] рассматривалась задача MinSum, в которой в каждом депо находился один дрон и оставалось определить траекторию каждого дрона. Для такой постановки задачи не всегда существует оптимальное покрытие, сохраняющее порядок (ПСП), поэтому динамическое программирование не всегда строит оптимальное решение. Если число дронов в каждом депо — искомая величина, то всегда существует оптимальное ПСП [7]. В [7] предложен алгоритм динамического программирования, решающий задачу с псевдополиномиальной трудоёмкостью $O(mL^3)$, где m — число депо, в предположении, что каждый дрон покрывает отрезок целочисленной длины. В [8] предложены два новых алгоритма для решения задачи в случае, когда общее число дронов ограничено числом n . Первый алгоритм находит оптимальное покрытие оптимальным числом дронов n^* с трудоёмкостью $O(L^2)$. Если $n^* > n$, то второй алгоритм строит оптимальное решение с трудоёмкостью $O(nmL^2)$.

В этой статье задача MinSum рассмотрена в прямоугольной метрике L_1 и для нахождения оптимального решения разработан алгоритм динамического программирования полиномиальной трудоёмкости $O(m^2)$.

Финансирование работы

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева (проект № FWNF-2026-0021). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. **Bhattacharya B., Burmester M., Hu Y., Kranakis E., Shi Q., Wiese A.** Optimal movement of mobile sensors for barrier coverage of a planar region // Theor. Comput. Sci. 2009. V. 410, No. 52. P. 5515–5528. DOI: 10.1016/j.tcs.2009.07.007.
2. **Czyzowicz J., Kranakis E., Krizanc D.** [et al.]. On minimizing the sum of sensor movements for barrier coverage of a line segment // Ad-hoc, mobile and wireless networks. Proc. 9th Int. Conf. (Edmonton, Canada, Aug. 20–22, 2010). Heidelberg: Springer, 2010. P. 29–42. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 6288). DOI: 10.1007/978-3-642-14785-2_3.

3. **Dobrev S., Durocher S., Eftekhari M.** [et al.]. Complexity of barrier coverage with relocatable sensors in the plane // *Theor. Comput. Sci.* 2015. V. 579. P. 64–73. DOI: 10.1016/j.tcs.2015.02.006.
4. **Wang H., Zhang X.** Minimizing the maximum moving cost of interval coverage // *Algorithms and computation. Proc. 26th Int. Symp. (Nagoya, Japan, Dec. 9–11, 2015).* Heidelberg: Springer, 2015. P. 188–198. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 9472). DOI: 10.1007/978-3-662-48971-0_17.
5. **Cherry A., Gudmundsson J., Mestre J.** Barrier coverage with uniform radii in 2D // *Algorithms for sensor systems. Rev. Sel. Pap. 13th Int. Symp. Algorithms and Experiments for Wireless Sensor Networks (Vienna, Austria, Sept. 4–8, 2017).* Cham: Springer, 2017. P. 57–69. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 10718). DOI: 10.1007/978-3-319-72751-6_5.
6. **Erzin A. I., Lagutkina N. A.** Barrier coverage problem in 2D // *Algorithms for sensor systems. Rev. Sel. Pap. 14th Int. Symp. Algorithms and Experiments for Wireless Sensor Networks (Helsinki, Finland, Aug. 23–24, 2018).* Cham: Springer, 2019. P. 118–130. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 11410). DOI: 10.1007/978-3-030-14094-6_8.
7. **Erzin A. I., Shadrina A. V.** Optimal placement of mobile sensors for the distance-constrained line routing problem // *Mathematical optimization theory and operations research: Recent trends. Rev. Sel. Pap. 23th Int. Conf. (Omsk, Russia, June 30–July 6, 2024).* Cham: Springer, 2024. P. 172–184. (Commun. Comput. Inf. Sci.; V. 2239). DOI: 10.1007/978-3-031-73365-9_12.
8. **Ерзин А. И., Шадрина А. В.** Размещение дронов для оптимального покрытия барьера // *Дискрет. анализ и исслед. операций.* 2025. Т. 32, № 2. С. 54–71. DOI: 10.33048/daio.2025.32.828.
9. **Bar-Noy A., Rawitz D., Terlecky P.** “Green” barrier coverage with mobile sensors // *Algorithms and complexity. Proc. 9th Int. Conf. (Paris, France, May 20–22, 2015).* Cham: Springer, 2015. P. 33–46. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 9079). DOI: 10.1007/978-3-319-18173-8_2.
10. **Benkoczi R., Friggstad Z., Gaur D., Thom M.** Minimizing total sensor movement for barrier coverage by non-uniform sensors on a line // *Algorithms for sensor systems. Rev. Sel. Pap. 11th Int. Symp. Algorithms and Experiments for Wireless Sensor Networks (Patras, Greece, Sept. 17–18, 2015).* Cham: Springer, 2015. P. 98–111. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 9536). DOI: 10.1007/978-3-319-28472-9_8.
11. **Andrews A. M., Wang H.** Minimizing the aggregate movements for interval coverage // *Algorithmica.* 2017. V. 78, No. 1. P. 47–85. DOI: 10.1007/s00453-016-0153-8.
12. **Coutinho W. P., Battarra M., Fliege J.** The unmanned aerial vehicle routing and trajectory optimisation problem, a taxonomic review // *Comput. Ind. Eng.* 2018. V. 120. P. 116–128. DOI: 10.1016/j.cie.2018.04.037.
13. **Campbell J. F., Corberan A., Plana I., Sanchis J. M.** Drone arc routing problems // *Networks.* 2018. V. 72, No. 4. P. 543–559. DOI: 10.1002/net.21858.

