

ISSN 2949-5598

# ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 33 № 1 2026

Новосибирск  
Издательство Института математики

## ДОСТАТОЧНОСТЬ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ТОПОЛОГИИ СЕТИ

А. Ю. Крылатов<sup>1, 2, a, b</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский гос. университет,  
Университетская наб., 7/9, 199034 Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Институт проблем транспорта,  
12-я линия, 13, В. О., 199178 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: <sup>a</sup> a.krylatov@spbu.ru, <sup>b</sup> aykrylatov@yandex.ru

**Аннотация.** Статья посвящена изучению условий достаточности в двухуровневой задаче оптимизации топологии сети. В рассматриваемой постановке задачи менеджер сети инвестирует в пропускные способности маршрутов, стремясь минимизировать общую задержку, возникающую в результате равновесного распределения потоков. Основной массив статей, исследующих соответствующую задачу, посвящён разработке алгоритмов поиска решений на основе необходимых условий оптимальности. В настоящей статье доказывается ряд утверждений, позволяющих проверять множество активных переменных на достаточность при поиске глобального оптимума в задаче оптимизации топологии сети с непересекающимися маршрутами. С практической точки зрения в случае рассматриваемого типа сетей появляется возможность построения множества переменных, достаточного для поиска глобального оптимума посредством работы с переменными только из этого множества. Табл. 3, ил. 2, библиогр. 34.

**Ключевые слова:** оптимизация топологии сети, минимизация общих затрат, равновесное распределение потоков.

### Введение

В общем случае задача оптимизации топологии сети состоит в том, чтобы для заданного множества вершин и соединяющих их рёбер найти такие изменения сети, которые приведут к улучшению её характеристик в некотором заранее определённом смысле [1]. В настоящей работе мы концентрируемся на одной из первых постановок задачи оптимизации топологии сети, формулируемой в виде игры Штакельберга [2].

В рамках такой постановки лидер инвестирует в пропускные способности элементов сети, стремясь минимизировать среднее время движения, при условии равновесного распределения потоков на нижнем уровне [3]. Возникновение соответствующей модели связано с тем, что во многих транспортных сетях пользователи ведут себя независимо и конкурентно. Действительно, участники движения в улично-дорожных сетях конкурируют за лучшие маршруты [4], потоки грузов оказывают взаимное влияние на издержки друг друга при движении через единую транспортно-логистическую сеть [5], даже распределение потоков сигналов в беспроводных сетях можно рассматривать как потенциальную игру [6]. Таким образом, поскольку менеджеры сложных сетей зачастую не могут непосредственно влиять на поведение конкурирующих между собой пользователей (единиц потока), им приходится добиваться улучшений в функционировании сети через воздействие на её топологию, в частности, на пропускные способности её элементов [7].

Задача оптимизации топологии сети для транспортного планирования продолжает быть актуальной в силу роста спроса на транспортные сети при ограниченности ресурсов, которые могут быть вложены в их улучшение. Исторически задача формулировалась двумя способами: как дискретная, т. е. позволяющая работать с добавлением новых дуг к существующей сети, и непрерывная, т. е. направленная на поиск оптимальных воздействий на пропускные способности существующих дуг. В любой из двух формулировок целью решения задачи является оптимизация заданной меры эффективности сети, например минимизация общих временных затрат в условиях конкурентного поведения пользователей сети при выборе маршрутов движения [8]. При такой постановке естественным образом возникает двухуровневая задача оптимизации, поскольку решения, принимаемые менеджерами сети в условиях ограниченности ресурсов, влияют на поведение пользователей сети, которое обычно описывается моделью равновесного распределения потоков в виде задачи условной нелинейной оптимизации [9]. В силу своей иерархической структуры задача оптимизации топологии сети была признана исследователями одной из самых сложных, но в то же время наиболее захватывающих задач в области транспортного планирования. Последние 40 лет многие ученые подходили к исследованию задачи и разработке методов её решения с разных сторон [10–13].

Согласно опубликованным работам на сегодняшний момент большая часть исследований в данной области сконцентрированы на непрерывной задаче оптимизации топологии сети. При этом, насколько нам известно, впервые непрерывная задача оптимизации топологии сети была сформулирована в виде задачи двухуровневой оптимизации на рубеже 1960–70-х гг. [14–16]. Как правило, задачи двухуровневой оптимизации

сложны для решения и требуют разработки специальных методов и подходов. Среди первых подходов к решению непрерывной задачи оптимизации топологии сети выделяется подход, основанный на сведении двухуровневой задачи к одноуровневой, что позволяет решать изначальную задачу существующими сходящимися методами. Действительно, задача равновесного распределения потоков нижнего уровня, например, может быть сведена к набору ограничений на переменные величины потоков по маршрутам [17, 18]. В таком случае непрерывная задача оптимизации топологии сети может быть решена методами решения задач условной минимизации [19]. Однако, количество возможных маршрутов движения между каждой парой узлов отправления-прибытия в реальных сетях огромно, а значит, задача построения требуемого набора ограничений на переменные величины потоков по маршрутам сама по себе является трудно реализуемой вычислительной задачей, что делает предложенный подход пригодным только лишь для небольших гипотетических сетей.

Существуют подходы к решению непрерывной задачи оптимизации топологии сети путём сведения её к одноуровневой задаче за счёт представления модели равновесного распределения потоков через вариационные неравенства [20]. Такой подход срабатывает для небольших сетей, но уже для умеренно больших набор ограничений может стать огромным и неразрешимым [21]. Другой подход позволяет представить задачу нижнего уровня одним ограничением, благодаря так называемой маржинальной функции, но к сожалению это единственное ограничение оказывается невыпуклым, что затрудняет поиск глобального оптимума в исходной задаче [22]. Исследователями также представлены подходы сведения задачи оптимизации топологии сети к задаче выпуклого программирования с помощью неявного задания связи между целевыми функциями верхнего и нижнего уровней, но работоспособность алгоритмов для решения полученной задачи продемонстрирована только на очень малых сетях, а оптимум ищется приближённо [23]. Многие исследователи подходили к этой задаче с использованием приближённых представлений реакции нижнего уровня на воздействия верхнего. Наиболее распространённой среди таких представлений является аппроксимация первого порядка, полученная изначалью для целей анализа чувствительности равновесного распределения потоков к незначительным изменениям пропускных способностей [24, 25].

Идея аппроксимации реакции нижнего уровня на воздействия верхнего оказалась востребованной, поскольку на её основе можно разрабатывать различные проекционные методы решения [26]. Действительно, приближение первого порядка позволяет эффективно находить точки локального оптимума за счёт применения градиентного спуска [27]. Такие методы демонстрировали хорошую сходимость к локальным оптимумам,

но не смогли справиться с поиском глобального. Исследователи полагают, что множественные локальные оптимумы возникают вследствие невыпуклости задачи оптимизации топологии сети [26, 28]. В то же время недавние результаты показали, что по крайней мере на малых сетях получаемые проекционными методами локальные оптимумы довольно близки к глобальному [29]. Среди свежих идей по поиску глобального оптимума в задаче оптимизации топологии сети можно отметить идею применения обобщённого геометрического программирования [30]. Однако работоспособность такого подхода также продемонстрирована только на малых гипотетических сетях. При этом в 2017 г. вышла работа, в рамках которой наконец исследована вычислительная сложность непрерывной задачи оптимизации топологии сети и показано, что она является строго NP-полной и APX-трудной задачей [31]. Вместе с тем, доказано, что в случае одного истока решение задачи может быть получено за полиномиальное время.

