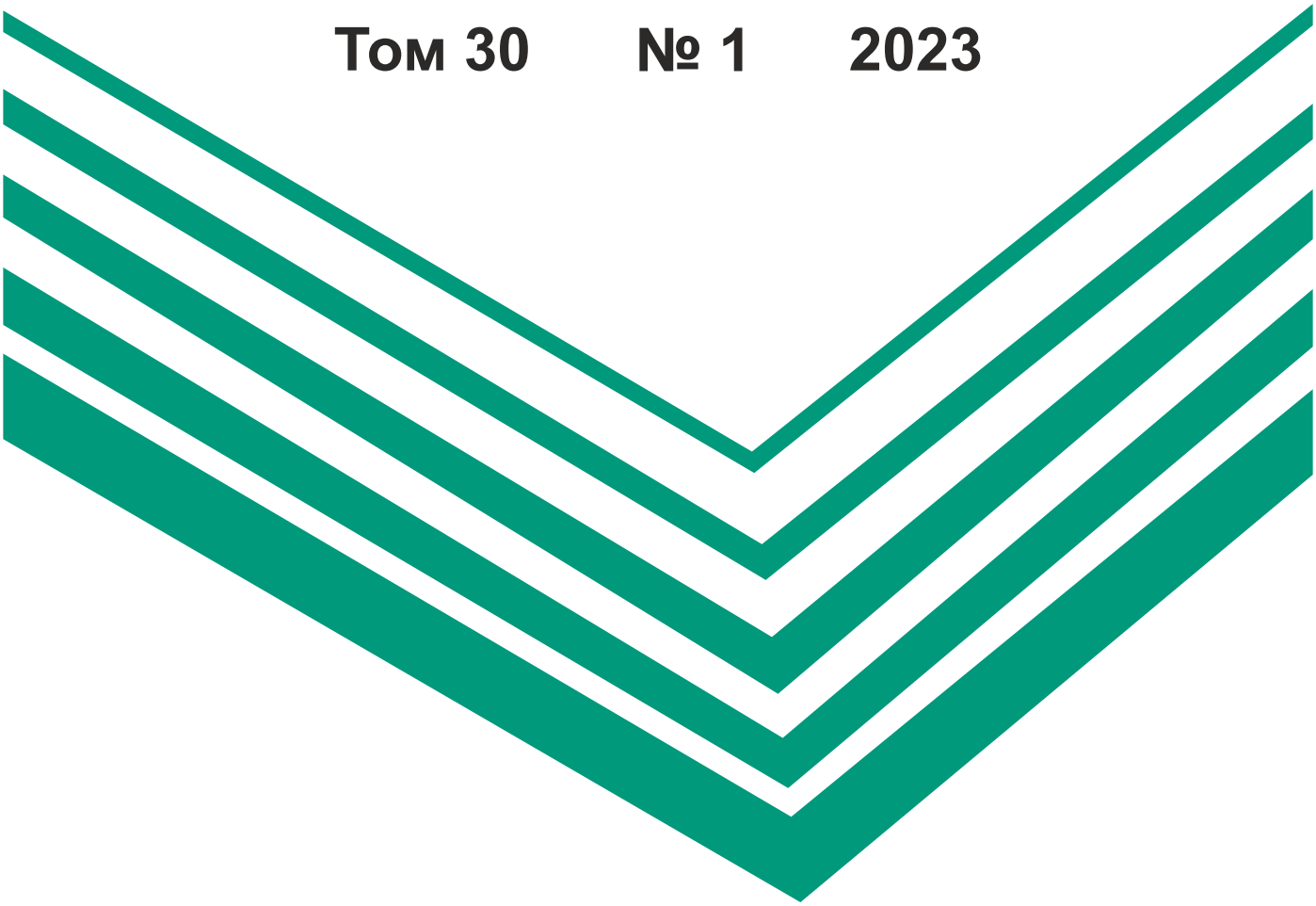
ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 30 № 1 2023



Новосибирск
Издательство Института математики

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	**В. Л. Береснев**
Заместители главного редактора	**А. А. Евдокимов** **С. В. Севастьянов**
Ответственный секретарь	**Ю. В. Шамардин**

С. В. Августинович
Г. П. Агибалов
В. Б. Алексеев
О. В. Бородин
В. А. Васильев
Э. Х. Гимади
А. Ю. Григорьев
С. Демпе
А. И. Ерзин
М. Я. Ковалёв
А. В. Косточка
Ю. А. Кочетов
В. К. Леонтьев
Б. М.-Т. Лин
В. В. Лозин
П. Пардалос
А. В. Пяткин
А. А. Сапоженко
М. Свириденко
Б. Я. Рябко
Н. Н. Токарева
Ю. А. Флеров
Ф. В. Фомин
М. Ю. Хачай
Я. М. Шафранский

Учредители журнала Сибирское отделение РАН
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Журнал включён в базу данных Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science. Переводы статей на английский язык публикуются в *Journal of Applied and Industrial Mathematics* и доступны по ссылке `www.springer.com/mathematics/journal/11754`.

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Выпускается с 1994 г. Научный журнал 4 номера в год

Том 30, № 1 (155) **Январь–март 2023**

СОДЕРЖАНИЕ

Гусев В. В. *Чистое равновесие Нэша в двух-шаговой игре ценообразования: покрытие торговых точек в туристическом городе* **5**

Дахно Г. С., Малышев Д. С. *О счетном семействе граничных классов графов для задачи о доминирующем множестве* **28**

Криворотько О. И., Кабанихин С. И., Бектемесов М. А., Сосновская М. И., Неверов А. В. *Моделирование сценариев распространения COVID-19 в Республике Казахстан на основе регуляризации агентной модели* **40**

Минарченко И. М. *О поиске равновесия по Нэшу в квазивогнутых квадратичных играх* **67**

Сорочан С. В. *Новые случаи полиномиальной разрешимости задачи о независимом множестве для графов с запрещенными триодами* . . . **85**

Талецкий Д. С. *О количестве наименьших полных доминирующих множеств в деревьях* **110**

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

В журнале публикуются оригинальные научные статьи и обзоры теоретической и прикладной направленности по следующим разделам дискретного анализа, исследования операций и информатики:

- дискретная оптимизация
- комбинаторика
- контроль и надёжность дискретных устройств
- математические модели и методы принятия решений
- математическое программирование
- модели экономики
- моделирование процессов управления
- построение и анализ алгоритмов
- синтез и сложность управляющих систем
- теория автоматов
- теория графов
- теория игр и её приложения
- теория кодирования
- теория расписаний и размещений

Адрес редакции:
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия
Телефон: +7 (383) 329–75–79
E-mail: discopr@math.nsc.ru

© Сибирское отделение РАН, 2023
© Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2023

SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII

/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/

Published since 1994 | Scientific journal | 4 issues per year

Vol. 30, No. 1 (155) | **January–March, 2023**

CONTENTS

V. V. Gusev. *Pure Nash equilibrium in a two-step pricing game: Covering sell points in a tourist city* **5**

G. S. Dakhno and **D. S. Malyshev.** *On a countable family of boundary graph classes for the dominating set problem* **28**

O. I. Krivorotko, S. I. Kabanikhin, M. A. Bektemesov, M. I. Sosnovskaya, and **A. V. Neverov.** *Simulation of COVID-19 propagation scenarios in the Republic of Kazakhstan based on regularization of agent model* **40**

I. M. Minarchenko. *On search of Nash equilibrium in quasiconcave quadratic games* **67**

S. V. Sorochan. *New cases of polynomial solvability of the independent set problem for graphs with forbidden triods* **85**

D. S. Taletskii. *On the number of minimum total dominating sets in trees* **110**

NOVOSIBIRSK
SOBOLEV INSTITUTE PRESS

In this journal we publish original research papers and survey papers of both theoretical and practical importance on the following topics of discrete analysis, operations research and informatics:

- discrete optimization
- combinatorics
- control and reliability of discrete devices
- decision making models and methods
- mathematical programming
- economic models
- management modeling
- design and analysis of algorithms
- synthesis and complexity of control systems
- automata theory
- graph theory
- game theory and its applications
- coding theory
- theory of scheduling and facility location

Editorial office address:
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Avenue,
630090 Novosibirsk, Russia
Phone: +7 (383) 329–75–79
E-mail: discopr@math.nsc.ru

© Siberian Branch of RAS, 2023
© Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 2023

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2023. Т. 30, № 1. С. 5–27

УДК 519.83 DOI 10.33048/daio.2023.30.744

ЧИСТОЕ РАВНОВЕСИЕ НЭША В ДВУХШАГОВОЙ ИГРЕ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ: ПОКРЫТИЕ ТОРГОВЫХ ТОЧЕК В ТУРИСТИЧЕСКОМ ГОРОДЕ

В. В. Гусев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», ул. Кантемировская, 3, 194100 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: vgusev@hse.ru

Аннотация. Малый бизнес в небольших туристических городах направлен на удовлетворение потребностей приезжих туристов, поэтому между предпринимателями из одной области предоставления услуг образуется конкуренция, что делает актуальной задачу ценообразования. Некоторым предпринимателям требуется определиться со стоимостью своего товара и местом его продажи. Если из-за конкуренции индивидуальный предприниматель будет часто менять место продажи своего товара, то можно пропустить сезон и не получить желаемой прибыли. Интерес представляет случай, когда выбор места продажи осуществляется в чистых стратегиях. С использованием концепции игр заполнения со специальными функциями выигрышей (congestion games with player-specific payoff functions) и теории порядковых потенциальных функций в работе показано существование равновесия в игре ценообразования. В качестве примера найдено равновесное распределение индивидуальных предпринимателей по торговым точкам в городе Геленджик. Табл. 3, ил. 2, библиогр. 22.