14. **Kek A. G. H., Cheu R. L., Meng Q.** Distance-constrained capacitated vehicle routing problems with flexible assignment of start and end depots // *Math. Comput. Model.* 2008. V. 47. P. 140–152. DOI: 10.1016/j.mcm.2007.02.007.
15. **Erzin A. I., Plotnikov R. V.** Distance-constrained line routing problem // *Optimization and applications. Rev. Sel. Pap. 10th Int. Conf. (Petrovac, Montenegro, Sep. 30 – Oct. 4, 2019).* Cham: Springer, 2020. P. 43–55. (*Commun. Comput. Inf. Sci.*; V. 1145). DOI: 10.1007/978-3-030-38603-0_4.
16. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978. 334 с.
17. **Vidal R. V. V.** Optimal partition of an interval — The discrete version // *Applied simulated annealing.* Heidelberg: Springer, 1993. P. 291–312. (*Lect. Notes Econ. Math. Syst.*; V. 396). DOI: 10.1007/978-3-642-46787-5_15.
18. **Jackson B., Scargle J. D., Barnes D.** [et al.]. An algorithm for optimal partitioning of data on an interval // *IEEE Signal Proces. Lett.* 2005. V. 12, No. 2. P. 105–108. DOI: 10.1109/LSP.2001.838216.
19. **Tilli P., Zucco D.** Optimal partitioning of an interval and applications to Sturm–Liouville eigenvalues // *J. Differ. Equ.* 2019. V. 268, No. 8. P. 4900–4919. DOI: 10.1016/j.jde.2019.12.026.

Ерзин Адиль Ильясович

Статья поступила
17 декабря 2025 г.
После доработки —
15 января 2026 г.
Принята к публикации
22 января 2026 г.

OPTIMAL DRONE PLACEMENT TO COVER
A BARRIER IN THE RECTILINEAR METRIC

A. I. Erzin

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptuyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: adilerzin@math.nsc.ru

Abstract. We consider a line segment in the plane, called a barrier, and its monitoring (coverage) which is performed by identical mobile sensors (drones) with limited trajectory length. Each drone starts from its depot at a certain point on the barrier, moves along the barrier, and returns to its depot after having covered a path of limited length. The part of the barrier along which the drone moves is called covered by this drone. The barrier is covered if each point of it is covered by at least one drone. It is necessary to determine the number of drones in each depot and a trajectory of each drone so that the entire barrier is covered and the total length of the drones' paths (trajectories) is minimal. A dynamic programming algorithm is known for solving this problem with Euclidean distance. It constructs an optimal solution with pseudo-polynomial complexity. In this article, a polynomial algorithm is proposed to solve the problem in a rectilinear metric that constructs an optimal solution with quadratic complexity of the depot number. Illustr. 3, bibliogr. 19.

Keywords: barrier covering, linear routing, mobile sensor (drone), optimal solution.

References

1. B. Bhattacharya, M. Burmester, Y. Hu, E. Kranakis, Q. Shi, and A. Wiese Optimal movement of mobile sensors for barrier coverage of a planar region, *Theor. Comput. Sci.* **410** (52), 5515–5528 (2009), DOI: 10.1007/978-3-540-85097-7_10.