Несмотря на многочисленные исследования непрерывной задачи оптимизации топологии сети, до сих пор существуют открытые вопросы. В частности, мало изучен вопрос об условиях оптимальности, которым с необходимостью или достаточностью должны удовлетворять решения задачи оптимизации топологии сети. Действительно, подавляющее большинство исследований в данной области сосредоточено на поиске алгоритмов решения исходной двухуровневой задачи с опорой на необходимые условия оптимальности, например для преобразованной одноуровневой задачи оптимизации. Однако, как показали недавние результаты, существуют условия, которым с необходимостью должны удовлетворять решения самой исходной двухуровневой задачи оптимизации, полученные для специального вида сетей [32]. При этом условий достаточности для рассматриваемой задачи, насколько нам известно, в литературе вообще не представлено. В настоящей статье доказывается ряд утверждений, позволяющих проверять множество активных переменных на достаточность при поиске глобального оптимума в задаче оптимизации топологии сети с непересекающимися маршрутами. С практической точки зрения в случае рассматриваемого типа сетей появляется возможность построения множества переменных, достаточного для поиска глобального оптимума посредством работы с переменными только из этого множества.

В разд. 1 статьи приведена математическая постановка исследуемой задачи. Разд. 2 посвящён ряду ранее полученных результатов, позволяющих сводить сформулированную задачу оптимизации топологии сети к минимаксу. В разд. 3 представлены доказательства утверждений, использование которых позволяет строить множество активных переменных задачи таким образом, что величина целевой функции верхнего уровня гарантированно уменьшается. В разд. 4 доказано утверждение,

выполнение условий которого на найденном множестве переменных гарантирует, что расширение этого множества не может привести к уменьшению значения величины целевой функции верхнего уровня. Другими словами, найдены условия, выполнение которых позволяет утверждать, что построенного множества активных переменных достаточно для поиска глобального оптимума. В разд. 5 приведён пример использования полученных условий при решении задачи оптимизации топологии сети с непересекающимися маршрутами.

### 1. Формулировка задачи

Рассмотрим сеть в виде ориентированного графа  $G = (V, E)$ . Будем считать, что сеть состоит из  $n$  непересекающихся альтернативных путей (каналов), либо исходящих из единственного истока, либо входящих в единственный сток, либо исходящих из единственного истока и входящих в единственный сток. Множество всех таких непересекающихся альтернатив будем обозначать через  $I$ ,  $|I| = n$ . Предположим, что каждая альтернатива  $i \in I$  характеризуется величиной пропускной способности  $y_i$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)^\top$  при  $y \in \mathbb{R}^n$ . При этом будем считать, что величины пропускных способностей  $y_i$ ,  $i \in I$ , являются переменными верхнего уровня двухуровневой задачи оптимизации топологии сети, каждая из которых может принимать допустимые значения от  $l_i > 0$  до  $u_i > 0$ , т. е.  $y_i$  принадлежит множеству  $Y_i = \{y_i \mid l_i \leq y_i \leq u_i\}$  для любого  $i \in I$ ;  $l = (l_1, \dots, l_n)^\top$  и  $u = (u_1, \dots, u_n)^\top$ . Более того, для каждого  $i \in I$  введём непрерывно дифференцируемую строго возрастающую выпуклую функцию на множестве вещественных неотрицательных чисел  $g_i$ , принимающую только неотрицательные значения. Функция  $g_i(y_i)$ ,  $i \in I$ , будет описывать бюджетные затраты, необходимые для увеличения пропускной способности альтернативы  $i$  с величины  $l_i$  до величины  $y_i$  при  $g_i(l_i) = 0$ . При этом общий бюджет, который может быть инвестирован в увеличение пропускной способности всех альтернатив, не должен превышать  $U$ :  $\sum_{i \in I} g_i(y_i) \leq U$ . Таким образом, получаем область определения переменных верхнего уровня двухуровневой задачи оптимизации топологии сети:

$$Y = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in I} g_i(y_i) \leq U, l_i \leq y_i \leq u_i, i \in I \right\}.$$

Кроме того, будем считать, что как только допустимый набор величин пропускных способностей  $y \in Y$  задан, поток  $D > 0$  распределяется среди доступных альтернатив. Через  $x_i$  обозначим количество потока, распределённого по альтернативе  $i \in I$ :  $D = \sum_{i \in I} x_i$  и  $x = (x_1, \dots, x_n)^\top$  при  $x \in \mathbb{R}^n$ . Таким образом, получаем область определения переменных

нижнего уровня двухуровневой задачи оптимизации топологии сети:

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in I} x_i = D, x_i \geq 0, i \in I \right\}.$$

Более того, будем считать, что каждая альтернатива  $i \in I$  характеризуется функцией задержки (затрат)  $f_i(x_i, y_i)$  единицы потока  $x_i$  по альтернативе с пропускной способностью  $y_i$ . С одной стороны, будем предполагать, что  $f_i(x_i, \bar{y}_i) \in C^3(\mathbb{R})$  для любого фиксированного  $\bar{y}_i > 0, i \in I$ , при этом

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(0, \bar{y}_i) = 0, \quad (1)$$

и для  $m \in \overline{1, 2}$  справедливо неравенство

$$\frac{\partial^m f_i}{\partial x_i^m}(x_i, \bar{y}_i) > 0, \quad x_i > 0. \quad (2)$$

С другой стороны, пусть  $f_i(\bar{x}_i, y_i) \in C^1(\mathbb{R})$  для любого фиксированного  $\bar{x}_i \in \mathbb{R}, i \in I$ , при этом если  $\bar{x}_i \geq 0$ , то

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_i}(\bar{x}_i, y_i) \leq 0, \quad y_i \in Y_i. \quad (3)$$

В настоящей статье мы рассмотрим двухуровневую задачу оптимизации топологии сети  $G$  в виде игры Штакельберга. Будем предполагать, что лидер стремится минимизировать общие затраты в сети на верхнем уровне оптимизации, в то время как на нижнем уровне происходит равновесное распределение потоков (затраты на всех используемых альтернативах одинаковы и меньше затрат на неиспользуемых). В рамках введенных предположений, некооперативная игра равновесного распределения потоков на нижнем уровне является потенциальной игрой и может быть сформулирована в виде следующей задачи условной нелинейной оптимизации [9, 33]:

$$\min_{x \in X} \sum_{i \in I} \int_0^{x_i} f_i(u, y_i) du.$$

Заметим, что при строго возрастающих по  $x_i, i \in I$ , функциях  $f_i(x_i, y_i)$  для любого  $y \in Y$  получаем задачу минимизации выпуклой целевой функции на выпуклом множестве ограничений. Другими словами, для любого  $y \in Y$  задача оптимизации нижнего уровня имеет единственное решение. В свою очередь, лидер на верхнем уровне стремится минимизировать общие затраты (общую задержку) в сети за счёт минимальных инвестиций в увеличение пропускной способности альтернатив [34]:

$$\min_{y \in Y} \sum_{i \in I} f_i(x_i, y_i) x_i + w \sum_{i \in I} g_i(y_i),$$

где вес  $w \geq 0$  определяет значимость инвестиционных затрат в целевой функции верхнего уровня. Таким образом, окончательно получаем следующую задачу двухуровневой оптимизации топологии сети [3]:

$$\min_{y \in Y} \sum_{i \in I} f_i(x_i, y_i) x_i + w \sum_{i \in I} g_i(y_i) \quad (4)$$

при

$$x = \arg \min_{x \in X} \sum_{i \in I} \int_0^{x_i} f_i(u, y_i) du. \quad (5)$$

## 2. Сведение задачи оптимизации топологии сети к минимаксу

Для любого  $\hat{I} \subseteq I$  зададим функции

$$\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) = \frac{\sum_{i \in \hat{I}} \frac{f_i(x_i, y_i)}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i, y_i)}}{\sum_{i \in \hat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i, y_i)}},$$

$$\varphi_{\hat{I}}(x, y) = \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) D + w \sum_{i \in I} g_i(y_i)$$

на  $X_{\hat{I}} \times Y$ , где  $X_{\hat{I}} = \{x \in X \mid x_i > 0 \Leftrightarrow i \in \hat{I}\}$ .