Ключевые слова: теория игр, чистое равновесие Нэша, игра ценообразования, потенциальные игры.

Исследование выполнено за счёт Российского научного фонда (проект № 22–21–20070), а также поддержано грантом Санкт-Петербургского научного фонда в соответствии с соглашением № 65/2022 от 15 апреля 2022 г.

© В. В. Гусев, 2023

Рис. 1. Город Геленджик

Введение

Описание проблемы. Геленджик (рис. 1) является туристическим городом, причём больший приток туристов наблюдается в летний период. Лучшими идеями для бизнеса в городе являются пляжные развлечения, экскурсионные компании, ресторанный и гостиничный бизнес. Местные жители пользуются популярностью своего города, и многие из них становятся индивидуальными предпринимателями. Ярким примером такого предпринимательства является продажа уличной еды.

Каждый год в Геленджике происходит следующая ситуация. Предприниматели уличной еды арендуют муниципальные участки для установки своих ларьков. Наиболее предпочтительным местом для ларька является Центральный пляж. Известно, что количество кафе и ресторанов на Центральном пляже меньше по сравнению с другими местами города. Это связано с тем, что число клиентов резко уменьшается после окончания туристического сезона, а владелец ресторана вынужден платить арендную плату в течение всего года. Продавцы уличной еды, зная это, арендуют участок только на период туристического сезона.

В дневное и околовечернее время на пляже находится большее число туристов по сравнению с другими местами отдыха, поэтому многие предприниматели арендуют муниципальный участок вблизи купальной зоны. Однако из-за конкуренции друг с другом у некоторых предпринимателей

расходы на реализацию товара и арендная стоимость превышают доход. Также стоит отметить, что в туристическом городе цены на продукцию часто завышены, что влияет на спрос. Поэтому некоторые предприниматели обращаются в администрацию города с заявлением о том, чтобы разместить свой ларёк в другом месте. На подготовку всех документов и перемещение ларька уходит время. Туристический сезон обычно длится с апреля по сентябрь, но лучшее время для отдыха на море — это летние месяцы. Если установить свой ларёк не в выгодном месте, то можно пропустить сезон и не получить желаемой прибыли.

Для каждого предпринимателя уличной еды требуется определить оптимальное размещение его ларька и найти цены на его продукцию при некоторых заданных параметрах. Под параметрами понимаются значение спроса на уличную еду, среднее число клиентов, затраты на реализацию продукции и др. В работе предложена теоретико-игровая модель для решения описанной проблемы.

Литература. Существует множество подходов к решению задачи ценообразования. Классической моделью ценообразования является олигополия, в которой существует фиксированный набор фирм и каждая фирма максимизирует свою прибыль в условиях конкуренции. В [1] учитывается сетевая структура конкурирующих предприятий и доказывается существование единственного равновесия. В [2] исследуются отношения поставщика товара и упаковочной компании и показано, что упаковочная компания оказывает влияние на прибыль поставщика товара. Поведение игроков в модели с многопродуктовыми фирмами изучено в [3].

В работе [4] проведено исследование по изучению различий цен между супермаркетами и ближайшими малыми продовольственными магазинами. Развитие продовольственной системы и супермаркетов изучено в [5, 6]. В исследовании [7] вводятся новые индексы потребительских цен Китая и проводится сравнение с классическими индексами.

Если потребитель находится в торговой точке и несколько игроков предлагают свою продукцию, то нужно определить, чьим клиентом станет потребитель. В [8] предполагается, что число клиентов является случайной величиной. Если известна частичная информация о продаваемом продукте, то клиенты решают специальную задачу поиска [9]. В работе [10] описывается поведение клиентов в зависимости от стратегии управляющей компании. В [11] выделяются внимательные и невнимательные клиенты. Предполагается, что потребитель равновероятно становится клиентом тех игроков, которых он предпочитает. Такое предположение также используется в текущей работе.

Задача ценообразования актуальна в течение нескольких сезонов, поэтому для нахождения стратегий игроков используется подход повторяющихся игр [12–14]. Математическая модель текущей работы построена

для одного периода в связи с тем, что число продавцов уличной еды и значения параметров известны для последнего туристического сезона.

Результат. Каждому предпринимателю необходимо определить цену на товар и установить ларёк в некоторой торговой точке. Чтобы решить такую проблему, определение равновесия по Нэшу модифицировано для конкретной задачи и названо двухшаговым равновесием. На первом и втором шагах находятся цены игроков и оптимальное распределение ларьков по торговым точкам соответственно. Функции выигрыша имеют специальный вид. Показано, что двухшаговое равновесие существует при некоторых естественных ограничениях (теорема 1). Важен тот факт, что выбор торговых точек осуществляется в чистых стратегиях. С помощью теоремы 1 получено числовое решение при некоторых заданных параметрах.

1. Основные обозначения и потенциальные игры

Игра в нормальной форме — это тройка $\Gamma = \langle N, \{S_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N}\rangle$, где $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество игроков, S_i — множество стратегий игрока $i \in N$, $H_i\colon S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ — выигрыш игрока i. Элемент x_i из множества S_i называется *стратегией* (или *чистой стратегией*) игрока $i \in N$. *Профиль стратегий* — это вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in S_i$ для любого $i \in N$. Игра Γ называется *конечной*, если для любого $i \in N$ множество S_i состоит из конечного числа элементов. *Смешанной стратегией* игрока i называется вектор $y = (y_1, y_2, \ldots, y_{|S_i|})$, $\sum\limits_{j=1}^{|S_i|} y_j = 1$, $y_j \geqslant 0$, $j \in \{1, 2, \ldots, |S_i|\}$. Число y_j, $j \in \{1, 2, \ldots, |S_i|\}$, — это вероятность, с которой игрок i выбирает стратегию $x_j \in S_i$.

Для профиля стратегий $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $a \in S_i$ положим

$$x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$
$$(a, x_{-i}) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

Обозначим $S_{-i} = S_1 \times \cdots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \cdots \times S_n$.

Игра Γ называется *потенциальной* [15], если существует функция $P\colon S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ такая, что для любых $i \in N$, $a, b \in S_i$, $x_{-i} \in S_{-i}$ выполняется

$$H_i(a, x_{-i}) - H_i(b, x_{-i}) = P(a, x_{-i}) - P(b, x_{-i}).$$

Игра Γ называется *порядковой потенциальной*, если существует функция $P\colon S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ такая, что для любых $i \in N$, $a, b \in S_i$, $x_{-i} \in S_{-i}$ выполняется

$$H_i(a, x_{-i}) - H_i(b, x_{-i}) > 0 \Leftrightarrow P(a, x_{-i}) - P(b, x_{-i}) > 0.$$

Функция P называется *потенциальной* или *порядковой потенциальной* в зависимости от типа игры. Пусть существует профиль стратегий, который максимизирует функцию P. Тогда такой профиль является равновесием по Нэшу в игре Γ. В конечных потенциальных играх всегда существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях. Некоторые результаты о потенциальных играх коалиционного разбиения получены в [16].

Игра заполнения — это кортеж $\Gamma = \langle N, V, \{S_i\}_{i\in N}, \{f_w\}_{w\in V}\rangle$, где N — множество игроков, V — множество ресурсов, $S_i \subseteq 2^V$ — множество стратегий игрока $i \in N$ и $f_w\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — функция выплат, ассоциированная с ресурсом $w \in V$ [17].

В игре заполнения выигрыш игрока равен

$$H_i(x) = \sum_{w\in x_i} f_w(k_w(x)),$$

где $k_w(x)$ — это количество игроков, которые в профиле стратегий x выбрали ресурс w. В играх заполнения предполагается, что f_w является монотонно убывающей функцией. Игра заполнения — это потенциальная игра, в которой потенциальная функция имеет вид

$$P(x) = P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{w\in \bigcup\limits_{i\in N} x_i} \sum_{k=1}^{k_w(x)} f_w(k).$$

В игре заполнения существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.

Игрой заполнения со специфичными функциями выигрышей (congestion game with player-specific payoff functions) называется игра в нормальной форме, в которой выигрыш игрока определяется по формуле

$$H_i(x) = f_{i,x_i}(k_{x_i}(x)),$$

где $k_{x_i}(x)$ — это количество игроков, которые в профиле стратегий x используют стратегию x_i, $f_{i,x_i}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $i \in N$, $x_i \in S_i$. В игре заполнения со специфичными функциями выигрышей выигрыш игрока $i \in N$ зависит от его стратегии x_i и числа игроков, которые используют стратегию x_i. Если для любых $i \in N$ и $x_i \in S_i$ функция f_{i,x_i} монотонно убывает, то существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях [18].

