

ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 33 № 2 2026

Новосибирск
Издательство Института математики

ПОИСК СЕМЕЙСТВ СУБОПТИМАЛЬНЫХ ЦИРКУЛЯНТНЫХ СЕТЕЙ С ПОМОЩЬЮ БОЛЬШИХ ЯЗЫКОВЫХ МОДЕЛЕЙ

Э. А. Монахова^{1,2, a}, О. Г. Монахов^{2, b}

¹ Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,
ул. Мясницкая, 20, 101000 Москва, Россия

² Институт вычислительной математики и математической геофизики,
пр. Акад. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: ^aemilia@rav.sscs.ru, ^bmonakhov@rav.sscs.ru

Аннотация. На основе анализа разработанного авторами датасета двумерных кольцевых циркулянтных сетей решается задача поиска семейств субоптимальных по диаметру циркулянтных сетей. Субоптимальные двумерные кольцевые циркулянты — это графы с минимально возможным диаметром для данного числа вершин, превышающим на единицу точную нижнюю границу диаметра циркулянтов. Представлена новая оригинальная визуализация на плоскости точек датасета, соответствующих субоптимальным циркулянтам. С помощью обнаруженной визуальной регулярности открыты последовательности аналитических описаний субоптимальных циркулянтов. Применение больших языковых моделей в качестве ИИ-ассистента при разработке программ позволило найти новые семейства субоптимальных графов, составляющие в общей сложности 75% субоптимальных точек датасета. Теоретически доказана масштабируемость найденных семейств графов при росте их диаметров, при доказательствах теорем использовалась большая языковая модель. Найденные аналитически задаваемые семейства циркулянтов представляют интерес как топологии сетей на кристалле и коммуникационных систем. Табл. 3, ил. 3, библиогр. 16.

Ключевые слова: кольцевая циркулянтная сеть, диаметр, датасет оптимальных циркулянтов, сеть на кристалле, большая языковая модель.

Введение

Циркулянтные графы степени четыре изучаются в теории графов и прикладных областях, включая их использование в виде топологий

сетей связи для сетей на кристалле [1–7]. Циркулянтная сеть степени четыре представляет собой неориентированный граф $C(N; s_1, s_2)$, $1 \leq s_1 < s_2 < N/2$, в котором каждая вершина $i \in V = \{0, 1, \dots, N-1\}$ смежна вершинам $(i \pm s_1) \bmod N$ и $(i \pm s_2) \bmod N$. Числа s_1, s_2 — образующие, а N — порядок графа. Граф $C(N; s_1, s_2)$ связан, если $\text{НОД}(N, s_1, s_2) = 1$. При $s_1 = 1$ граф $C(N; 1, s)$ называется двумерным (по числу образующих) кольцевым циркулянтным графом. В данной работе исследуется класс циркулянтных графов вида $C(N; 1, s)$. На рис. 1 изображён граф $C(10; 1, 4)$.

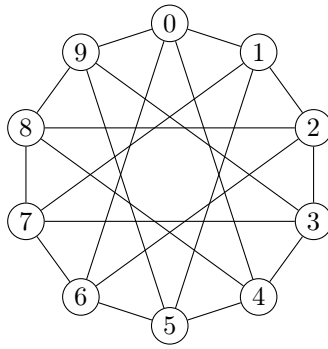


Рис. 1. Циркулянтный граф $C(10; 1, 4)$

Диаметр циркулянта $d = d(N; s_1, s_2)$ — длина максимального кратчайшего пути на множестве всевозможных пар вершин. Оптимальным называется граф $C(N; 1, s)$ с минимально возможным для данного N диаметром $d(N) = \min_s \{d(N; 1, s)\}$. Известна точная нижняя граница диаметра двумерных циркулянтов $C(N; s_1, s_2)$ для любого $N > 4$ [3]:

$$d(N) \geq D(N) = \lceil (-1 + \sqrt{2N-1})/2 \rceil.$$

Отметим, что диаметр как показатель топологии сети связи зависит от числа вершин графа, находящихся на определённом расстоянии (уровне одного расстояния) от выделенной вершины — например, вершины 0 в силу вершинной симметрии циркулянта. Пусть n_i означает число вершин, находящихся на уровне i от 0, $i = 1, \dots, d$, где d — диаметр графа. Для двумерных циркулянтов максимально возможное число вершин на i -м уровне равно $4i$. Семейство оптимальных двумерных кольцевых циркулянтов $\{C(2d^2 + 2d + 1; 1, 2d + 1) \mid d \geq 1\}$ с полностью заполненными уровнями расстояний, включая диаметр, существует при любом диаметре [3].

В классе графов $C(N; 1, s)$ точная нижняя граница диаметра $D(N)$ достижима не для всех N . По гипотезе Д. Цвиели [8], подтверждённой

для всех $N \leq 8 \cdot 10^6$, минимально возможный диаметр графа $C(N; 1, s)$ для любого N не превышает $D(N) + 1$. Графы с $d(N) = D(N) + 1$ назовём субоптимальными, т. е. субоптимальны графы с минимально возможным диаметром для данного числа вершин, превышающим на единицу известную точную нижнюю границу диаметра циркулянтов. Субоптимальными назовём также семейства графов, все члены которых субоптимальны, и соответствующие им значения N .

В данной работе исследуется существование семейств субоптимальных сетей класса $C(N; 1, s)$. Авторами получены и представлены в открытом доступе база данных (датасет) описаний графов минимально возможного диаметра до $N \leq 50\,000$ вершин [9] и аналитически описываемые семейства оптимальных графов с $d(N) = D(N)$, найденные на основе анализа датасета [10]. Первое бесконечное семейство субоптимальных графов $C(N; 1, s)$ представлено в пионерской работе [11]. Это семейство содержит графы порядка $N = 2d^2 + 2d$ с образующей $s = 2d + 1$ для любого неограниченно растущего диаметра $d > 1$. Также несколько подобных семейств получены в работах [8, 12–14].