В силу теоремы 2 из [32] решение задачи двухуровневой оптимизации (4), (5) существует, а  $y^* \in Y$  является этим решением тогда и только тогда, когда

$$y^* \in \arg \min_{y \in Y} \left[ \min_{\hat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) D + w \sum_{i \in I} g_i(y_i) \right]. \quad (6)$$

При этом по следствию 1 из [32] если  $y^*$  является решением задачи двухуровневой оптимизации (4), (5), а  $x^*$  — решением задачи (5) для  $y^*$ , то пара  $(x^*, y^*)$  является решением задачи минимакса

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{I^*}} \varphi_{I^*}(x, y) \quad (7)$$

при

$$I^* \in \arg \min_{\hat{I} \subseteq I} \min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \varphi_{\hat{I}}(x, y). \quad (8)$$

Иначе говоря, при решении задачи двухуровневой оптимизации (4), (5) множество активных переменных с необходимостью находится среди таких подмножеств  $\hat{I} \subseteq I$ , которые обеспечивают наименьшее значение величины минимакса функции  $\varphi_{\hat{I}}(x, y)$ .



### 3. Построение множества активных переменных

**Лемма 1.** Если у функции  $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$  нет экстремумов внутри множества  $X_{\hat{I}}$ , то

$$\sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) = \max_{i \in \hat{I}} f_i(0, y_i). \quad (9)$$

**Доказательство.** Если у непрерывной функции  $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$  нет экстремумов внутри открытого ограниченного множества  $X_{\hat{I}}$ , то супремум  $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y)$  на  $X_{\hat{I}}$  достигается на границе этого множества. Поскольку

$$\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) = \frac{f_j(x_j, y_j) + \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_j, y_j) \sum_{i \in \hat{I} \setminus j} \frac{f_i(x_i, y_i)}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i, y_i)}}{1 + \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_j, y_j) \sum_{i \in \hat{I} \setminus j} \frac{1}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i, y_i)}}, \quad j \in \hat{I},$$

в силу (1) получаем

$$\lim_{x_j \rightarrow 0} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, y) = f_j(0, y_j), \quad j \in \hat{I},$$

т. е. приходим к (9).

**Теорема 1.** Если пара  $(\hat{x}, \hat{y}) \in X_{\hat{I}} \times Y$  является решением задачи минимакса

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \varphi_{\hat{I}}(x, y) \quad (10)$$

и существует  $p \in I \setminus \hat{I}$  такой, что  $f_p(0, \hat{y}_p) < f_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$  для  $i \in \hat{I}$ , то

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\bar{I}}} \varphi_{\bar{I}}(x, y) < \min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \varphi_{\hat{I}}(x, y)$$

при  $\bar{I} = \hat{I} \cup p$ .

**Доказательство.** Если пара  $(\hat{x}, \hat{y}) \in X_{\hat{I}} \times Y$  является решением задачи минимакса (10), то  $\hat{x}$  является точкой максимума функции  $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \hat{y})$  на множестве  $X_{\hat{I}}$ . В таком случае согласно лемме 2 из [32] имеем

$$f_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i) = f_j(\hat{x}_j, \hat{y}_j), \quad i, j \in \hat{I}.$$

При этом в силу вида функции  $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \hat{y})$  получаем

$$\sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \hat{y}) = \mathbb{f}_{\hat{I}}(\hat{x}, \hat{y}) = f_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i), \quad i \in \hat{I}. \quad (11)$$

Рассмотрим систему уравнений  $f_p(x_p, \hat{y}_p) = f_i(x_i, \hat{y}_i)$  для  $i \in \hat{I}$ . Если на множестве  $X_{\bar{I}}$  существует решение этой системы, то в силу непрерывности и строгого возрастания функций  $f_i(x_i, \hat{y}_i)$  по  $x_i$  на множестве положительных чисел,  $i \in I$ , это решение единственно, а поскольку

$f_p(0, \hat{y}_p) < f_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$  для  $i \in \hat{I}$ , существуют такие  $\Delta \hat{x}_i > 0$ ,  $i \in \hat{I}$ , что

$$f_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i) > f_i(\hat{x}_i - \Delta \hat{x}_i, \hat{y}_i) = f_p\left(\sum_{i \in \hat{I}} \Delta \hat{x}_i, \hat{y}_p\right), \quad i \in \hat{I}. \quad (12)$$

При этом согласно леммам 1 и 2 из [32]  $\bar{x} \in X_{\bar{T}}$  такой, что  $\bar{x}_i = \hat{x}_i - \Delta \hat{x}_i$ ,  $i \in \hat{I}$ , и  $\bar{x}_p = \sum_{i \in \hat{I}} \Delta \hat{x}_i$ , является единственной точкой максимума функции

$\mathbb{f}_{\bar{T}}(x, \hat{y})$  на множестве  $X_{\bar{T}}$ :

$$\sup_{x \in X_{\bar{T}}} \mathbb{f}_{\bar{T}}(x, \hat{y}) = \mathbb{f}_{\bar{T}}(\bar{x}, \hat{y}) = f_p(\bar{x}_p, \hat{y}_p). \quad (13)$$

На основании (11) и (13) в силу (12) получаем

$$\sup_{x \in X_{\bar{T}}} \mathbb{f}_{\bar{T}}(x, \hat{y}) < \sup_{x \in X_{\hat{T}}} \mathbb{f}_{\hat{T}}(x, \hat{y}).$$

Если на множестве  $X_{\bar{T}}$  не существует решения системы уравнений  $f_p(x_p, \hat{y}_p) = f_i(x_i, \hat{y}_i)$ ,  $i \in \hat{I}$ , то в силу непрерывности и строгого возрастания функций  $f_i(x_i, \hat{y}_i)$  по  $x_i$  на множестве положительных чисел,  $i \in I$ , поскольку  $f_p(0, \hat{y}_p) < f_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i)$  для  $i \in \hat{I}$  существуют  $\tilde{I} \subset \hat{I}$  и такие  $\Delta \hat{x}_i > 0$ ,  $i \in \tilde{I}$ , что

$$f_j(0, \hat{y}_j) > f_i(\hat{x}_i - \Delta \hat{x}_i, \hat{y}_i) = f_p\left(\sum_{i \in \tilde{I}} \Delta \hat{x}_i, \hat{y}_p\right), \quad i \in \tilde{I}, j \in \hat{I} \setminus \tilde{I}.$$

Таким образом,

$$f_j(0, \hat{y}_j) > f_p\left(\sum_{i \in \tilde{I}} \Delta \hat{x}_i, \hat{y}_p\right) > f_p(0, \hat{y}_p), \quad j \in \hat{I} \setminus \tilde{I}. \quad (14)$$

Поскольку на множестве  $X_{\bar{T}}$  не существует решения системы уравнений  $f_p(x_p, \hat{y}_p) = f_i(x_i, \hat{y}_i)$ ,  $i \in \hat{I}$ , в силу леммы 2 из [32] у функции  $\mathbb{f}_{\bar{T}}(x, \hat{y})$  нет экстремумов внутри множества  $X_{\bar{T}}$ , что с учётом леммы 1 ведёт к равенству

$$\sup_{x \in X_{\bar{T}}} \mathbb{f}_{\bar{T}}(x, \hat{y}) = \max_{i \in \tilde{I}} f_i(0, \hat{y}_i). \quad (15)$$

Однако, благодаря (14) из (15) следует, что

$$\sup_{x \in X_{\bar{T}}} \mathbb{f}_{\bar{T}}(x, \hat{y}) = \max_{i \in \hat{I}} f_i(0, \hat{y}_i). \quad (16)$$

В силу строгого возрастания функций  $f_i(x_i, \hat{y}_i)$ ,  $i \in \hat{I}$ , на множестве положительных чисел, опираясь на (11) и (16), получаем

$$\sup_{x \in X_{\bar{T}}} \mathbb{f}_{\bar{T}}(x, \hat{y}) < \sup_{x \in X_{\hat{T}}} \mathbb{f}_{\hat{T}}(x, \hat{y}).$$

Приходим к выводу, что в любом из возможных случаев справедливо неравенство

$$\sup_{x \in X_{\bar{T}}} f_{\bar{T}}(x, \hat{y}) < \sup_{x \in X_{\hat{I}}} f_{\hat{I}}(x, \hat{y}). \quad (17)$$