2. Модель

2.1. Игра ценообразования. Обозначим через $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ множество игроков, а через $V = \{w_1, w_2, \ldots, w_l\}$ — множество торговых точек. Каждый игрок из множества N выбирает единственную торговую точку из множества V, чтобы продавать там свой товар. Одна и та же торговая точка может быть выбрана несколькими игроками. Могут существовать торговые точки, которые не выбраны ни одним игроком.

Каждый игрок устанавливает цену на свой товар в выбранной торговой точке. Игроки продают товар одного наименования. Кооперация между игроками отсутствует.

Пусть $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, где v_i — торговая точка, которую выбрал игрок $i \in N$, $v_i \in V$, $v \in V^n$. Множество $D_i(v_i)$ — область определения стоимости одной единицы продукции, по которой игрок i продаёт свой товар в торговой точке v_i. Пусть $D = D(v) = D_1(v_1) \times D_2(v_2) \times \cdots \times D_n(v_n)$. Число $p_i(v_i)$ — цена, по которой игрок i продаёт единицу товара в торговой точке v_i, $p_i(v_i) \in D_i(v_i)$.

Стратегия игрока i представляет собой пару $\langle v_i, p_i(v_i)\rangle$. Игрок i выбирает торговую точку v_i и устанавливает в выбранной торговой точке цену $p_i(v_i)$. Цена, по которой игрок i продаёт свой товар, зависит от торговой точки. Профиль стратегий игроков — пара $(v, p) \in V^n \times D$, где

$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n), \quad p = p(v) = (p_1(v_1), p_2(v_2), \ldots, p_n(v_n)).$$

Обозначим $v^* = (v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*)$, $p^* = p^*(v^*) = (p_1^*(v_1^*), p_2^*(v_2^*), \ldots, p_n^*(v_n^*))$, где $v_i^* \in V$, $p_i^*(v_i^*) \in D_i(v_i^*)$ для любого $i \in N$.

Определение 1. *Игрой ценообразования* будем называть игру в нормальной форме $\langle N, \{S_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N}\rangle$, где N — множество игроков, $S_i = \{\langle w, p_i(w)\rangle \mid w \in V,\ p_i(w) \in D_i(w)\}$ — множество стратегий игрока $i \in N$, $H_i\colon S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to \mathbb{R}$ — функция выигрыша игрока $i \in N$.

Запишем определение равновесия и поясним его физический смысл для задачи ценообразования.

Определение 2. Пара (v^*, p^*) — это *двухшаговое равновесие* в игре ценообразования, если для любого $i \in N$ выполняются неравенства

$$\max_{p_i(v_i)} H_i((v_i, v_{-i}^*), (p_i(v_i), p_{-i}^*)) \leqslant H_i(v^*, p^*), \quad v_i \in V. \tag{1}$$

Двухшаговое равновесие представляет собой модернизированное равновесие по Нэшу. Пусть в (1) $v_i = v_i^*$. Тогда

$$H_i(v^*, (p_i(v_i^*), p_{-i}^*)) \leqslant H_i(v^*, p^*), \quad p_i(v_i^*) \in D_i(v_i^*). \tag{2}$$

В условии (2) торговые точки фиксированы. Если игрок i в торговой точке v_i^* будет продавать свой товар не по цене $p_i^*(v_i^*)$, а по цене $p_i(v_i^*)$, то его выигрыш не увеличится при условии, что любой другой игрок $j \in N \setminus \{i\}$ продаёт свой товар по цене $p_j^*(v_j^*)$. Выполнение условия (2) гарантирует, что существует ценовое равновесие внутри выбранной торговой точки v_i^*. Пусть игрок i изменил торговую точку v_i^* на $v_i \in V$. Тогда в новой торговой точке игрок i установит цену $p_i(v_i)$, которая максимизирует его выигрыш, предполагая, что торговые точки и цены других игроков фиксированы. Условие (1) говорит о том, что игроку i невыгодно менять торговую точку v_i^* на v_i, даже если он максимизирует свой

выигрыш по цене $p_i(v_i) \in D_i(v_i)$. Если (v^*, p^*) — двухшаговое равновесие, то игрокам невыгодно изменять стоимость своей продукции и место его продажи.

Двухшаговое равновесие может существовать в чистых или смешанных стратегиях. Если в задаче ценообразования игроки будут придерживаться смешанных стратегий и менять свои торговые точки, то это может привести к негативным последствиям. Выбрав некоторую торговую точку в качестве места продажи своего товара, игрок арендует муниципальный участок, формирует базу клиентов и т. д. Частое изменение торговой точки будет приводить к материальным убыткам в течение сезона, потере постоянных клиентов. Если игрок выбрал некоторую торговую точку в качестве места продажи своей продукции, то, как правило, у него нет соблазна продавать свою продукцию в другом месте. Более того, индивидуальный предприниматель должен торговать в той торговой точке, где арендовал муниципальный участок: администрация города не всегда разрешает поменять один участок на другой. Поэтому нас будет интересовать равновесие в чистых стратегиях.

Запишем конкретные функции выигрыша игроков в игре ценообразования, исходя из вероятностных и экономических соображений.

2.2. Доля клиентов игроков. Обозначим через $n(w)$ число потребителей в торговой точке $w \in V$. Пусть $f_i(p_i(v_i))$ — доля потребителей, которые являются клиентами игрока $i \in N$ в торговой точке v_i при условии, что игрок i является единственным продавцом в v_i. Доля потребителей $f_i(p_i(v_i))$ зависит от цены $p_i(v_i)$, которую устанавливает игрок i. Логично предположить, что $f_i(0) = n(v_i)$ для всех $i \in N$. Такое равенство означает, что все потребители являются клиентами игрока i, так как товар бесплатный. Будем предполагать, что

$$f_i(p_i(v_i)) = n(v_i) \cdot e^{-a_i(v_i)p_i(v_i)}.$$

Число $a_i(w)$ — это параметр спроса. О приложении экспоненциального распределения в задачах ценообразования можно узнать в [19].

Пусть торговую точку $w \in V$ выбрало несколько игроков. Обозначим $K_w(v) = \{j \in N \mid v_j = w\}$, где $v \in V^n$. Множество $K_w(v)$ состоит из игроков, которые в векторе $v \in V^n$ выбрали торговую точку w. Пусть $K_w(v) \neq \varnothing$. Произведение

$$n(w) \cdot \prod_{l \in L} e^{-a_l(w)p_l(w)} \prod_{j \in K_w(v) \setminus L} (1 - e^{-a_j(w)p_j(w)})$$

— это доля потребителей в торговой точке w, которые предпочитают

продукцию игроков из множества $L \subseteq K_w(v)$, $L \neq \varnothing$, и не предпочитают продукцию игроков из множества $K_w(v) \setminus L$. Если $K_w(v) \setminus L = \varnothing$, то определим произведение $\prod\limits_{j \in K_w(v) \setminus L} (1 - e^{-a_j(w)p_j(w)})$ тождественно равным единице.

Обозначим через $d_i(v,p)$ долю клиентов игрока $i \in N$, где

$$d_i(v,p) = n(v_i) \sum_{i \in L \subseteq K_{v_i}(v)} \frac{1}{|L|} \prod_{l \in L} e^{-a_l(v_i)p_l(v_i)} \prod_{j \in K_{v_i}(v) \setminus L} (1 - e^{-a_j(v_i)p_j(v_i)}).$$

Так как потребители в торговой точке v_i, $i \in N$, предпочитают продукцию всех игроков из множества $L \subseteq K_{v_i}(v)$, потребители распределяются между игроками из L равномерно. По этой причине в формуле доли клиентов появляется множитель $\frac{1}{|L|}$. Если $N = \{i\}$, то

$$d_i(v,p) = f_i(p_i(v_i)) = n(v_i) \cdot e^{-a_i(v_i)p_i(v_i)}.$$

Заметим, что доля клиентов игрока i уменьшается при увеличении цены $p_i(v_i)$. С другой стороны, если игрок i увеличит цену товара, то доля клиентов игрока $j \neq i$ не уменьшится. Это следует из того, что выполняются неравенства

$$\frac{\partial d_i(v,p)}{\partial p_i(v_i)} < 0, \quad \frac{\partial d_j(v,p)}{\partial p_i(v_i)} \geqslant 0, \quad i,j \in N,\ i \neq j.$$

2.3. Функции выигрыша в игре ценообразования. Обозначим через $c_i(w)$ затраты игрока $i \in N$ на реализацию товара в точке $w \in V$, $c_i(w) > 0$. Пусть $r(w)$ — затраты, которые зависят от торговой точки w и не зависят от игрока. Например, в $r(w)$ входит стоимость аренды муниципального участка, $r(w) > 0$ для любого $w \in V$. Функции выигрыша игроков в игре ценообразования для любого $i \in N$ имеют вид

$$H_i(v,p) = (p_i(v_i) - c_i(v_i)) \cdot d_i(v,p) - r(v_i) = (p_i(v_i) - c_i(v_i)) \cdot n(v_i)$$
$$\times \sum_{i \in L \subseteq K_{v_i}(v)} \frac{1}{|L|} \prod_{l \in L} e^{-a_l(v_i)p_l(v_i)} \prod_{j \in K_{v_i}(v) \setminus L} (1 - e^{-a_j(v_i)p_j(v_i)}) - r(v_i). \quad (3)$$

Величины $p_i(v_i) \cdot d_i(v,p)$ и $c_i(v_i)d_i(v,p) + r(v_i)$ — ожидаемый доход и ожидаемые расходы игрока $i \in N$ соответственно. Функция выигрыша игрока i представляет собой чистую прибыль. Областью определения цены $p_i(v_i)$, $i \in N$, является $D_i(v_i) = (c_i(v_i); +\infty)$. Будем предполагать, что

$$a_i(w) \cdot c_i(w) = b(w), \quad i \in N,\ w \in V. \quad (4)$$

Равенство (4) означает, что произведение $a_i(w)$ и $c_i(w)$ не зависит от игрока $i \in N$, а зависит только от торговой точки $w \in V$. Пусть (4) выполняется. Тогда чем ближе значение $a_i(w)$ к нулю, тем выше спрос и тем

больше $c_i(w)$. Это означает, что требуются большие затраты на производство товара с высоким спросом.