В разд. 1 представлена оригинальная визуализация точек датасета, соответствующих параметрам субоптимальных циркулянтов. В разд. 2 приведён алгоритм поиска описаний семейств субоптимальных циркулянтов, основанный на темплейтах, отражающих закономерности полученной визуализации. Описано использование больших языковых моделей для разработки программ поиска и анализа. Приведены описания полученных семейств субоптимальных графов $C(N; 1, s)$ с порядками и образующими в виде полиномов от диаметра. В разд. 3 теоретически доказывается масштабируемость (бесконечность по диаметру) новых семейств субоптимальных графов.

1. Визуализация точек датасета субоптимальных циркулянтов

Датасет [9] циркулянтов $C(N; 1, s)$ с $10 \leq N \leq 50\,000$ и $2 \leq d \leq 156$ включает весь набор образующих оптимальных (субоптимальных) графов, что позволило найти семейства оптимальных циркулянтных графов с параметрами, заданными полиномами от диаметра (см. [10]). В настоящей работе продолжен поиск и исследование наилучших графов класса $C(N; 1, s)$. Для этого из общего датасета точек, соответствующих оптимальным и субоптимальным графам, выделены все точки (N, d) , далее обозначаемые как датасет Subopt, относящиеся к субоптимальным описаниям. Здесь $d = D(N) + 1$ — минимально возможный для данного N диаметр, полученный путём перебора всех образующих $2 \leq s < N/2$.

Затем разработана новая графическая визуализация точек датасета Subopt. Предложенный способ отображения точек (N, d) через параметр

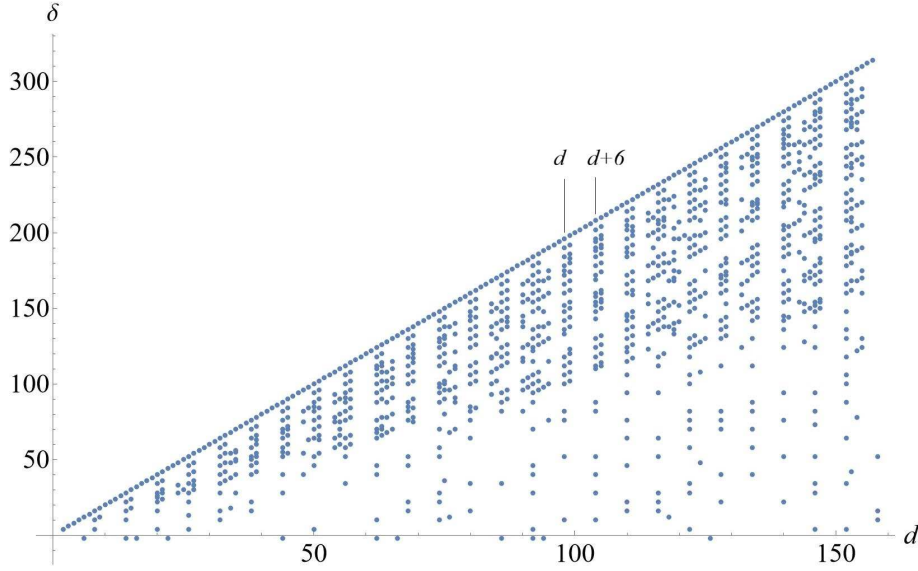


Рис. 2. Расположение порядков субоптимальных циркулянтов $C(N; 1, s)$ в зависимости от диаметра для датасета Subopt

$\delta = N - 2d^2$ позволил выявить регулярности, которые неочевидны при стандартных представлениях. На рис. 2 показан фрагмент графической визуализации точек датасета Subopt, отражающих параметры субоптимальных описаний (N, d) . Ось абсцисс соответствует диаметру $d = D(N)$, ось ординат — значениям, равным разнице $\delta = N - 2d^2$, $-2 \leq \delta \leq 2d + 1$, при заданном d , $2 \leq d \leq 156$. Таким образом, верхняя линия графика соответствует субоптимальным точкам с $N = 2d^2 + 2d$, а на оси абсцисс могли находиться значения $N = 2d^2$, если бы среди них присутствовали субоптимальные значения.

Как видно из представленного графика, точки датасета, соответствующие субоптимальным описаниям, все расположены выше линии $N = 2d^2 - 3$. Это можно объяснить тем, что при $N < 2d^2 - 2$ число вершин оптимального графа на диаметре d меньше $2d - 2$ и есть широкий выбор значений образующих для построения оптимальных графов. Тем самым анализ датасета циркулянтов класса $C(N; 1, s)$, $10 \leq N \leq 50\,000$, позволяет сформулировать следующую гипотезу.

Пусть $d > 2$ — целое число. Тогда для любого графа $C(N; 1, s)$ с $2d^2 - 2d + 1 < N < 2d^2 - 2$ существует такое $1 < s < N/2$, что $d(N) = D(N)$.

При приближении порядка графа к числу $N = 2d^2 + 2d$, когда уровень вершин, находящихся на диаметре d , уже близок к полному заполнению (значению $4d$), свобода в выборе оптимальных образующих

уменьшается и растёт число субоптимальных N . При $\delta > d$, что соответствует значениям $N > 2d^2 + d$, на графике можно увидеть регулярность в появлении субоптимальных точек N как по диаметру с периодом, равным шести, так и по вертикальному смещению двух соседних точек N , равному шести в большинстве случаев. Регулярность при появлении субоптимальных точек для N будем использовать далее при формировании вида темплейтов для порядков и образующих при поиске семейств субоптимальных циркулянтов.

2. Поиск семейств субоптимальных сетей

На первом этапе поиска семейств субоптимальных сетей на множестве графов датасета Subopt авторами разработан алгоритм автоматизированного поиска аналитически описываемых семейств с заданными темплейтами $N(d)$ и $s(d)$.