2. **J. Czyzowicz, E. Kranakis, D. Krizanc**, [et al.], On minimizing the sum of sensor movements for barrier coverage of a line segment, in *Ad-Hoc, Mobile and Wireless Networks* (Proc. 9th Int. Conf., Edmonton, Canada, Aug. 20–22, 2010) (Springer, Heidelberg, 2010), pp. 29–42 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 6288), DOI: 10.1007/978-3-642-14785-2_3.
3. **S. Dobrev, S. Durocher, M. Eftekhari**, [et al.], Complexity of barrier coverage with relocatable sensors in the plane, *Theor. Comput. Sci.* **579**, 64–73 (2015), DOI: 10.1016/j.tcs.2015.02.006.
4. **H. Wang and X. Zhang**, Minimizing the maximum moving cost of interval coverage, in *Algorithms and Computation* (Proc. 26th Int. Symp., Nagoya, Japan, Dec. 9–11, 2015) (Springer, Heidelberg, 2015), pp. 188–198 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9472), DOI: 10.1007/978-3-662-48971-0_17.
5. **A. Cherry, J. Gudmundsson, and J. Mestre**, Barrier coverage with uniform radii in 2D, in *Algorithms for Sensor Systems* (Rev. Sel. Pap. 13th Int. Symp. Algorithms and Experiments for Wireless Sensor Networks, Vienna, Austria, Sept. 4–8, 2017) (Springer, Cham, 2017), pp. 57–69 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 10718), DOI: 10.1007/978-3-319-72751-6_5.
6. **A. I. Erzin and N. A. Lagutkina**, Barrier coverage problem in 2D, in *Algorithms for Sensor Systems* (Rev. Sel. Pap. 14th Int. Symp. Algorithms and Experiments for Wireless Sensor Networks, Helsinki, Finland, Aug. 23–24, 2018) (Springer, Cham, 2019), pp. 118–130 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 11410), DOI: 10.1007/978-3-030-14094-6_8.
7. **A. I. Erzin and A. V. Shadrina**, Optimal placement of mobile sensors for the distance-constrained line routing problem, in *Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends* (Rev. Sel. Pap. 23th Int. Conf., Omsk, Russia, June 30–July 6, 2024) (Springer, Cham, 2024), pp. 172–184 (Commun. Comput. Inf. Sci., Vol. 2239), DOI: 10.1007/978-3-031-73365-9.
8. **A. I. Erzin and A. V. Shadrina**, Drone placement for optimal barrier coverage, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **32** (2), 54–71 (2025) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **19** (2), 230–239 (2025)], DOI: 10.33048/daio.2025.32.828.
9. **A. Bar-Noy, D. Rawitz, and P. Terlecky**, “Green” barrier coverage with mobile sensors, in *Algorithms and Complexity* (Proc. 9th Int. Conf., Paris, France, May 20–22, 2015) (Springer, Cham, 2015), pp. 33–46 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9079), DOI: 10.1007/978-3-319-18173-8_2.
10. **R. Benkoczi, Z. Friggstad, D. Gaur, and M. Thom**, Minimizing total sensor movement for barrier coverage by non-uniform sensors on a line, in *Algorithms for Sensor Systems* (Rev. Sel. Pap. 11th Int. Symp. Algorithms and Experiments for Wireless Sensor Networks, Patras, Greece, Sept. 17–18, 2015) (Springer, Cham, 2015), pp. 98–111 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9536), DOI: 10.1007/978-3-319-28472-9_8.
11. **A. M. Andrews and H. Wang**, Minimizing the aggregate movements for interval coverage, *Algorithmica* **78** (1), 47–85 (2017), DOI: 10.1007/s00453-016-0153-8.

12. **W. P. Coutinho, M. Battarra, and J. Fliege**, The unmanned aerial vehicle routing and trajectory optimisation problem, a taxonomic review, *Comput. Ind. Eng.* **120**, 116–128 (2018), DOI: 10.1016/j.cie.2018.04.037.
13. **J. F. Campbell, A. Corberan, I. Plana, and J. M. Sanchis**, Drone arc routing problems, *Networks* **72** (4), 543–559 (2018), DOI: 10.1002/net.21858.
14. **A. G. H. Kek, R. L. Cheu, and Q. Meng**, Distance-constrained capacitated vehicle routing problems with flexible assignment of start and end depots, *Math. Comput. Model.* **47**, 140–152 (2008), DOI: 10.1016/j.mcm.2007.02.007.
15. **A. I. Erzin and R. V. Plotnikov**, Distance-constrained line routing problem, in *Optimization and Applications* (Rev. Sel. Pap. 10th Int. Conf., Petrovac, Montenegro, Sep. 30–Oct. 4, 2019) (Springer, Cham, 2020), pp. 43–55 (Commun. Comput. Inf. Sci., Vol. 1145), DOI: 10.1007/978-3-030-38603-0_4.
16. **V. L. Beresnev, É. Kh. Gimadi, and V. T. Dementyev**, *Extremal Problems of Standardization* (Nauka, Novosibirsk, 1978) [Russian].
17. **R. V. V. Vidal**, Optimal partition of an interval—The discrete version, in *Applied Simulated Annealing*, (Springer, Heidelberg, 1993), pp. 291–312 (Lect. Notes Econ. Math. Syst., Vol. 396), DOI: 10.1007/978-3-642-46787-5_15.
18. **B. Jackson, J. D. Scargle, D. Barnes, [et al.]**, An algorithm for optimal partitioning of data on an interval, *IEEE Signal Proces. Lett.* **12** (2), 105–108 (2005), DOI: 10.1109/LSP.2001.838216.
19. **P. Tilli and D. Zucco**, Optimal partitioning of an interval and applications to Sturm–Liouville eigenvalues, *J. Differ. Equ.* **268** (8), 4900–4919 (2019), DOI: 10.1016/j.jde.2019.12.026.

Adil I. Erzin

Received December 17, 2025

Revised January 15, 2026

Accepted January 22, 2026