Далее нас будет интересовать существование двухшагового равновесия в игре ценообразования с функциями выигрыша (3).

3. Теоретические результаты

В данном разделе получены основные теоретические результаты. Доказательства всех утверждений даны в разделе приложение.

Обозначим через w некоторую торговую точку из V. Пусть выбор торговых точек фиксирован и существует игрок $i \in N$, для которого выполняется $v_i = w$. Рассмотрим игру в нормальной форме

$$\Gamma_w = \langle K_w(v),\, \{D_i(v_i)\}_{i\in K_w(v)},\, \{H_i(v,p)\}_{i\in K_w(v)}\rangle,$$

где $K_w(v)$ — множество игроков, которые выбрали торговую точку w, а функция выигрыша $H_i(v,p)$, $i \in N$, определяется по формуле (3). Так как w и v фиксированы в Γ_w, нас будут интересовать существование равновесных цен.

Лемма 1. *Игра Γ_w является порядковой потенциальной игрой с потенциальной функцией*

$$P(v,p) = \prod_{k\in K_w(v)} (p_k(w) - c_k(w)) \cdot e^{-a_k(w)p_k(w)}.$$

Существует единственное значение равновесной цены $p_k^*(w)$, а именно

$$p_k^*(w) = c_k(w) + \frac{1}{a_k(w)}, \quad k \in K_w(v).$$

Значение равновесной цены $p_k^*(w)$, $k \in K_w(v)$, из леммы 1 не зависит от игроков, которые выбрали торговую точку w. Цена включает в себя стоимость затрат на реализацию продукта и слагаемое, отвечающее за спрос на товар игрока k в торговой точке w. Чем ближе значение $a_k(w)$ к нулю, тем выше спрос на товар игрока k и тем больше значение $p_k^*(w)$.

В лемме 2 упрощается значение функции выигрыша $H_i(v,p^*)$, где p^* — вектор равновесных цен из леммы 1.

Лемма 2. *Пусть $v \in V^n$, $p^* = p^*(v) = \big(p_i^*(v_i) = c_i(v_i) + \frac{1}{a_i(v_i)}\big)_{i\in N}$, $A(w) = e^{-b(w)-1}$, $w \in V$, и выполняется* (4). *Тогда*

$$H_i(v,p^*) = \frac{n(v_i)}{a_i(v_i)} \cdot \frac{1-(1-A(v_i))^{|K_{v_i}(v)|}}{|K_{v_i}(v)|} - r(w). \tag{5}$$

Поясним равенство (5). Пусть $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ — вектор из торговых точек. Каждый игрок $i \in N$ в торговой точке v_i устанавливает цену

$c_i(v_i) + \frac{1}{a_i(v_i)}$. Так как в лемме 2 выполняется (4), игроки в некотором смысле симметричны. В таком случае выигрыш игрока i зависит от параметров $n(v_i)$, $a_i(v_i)$, $b(v_i)$ и числа игроков, которые выбрали торговую точку v_i. Из утверждения 1 следует, что чем больше значение $|K_{v_i}(v)|$, тем меньше $H_i(v, p^*)$. Такое свойство естественно, потому что чем больше конкурентов у игрока, тем меньше его выигрыш.

Утверждение 1. *Для любых $a \in (0;1)$ и $k \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $\frac{1-a^k}{k} > \frac{1-a^{k+1}}{k+1}$.*

В лемме 3 показано, как можно упростить левую часть неравенства (1) в рассматриваемой игре ценообразования.

Лемма 3. *Пусть $v \in V^n$, $p^* = p^*(v) = \left(p_i^*(v_i) = c_i(v_i) + \frac{1}{a_i(v_i)}\right)_{i \in N}$. Тогда для любого $i \in N$*

$$\max_{p_i(v_i)} H_i((v_i, v_{-i}), (p_i(v_i), p^*_{-i})) = H_i(v, p^*).$$

Поясним лемму 3. Предположим, что каждый игрок $i \in N$ в торговой точке устанавливает цену $c_i(v_i) + \frac{1}{a_i(v_i)}$. Теперь игрок i хочет изменить торговую точку v_i на $v_i' \neq v_i$, а любой другой игрок $j \neq i$ не меняет торговой точки и не меняет цены. В новой торговой точке игрок i установит такую цену на свой товар, которая максимизирует его выигрыш. Из леммы 3 следует, что такая цена равна $c_i(v_i') + \frac{1}{a_i(v_i')}$.

Неравенства (1) можно упростить с помощью леммы 3 следующим образом:

$$H_i((v_i, v^*_{-i}), p^*) \leqslant H_i(v^*, p^*), \quad v_i \in V.$$

Следовательно, v^* — равновесие по Нэшу в некоторой специальной игре. Обозначим эту игру следующим образом:

$$G = \langle N, \{V\}_{i \in N}, \{H_i(v, p^*)\}_{i \in N} \rangle,$$

где стратегия игрока — выбор торговой точки из множества V, а функции выигрыша определяются по формуле (5). Вектор p^* в игре G является фиксированным параметром. С помощью утверждения 1 получается

Лемма 4. *В игре G существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях.*

Игра G принадлежит классу congestion games with player-specific payoff functions [18], поэтому в такой игре существует равновесие в чистых стратегиях.

Используя леммы 1–4, можно показать, что справедлива

Теорема 1. *Пусть в игре ценообразования функции выигрыша имеют вид* (3) *и выполняется* (4). *Тогда в такой игре существует двухшаговое равновесие.*

В доказательстве теоремы 1 показано, что (v^*, p^*) — двухшаговое равновесие в игре ценообразования, где v^* — равновесие в игре G и $p^* = p^*(v^*) = (p_1^*(v_1^*), p_2^*(v_2^*), \ldots, p_n^*(v_n^*))$, $p_i^*(v_i^*) = c_i(v_i^*) + \frac{1}{a_i(v_i^*)}$, $i \in N$. Из теоремы 1 следует, что при выполнении ограничения (4) выбор торговых точек в игре ценообразования с функциями выигрыша (3) осуществляется в чистых стратегиях.

В разд. 4 рассматривается туристический город Геленджик. Требуется распределить 20 предпринимателей уличной еды по торговым точкам равновесным образом.

4. Выбор торговых точек на примере курорта Геленджик

4.1. Аппроксимация функций выигрыша. Для того чтобы рассчитать средний выигрыш предпринимателя уличной еды, воспользуемся теоретическими результатами данной работы. Так как в формуле (5) выполняется $0 < 1 - A(v_i) < 1$, $i \in N$, при большом значении $|K_{v_i}(v)|$ выражение $(1 - A(v_i))^{|K_{v_i}(v)|}$ близко к нулю. Тогда $H_i(v, p^*)$ можно аппроксимировать так:

$$\overline{H}_i(v, p^*) = n(v_i) \cdot \frac{1}{a_i(v_i)} \cdot \frac{1}{|K_{v_i}(v)|} - r(v_i). \tag{6}$$

Рекомендации по установлению цены можно получить из леммы 1.

Далее зададим значения параметров, вычислим значения равновесных цен и найдём равновесное распределение игроков по торговым точкам.

4.2. Расположение торговых точек и равновесное значение цены. Рассмотрим рис. 2, на котором изображён берег бухты Геленджика. Точками отмечены рестораны и кафе, которые существуют в данный момент. Рестораны и кафе являются конкурентами предпринимателей уличной еды. Выделим шесть торговых точек, которые отмечены на рисунке большими латинскими буквами.

Участок в овале — местность для расположения торговой точки. Множество V имеет вид $V = \{A, B, C, D, E, F\}$, где A — набережная Толстый мыс, B — пляж Сады морей, C — Центральный пляж, D — океанариум, E — парк аттракционов, F — Центральная набережная.