В качестве темплейтов для порядков графов семейств и их образующих рассмотрены следующие полиномы:

$$N = 2d^2 + 2d - B, \quad 0 \leq B < d,$$

$$s \in \{d^2 + ad + b, 2d + c\}, \quad -d < a, b, c < d, \quad d = D(N).$$

Искомое семейство $\Psi_i(d)$ субоптимальных графов может существовать, начиная с некоторого начального диаметра $d = d_m$ в соответствующем диапазоне изменения диаметра d с периодом $1 \leq p \leq B$ существования членов семейства, как правило, равном делителю B :

$$\Psi_i(d) = \{C(N(d); 1, s(d)) \mid d = d_m + kp, k \geq 0\}.$$

Все точки датасета, начиная с некоторого значения $d_m > B$, тестировались на наличие общего вида образующих при заданных N отдельно, последовательно по возрастанию, по всем вычетам диаметров $0, 1, \dots, p-1$. При этом осуществлялся полный перебор коэффициентов из заданных диапазонов их значений. Если в датасете существуют точки, соответствующие полученным при этом значениям порядков и образующих, то принимается гипотеза, что такое семейство с полученными коэффициентами и значениями порядка и образующих существует при заданных диапазонах диаметров. Количество найденных точек на этом этапе могло меняться от 4 и более.

Для валидации найденных семейств осуществлялся поиск точек датасета, соответствующих найденному описанию семейства при больших значениях диаметра, но ограниченного рамками датасета. Если после этого этапа подтверждалось существование семейства для всех проверенных точек, то решение о существовании данного семейства считалось положительным.

Таблица 1

Семейства субоптимальных циркулянтов $C(2d^2 + 2d - B; 1, s)$
с чётным диаметром

$N(d)$	$s(d)$	d	p	d_m
$2d^2 + 2d$	$2d - 1, \triangleright 2d + 1$ $2d + 3$ $4d \pm 1$	$d \geq d_m$	2	2
$2d^2 + 2d - 6$	$d^2 - 2d - 10$ $d^2 - 2$ $d^2 - 6$ $\triangleright 2d - 3, 2d + 3$ $2d \pm 5$ $4d \pm 9$	$6k + 2$	6	8
$\triangleright 2d^2 + 2d - 12$	$d^2 - 9$	$6k + 2$	6	14
$\triangleright 2d^2 + 2d - 14$ $2d^2 + 2d - 14$	$d^2 - 10$ $4d + 9$	$14k + 6$	14	20
$2d^2 + 2d - 15$ $\triangleright 2d^2 + 2d - 15$	$2d + 5$ $2d - 7$	$15k + 5, 15k + 9, k$ нечётное	15	20, 24
$2d^2 + 2d - 18$	$d^2 - 2d - 20$ $d^2 - 6$ $2d \pm 5$	$6k + 2$	6	20
	$2d \pm 7$		18	
$2d^2 + 2d - 20$	$d^2 - 7$	$20k + 4, 20k + 14$	20	24, 34
$2d^2 + 2d - 24$	$d^2 - 9$	$6k + 2$	6	26
$2d^2 + 2d - 26$	$d^2 - 10$	$26k + 12$	26	38
$2d^2 + 2d - 30$	$2d \pm 7$	$6k + 2, 30k + 4, 30k + 24$	6	32, 34, 54
	$2d \pm 9$		30	

Для реализации описанного выше алгоритма полного перебора по заданным темплейтам на языке Python в качестве ИИ-ассистента использована большая языковая модель Gemini. Полученная с помощью неё программа проверена на корректность, доработана для различных диапазонов коэффициентов и запущена на компьютере с процессором AMD Ryzen 5 5500U и памятью 16 ГБ. Параметр B при поиске субоптимальных семейств изменялся в диапазоне $0 \leq B \leq 30$. Все семейства субоптимальных циркулянтов, найденные программой, приведены в табл. 1–3. Семейства, найденные в [11, 14], отмечены в таблицах знаком $\triangleright$.

Отметим следующие результаты поиска субоптимальных семейств.

- Для тех значений B , $0 \leq B \leq 30$, которые отсутствуют в табл. 1 и 2, реализованная программа поиска не нашла образующих по заданным темплейтам.

Таблица 2

Семейства субоптимальных циркулянтов $C(2d^2 + 2d - B; 1, s)$
с нечётным диаметром

$N(d)$	$s(d)$	d	p	d_m
$2d^2 + 2d$	d^2 $2d - 1, \triangleright 2d + 1$ $2d + 3$ $4d + 3$ $4d + 5$	$d \geq d_m$	2	3
$2d^2 + 2d - 6$	$d^2 - 2d + 1$ $d^2 - 1$ $d^2 - 5$ $\triangleright 2d - 3,$ $2d \pm 5, 2d + 3$	$6k + 3$	6	9
$\triangleright 2d^2 + 2d - 12$	$d^2 - 4$	$6k + 3$	12	15
$\triangleright 2d^2 + 2d - 14$	$d^2 - 5$	$14k + 7$	14	21
$2d^2 + 2d - 15$ $\triangleright 2d^2 + 2d - 15$	$2d + 5$ $2d - 7$	$15k + 5, 15k + 9, k$ чётное	15	20, 24
$2d^2 + 2d - 18$	$d^2 - 13$ $2d \pm 5$ $2d \pm 7$	$6k + 3$	6	21
$2d^2 + 2d - 20$	$d^2 - 14$	$20k + 5$ $20k + 15$	20	25 35
$2d^2 + 2d - 24$	$d^2 - 16$	$6k + 3$	6	27
$2d^2 + 2d - 26$	$d^2 - 17$	$26k + 13$	26	39
$2d^2 + 2d - 30$	$2d \pm 7$ $2d \pm 9$	$6k + 3, 6k + 5$	6	33, 35

- При поиске субоптимальных семейств из табл. 3 использована регулярность появления значений N со значениями B , кратными 6: $B = 6m$, где $m = 6, 8, 9, 10, 13, 14, 16, 19, 21$, для диаметров $d = 6k + 2$ и $d = 6k + 3$.

- Большая часть найденных в табл. 1–3 образующих графов субоптимальных семейств относится к виду $s = d^2 - c$ или $s = 2d \pm c$.

- При проведённом переборе на множестве образующих других видов найдено всего восемь семейств.