В свою очередь, из (17) следует, что

$$\sup_{x \in X_{\bar{T}}} f_{\bar{T}}(x, \hat{y})D + \omega \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i) < \sup_{x \in X_{\hat{I}}} f_{\hat{I}}(x, \hat{y})D + \omega \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i),$$

или

$$\sup_{x \in X_{\bar{T}}} \left[ f_{\bar{T}}(x, \hat{y})D + \omega \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i) \right] < \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \left[ f_{\hat{I}}(x, \hat{y})D + \omega \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i) \right], \quad (18)$$

при этом

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\bar{T}}} \left[ f_{\bar{T}}(x, y)D + \omega \sum_{i \in I} g_i(y_i) \right] \leq \sup_{x \in X_{\bar{T}}} \left[ f_{\bar{T}}(x, \hat{y})D + \omega \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i) \right].$$

Таким образом, в силу (18) получаем

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\bar{T}}} \left[ f_{\bar{T}}(x, y)D + \omega \sum_{i \in I} g_i(y_i) \right] < \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \left[ f_{\hat{I}}(x, \hat{y})D + \omega \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i) \right],$$

при этом поскольку

$$\sup_{x \in X_{\hat{I}}} \left[ f_{\hat{I}}(x, \hat{y})D + \omega \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i) \right] = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \left[ f_I(x, y)D + \omega \sum_{i \in I} g_i(y_i) \right],$$

окончательно получаем

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\bar{T}}} \left[ f_{\bar{T}}(x, y)D + \omega \sum_{i \in I} g_i(y_i) \right] < \min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \left[ f_{\hat{I}}(x, y)D + \omega \sum_{i \in I} g_i(y_i) \right].$$

**Теорема 2.** Если  $\hat{y} \in Y$  таков, что

$$\sup_{x \in X_{\hat{I}}} \varphi_{\hat{I}}(x, \hat{y}) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \varphi_{\hat{I}}(x, y),$$

но при этом не существует решения системы  $f_i(x_i, \hat{y}_i) = f_j(x_j, \hat{y}_j)$ ,  $i, j \in \hat{I}$ , на множестве  $X_{\hat{I}}$ , то

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\bar{T}}} \varphi_{\bar{T}}(x, y) \leq \min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \varphi_{\hat{I}}(x, y)$$

при  $\bar{I} = \hat{I} \setminus s$ , где  $f_s(0, \hat{y}_s) = \max_{i \in \bar{I}} f_i(0, \hat{y}_i)$ .

**Доказательство.** Коль скоро на множестве  $X_{\hat{I}}$  не существует решения системы  $f_i(x_i, \hat{y}_i) = f_j(x_j, \hat{y}_j)$ ,  $i, j \in \hat{I}$ , согласно лемме 2 из [32]

у функции  $\mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \hat{y})$  нет экстремумов внутри множества  $X_{\hat{I}}$ . В таком случае по лемме 1

$$\sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \hat{y}) = \max_{i \in \hat{I}} f_i(0, \hat{y}_i). \quad (19)$$

Рассмотрим систему уравнений  $f_i(x_i, \hat{y}_i) = f_j(x_j, \hat{y}_j)$  для  $i, j \in \bar{I}$ . Если на множестве  $X_{\bar{I}}$  не существует её решения, то в силу леммы 2 из [32] у функции  $\mathbb{f}_{\bar{I}}(x, \hat{y})$  нет экстремумов внутри множества  $X_{\bar{I}}$ . В таком случае согласно лемме 1

$$\sup_{x \in X_{\bar{I}}} \mathbb{f}_{\bar{I}}(x, \hat{y}) = \max_{i \in \bar{I}} f_i(0, \hat{y}_i), \quad (20)$$

а поскольку  $f_s(0, \hat{y}_s) = \max_{i \in \hat{I}} f_i(0, \hat{y}_i)$ , из (19) и (20) следует, что

$$\sup_{x \in X_{\bar{I}}} \mathbb{f}_{\bar{I}}(x, \hat{y}) \leq \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \hat{y}).$$

Если же существует  $\tilde{x} \in X_{\bar{I}}$  такой, что  $f_i(\tilde{x}_i, \hat{y}_i) = f_j(\tilde{x}_j, \hat{y}_j)$ ,  $i, j \in \bar{I}$ , то в силу лемм 1 и 2 из [32] имеем

$$\sup_{x \in X_{\bar{I}}} \mathbb{f}_{\bar{I}}(x, \hat{y}) = f_i(\tilde{x}_i, \hat{y}_i), \quad i \in \bar{I}. \quad (21)$$

Предположим при этом, что  $f_i(\tilde{x}_i, \hat{y}_i) > f_s(0, \hat{y}_s)$ ,  $i \in \bar{I}$ . В таком случае в силу непрерывности и строгого возрастания функций  $f_i(x_i, \hat{y}_i)$  по  $x_i$  на множестве положительных чисел,  $i \in \bar{I}$ , существуют такие  $\Delta \tilde{x}_i > 0$ ,  $i \in \bar{I}$ , что

$$f_i(\tilde{x}_i - \Delta \tilde{x}_i, \hat{y}_i) = f_s\left(\sum_{i \in \bar{I}} \Delta \tilde{x}_i, \hat{y}_s\right), \quad i \in \bar{I},$$

при  $\tilde{x}_i - \Delta \tilde{x}_i > 0$ ,  $i \in \bar{I}$ , поскольку  $f_i(0, \hat{y}_i) \leq f_s(0, \hat{y}_s)$  для всех  $i \in \bar{I}$ . Другими словами, предположив, что  $f_i(\tilde{x}_i, \hat{y}_i) > f_s(0, \hat{y}_s)$ ,  $i \in \bar{I}$ , приходим к необходимости существования решения системы  $f_i(x_i, \hat{y}_i) = f_j(x_j, \hat{y}_j)$ ,  $i, j \in \hat{I}$ . Таким образом, предположение оказалось неверным, а значит,

$$f_i(\tilde{x}_i, \hat{y}_i) \leq f_s(0, \hat{y}_s), \quad i \in \bar{I}. \quad (22)$$

В силу (22) из (19) и (21) следует, что

$$\sup_{x \in X_{\bar{I}}} \mathbb{f}_{\bar{I}}(x, \hat{y}) \leq \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \hat{y}).$$

Приходим к выводу, что в любом из возможных случаев справедливо неравенство

$$\sup_{x \in X_{\bar{I}}} \mathbb{f}_{\bar{I}}(x, \hat{y}) \leq \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \mathbb{f}_{\hat{I}}(x, \hat{y}). \quad (23)$$

В свою очередь, из (23) следует, что

$$\sup_{x \in X_{\bar{T}}} \mathbb{f}_{\bar{T}}(x, \hat{y})D + \omega \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i) \leq \sup_{x \in X_{\hat{T}}} \mathbb{f}_{\hat{T}}(x, \hat{y})D + \omega \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i),$$

или

$$\sup_{x \in X_{\bar{T}}} \left[ \mathbb{f}_{\bar{T}}(x, \hat{y})D + \omega \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i) \right] \leq \sup_{x \in X_{\hat{T}}} \left[ \mathbb{f}_{\hat{T}}(x, \hat{y})D + \omega \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i) \right], \quad (24)$$

при этом

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\bar{T}}} \left[ \mathbb{f}_{\bar{T}}(x, y)D + \omega \sum_{i \in I} g_i(y_i) \right] \leq \sup_{x \in X_{\bar{T}}} \left[ \mathbb{f}_{\bar{T}}(x, \hat{y})D + \omega \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i) \right].$$

Таким образом, в силу (24) получаем

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\bar{T}}} \left[ \mathbb{f}_{\bar{T}}(x, y)D + \omega \sum_{i \in I} g_i(y_i) \right] \leq \sup_{x \in X_{\hat{T}}} \left[ \mathbb{f}_{\hat{T}}(x, \hat{y})D + \omega \sum_{i \in I} g_i(\hat{y}_i) \right],$$