Внутри торговой точки арендная плата одинаковая, поэтому границы торговых точек именно такие, как изображено на рис. 2. Заметим, что число кафе и ресторанов на Центральном пляже невелико по сравнению с другими торговыми точками. Большее число кафе и ресторанов находится с левой и правой стороны от Центрального пляжа.

Значения параметров даны в табл. 1. Далее будем предполагать, что игроки в торговой точке симметричны, т. е. $c_i(w) = c_j(w)$, $a_i(w) = a_j(w)$

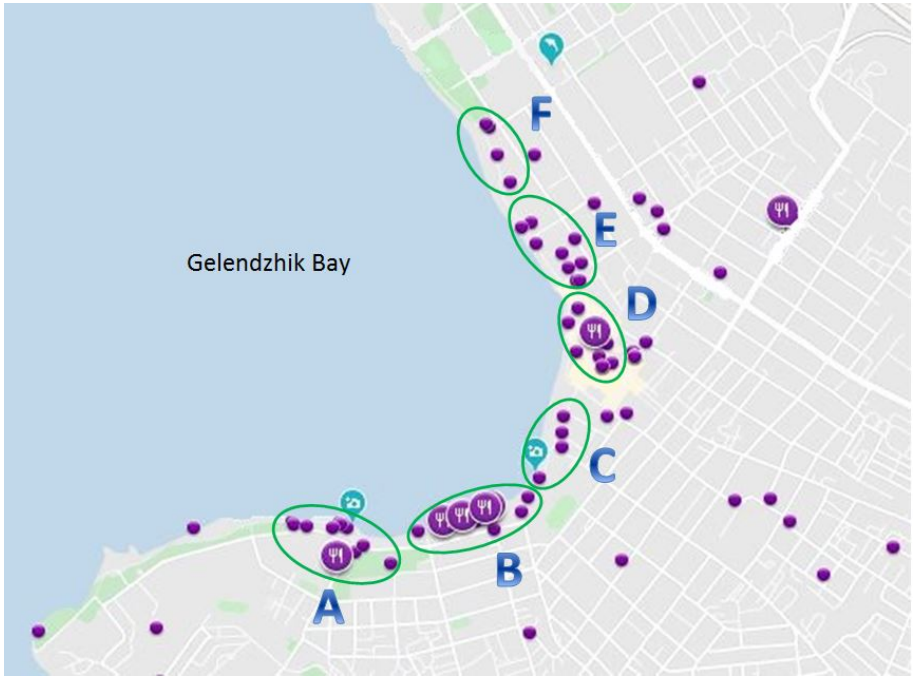


Рис. 2. Расположение кафе и ресторанов в окрестностях Центрального пляжа г. Геленджик

для любых $i, j \in N$, $w \in V$. Отличие между игроками проявляется в выборе торговых точек.

Поясним значения из табл. 1. Параметр $n(w)$ — число потребителей в день в торговой точке $w \in V$, которые готовы воспользоваться услугами общественного питания. На Центральном пляже наименьшие значения параметров $n(w)$ и $a_i(w)$. Минимальное значение параметра $n(w)$ связано с тем, что обычно многие отдыхающие берут еду с собой из отеля. Наименьшее значение параметра $a_i(v)$ обуславливается тем, что спрос на уличную еду выше по сравнению с кафе и ресторанами. Чем дальше от Центрального пляжа, тем больше значения $n(w)$ и $a_i(w)$. В таких

Таблица 1

Значения параметров

w	A	B	C	D	E	F
$n(w)$	548	473	345	305	325	380
$r(w)$	1400	1500	1666	1500	1450	1400
$c_i(w)$	57	60	65	60	58	55
$a_i(w)$	0,035	0,03	0,02	0,035	0,035	0,04

местах отдыхающие прогуливаются по набережной Геленджика и в большей степени хотят провести время в кафе или ресторане. Это объясняет снижение спроса на уличную еду. Напомним, что чем ближе $a_i(v_i)$ к нулю, тем больше значение предельной доли клиентов.

Каждый предприниматель уличной еды имеет в своём распоряжении ларёк с примерной площадью 10 квадратных метров. Арендная плата в день за 10 квадратных метров приводится в табл. 1 в строке $r(w)$. Например, аренда одного квадратного метра в месяц в торговой точке A составит $1400 \cdot 30/10 = 4200$ руб.

Так как продаваемый товар одного наименования, у всех игроков примерно одинаковые издержки, связанные с реализацией товара в одной торговой точке. К таким издержкам относятся расходы на покупку сырья, электричество, трудовые ресурсы и др. В среднем предприниматель уличной еды тратит не более 65 руб. на обслуживание одного клиента.

Дадим оценку равновесной цены одной единицы продукции, по которой игрок $i \in N$ может продавать свой товар в торговой точке $w \in V$. Значения равновесных цен представлены в табл. 2 и рассчитаны по формуле $p_i^*(w) = c_i(w) + \frac{1}{a_i(w)}$ из леммы 1.

Таблица 2

Значения равновесных цен

w	A	B	C	D	E	F
$p_i^*(w)$	85,57	93,33	115,00	88,57	86,57	80,00

4.3. Оптимальное размещение игроков по торговым точкам. В среднем около двадцати предпринимателей в Геленджике хотят заниматься деятельностью в сфере уличной еды в текущем туристическом сезоне, т. е. $N = \{1, 2, \ldots, 20\}$. Найдём равновесное распределение игроков по торговым точкам. Для этого будем предполагать, что выигрыш игрока $i \in N$ вычисляется по формуле (6). Подставим числовые значения параметров $n(w)$, $a_i(w)$, $r(w)$ из табл. 1 в (6) и упростим выигрыш игрока для каждой торговой точки:

$$\overline{H}_i(v) = \overline{H}_i(v, p^*) = \frac{n(v_i)}{a_i(v_i)} \cdot \frac{1}{|K_{v_i}(v)|} - r(v_i), \quad i \in N,$$

$$\overline{H}_i(A, v_{-i}) = \frac{15657{,}14}{|K_A(v)|} - 1400, \quad \overline{H}_i(B, v_{-i}) = \frac{15766{,}66}{|K_B(v)|} - 1500,$$

$$\overline{H}_i(C, v_{-i}) = \frac{17250}{|K_C(v)|} - 1666, \quad \overline{H}_i(D, v_{-i}) = \frac{8714{,}29}{|K_D(v)|} - 1500,$$

$$\overline{H}_i(E, v_{-i}) = \frac{9285{,}71}{|K_E(v)|} - 1450, \quad \overline{H}_i(F, v_{-i}) = \frac{9500}{|K_F(v)|} - 1400.$$

Обозначим через α_w, $w \in V$, константу, которая стоит в функциях выигрыша игроков, например, $\alpha_A = 15657{,}14$, $\alpha_B = 15766{,}66$.

Игра $\langle N, V, \{u_i\}_{i\in N}\rangle$, $u_i(v) = -r(v_i)$, является потенциальной игрой с потенциальной функцией

$$p(v) = -\sum_{i\in N} r(v_i) = -\sum_{w\in V} |K_w(v)| \cdot r(w).$$

Так как мы предположили, что $a_i(w) = a_j(w)$ для любых $i, j \in N$, $w \in V$, $\langle N, V, \{\overline{H}_i\}_{i\in N}\rangle$ — потенциальная игра с потенциальной функцией

$$P(v) = \sum_{w\in R(v)} \alpha_w \sum_{k=1}^{|K_w(v)|} \frac{1}{k} - \sum_{w\in V} |K_w(v)| \cdot r(w), \quad R(v) = \bigcup_{i\in N} \{v_i\}.$$

Для того чтобы найти равновесие в чистых стратегиях, достаточно максимизировать потенциальную функцию $P(v)$. Чтобы это сделать, например, можно составить последовательность наилучших ответов и найти её предел.

Одно из состояний равновесия имеет вид

$$v^* = (A, A, A, A, B, B, B, B, C, C, C, C, C, D, D, E, E, F, F, F).$$

В табл. 3 в строке $|K_w(v^*)|$ указано количество игроков в торговой точке w в состоянии равновесия v^*. Например, торговую точку C в состоянии равновесия выбрало 5 игроков, торговую точку E выбрало 3 игрока и т. д. В строке $\overline{H}_i(v^*)$ вычислены выигрыши игроков в состоянии равновесия v^*.

Таблица 3

Выигрыши игроков в равновесии v^*

w	A	B	C	D	E	F
$\lvert K_w(v^*)\rvert$	4	4	5	2	2	3
$\overline{H}_i(v^*)$	2514,29	2441,67	1784	2857,15	3192,86	1766,67

Минимальный и максимальный выигрыши игроков равны 1766,66 и 3192,85 руб. в день. Такие выигрыши получают игроки, которые выбрали торговые точки F и E соответственно. Предположим, что игрок i из F перейдёт в E. Тогда в E выигрыш игрока i составит $9285{,}71/3 - 1450 = 1645{,}24$. В знаменателе число 3, поскольку в E находилось 2 игрока и ещё пришёл игрок i. При переходе игрока i из торговой точки F в торговую точку E его выигрыш уменьшится на 121,42 руб. Если любой игрок в состоянии равновесия v^* перейдёт в другую торговую точку, то его выигрыш не увеличится при условии, что остальные игроки неподвижны.