Все семейства субоптимальных циркулянтов, кроме отмеченных знаком $\triangleright$, являются новыми семействами. Все семейства из табл. 1–3 объединим в общее множество Finefams найденных семейств. На рис. 3 показано пересечение порядков найденных семейств из множества Finefams с точками датасета Subopt. Точки (N, d) найденных семейств обозначены жёлтым цветом. Точки найденных семейств составляют 75% от общего числа точек датасета Subopt. Ограничения при поиске субоптимальных

Таблица 3

Семейства субоптимальных циркулянтов $C(2d^2 + 2d - B; 1, s)$,
 $B \equiv 0 \pmod{6}$, $p = 6$

$N(d)$	$s(d)$	d	d_m	$N(d)$	$s(d)$	d	d_m
$2d^2 + 2d - 36$	$d^2 - 23$	$6k + 2$	38	$2d^2 + 2d - 36$	$d^2 - 14$	$6k + 3$	39
$2d^2 + 2d - 48$	$2d - 9$ $2d + 11$		50	$2d^2 + 2d - 48$	$2d - 9$ $2d + 11$		51
$2d^2 + 2d - 54$	$d^2 - 22$		56	$2d^2 + 2d - 54$	$d^2 - 33$		57
$2d^2 + 2d - 60$	$d^2 - 25$		62	$2d^2 + 2d - 60$	$d^2 - 36$		63
$2d^2 + 2d - 78$	$d^2 - 46$		80	$2d^2 + 2d - 78$	$d^2 - 33$		81
$2d^2 + 2d - 84$	$d^2 - 49$		86	$2d^2 + 2d - 84$	$d^2 - 36$		87
$2d^2 + 2d - 96$	$2d - 13$ $2d + 15$		98	$2d^2 + 2d - 96$	$2d - 13$ $2d + 15$		99
$2d^2 + 2d - 114$	$d^2 - 50$		116	$2d^2 + 2d - 114$	$d^2 - 65$		117
$2d^2 + 2d - 126$	$2d - 15$ $2d + 17$		128	$2d^2 + 2d - 126$	$2d - 15$ $2d + 17$		129

семейств связаны с ограничением на диаметр ($d \leq 156$) графов датасета Subopt, поскольку при больших периодах существования ($p > 30$) членов семейств уменьшается число точек, доступных для тестирования при поиске. Кроме того, начальный диаметр d_m , с которого начинается каждое новое семейство, также может быть достаточно большим.

Авторами проверено существование найденных семейств при диаметрах больших, чем диаметры графов датасета Subopt. Для этапа валидации использовалась программа анализа структурных характеристик циркулянтных графов [15], которая по значениям порядка и образующих циркулянта выдаёт диаметр, среднее расстояние и дополнительно векторы распределения числа вершин графов по уровням от 1 до диаметра включительно. С её помощью проверено существование субоптимальных семейств из табл. 1–3 для всех допустимых значений диаметров до числа вершин $N = 10^6$. Полученное подтверждение их существования при таких больших числах говорит в пользу гипотезы, что найденные семейства бесконечны. В разд. 3 это свойство доказывается теоретически на примере ряда семейств.

3. Доказательства существования семейств при неограниченном росте диаметра графов

Для доказательства существования бесконечных семейств субоптимальных циркулянтов $C(N; 1, s)$ будем использовать леммы 1 и 2, полученные в [14].

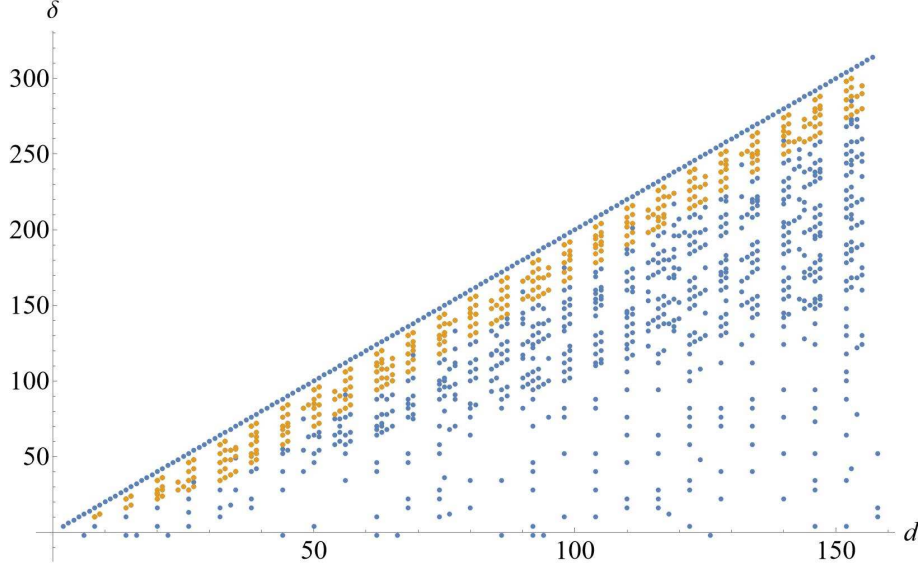


Рис. 3. Семейства субоптимальных циркулянтов $C(N; 1, s)$ из табл. 1–3 (множество Finefams)

Лемма 1 [14, следствие 3.2]. Пусть $N = 2d^2 + 2d - B$, где $B \in \overline{1, d-1}$ и $2B + 1$ простое. Тогда оптимальный граф $C(N; 1, s)$ существует, если и только если $\text{НОД}(B, d) = 1$ или $\text{НОД}(B, d + 1) = 1$.

Предварительные пояснения к лемме 2. На двумерной целочисленной решётке $\mathbb{Z}^2$ зафиксирована точка отсчёта $(0, 0) \in \mathbb{Z}^2$. Для произвольной точки $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ определена функция отображения, порождённая укладкой циркулянтного графа $C(N; 1, s)$ на плоскости $\mathbb{Z}^2$:

$$l(x, y) = (x + ys) \bmod N \in \mathbb{Z}_N.$$

Рассматривается множество всех нулей на плоскости, порождённых описанием $C(N; 1, s)$: $X = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid l(x, y) = 0\}$. На множестве X (нулей) выбираются две нулевые точки укладки: нуль (u, v) в первом квадранте имеет минимум суммы $u + v$, нуль $(-a, b)$ во втором квадранте имеет минимум суммы $a + b$ (в случае равенства сумм выбирается максимум u и максимум b).