или

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\bar{T}}} \left[ \mathbb{f}_{\bar{T}}(x, y)D + \omega \sum_{i \in I} g_i(y_i) \right] \leq \min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{T}}} \left[ \mathbb{f}_{\hat{T}}(x, y)D + \omega \sum_{i \in I} g_i(y_i) \right].$$

#### 4. Достаточность множества активных переменных

**Теорема 3.** Пусть

$$f_i(0, \dot{y}_i) = f_i(0, \ddot{y}_i), \quad i \in I, \quad \dot{y}_i, \ddot{y}_i \in Y.$$

В таком случае если пара  $(\hat{x}, \hat{y}) \in X_{\hat{T}} \times Y$  является решением задачи минимакса

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{T}}} \varphi_{\hat{T}}(x, y)$$

и при этом  $f_i(\hat{x}_i, l_i) \leq f_j(0, l_j)$  для всех  $i \in \hat{I}$ ,  $j \in I \setminus \hat{I}$ , то для любого  $s \in I \setminus \hat{I}$  справедливо неравенство

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{T}}} \varphi_{\hat{T}}(x, y) \leq \min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\bar{T}}} \varphi_{\bar{T}}(x, y),$$

где  $\bar{T} = \hat{T} \cup s$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Если пара  $(\hat{x}, \hat{y}) \in X_{\hat{T}} \times Y$  является решением задачи минимакса для  $\varphi_{\hat{T}}(x, y)$ , то  $\hat{x} \in X_{\hat{T}}$  является точкой максимума функции  $\mathbb{f}_{\hat{T}}(x, \hat{y})$  на множестве  $X_{\hat{T}}$ . В таком случае согласно лемме 2 из [32] выполняются равенства

$$f_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i) = f_j(\hat{x}_j, \hat{y}_j), \quad i, j \in \hat{I}. \quad (25)$$

Выстроим  $f_i(\hat{x}_i, l_i)$ ,  $i \in \hat{I}$ , в порядке возрастания:

$$f_{i_1}(\hat{x}_{i_1}, l_{i_1}) \leq \dots \leq f_{i_m}(\hat{x}_{i_m}, l_{i_m}),$$

где  $\hat{I} = \{i_1, \dots, i_m\}$ . Поскольку функции  $f_i(x_i, l_i)$  непрерывные и строго возрастающие по  $x_i$  на множестве положительных чисел,  $i \in I$ , существуют  $\Delta \hat{x}_i \geq 0$ ,  $i \in \hat{I}$ , такие, что

$$f_{i_1}(\hat{x}_{i_1} + \Delta \hat{x}_{i_1}, l_{i_1}) = \dots = f_{i_m}(\hat{x}_{i_m} - \Delta \hat{x}_{i_m}, l_{i_m}),$$

при  $\sum_{a=1}^{k-1} \Delta \hat{x}_{i_a} = \sum_{a=k}^m \Delta \hat{x}_{i_a}$  и  $\hat{x}_{i_a} - \Delta \hat{x}_{i_a} > 0$  для всех  $a \in \overline{k, m}$ , где  $k$  такой, что

$$f_{i_{k-1}}(\hat{x}_{i_{k-1}} + \Delta \hat{x}_{i_{k-1}}, l_{i_{k-1}}) = f_{i_k}(\hat{x}_{i_k} - \Delta \hat{x}_{i_k}, l_{i_k}).$$

Действительно, для любого  $a \in \overline{k, m}$  справедливо

$$f_{i_a}(\hat{x}_{i_a} - \Delta \hat{x}_{i_a}, l_{i_a}) = f_{i_1}(\hat{x}_{i_1} + \Delta \hat{x}_{i_1}, l_{i_1}),$$

откуда в силу вида функции  $f_{i_1}(x_{i_1}, l_{i_1})$  следует, что

$$f_{i_a}(\hat{x}_{i_a} - \Delta \hat{x}_{i_a}, l_{i_a}) \geq f_{i_1}(\hat{x}_{i_1}, l_{i_1}),$$

при этом поскольку  $f_{i_1}(\hat{x}_{i_1}, y_{i_1})$  невозрастающая по  $y_{i_1}$  на  $Y_{i_1}$ , то

$$f_{i_1}(\hat{x}_{i_1}, l_{i_1}) \geq f_{i_1}(\hat{x}_{i_1}, \hat{y}_{i_1}),$$

а значит,

$$f_{i_a}(\hat{x}_{i_a} - \Delta \hat{x}_{i_a}, l_{i_a}) \geq f_{i_1}(\hat{x}_{i_1}, \hat{y}_{i_1}). \quad (26)$$

Однако, в силу (25) выполняется равенство

$$f_{i_1}(\hat{x}_{i_1}, \hat{y}_{i_1}) = f_{i_a}(\hat{x}_{i_a}, \hat{y}_{i_a}),$$

а так как  $\hat{x}_{i_a} > 0$ , то

$$f_{i_a}(\hat{x}_{i_a}, \hat{y}_{i_a}) > f_{i_a}(0, \hat{y}_{i_a}),$$

а с учётом равенства  $f_{i_a}(0, \hat{y}_{i_a}) = f_{i_a}(0, l_{i_a})$ , следующего из условия теоремы, получаем

$$f_{i_1}(\hat{x}_{i_1}, \hat{y}_{i_1}) > f_{i_a}(0, l_{i_a}). \quad (27)$$

Подставив (27) в (26), получим

$$f_{i_a}(\hat{x}_{i_a} - \Delta \hat{x}_{i_a}, l_{i_a}) > f_{i_a}(0, l_{i_a}),$$

откуда в силу вида функции  $f_{i_a}(x_{i_a}, l_{i_a})$  следует, что  $(\hat{x}_{i_a} - \Delta \hat{x}_{i_a}) > 0$  для всех  $a \in \overline{k, m}$ . Другими словами, существует  $\tilde{x} \in X_{\hat{I}}$  такой, что

$$f_i(\tilde{x}_i, l_i) = f_j(\tilde{x}_j, l_j), \quad i, j \in \hat{I}.$$

Предположим, что существует решение  $\tilde{x} \in X_{\hat{I}}$  системы уравнений  $f_i(x_i, l_i) = f_j(x_j, l_j)$ ,  $i, j \in \hat{I}$ . Тогда найдётся  $p \in \hat{I}$ , для которого справедливо

$$f_p(\tilde{x}_p, l_p) \leq f_p(\hat{x}_p, l_p),$$

поскольку в противном случае в силу непрерывности и строгого возрастания функций  $f_i(x_i, \hat{y}_i)$  по  $x_i$  на множестве положительных чисел,  $i \in I$ ,

выполнялось бы неравенство  $\tilde{x}_i > \hat{x}_i$  для всех  $i \in \hat{I}$ , а значит,  $\sum_{i \in \hat{I}} \tilde{x}_i > \sum_{i \in \hat{I}} \hat{x}_i = D$  (т. е.  $\tilde{x} \notin X_{\hat{I}}$ ). В свою очередь, поскольку  $f_p(\hat{x}_p, l_p) \leq f_s(0, l_s)$  для произвольно выбранного  $s \in I \setminus \hat{I}$ , то

$$f_i(\tilde{x}_i, l_i) = f_p(\tilde{x}_p, l_p) \leq f_s(0, l_s), \quad i \in \hat{I}. \quad (28)$$

При этом в силу непрерывности и невозрастания функции  $f_i(\tilde{x}_i, y_i)$  по  $y_i$  на множестве  $Y_i$ ,  $i \in I$ , справедливо

$$f_i(\tilde{x}_i, \bar{y}_i) \leq f_i(\tilde{x}_i, l_i), \quad i \in \hat{I}, \quad (29)$$

где  $\bar{y} \in Y$  такой, что

$$\sup_{x \in X_{\bar{I}}} \varphi_{\bar{I}}(x, \bar{y}) = \min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\bar{I}}} \varphi_{\bar{I}}(x, y)$$

при  $\bar{I} = \hat{I} \cup s$ .