Наибольшее значение параметра α_w составляет 17250 при $w = C$, а выигрыш игрока в торговой точке C в равновесии v^* равен 1784 руб.

Максимальное значение константы α_w, $w \in V$, не гарантирует, что выигрыш игрока в состоянии равновесия в торговой точке w будет наибольшим. Торговая точка C привлекательна для предпринимателей уличной еды тем, что спрос в этой торговой точке выше по сравнению со спросом в других торговых точках. Однако в равновесии v^* торговую точку C выбирает 5 игроков. Ожидания игроков на наибольшую прибыль в C по сравнению с другими торговыми точками ошибочны из-за конкуренции друг с другом.

Заключение

Индивидуальные предприниматели уличной еды собирают доступную информацию о рынке, прежде чем установить свой ларёк в торговой точке. В основном это количественная информация. Главный показатель — количество конкурентов в торговой точке. Чем больше конкурентов, тем меньше вероятность того, что ларёк будет установлен в рассматриваемой торговой точке. Аппроксимированные функции выигрышей учитывают такое наблюдение.

Служащие администрации города Геленджик знают точные значения многих параметров и могут управлять процессом распределения ларьков с помощью изменения стоимости муниципального участка или каким-либо другим способом. Используя предложенную математическую модель, можно рассчитать максимальное количество ларьков в торговой точке в состоянии равновесия, подобрав соответствующие параметры. С помощью рассчитанного значения желательно ввести ограничение на количество мест в торговой точке. Приложения теории механизмов для решения задачи ценообразования представлены в [20–22].

Приложение

Доказательство леммы 1. Преобразуем функции выигрыша игроков:

$$H_i(v,p) = (p_i(w) - c_i(w))d_i(v,p) - r(v_i) = (p_i(w) - c_i(w))e^{-a_i(w)p_i(w)}$$
$$\times\Big[n(w)\sum_{i\in L\subseteq K_w(v)}\frac{1}{|L|}\prod_{l\in L,\,l\neq i}e^{-a_l(w)p_l(w)}\prod_{j\in K_w(v)\setminus L}(1-e^{-a_j(w)p_j(w)})\Big]-r(v_i).$$

Выражение в квадратных скобках не зависит от $p_i(w)$. Обозначим это выражение через $f(v,p_{-i})$, где

$$p_{-i} = (p_1(v_1),\dots,p_{i-1}(v_{i-1}),p_{i+1}(v_{i+1}),\dots,p_n(v_n)).$$

Если игрок i — единственный, кто выбрал торговую точку w, то имеем $f(v,p_{-i}) \equiv 1$. Также заметим, что $f(v,p_{-i}) > 0$ для любых $i \in N$, $v \in V^n$, $p_i(v_i) \in D_i(v_i)$. Тогда

$$H_i(v,p) = (p_i(w) - c_i(w))e^{-a_i(w)p_i(w)} \cdot f(v,p_{-i}) - r(v_i).$$

Пусть $p_i(w), p_i'(w) \in D_i(w)$. Покажем, что $P(v,p)$ — порядковая потенциальная функция:

$$\begin{aligned}
&H_i(v,(p_i(w),p_{-i})) - H_i(v,(p_i'(w),p_{-i}))\\
&= (p_i(w)-c_i(w))e^{-a_i(w)p_i(w)} \cdot f(v,p_{-i}) - (p_i'(w)-c_i(w))e^{-a_i(w)p_i'(w)} \cdot f(v,p_{-i})\\
&= \{(p_i(w) - c_i(w))e^{-a_i(w)p_i(w)} - (p_i'(w) - c_i(w))e^{-a_i(w)p_i'(w)}\} \cdot f(v,p_{-i}),\\
&P(v,(p_i(w),p_{-i})) - P(v,(p_i'(w),p_{-i}))\\
&\qquad = \{(p_i(w) - c_i(w))e^{-a_i(w)p_i(w)} - (p_i'(w) - c_i(w))e^{-a_i(w)p_i'(w)}\}\\
&\qquad\qquad \times \prod_{i\neq k\in K_w(v)} (p_k(w) - c_k(w))e^{-a_k(w)p_k(w)}.
\end{aligned}$$

Так как $f(v,p_{-i}) > 0$ и

$$\prod_{i\neq k\in K_w(v)} (p_k(w) - c_k(w))e^{-a_k(w)p_k(w)} > 0$$

для любых $i \in N$, $v \in V^n$, $p_i(v_i) \in D_i(v_i)$, знак разности функций выигрыша и знак разности значений потенциальной функции зависят только от одного и того же выражения в фигурных скобках. Следовательно,

$$H_i(v,(p_i(w),p_{-i})) - H_i(v,(p_i'(w),p_{-i})) > 0$$

тогда и только тогда, когда

$$P(v,(p_i(w),p_{-i})) - P(v,(p_i'(w),p_{-i})) > 0,$$

значит, $P(v,p)$ — порядковая потенциальная функция для игры Γ_w.

Для нахождения равновесных цен нужно найти максимум потенциальной функции $P(v,p)$, предполагая, что v фиксировано. Потенциальная функция равна произведению независимых множителей $(p_k(w) - c_k(w))e^{-a_k(w)p_k(w)}$, $k \in K_w(v)$. Для нахождения максимума достаточно максимизировать каждый множитель на промежутке $D_i(w) = (c_k^v, +\infty)$. Максимум функции $u(p_k(w)) = (p_k(w) - c_k(w))e^{-a_k(w)p_k(w)}$ на промежутке $(c_k^v, +\infty)$ достигается в точке $p_k^*(w) = c_k(w) + \frac{1}{a_k(w)}$, $k \in K_w(v)$. Так как функция $u(p_k(w))$ унимодальная, значение равновесной цены единственно. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Чтобы показать выполнение равенства из леммы 2, подставляем значения равновесных цен в выигрыши игроков. Далее используется равенство (4), чтобы упростить выигрыши игроков:

$$H_i(v,p^*)+r_i(v_i)=n(v_i)\cdot(p_i^*(v_i)-c_i(v_i))\cdot d_i(v,p^*)=\frac{n(v_i)}{a_i(v_i)}$$
$$\times\sum_{i\in L\subseteq K_{v_i}(v)}\frac{1}{|L|}\prod_{l\in L}e^{-a_l(v_i)(c_l(v_i)+\frac{1}{a_l(v_i)})}\prod_{j\in K_{v_i}(v)\setminus L}(1-e^{-a_j(v_i)(c_j(v_i)+\frac{1}{a_j(v_i)})})$$
$$=\frac{n(v_i)}{a_i(v_i)}\sum_{i\in L\subseteq K_{v_i}(v)}\frac{1}{|L|}\prod_{l\in L}e^{-b(v_i)-1}\prod_{j\in K_{v_i}(v)\setminus L}(1-e^{-b(v_i)-1})$$
$$=\frac{n(v_i)}{a_i(v_i)}\sum_{i\in L\subseteq K_{v_i}(v)}\frac{1}{|L|}\cdot(A(v_i))^{|L|}\cdot(1-A(v_i))^{|K_{v_i}(v)\setminus L|}$$
$$=\frac{n(v_i)\cdot A(v_i)}{a_i(v_i)}\sum_{k=0}^{|K_{v_i}(v)|-1}\frac{C^k_{|K_{v_i}(v)|-1}\cdot(A(v_i))^{|K_{v_i}(v)|-k-1}\cdot(1-A(v_i))^k}{|K_{v_i}(v)|-k}$$
$$=\frac{n(v_i)\cdot A(v_i)}{a_i(v_i)}\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{|K_{v_i}(v)|-1}C^k_{|K_{v_i}(v)|-1}(1-A(v_i))^k(xA(v_i))^{|K_{v_i}(v)|-1-k}\right)dx$$
$$=\frac{n(v_i)\cdot A(v_i)}{a_i(v_i)}\int_0^1(1-A(v_i)+xA(v_i))^{|K_{v_i}(v)|-1}dx$$
$$=\frac{n(v_i)}{a_i(v_i)}\cdot\frac{1-(1-A(v_i))^{|K_{v_i}(v)|}}{|K_{v_i}(v)|}.$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Заметим, что $p_i(w)\in D_i(w)$ для любых $i\in N$, $w\in V$. Пусть

$$f(v,p^*_{-i})=n(v_i)\sum_{i\in L\subseteq K_{v_i}(v)}\frac{1}{|L|}\prod_{i\neq l\in L}e^{-a_l(v_i)p_l^*(v_i)}\prod_{j\in K_{v_i}(v)\setminus L}(1-e^{-a_j(v_i)p_j^*(v_i)}).$$

Так как $f(v,p^*_{-i})>0$ для любого $v\in V^n$, то

$$\operatorname*{argmax}_{p_i(v_i)}H_i((v_i,v_{-i}),(p_i(v_i),p^*_{-i}))$$
$$=\operatorname*{argmax}_{p_i(v_i)}\{(p_i(v_i)-c_i(v_i))e^{-a_i(v_i)p_i(v_i)}\cdot f(v,p^*_{-i})\}=c_i(v_i)+\frac{1}{a_i(v_i)}.$$

Значит,

$$\max_{p_i(v_i)} H_i((v_i, v_{-i}), (p_i(v_i), p^*_{-i})) = H_i((v_i, v_{-i}), (p^*_i(v_i), p^*_{-i})) = H_i(v, p^*).$$

Лемма 3 доказана.