Лемма 2 [14, лемма 2.5]. Пусть $C(N; 1, s)$ — циркулянтный граф, где $1 < s < N$, $s \neq N/2$, а $u, v, a, b \in \mathbb{Z}$ — неотрицательные числа такие, что (u, v) и $(-a, b)$ — нулевые точки укладки графа $C(N; 1, s)$ на плоскости,

$$\begin{aligned} r_1 &= \lfloor (u + v)/2 \rfloor, & r_2 &= \lfloor (a + b)/2 \rfloor, \\ r_3 &= \lfloor (|u - a| + v + b)/2 \rfloor, & r_4 &= \lfloor (u + a + |v - b|)/2 \rfloor. \end{aligned}$$

Если $N = av + bu$ и $b \geq a$, $u \geq v$, $u > a$, $v < b$ (или $b < a$, $u < v$, $u < a$, $v > b$), то диаметр графа $C(N; 1, s)$ равен

$$d(N; 1, s) = \begin{cases} r_3 - 1, & \text{если } (u + a)(v + b) \\ & \text{нечётно и } r_3 = r_4, \\ \max\{r_1, r_2, \min\{r_3, r_4\}\} & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1)$$

Ниже приводятся доказательства существования новых бесконечных семейств субоптимальных циркулянтов.

Теорема 1. Если $N = 2d^2 + 2d - 20$, то

$$\Psi_1 = \{C(N; 1, s) \mid d = 20k + 4, 20k + 14, k \geq 1\},$$

$$\Psi_2 = \{C(N; 1, s) \mid d = 20k + 5, 20k + 15, k \geq 1\}$$

— бесконечные субоптимальные семейства циркулянтов с образующими $s = d^2 - 7$, $d^2 - 14$ соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $B = 20$ число $2B + 1$ простое. В силу леммы 1 граф $C(N; 1, s)$ с числом вершин $N = 2d^2 + 2d - 20$ не может быть оптимальным. Действительно, при всех указанных диаметрах $\text{НОД}(20, d) \neq 1$ и $\text{НОД}(20, d + 1) \neq 1$. Остаётся показать, что соответствующие образующие формируют субоптимальный граф.

1. Для семейства Ψ_1 при $d = 20k + 4$ и $d = 20k + 14$ образующая равна $s = d^2 - 7$. В качестве координат двух нулей $(-a, b)$, (u, v) , применимых как для $d = 20k + 4$, так и для $d = 20k + 14$, возьмём $a = d - 1$, $b = d + 3$, $u = 2d - 6$, $v = 2$. Подстановкой значений убедимся, что

$$av + bu = 2(d - 1) + (2d - 6)(d + 3) = 2d^2 + 2d - 20 = N.$$

Проверим, что указанные параметры задают нулевые точки при заданных d . Имеем

$$\begin{aligned} -a + bs &= -d + 1 + (d + 3)(d^2 - 7) = \\ &= d^3 + 3d^2 - 8d - 20 = (d + 2)N/2 \equiv 0 \pmod{N}, \end{aligned}$$

$$u + vs = (2d - 6) + 2(d^2 - 7) = 2d^2 + 2d - 20 = N \equiv 0 \pmod{N}.$$

Согласно лемме 2 получаем $r_1 = d - 2$, $r_2 = d + 1$, $r_3 = d$, $r_4 = 2d - 3$ и $d(N; 1, s) = d + 1$. Таким образом, граф $C(N; 1, s)$ субоптимальный.

2. Для семейства Ψ_2 при $d = 20k + 5$, $d = 20k + 15$ образующая равна $s = d^2 - 14$. В качестве координат двух нулей $(-a, b)$, (u, v) возьмём $a = 4$, $b = 2d - 6$, $u = d + 2$, $v = d - 2$. Подстановкой проверим, что

$$av + bu = 4(d - 2) + (2d - 6)(d + 2) = 2d^2 + 2d - 20 = N.$$

Покажем, что указанные параметры задают нулевые точки при заданных d . Имеем

$$\begin{aligned} -a + bs &= -4 + (2d - 6)(d^2 - 14) = \\ &= 2d^3 - 6d^2 - 28d + 80 = (d - 4)N \equiv 0 \pmod{N}, \\ u + vs &= d + 2 + (d - 2)(d^2 - 14) = \\ &= d^3 - 2d^2 - 13d + 30 = (d - 3)N/2 \equiv 0 \pmod{N}. \end{aligned}$$

Согласно лемме 2 получаем $r_1 = d$, $r_2 = d - 1$, $r_3 = 2d - 5$, $r_4 = d + 1$ и $d(N; 1, s) = d + 1$, т. е. граф $C(N; 1, s)$ субоптимальный. Теорема 1 доказана.

Также для тех семейств из табл. 1–3, для которых число $2B + 1$ простое, а это семейства графов с $B = 6, 14, 15, 18, 20, 26, 30, 36, 48, 54, 78, 96, 114$, можно искать значения параметров a, b, u, v , а затем применить, по мнению авторов, аналогичный метод для доказательства их бесконечности. Остаются значения $B = 12, 24, 60, 84, 126$. Для $B = 12$ доказательство бесконечности соответствующего семейства из табл. 2 и 3 получено в [14]. Для оставшихся B доказательства приводим ниже.

Теорема 2. Если $N = 2d^2 + 2d - 24$, то

$$\Psi_3 = \{C(N; 1, s) \mid d = 6k + 2, 6k + 3, k \geq 4\}$$

— бесконечное субоптимальное семейство циркулянтов с образующей

$$s = \begin{cases} d^2 - 9 & \text{при } d = 6k + 2, \\ d^2 - 16 & \text{при } d = 6k + 3. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В указанных условиях $2B + 1 = 49$ — составное число.