Рассмотрим систему уравнений  $f_i(x_i, \bar{y}_i) = f_j(x_j, \bar{y}_j)$ ,  $i, j \in \hat{I}$ . Если существует  $\bar{x} \in X_{\hat{I}}$ , удовлетворяющий этой системе, то, как было показано выше, найдётся  $q \in \hat{I}$ , для которого справедливо

$$f_q(\bar{x}_q, \bar{y}_q) \leq f_q(\tilde{x}_q, \bar{y}_q),$$

так как в противном случае  $\bar{x} \notin X_{\hat{I}}$ . В свою очередь, в силу (29) и (28) для найденного  $q \in \hat{I}$  справедливы неравенства

$$f_q(\tilde{x}_q, \bar{y}_q) \leq f_q(\tilde{x}_q, l_q) \leq f_s(0, l_s),$$

откуда следует, что

$$f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = f_q(\bar{x}_q, \bar{y}_q) \leq f_s(0, l_s), \quad i \in \hat{I}.$$

При этом поскольку  $f_s(0, l_s) = f_s(0, \bar{y}_s)$ , в силу условия теоремы окончательно получаем

$$f_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = f_q(\bar{x}_q, \bar{y}_q) \leq f_s(0, \bar{y}_s), \quad i \in \hat{I}.$$

В силу непрерывности и строгого возрастания функций  $f_i(x_i, \bar{y}_i)$  по  $x_i$  на множестве положительных чисел,  $i \in I$ , система  $f_i(x_i, \bar{y}_i) = f_s(x_s, \bar{y}_s)$ ,  $i \in \hat{I}$ , не имеет решения на множестве  $X_{\bar{I}}$  и при этом

$$f_s(0, \bar{y}_s) = \max_{i \in \bar{I}} f_i(0, \bar{y}_i).$$

Следовательно, согласно теореме 2

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\hat{I}}} \varphi_{\hat{I}}(x, y) \leq \min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\bar{I}}} \varphi_{\bar{I}}(x, y). \quad (30)$$

Если же на множестве  $X_{\widehat{I}}$  не существует решения системы  $f_i(x_i, \bar{y}_i) = f_j(x_j, \bar{y}_j)$ ,  $i, j \in \widehat{I}$ , то и система  $f_i(x_i, \bar{y}_i) = f_s(x_s, \bar{y}_s)$ ,  $i \in \widehat{I}$ , не имеет решения на множестве  $X_{\widehat{I}}$ . При этом в силу (28) и (29) имеем

$$f_i(\tilde{x}_i, \bar{y}_i) \leq f_s(0, l_s), \quad i \in \widehat{I},$$

откуда в силу вида функций  $f_i(x_i, \bar{y}_i)$ ,  $i \in \widehat{I}$ , и условия теоремы следует, что

$$f_i(0, \bar{y}_i) < f_i(\tilde{x}_i, \bar{y}_i) \leq f_s(0, l_s) = f_s(0, \bar{y}_s), \quad i \in \widehat{I},$$

т. е.  $f_s(0, \bar{y}_s) = \max_{i \in \widehat{I}} f_i(0, \bar{y}_i)$ . Следовательно в силу теоремы 2 приходим к (30).

## 5. Поиск оптимальной топологии сети

Теоремы 1 и 2 позволяют реализовать алгоритмы поиска множества активных переменных в задаче (4), (5). Действительно, они указывают, каким образом следует добавлять и удалять маршруты из рассмотрения, чтобы гарантированно уменьшать значение целевой функции (4). Рассмотрим, в частности, следующий алгоритм.

---

### Алгоритм 1

---

- 1:  $\widehat{I} = \emptyset$
  - 2:  $\widehat{I} \leftarrow \widehat{I} \cup \{j\}$  для некоторого  $j = \arg \min_{i \in I} f_i(0, l_i) \in I$
  - 3:  $(\hat{y}, \hat{x}) \leftarrow$  решение задачи минимакса  $\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\widehat{I}}} \varphi_{\widehat{I}}(x, y)$
  - 4: **while**  $\exists p \in I \setminus \widehat{I} : \forall i \in \widehat{I} (f_p(0, \hat{y}_p) < f_i(\hat{x}_i, \hat{y}_i))$  **do**
  - 5:      $\widehat{I} \leftarrow \widehat{I} \cup \{p\}$
  - 6:      $(\hat{y}, \hat{x}) \leftarrow$  решение задачи минимакса  $\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\widehat{I}}} \varphi_{\widehat{I}}(x, y)$
  - 7: **return**  $\widehat{I}$
- 

Реализация алгоритма 1 позволяет найти множество маршрутов, которые следует учитывать при решении задачи (4), (5). В то же время достаточность построенного таким образом множества маршрутов для решения задачи (4), (5) не гарантирована. Однако, благодаря теореме 3 можно оценить найденное множество маршрутов на достаточность, проверив выполнимость простого условия

$$f_i(\hat{x}_i, l_i) \leq f_j(0, l_j), \quad i \in \widehat{I}, j \in I \setminus \widehat{I}. \quad (31)$$

Если условие (31) выполняется, то найденного множества маршрутов достаточно для поиска глобального оптимума в задаче (4), (5).



Рассмотрим результат применения предложенного алгоритма на примере сети с 8 попарно непересекающимися альтернативными маршрутами. Величины верхних и нижних границ пропускных способностей доступных альтернатив даны в табл. 1.

Таблица 1

**Нижняя и верхняя границы пропускных способностей**

| Пропуск. способность      | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ | $y_8$ |
|---------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Нижняя граница ( $l_i$ )  | 50    | 80    | 70    | 40    | 60    | 90    | 45    | 20    |
| Верхняя граница ( $u_i$ ) | 80    | 100   | 95    | 60    | 70    | 110   | 65    | 50    |

Бюджетные затраты, связанные с увеличением пропускной способности альтернативы  $i \in \overline{1, 8}$  с величины  $l_i$  до величины  $y_i$ , будем описывать при помощи функции вида

$$g_i(y_i) = 100(y_i - l_i)^2, \quad i \in \overline{1, 8},$$

а общий бюджет, который может быть инвестирован в увеличение пропускной способности всех альтернатив не должен превышать 200 000:  $\sum_{i=1}^8 g_i(y_i) \leq 200\,000$ . При этом каждая альтернатива  $i \in \overline{1, 8}$  характеризуется степенной функцией задержки  $f_i(x_i, y_i)$  единицы потока  $x_i$  по альтернативе с пропускной способностью  $y_i$ :

$$f_i(x_i, y_i) = t_i^0 + 0,15 \left( \frac{x_i}{y_i} \right)^4, \quad i \in \overline{1, 8},$$

при параметрах, заданных в табл. 2.

Таблица 2

**Параметры функций задержки**

| $i$     | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $t_i^0$ | 21 | 24 | 18 | 29 | 34 | 32 | 30 | 35 |

Как только допустимый набор величин пропускных способностей задан, поток  $D = 350$  распределяется среди доступных альтернатив в соответствии с принципом конкурентного равновесия при заданных функциях задержки. Если лидер на верхнем уровне стремится минимизировать общую задержку в сети за счёт минимальных инвестиций в увеличение пропускной способности альтернатив, то возникает задача двухуровневой оптимизации (4), (5). При этом будем считать, что  $w = 0,01$ , т. е. единицу затрат времени лидер оценивает в 100 единиц бюджета.

Результаты применения алгоритма 1 представлены в табл. 3.

Таблица 3

## Результаты применения алгоритма 1

| $i$         | 1      | 2     | 3      | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  |
|-------------|--------|-------|--------|----|----|----|----|----|
| $\hat{x}_i$ | 124,61 | 22,66 | 202,73 | 0  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| $\hat{y}_i$ | 58,92  | 81,18 | 80,61  | 40 | 60 | 90 | 45 | 20 |

При этом нетрудно проверить, что условие (31) выполняется для полученного при помощи алгоритма 1 подмножества  $\hat{I} = \{1, 2, 3\}$  и вектора  $\hat{x}$ . Другими словами, выявленных маршрутов достаточно, чтобы найти глобальный оптимум в задаче (4), (5) для представленной сети: введение в рассмотрение дополнительных доступных маршрутов может лишь уменьшить значение целевой функции (4).