Доказательство утверждения 1. Если $k = 1$, то неравенство $1 - a > \frac{1-a^2}{2}$ равносильно неравенству $(a-1)^2 > 0$, которое выполняется для любого $a \in (0; 1)$. Пусть $k \neq 1$. Тогда

$$\frac{1-a^k}{k} > \frac{1-a^{k+1}}{k+1} \Leftrightarrow \frac{1+a+\cdots+a^{k-1}}{k} > \frac{1+a+\cdots+a^k}{k+1}$$
$$\Leftrightarrow (k+1)(1+a+\cdots+a^{k-1}) > k(1+a+\cdots+a^k)$$
$$\Leftrightarrow 1+a+\cdots+a^{k-1} > ka^k \Leftrightarrow 1+a+\cdots+a^{k-1} > a^k+\cdots+a^k.$$

В последнем неравенстве слева и справа стоит k слагаемых. Так как $a \in (0; 1)$, то $a^j > a^k$ для любого $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, откуда следует истинность доказываемого утверждения. Утверждение 1 доказано.

Доказательство леммы 4. Выигрыш игрока $i \in N$ в игре G зависит от его стратегии $v_i \in V$ и числа игроков $|K_{v_i}(v)|$, которые используют такую же стратегию, что и игрок i. Из утверждения 1 следует, что функция выигрыша игрока i в игре G монотонно убывающая по числу игроков. Следовательно, согласно результату Мильтайха из работы [18] в игре G существует равновесие по Нэшу в чистых стратегиях. Лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть $v^* = (v^*_1, v^*_2, \ldots, v^*_n)$ — равновесие по Нэшу в игре G. Согласно лемме 4 v^* существует. Также пусть $p^* = p^*(v) = (p^*_1(v^*_1), p^*_2(v^*_2), \ldots, p^*_n(v^*_n))$, где $p^*_i(v^*_i) = c_i(v^*_i) + \frac{1}{a_i(v^*_i)}$, $i \in N$. Покажем, что (v^*, p^*) — двухшаговое равновесие в рассматриваемой игре ценообразования. Для того чтобы (v^*, p^*) было двухшаговым равновесием, должно выполняться (1).

Покажем, что выполняется (2). В (2) выбор торговых точек фиксирован. Функции выигрыша преобразованы в доказательстве леммы 1 и показано, что p^* — вектор равновесных цен, значит, (2) выполняется. Если игрок в торговой точке v^*_i будет продавать свой товар не по цене $p^*_i(v^*_i)$, то его выигрыш не увеличится при условии, что игрок $j \in N \setminus \{i\}$ продаёт товар по цене $p^*_j(v^*_j)$.

Покажем, что (1) выполняется. Согласно лемме 3 можно упростить левую часть неравенства (1). Тогда (1) примет вид

$$H_i((v_i, v^*_{-i}), p^*) \leqslant H_i(v^*, p^*), \quad v_i \in V. \tag{7}$$

По условию теоремы выполняется (4), значит, можно применить лемму 2. В лемме 2 упрощается вид функций $H_i(v, p^*)$, $i \in N$, $v \in V^n$. Рассмотрим игру G в нормальной форме с функцией выигрыша вида (5). Так как v^* является равновесием в игре G, то выполняется (7). Следовательно, верно (1). Значит, (v^*, p^*) — двухшаговое равновесие в рассматриваемой игре ценообразования. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bimpikis K., Ehsani S., İlkılıç R.** Cournot competition in networked markets // Manage. Sci. 2019. V. 65, No. 6. P. 2467–2481.
2. **Jabarzare N., Rasti-Barzoki M.** A game theoretic approach for pricing and determining quality level through coordination contracts in a dual-channel supply chain including manufacturer and packaging company // Int. J. Prod. Econ. 2020. V. 221, ID 107480. 18 p.
3. **Nocke V., Schutz N.** Multiproduct-firm oligopoly: An aggregative games approach // Econometrica. 2018. V. 86, No. 2. P. 523–557.
4. **Caspi C. E., Pelletier J. E., Harnack L. J., Erickson D. J., Lenk K., Laska M. N.** Pricing of staple foods at supermarkets versus small food stores // Int. J. Environ. Res. Public Health. 2017. V. 14, No. 8, ID 915. 12 p.
5. **Minten B., Reardon T.** Food prices, quality, and quality's pricing in supermarkets versus traditional markets in developing countries // Appl. Econ. Perspect. Policy. 2008. V. 30, No. 3. P. 480–490.
6. **Reardon T., Echeverria R., Berdegue J., Minten B., Liverpool-Tasie S., Tschirley D., Zilberman D.** Rapid transformation of food systems in developing regions: highlighting the role of agricultural research and innovations // Agric. Syst. 2019. V. 172. P. 47–59.
7. **Cook J. A., Gale F.** Using food prices and consumption to examine Chinese cost of living // Pac. Econ. Rev. 2019. V. 24, No. 1. P. 3–26.
8. **Briceno-Arias L., Correa J. R., Perlroth A.** Optimal continuous pricing with strategic consumers // Manage. Sci. 2017. V. 63, No. 8. P. 2741–2755.
9. **Choi M., Dai A. Y., Kim K.** Consumer search and price competition // Econometrica. 2018. V. 86, No. 4. P. 1257–1281.
10. **Cui W., Li L.** A game-theoretic approach to optimize the Time-of-Use pricing considering customer behaviors // Int. J. Prod. Econ. 2018. V. 201. P. 75–88.
11. **Martin D.** Strategic pricing with rational inattention to quality // Games Econ. Behav. 2017. V. 104. P. 131–145.
12. **Babaioff M., Dughmi S., Kleinberg R., Slivkins A.** Dynamic pricing with limited supply // ACM Trans. Econ. Comput. 2015. V. 3, No. 1. P. 1–26.
13. **Chen J., Jian J., Hong S.** Quantum repeated pricing game // Quantum Inf. Process. 2020. V. 19, No. 2, ID 42. 10 p.
14. **Rath K. P.** Stationary and nonstationary strategies in Hotelling's model of spatial competition with repeated pricing decisions // Int. J. Game Theory. 1998. V. 27, No. 4. P. 525–537.

15. Monderer D., Shapley L. S. Potential games // Games Econ. Behav. 1996. V. 14, No. 1. P. 124–143.
16. Gusev V. V. Nash-stable coalition partition and potential functions in games with coalition structure // Eur. J. Oper. Res. 2021. V. 295, No. 3. P. 1180–1188.
17. Rosenthal R. W. A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria // Int. J. Game Theory. 1973. V. 2, No. 1. P. 65–67.
18. Milchtaich I. Congestion games with player-specific payoff functions // Games Econ. Behav. 1996. V. 13, No. 1. P. 111–124.
19. Li L., Lee Y. S. Pricing and delivery-time performance in a competitive environment // Manage. Sci. 1994. V. 40, No. 5. P. 633–646.
20. Crawford G. S., Pavanini N., Schivardi F. Asymmetric information and imperfect competition in lending markets // Am. Econ. Rev. 2018. V. 108, No. 7. P. 1659–1701.
21. Mitridati L., Kazempour J., Pinson P. Design and game-theoretic analysis of community-based market mechanisms in heat and electricity systems // Omega. 2021. V. 99, ID 102177. 24 p.
22. Xu X., Chen R., Jiang L. The influence of payment mechanisms on pricing: When mental imagery stimulates desire for money // J. Retail. 2020. V. 96, No. 2. P. 178–188.

Гусев Василий Васильевич

Статья поступила
3 июня 2022 г.
После доработки —
23 июня 2022 г.
Принята к публикации
29 июня 2022 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2023. Vol. 30, No. 1. P. 5–27

UDC 519.83 DOI 10.33048/daio.2023.30.744

PURE NASH EQUILIBRIUM IN A TWO-STEP PRICING GAME: COVERING SELL POINTS IN A TOURIST CITY

V. V. Gusev

HSE University,
3 Kantemirovskaya Street, 194100 St. Petersburg, Russia
E-mail: vgusev@hse.ru

Abstract. The economy of small tourist towns has unique characteristics. Basically, small business in such towns is aimed at meeting tourists' needs. The competition between entrepreneurs engaged in service provision makes the pricing problem relevant. Some entrepreneurs need to define their goods value and decide where to sell them. If an entrepreneur often changes the sell point due to the competition, he may lose the profit. An interesting case is when the sell point choice is based on pure strategies. By the concept of congestion games with player-specific payoff functions and ordinal potential functions, the paper demonstrates the pricing game equilibrium under inherent restrictions. An equilibrium distribution of individual entrepreneurs by sell points in Gelendzhik is found. Tab. 3, illustr. 2, bibliogr. 22.

Keywords: game theory, pure Nash equilibrium, pricing game, potential games.