Пусть $d = 6k + 2$, $s = d^2 - 9$. Возьмём $a = d - 3$, $b = d + 3$, $u = 2d - 6$, $v = 2$. Имеем

$$av + bu = (d - 3)2 + (d + 3)(2d - 6) = 2d^2 + 2d - 24 = N.$$

Проверим, что $(-a, b)$, (u, v) — координаты двух нулей. Действительно, при $d = 6k + 2$ имеем

$$\begin{aligned} -a + bs &= (d + 3)(d^2 - 9) - (d - 3) = \\ &= d^3 + 3d^2 - 10d - 24 = (d + 2)N/2 \equiv 0 \pmod{N}, \\ u + vs &= 2(d^2 - 9) + 2d - 6 = 2d^2 + 2d - 24 = N \equiv 0 \pmod{N}. \end{aligned}$$

Согласно лемме 2 получаем $r_1 = d - 2$, $r_2 = d$, $r_3 = d + 1$, $r_4 = 2d - 4$ и $d(N; 1, s) = d + 1$, т. е. граф $C(N; 1, s)$ субоптимальный.

При $d = 6k + 3$ возьмём $a = 0$, $b = 2d - 6$, $u = d + 4$, $v = d - 2$. Тогда

$$av + bu = (2d - 6)(d + 4) = 2d^2 + 2d - 24 = N.$$

Имеем

$$\begin{aligned} -a + bs &= (2d - 6)(d^2 - 16) = \\ &= 2(d - 3)(d + 4)(d - 4) = (d - 4)N \equiv 0 \pmod{N}, \\ u + vs &= (d - 2)(d^2 - 16) + (d + 4) = (d - 3)N/2 \equiv 0 \pmod{N}. \end{aligned}$$

Таким образом, $(-a, b)$ и (u, v) — координаты двух нулей.

По лемме 2 диаметр $d(N; 1, s) = \max\{d+1, d-3, \min\{2d-2, d\}\} = d+1$, т. е. граф $C(N; 1, s)$ субоптимальный. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Если $N = 2d^2 + 2d - 60$, то

$$\Psi_4 = \{C(N; 1, s) \mid d = 6k + 2, 6k + 3, k \geq 10\}$$

— бесконечное субоптимальное семейство циркулянтов с образующей

$$s = \begin{cases} d^2 - 25 & \text{при } d = 6k + 2, \\ d^2 - 36 & \text{при } d = 6k + 3. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве значений координат двух нулей $(-a, b)$ и (u, v) возьмём $a = d - 5$, $b = d + 5$, $u = 2d - 10$, $v = 2$ при $d = 6k + 2$ или $a = 0$, $b = 2d - 10$, $u = d + 6$, $v = d - 4$ при $d = 6k + 3$.

Действительно, при $d = 6k + 2$

$$\begin{aligned} -a + bs &= (d + 5)(d^2 - 25) - (d - 5) = (d + 4)N/2 \equiv 0 \pmod{N}, \\ u + vs &= 2d - 10 + 2(d^2 - 25) = 2d^2 + 2d - 60 = N \equiv 0 \pmod{N}. \end{aligned}$$

При $d = 6k + 3$

$$\begin{aligned} -a + bs &= (2d - 10)(d^2 - 36) = (d - 6)N \equiv 0 \pmod{N}, \\ u + vs &= (d + 6) + (d - 4)(d^2 - 36) = (d - 5)N/2 \equiv 0 \pmod{N}. \end{aligned}$$

Проверяем, что при заданных диаметрах $av + bu = N$. Согласно лемме 2 в первом случае диаметр графа равен

$$d(N; 1, s) = \max\{d - 4, d, \min\{d + 1, 2d - 6\}\} = d + 1,$$

а во втором —

$$d(N; 1, s) = \max\{d + 1, d - 5, \min\{2d - 4, d\}\} = d + 1.$$

Таким образом, в обоих случаях имеем субоптимальные графы. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. Если $N = 2d^2 + 2d - 84$, то

$$\Psi_5 = \{C(N; 1, s) \mid d = 6k + 2, 6k + 3, k \geq 14\}$$

— бесконечное субоптимальное семейство циркулянтов с образующей $s = d^2 - 49$ при $d = 6k + 2$ и $s = d^2 - 36$ при $d = 6k + 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d = 6k + 2$, $s = d^2 - 49$. Возьмём $a = 0$, $b = 2d - 12$, $u = d + 7$, $v = d - 5$. Имеем

$$av + bu = (2d - 12)(d + 7) = 2d^2 + 2d - 84 = N.$$

Проверим, что $(-a, b)$, (u, v) — координаты двух нулей:

$$-a + bs = (2d - 12)(d^2 - 49) = (d - 7)N \equiv 0 \pmod{N},$$

$$u + vs = d + 7 + (d - 5)(d^2 - 49) = (d/2 - 3)N \equiv 0 \pmod{N}.$$

Согласно лемме 2 диаметр равен $d(N; 1, s) = d + 1$, т. е. граф $C(N; 1, s)$ субоптимальный.

При $d = 6k + 3$ возьмём $a = d - 6$, $b = d + 6$, $u = 2d - 12$, $v = 2$. Тогда

$$av + bu = 2(d - 6) + (d + 6)(2d - 12) = 2d^2 + 2d - 84 = N.$$

Аналогично определяем, что $(-a, b)$, (u, v) — два соседних нуля, и согласно лемме 2 диаметр графа равен $d(N; 1, s) = d + 1$, т. е. граф $C(N; 1, s)$ субоптимальный. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Если $N = 2d^2 + 2d - 126$, то

$$\Psi_6 = \{C(N; 1, s) \mid d = 6k + 2, 6k + 3, k \geq 21\}$$

— субоптимальное семейство циркулянтов с образующей $s = 2d - 15$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО бесконечности семейства Ψ_6 аналогично доказательствам теорем 2–4: достаточно взять $a = d - 9$, $b = d + 9$, $u = d - 6$, $v = d + 8$ при $d = 6k + 2$, $d = 6k + 3$ и выполнить соответствующие действия. Теорема 5 доказана.