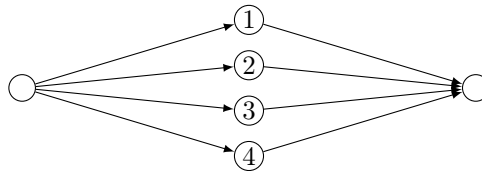


Рис. 1. Сеть с непересекающимися маршрутами

Стоит отметить, что сформулированная в настоящей статье задача двухуровневой оптимизации может относиться к разным прикладным задачам. Действительно, с одной стороны, задача (4), (5) может возникнуть в случае оптимизации участка улично-дорожной сети с непересекающимися путями (рис. 1). В таком случае можно считать, что участок улично-дорожной сети обслуживает  $D$  неатомарных пользователей, распределяющихся среди  $n$  маршрутов в стремлении минимизировать индивидуальное время движения.

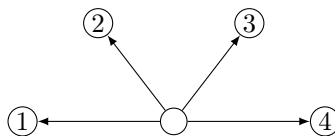


Рис. 2. Сеть типа звезда

С другой стороны, задача (4), (5) может возникнуть в случае оптимизации сети дистрибьюторского центра типа звезда (рис. 2). В таком случае можно считать, что дистрибьюторский центр способен поставить  $D$  неатомарных единиц продуктового потока, который распределяется среди  $n$  альтернативных покупателей по принципу аукциона. При этом если

на рис. 2 направить стрелочки в обратную сторону, то задача (4), (5) будет соответствовать ситуации, в рамках которой единственный покупатель удовлетворяет свой спрос в  $D$  единиц продуктового потока, закупаясь у  $n$  альтернативных поставщиков по принципу аукциона.

### Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт Санкт-Петербургского гос. университета (проект № 116814048). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

### Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

### Литература

1. **Cieslik D.** Network design problems // Encyclopedia of optimization. Boston, MA: Springer, 2008.
2. **Von Stackelberg H. F.** Marktform und Gleichgewicht. Berlin: Springer, 1934. [German].
3. **Migdalas A.** Bilevel programming in traffic planning: Models, methods and challenge // J. Global Optim. 1995. V. 7. P. 381–405.
4. **Samani A. R., Shetab-Boushehri S.-N., Mahmoudi R.** Reliable urban transportation network design problem considering recurrent traffic congestions // Adv. Ind. Eng. 2021. V. 55, No. 1. P. 69–89.
5. **Zweers B. G., van der Mei R. D.** Minimum costs paths in intermodal transportation networks with stochastic travel times and overbookings // Eur. J. Oper. Res. 2022. V. 300, No. 1. P. 178–188.
6. **Xing C., Jing Y., Wang S., Ma S., Poor H. V.** New viewpoint and algorithms for water-filling solutions in wireless communications // IEEE Trans. Signal Proces. 2020. V. 68. P. 1618–1634.
7. **Xu X., Chen A., Yang C.** A review of sustainable network design for road networks // KSCE J. Civil Eng. 2016. V. 20. P. 1084–1098.
8. **Yang H., Bell M. G. H.** Models and algorithms for road network design: A review and some new developments // Transp. Rev. 1998. V. 18, No. 3. P. 257–278.
9. **Крылатов А. Ю.** Распределение потока в сети как задача поиска неподвижной точки // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2016. Т. 23, № 2. С. 63–87.
10. **Magnanti T. L., Wong R. T.** Network design and transportation planning: Models and algorithms // Transp. Sci. 1984. V. 18. P. 1–55.
11. **Wong S. C., Yang H.** Reserve capacity of a signal-controlled road network // Transp. Res. Pt. B. 1997. V. 31. P. 397–402.
12. **Gao Z. Y., Wu J. J., Sun H. J.** Solution algorithm for the bi-level discrete network design problem // Transp. Res. Pt. B. 2005. V. 39. P. 479–495.

13. **Chen A., Zhou Z., Chootinan P., Ryu S., Yang C., Wong S. C.** Transport network design problem under uncertainty: A review and new developments // *Transp. Rev.* 2011. V. 31, No. 6. P. 743–768.
14. **Dafermos S. C.** Traffic assignment and resource allocation in transportation networks: PhD thesis. Baltimore, MD, 1968.
15. **Dantzig G. B., Harvey R. P., Lansdowne Z. F., Robinson D. W., Mair S. F.** Formulating and solving the network design problem by decomposition // *Transp. Res. Pt. B.* 1979. V. 13, No. 1. P. 5–17.
16. **Abdulaal M., LeBlanc L. J.** Continuous equilibrium network design models // *Transp. Res. Pt. B.* 1979. V. 13, No. 1. P. 19–32.
17. **Tan H. N., Gershwin S. B., Athans M.** Hybrid optimization in urban traffic networks. Rep. DOT-TSC-RSPA-79-7. Cambridge, MA: MIT, 1979. 106 p.
18. **Friesz T. L.** An equivalent optimization problem with combined multiclass distribution assignment and modal split which obviates symmetry restriction // *Transp. Res. Pt. B.* 1981. V. 15. P. 361–369.
19. **Friesz T. L., Anandalingam G., Mehta N. J., Nam K., Shah S. J., Tobin R. L.** The multiobjective equilibrium network design problem revisited: A simulated annealing approach // *Eur. J. Oper. Res.* 1993. V. 65. P. 44–57.
20. **Dafermos S.** Traffic equilibria and variational inequalities // *Transp. Sci.* 1980. V. 14. P. 42–54.
21. **Marcotte P.** Network optimization with continuous control parameters // *Transp. Sci.* 1983. V. 17, No. 2. P. 181–197.
22. **Meng Q., Yang H., Bell M. G. H.** An equivalent continuously differentiable model and a locally convergent algorithm for the continuous networks design problem // *Transp. Res. Pt. B.* 2001. V. 35. P. 83–105.
23. **Gao Z., Sun H., Zhang H.** A globally convergent algorithm for transportation continuous network design problem // *Optim. Eng.* 2007. V. 8. P. 241–257.
24. **Tobin R. L., Friesz T. L.** Sensitivity analysis for equilibrium network flow // *Transp. Sci.* 1988. V. 22, No. 4. P. 231–293.
25. **Tobin R. L.** Sensitivity analysis for variational inequalities // *J. Optim. Theory Appl.* 1986. V. 48, No. 1. P. 191–204.
26. **Chiou S.** Bilevel programming for the continuous transport network design problem // *Transp. Res. Pt. B.* 2005. V. 39, No. 4. P. 361–383.
27. **Meng Q., Yang H., Bell M. G. H.** An equivalent continuously differentiable model and a locally convergent algorithm for the continuous network design problem // *Transp. Res. Pt. B.* 2001. V. 35. P. 83–105.
28. **Suwansirikul C., Friesz T. L., Tobin R. L.** Equilibrium decomposed optimization: A heuristic for the continuous equilibrium network design problem // *Transp. Sci.* 1987. V. 21, No. 4. P. 227–292.
29. **Li C., Yang H., Zhu D., Meng Q.** A global optimization method for continuous network design problems // *Transp. Res. Pt. B.* 2012. V. 46, No. 9. P. 1144–1158.
30. **Du B., Wang D. Z. W.** Solving continuous network design problem with generalized geometric programming approach // *Transp. Res. Record.* 2016. V. 2567, No. 1. P. 38–46.

- 31. **Gairing M., Harks T., Klimm M.** Complexity and approximation of the continuous network design problem // SIAM J. Optim. 2017. V. 27, No. 3. P. 1554–1582.
- 32. **Крылатов А. Ю.** Поиск глобального оптимума в задаче оптимизации топологии сети // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2024. Т. 64, № 10. С. 1851–1867.
- 33. **Schmeidler D.** Equilibrium points of nonatomic games // J. Stat. Phys. 1973. V. 7, No. 4. P. 295–300.
- 34. **Zhou Z., Yang M., Sun F., Wang Z., Wang B.** A continuous transportation network design problem with the consideration of road congestion charging // Sustainability. 2021. V. 13. P. 7008.