При формировании видов функций a , b , u , v в доказательствах теорем 1–5 использована модель LLM Qwen3-Coder в качестве ИИ-помощника. Для этого на основе описанного нами на языке Wolfram Mathematica алгоритма определения значений a , b , u , v ИИ-модель создала программу на Python. С помощью данной программы ИИ-модель формировала для конкретного семейства числовые значения a , b , u , v по полученным на входе числовым значениям N и s для трёх последовательно наращаемых диаметров. Затем мы определяли по полученным числовым значениям вид искомым линейных функций a , b , u , v в зависимости от диаметра и использовали их в доказательствах. Поскольку при больших значениях диаметров для теоремы 5 в программе требовались экстремально

большие массивы (до 60 миллионов элементов размера $(N/2)^2/2$), ИИ-модель предложила итерационный алгоритм для сокращения массива используемых данных, который был успешно ею реализован.

Отметим, что в [13, теорема 6.2] найдены достаточные условия субоптимальности циркулянта $C(N; 1, s)$, состоящие из 15 соотношений между $N = 2d^2 + 2d - B$, $0 < B < 4d - 1$, и d . Используя эти условия, автор [13] показал, что субоптимальные графы существуют при всех значениях $N \leq 8 \cdot 10^6$. Однако эти условия не позволяют находить аналитические описания семейств субоптимальных графов. В [13, пример 6.3] рассмотрены значения $d = 25$, $B = 20$ и для $N = 1280$ при выполнении условий субоптимальности графа найдены образующие $s = 42, 138, 238, 444$. Рассмотренные параметры d, B, N соответствуют семейству Ψ_2 из теоремы 1, и нами была дополнительно найдена образующая $s = 611 = d^2 - 14$, которая позволяет сформировать аналитически задаваемое бесконечное семейство субоптимальных графов.

Возможность аналитического задания параметров оптимальных (субоптимальных) семейств циркулянтных графов открывает перспективу разработки и использования алгоритмов маршрутизации аналитического вида с приемлемыми затратами требуемых ресурсов по памяти для сетей на кристалле [7]. Таким образом, полученные в настоящей работе топологии семейств субоптимальных циркулянтных сетей с минимальной структурной задержкой при межузловых обменах обладают также возможностью эффективной организации маршрутизации для них, так как для найденных семейств сетей могут быть применены масштабируемые по числу узлов алгоритмы маршрутизации сложности $O(1)$ [7, 16].

Заключение

Проектирование оптимальных сетевых топологий представляет собой один из основных этапов при разработке сетей на кристалле. В данной работе продолжены исследования по генерации и анализу датасетов оптимальных кольцевых циркулянтных сетей степени четыре. На основе анализа большого массива данных исследовано решение задачи поиска двумерных кольцевых циркулянтных сетей с минимально возможным диаметром при заданном порядке графа. Существенно расширен поиск и исследование свойств субоптимальных циркулянтных сетей с диаметром, превышающим на единицу точную нижнюю границу диаметра.

Новый подход к визуализации точек датасета, разработка темплейтов для субоптимальных описаний графов, а также применение больших языковых моделей для написания программ темплейт-ориентированного перебора и участие моделей в подборе функций параметров укладки графов позволили открыть множество новых аналитически задаваемых семейств субоптимальных циркулянтных сетей.

Доказаны теоремы о существовании субоптимальных семейств при неограниченном росте диаметров графов. Вопросы полноты получения множеств семейств оптимальных и субоптимальных графов $C(N; 1, s)$ и исследования других методов анализа датасета, а также использования алгоритмов маршрутизации для них при разработке сетей на кристалле являются темой будущих исследований.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт Российского научного фонда (проект № 25–11–00248, rscf.ru/en/project/25-11-00248). Дополнительные грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Литература

1. **Bermond J.-C., Comellas F., Hsu D. F.** Distributed loop computer networks: A survey // J. Parallel Distrib. Comput. 1995. V. 24. P. 2–10.
2. **Hwang F. K.** A survey on multi-loop networks // Theor. Comput. Sci. 2003. V. 299, No. 1–3. P. 107–121.
3. **Monakhova E. A.** A survey on undirected circulant graphs // Discrete Math. Algorithms Appl. 2012. V. 4, No. 1. Article ID 1250002. 30 p.
4. **Lewis R. R.** Analysis and construction of extremal circulant and other Abelian Cayley graphs: PhD Thesis. London, 2021. 390 p.
5. **Huang X., Ramos A. F., Deng Y.** Optimal circulant graphs as low-latency network topologies // J. Supercomput. 2022. V. 78, No. 11. P. 13491–13510. DOI: 10.1007/s11227-022-04396-5.
6. **Liu H., Li X., Wang S.** Construction of dual optimal bidirectional double-loop networks for optimal routing // Mathematics. 2022. V. 10. Article ID 4016. 17 p.
7. **Монахов О. Г., Монахова Э. А.** Масштабируемый подход к кодизайну топологий и алгоритмов маршрутизации для семейств оптимальных циркулянтных сетей степени четыре // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2025. Т. 32, № 2. С. 88–106.
8. **Tzvieli D.** Minimal diameter double-loop networks. 1. Large infinite optimal families // Networks. 1991. V. 21, No. 4. P. 387–415.
9. **Monakhova E. A., Monakhov O. G.** Double-loop-networks. Datasets of optimal double loop networks or optimal circulant graphs $(N; 1, s)$. 2024. github.com/mila0411/Double-loop-networks (accessed: 1.08.2026).
10. **Монахова Э. А., Монахов О. Г.** Анализ базы данных оптимальных двухконтурных кольцевых сетей // Прикл. дискрет. математика. 2024. № 64. С. 56–71.

11. **Du D.-Z., Hsu D. F., Li Q., Xu J.** A combinatorial problem related to distributed loop networks // *Networks*. 1990. V. 20. P. 173–180.
12. **Bermond J.-C., Tzvieli D.** Minimal diameter double-loop networks: Dense optimal families // *Networks*. 1991. V. 21. P. 1–9.
13. **Tzvieli D.** Double-loop interconnection networks with minimal transmission delay: PhD Thesis. Baton Rouge, LA, 1988. 156 p.
14. **Chen B.-X., Meng J.-X., Xiao W.-J.** Some new optimal and suboptimal infinite families of undirected double-loop networks // *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* 2006. V. 8. P. 299–312.
15. **Монахов О. Г., Монахова Э. А.** Программа вычисления характеристик регулярных графов с параметрическим описанием. Свид. . . № 2013619128. М.: Фед. сл. по интелект. собств., патентам и товар. знакам, 2013.
16. **Chen B.-X., Meng J.-X., Xiao W.-J.** A constant time optimal routing algorithm for undirected double-loop networks // *Mobile ad-hoc and sensor networks. Proc. 1st Int. Conf. (Wuhan, China, Dec. 13–15, 2005)*. Heidelberg: Springer, 2005. P. 308–316. (*Lect. Notes Comput. Sci.*; V. 3794).

Монахова Эмилия Анатольевна
Монахов Олег Геннадьевич

Статья поступила
18 марта 2026 г.
После доработки —
5 апреля 2026 г.
Принята к публикации
22 апреля 2026 г.

SEARCH FOR FAMILIES OF SUBOPTIMAL CIRCULANT NETWORKS BASED ON AI

E. A. Monakhova^{1,2, a} and O. G. Monakhov^{2, b}

¹ HSE University,

20 Myasnitskaya Street, 101000 Moscow, Russia

² Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
6 Acad. Lavrentyev Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia

E-mail: ^aemilia@rav.sccc.ru, ^bmonakhov@rav.sccc.ru

Abstract. Based on the analysis of a dataset of two-dimensional ring circulant networks, a solution to the problem of finding families of suboptimal circulant networks with suboptimal diameters is investigated. Suboptimal two-dimensional ring circulants are graphs with the minimum possible diameter for a given number of vertices, exceeding by one the known exact lower bound on the circulant diameter. A new original plane visualization of dataset points corresponding to suboptimal circulants is presented. Using the discovered visual regularity of suboptimal circulant description sequences and large language models as an AI assistant for program development, new families of suboptimal graphs are found, comprising a total of 75% of the suboptimal dataset points. The scalability of the discovered graph families with increasing diameters is theoretically proven, while a large language model is used in proving the theorems. The analytically defined families of two-dimensional ring circulants found are of interest as topologies of communication networks for networks on a chip and communication systems. Tab. 3, illustr. 3, bibliogr. 16.

Keywords: undirected double loop network, diameter, dataset of optimal circulants, network on a chip, LLM.

References

1. J.-C. Bermond, F. Comellas, and D. F. Hsu, Distributed loop computer networks: A survey, *J. Parallel Distrib. Comput.* **24**, 2–10 (1995).
2. F. K. Hwang, A survey on multi-loop networks, *Theor. Comput. Sci.* **299** (1–3), 107–121 (2003).

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **20** (2) (2026).

3. **E. A. Monakhova**, A survey on undirected circulant graphs, *Discrete Math. Algorithms Appl.* **4** (1), ID 1250002 (2012).
4. **R. R. Lewis**, Analysis and construction of extremal circulant and other Abelian Cayley graphs, *PhD Thesis* (London, 2021).
5. **X. Huang**, **A. F. Ramos**, and **Y. Deng**, Optimal circulant graphs as low-latency network topologies, *J. Supercomput.* **78** (11), 13491–13510 (2022), DOI: 10.1007/s11227-022-04396-5.
6. **H. Liu**, **X. Li**, and **S. Wang**, Construction of dual optimal bidirectional double-loop networks for optimal routing, *Mathematics* **10**, ID 4016 (2022).
7. **O. G. Monakhov** and **E. A. Monakhova**, A scalable approach to co-design of topologies and routing algorithms for families of optimal degree-four circulant networks, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **32** (2), 88–106 (2025) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **19** (2), 291–301 (2025)], DOI: 10.1134/S1990478925020085].
8. **D. Tzvieli**, Minimal diameter double-loop networks. 1. Large infinite optimal families, *Networks* **21** (4), 387–415 (1991).
9. **E. A. Monakhova** and **O. G. Monakhov**, Double-loop-networks. Datasets of optimal double loop networks or optimal circulant graphs $(N; 1, s)$. 2024. github.com/mila0411/Double-loop-networks (accessed: 1.08.2026).
10. **E. A. Monakhova** and **O. G. Monakhov**, Database analysis of optimal double-loop networks, *Prikl. Diskretn. Mat.*, No. 64, 56–71 (2024) [Russian].
11. **D.-Z. Du**, **D. F. Hsu**, **Q. Li**, and **J. Xu**, A combinatorial problem related to distributed loop networks, *Networks* **20**, 173–180 (1990).
12. **J.-C. Bermond** and **D. Tzvieli**, Minimal diameter double-loop networks: Dense optimal families, *Networks* **21**, 1–9 (1991).
13. **D. Tzvieli**, Double-loop interconnection networks with minimal transmission delay, *PhD Thesis* (Baton Rouge, LA, 1988).
14. **B.-X. Chen**, **J.-X. Meng**, and **W.-J. Xiao**, Some new optimal and suboptimal infinite families of undirected double-loop networks, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* **8**, 299–312 (2006).
15. **O. G. Monakhov** and **E. A. Monakhova**, A program for calculating characteristics of regular graphs with a parametric description. Certif. ... No. 2013619128 (Fed. Serv. Intellect. Prop. Pat. Trademarks, Moscow, 2013) [Russian].
16. **B.-X. Chen**, **J.-X. Meng**, and **W.-J. Xiao**, A constant time optimal routing algorithm for undirected double-loop networks, in *Mobile ad-hoc and sensor networks*, Proc. 1st Int. Conf. (Wuhan, China, Dec. 13–15, 2005) (Springer, Heidelberg, 2005), pp. 308–316 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 3794).

Emiliya A. Monakhova
Oleg G. Monakhov

Received March 18, 2026
Revised April 5, 2026
Accepted April 22, 2026