*Крылатов Александр Юрьевич*

Статья поступила

25 марта 2025 г.

После доработки —

30 июля 2025 г.

Принята к публикации

22 декабря 2025 г.

SUFFICIENCY IN THE OPTIMAL NETWORK  
DESIGN PROBLEMA. Yu. Krylatov<sup>1, 2, a, b</sup><sup>1</sup> St. Petersburg State University,  
7/9 Universitetskaya Embankment, 199034 St. Petersburg, Russia<sup>2</sup> Institute of Transport Problems,  
13 12th Line, V. O., 199178 St. Petersburg, RussiaE-mail: <sup>a</sup> a.krylatov@spbu.ru, <sup>b</sup> aykrylatov@yandex.ru

**Abstract.** The paper is devoted to the global optimum search in the network design problem with non-interfering routes. Within this paper, we assume that the network manager invests in capacity of the network to minimize overall delay caused by equilibrium flow assignment. We prove that solving the network design problem can be reduced to the subset of routes search, which gives the minimum value of goal function in a finite set of minimax problems. Moreover, we establish how such a subset should be generated in order to ensure that the corresponding value decreases. Eventually, under fairly natural assumptions, we obtain optimality conditions for solutions to emerging minimax problems. For demonstration purposes, we apply the obtained results to a concrete example. Tab. 3, illust. 2, bibliogr. 34.

**Keywords:** network design problem, overall cost minimization, equilibrium flow assignment.

## References

1. D. Cieslik, Network design problems, in *Encyclopedia of Optimization* (Springer, Boston, MA, 2008).
2. H. F. Von Stackelberg, *Marktform und Gleichgewicht* (Springer, Berlin, 1934) [German].
3. A. Migdalas, Bilevel programming in traffic planning: Models, methods and challenge, *J. Global Optim.* **7**, 381–405 (1995).
4. A. R. Samani, S.-N. Shetab-Boushehri, and R. Mahmoudi, Reliable urban transportation network design problem considering recurrent traffic congestions, *Adv. Ind. Eng.* **55** (1), 69–89 (2021).

---

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **20** (1) (2026).

5. **B. G. Zweers**, and **R. D. van der Mei**, Minimum costs paths in intermodal transportation networks with stochastic travel times and overbookings, *Eur. J. Oper. Res.* **300** (1), 178–188 (2022).
6. **C. Xing**, **Y. Jing**, **S. Wang**, **S. Ma**, and **H. V. Poor**, New viewpoint and algorithms for water-filling solutions in wireless communications, *IEEE Trans. Signal Proces.* **68**, 1618–1634 (2020).
7. **X. Xu**, **A. Chen**, and **C. Yang**, A review of sustainable network design for road networks, *KSCE J. Civil Eng.* **20**, 1084–1098 (2016).
8. **H. Yang** and **M. G. H. Bell**, Models and algorithms for road network design: A review and some new developments, *Transp. Rev.* **18** (3), 257–278 (1998).
9. **A. Yu. Krylatov**, Network flow assignment as a fixed point problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **23** (2), 63–87 (2016) [*J. Appl. Ind. Math.* **10** (2), 243–256 (2016)].
10. **T. L. Magnanti** and **R. T. Wong**, Network design and transportation planning: Models and algorithms, *Transp. Sci.* **18**, 1–55 (1984).
11. **S. C. Wong** and **H. Yang**, Reserve capacity of a signal-controlled road network, *Transp. Res., Pt. B*, **31**, 397–402 (1997).
12. **Z. Y. Gao**, **J. J. Wu**, and **H. J. Sun**, Solution algorithm for the bi-level discrete network design problem, *Transp. Res., Pt. B*, **39**, 479–495 (2005).
13. **A. Chen**, **Z. Zhou**, **P. Chootinan**, **S. Ryu**, **C. Yang**, and **S. C. Wong**, Transport network design problem under uncertainty: A review and new developments, *Transp. Rev.* **31** (6), 743–768 (2011).
14. **S. C. Dafermos**, Traffic assignment and resource allocation in transportation networks, *PhD Thesis* (Baltimore, MD, 1968).
15. **G. B. Dantzig**, **R. P. Harvey**, **Z. F. Lansdowne**, **D. W. Robinson**, **S. F. Maier**, Formulating and solving the network design problem by decomposition, *Transp. Res., Pt. B*, **13** (1), 5–17 (1979).
16. **M. Abdulaal** and **L. J. LeBlanc**, Continuous equilibrium network design models, *Transp. Res., Pt. B*, **13** (1), 19–32 (1979).
17. **H. N. Tan**, **S. B. Gershwin**, and **M. Athans**, Hybrid optimization in urban traffic networks, *Rep. DOT-TSC-RSPA-79-7* (MIT, Cambridge, MA, 1979).
18. **T. L. Friesz**, An equivalent optimization problem with combined multiclass distribution assignment and modal split which obviates symmetry restriction, *Transp. Res., Pt. B*, **15**, 361–369 (1981).
19. **T. L. Friesz**, **G. Anandalingam**, **N. J. Mehta**, **K. Nam**, **S. J. Shah**, and **R. L. Tobin**, The multiobjective equilibrium network design problem revisited: A simulated annealing approach, *Eur. J. Oper. Res.* **65**, 44–57 (1993).
20. **S. Dafermos**, Traffic equilibria and variational inequalities, *Transp. Sci.* **14**, 42–54 (1980).
21. **P. Marcotte**, Network optimization with continuous control parameters, *Transp. Sci.* **17** (2), 181–197 (1983).
22. **Q. Meng**, **H. Yang**, and **M. G. H. Bell**, An equivalent continuously differentiable model and a locally convergent algorithm for the continuous networks design problem, *Transp. Res., Pt. B*, **35**, 83–105 (2001).

23. **Z. Gao, H. Sun, and H. Zhang**, A globally convergent algorithm for transportation continuous network design problem, *Optim. Eng.* **8**, 241–257 (2007).
24. **R. L. Tobin and T. L. Friesz**, Sensitivity analysis for equilibrium network flow, *Transp. Sci.* **22** (4), 231–293 (1988).
25. **R. L. Tobin**, Sensitivity analysis for variational inequalities, *J. Optim. Theory Appl.* **48** (1), 191–204 (1986).
26. **S. Chiou**, Bilevel programming for the continuous transport network design problem, *Transp. Res., Pt. B*, **39** (4), 361–383 (2005).
27. **Q. Meng, H. Yang, and M. G. H. Bell**, An equivalent continuously differentiable model and a locally convergent algorithm for the continuous network design problem, *Transp. Res., Pt. B*, **35**, 83–105 (2001).
28. **C. Suwansirikul, T. L. Friesz, and R. L. Tobin**, Equilibrium decomposed optimization: A heuristic for the continuous equilibrium network design problem, *Transp. Sci.* **21** (4), 227–292 (1987).
29. **C. Li, H. Yang, D. Zhu, and Q. Meng**, A global optimization method for continuous network design problems, *Transp. Res., Pt. B*, **46** (9), 1144–1158 (2012).
30. **B. Du and D. Z. W. Wang**, Solving continuous network design problem with generalized geometric programming approach, *Transp. Res. Record.* **2567** (1), 38–46 (2016).
31. **M. Gairing, T. Harks, and M. Klimm**, Complexity and approximation of the continuous network design problem, *SIAM J. Optim.* **27** (3), 1554–1582 (2017).
32. **A. Yu. Krylatov**, Global optimum search in the network design problem, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **64** (10), 1851–1867 (2024) [Russian] [*Comput. Math. Math. Phys.* **64** (10), 2238–2255 (2024)].
33. **D. Schmeidler**, Equilibrium points of nonatomic games, *J. Stat. Phys.* **7** (4), 295–300 (1973).
34. **Z. Zhou, M. Yang, F. Sun, Z. Wang, and B. Wang**, A continuous transportation network design problem with the consideration of road congestion charging, *Sustainability* **13**, 7008 (2021).

Aleksandr Yu. Krylatov

Received March 25, 2025

Revised July 30, 2025

Accepted December 22, 2025