REFERENCES

1. **K. Bimpikis, S. Ehsani,** and **R. İlkılıç,** Cournot competition in networked markets, *Manage. Sci.* **65** (6), 2467–2481 (2019).
2. **N. Jabarzare** and **M. Rasti-Barzoki,** A game theoretic approach for pricing and determining quality level through coordination contracts in a dual-channel supply chain including manufacturer and packaging company, *Int. J. Prod. Econ.* **221**, ID 107480, 18 p. (2020).
3. **V. Nocke** and **N. Schutz,** Multiproduct-firm oligopoly: An aggregative games approach, *Econometrica* **86** (2), 523–557 (2018).

This research is supported by the Russian Science Foundation (Project 22–21–20070), and the St. Petersburg Science Foundation grant in accordance with the Agreement 65/2022 of April 15, 2022.

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **17** (1) (2023).

4. **C. E. Caspi, J. E. Pelletier, L. J. Harnack, D. J. Erickson, K. Lenk,** and **M. N. Laska,** Pricing of staple foods at supermarkets versus small food stores, *Int. J. Environ. Res. Public Health* **14** (8), ID 915, 12 p. (2017).
5. **B. Minten** and **T. Reardon,** Food prices, quality, and quality's pricing in supermarkets versus traditional markets in developing countries, *Appl. Econ. Perspect. Policy* **30** (3), 480–490 (2008).
6. **T. Reardon, R. Echeverria, J. Berdegue, B. Minten, S. Liverpool-Tasie, D. Tschirley,** and **D. Zilberman,** Rapid transformation of food systems in developing regions: Highlighting the role of agricultural research and innovations, *Agric. Syst.* **172**, 47–59 (2019).
7. **J. A. Cook** and **F. Gale,** Using food prices and consumption to examine Chinese cost of living, *Pac. Econ. Rev.* **24** (1), 3–26 (2019).
8. **L. Briceno-Arias, J. R. Correa,** and **A. Perlroth,** Optimal continuous pricing with strategic consumers, *Manage. Sci.* **63** (8), 2741–2755 (2017).
9. **M. Choi, A. Y. Dai,** and **K. Kim,** Consumer search and price competition, *Econometrica* **86** (4), 1257–1281 (2018).
10. **W. Cui** and **L. Li,** A game-theoretic approach to optimize the Time-of-Use pricing considering customer behaviors, *Int. J. Prod. Econ.* **201**, 75–88 (2018).
11. **D. Martin,** Strategic pricing with rational inattention to quality, *Games Econ. Behav.* **104**, 131–145 (2017).
12. **M. Babaioff, S. Dughmi, R. Kleinberg,** and **A. Slivkins,** Dynamic pricing with limited supply, *ACM Trans. Econ. Comput.* **3** (1), 1–26 (2015).
13. **J. Chen, J. Jian,** and **S. Hong,** Quantum repeated pricing game, *Quantum Inf. Process.* **19** (2), ID 42, 10 p. (2020).
14. **K. P. Rath,** Stationary and nonstationary strategies in Hotelling's model of spatial competition with repeated pricing decisions, *Int. J. Game Theory* **27** (4), 525–537 (1998).
15. **D. Monderer** and **L. S. Shapley,** Potential games, *Games Econ. Behav.* **14** (1), 124–143 (1996).
16. **V. V. Gusev,** Nash-stable coalition partition and potential functions in games with coalition structure, *Eur. J. Oper. Res.* **295** (3), 1180–1188 (2021).
17. **R. W. Rosenthal,** A class of games possessing pure-strategy Nash equilibria, *Int. J. Game Theory* **2** (1), 65–67 (1973).
18. **I. Milchtaich,** Congestion games with player-specific payoff functions, *Games Econ. Behav.* **13** (1), 111–124 (1996).
19. **L. Li** and **Y. S. Lee,** Pricing and delivery-time performance in a competitive environment, *Manage. Sci.* **40** (5), 633–646 (1994).
20. **G. S. Crawford, N. Pavanini,** and **F. Schivardi,** Asymmetric information and imperfect competition in lending markets, *Am. Econ. Rev.* **108** (7), 1659–1701 (2018).
21. **L. Mitridati, J. Kazempour,** and **P. Pinson,** Design and game-theoretic analysis of community-based market mechanisms in heat and electricity systems, *Omega* **99**, ID 102177, 24 p. (2021).

22. X. Xu, R. Chen, and **L. Jiang,** The influence of payment mechanisms on pricing: when mental imagery stimulates desire for money, *J. Retail.* **96** (2), 178–188 (2020).

Vasily V. Gusev

Received June 3, 2022
Revised June 23, 2022
Accepted June 29, 2022

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2023. Т. 30, № 1. С. 28–39

УДК 519.17 DOI 10.33048/daio.2023.30.742

О СЧЁТНОМ СЕМЕЙСТВЕ ГРАНИЧНЫХ КЛАССОВ ГРАФОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ О ДОМИНИРУЮЩЕМ МНОЖЕСТВЕ

Г. С. Дахно[1, a], *Д. С. Малышев*[1, 2, b]

[1] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», ул. Большая Печёрская, 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия
[2] Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского, пр. Гагарина, 23, 603950 Нижний Новгород, Россия
E-mail: [a] dahnogrigory@yandex.ru, [b] dsmalyshev@rambler.ru

Аннотация. Наследственный класс — это множество обыкновенных графов, замкнутое относительно удаления вершин, каждый такой класс задаётся множеством своих минимальных запрещённых порождённых подграфов. Если это множество конечно, то класс называется конечно определённым. Понятие граничного класса является полезным инструментом анализа вычислительной сложности задач на графах в семействе конечно определённых классов. Задача о доминирующем множестве для заданного графа состоит в том, чтобы определить, имеется ли в нём такое подмножество вершин заданной мощности, что каждая вершина вне подмножества имеет хотя бы одного соседа в подмножестве. Ранее для данной задачи было известно ровно 4 граничных класса (если $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$). В этой работе рассматривается некоторое счётное множество конкретных классов графов и доказывается, что каждый его элемент является граничным классом для задачи о доминирующем множестве (если $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$). Также доказывается $\mathbb{NP}$-полнота данной задачи для графов, не содержащих порождённого 6-пути и 4-клики. Это означает, что множество известных граничных классов для задачи о доминирующем множестве не полное (если $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$). Библиогр. 11.

Ключевые слова: наследственный класс графов, вычислительная сложность, доминирующее множество.

Введение

В настоящей работе рассматриваются только *обыкновенные* графы, т. е. неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Она является

Исследование выполнено в рамках Программы фундаментальных исследований Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики».

© Г. С. Дахно, Д. С. Малышев, 2023

продолжением работ [1, 2], в которых исследовались так называемые граничные классы графов для задачи о доминирующем множестве.

Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Хорошо известно, что каждый наследственный и только наследственный класс $\mathcal{X}$ определяется множеством $\mathcal{Y}$ своих *минимальных запрещённых порождённых подграфов* (т. е. минимальных относительно удаления вершин графов, не принадлежащих $\mathcal{X}$), это принято записывать так: $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{Y})$. Графы из $\mathcal{X}$ называются $\mathcal{Y}$*-свободными*. Если наследственный класс задаётся конечным множеством своих минимальных запрещённых порождённых подграфов, то он называется *конечно определённым*.

Пусть Π — какая-нибудь $\mathbb{NP}$-полная задача на графах. Наследственный класс с полиномиально разрешимой задачей Π называется Π-*простым*. Наследственный класс, для которого задача Π $\mathbb{NP}$-полна, называется Π-*сложным*. На протяжении всей работы предполагается, что $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$, и это условие не включается явно в формулировки соответствующих утверждений.

Наследственный класс $\mathcal{X}$ называется Π-*предельным*, если существует бесконечная последовательность $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \ldots$ из Π-сложных классов графов такая, что $\mathcal{X} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i$. Минимальный по включению Π-предельный класс называется Π-*граничным*. Понятие граничного класса графов введено В. Е. Алексеевым в работе [3]. Значение этого понятия раскрывает следующая теорема (см. [3, 4]).

Теорема 1. *Конечно определённый класс графов* Π*-сложный тогда и только тогда, когда он содержит какой-нибудь* Π*-граничный класс.*

Доминирующим множеством графа $G = (V, E)$ называется подмножество $D \subseteq V$ такое, что каждая вершина из $V \setminus D$ имеет соседа в D. Мощность наименьшего доминирующего множества графа G называется его *числом доминирования* и обозначается через $\gamma(G)$. *Задача о доминирующем множестве* (задача ДМ) для заданных графа G и числа k состоит в том, чтобы проверить, выполняется ли неравенство $\gamma(G) \leqslant k$.

На данный момент для задачи ДМ известно ровно четыре граничных класса (см. [1, 2]). Первый из них — класс $\mathcal{T}$, состоящий из всевозможных лесов, каждая компонента связности которых является деревом с не более чем тремя листьями. Второй — класс $\mathcal{D}$, состоящий из графов рёберных к графам из класса $\mathcal{T}$. Для определения третьего и четвёртого граничных классов понадобятся операторы Q и Q^* над графами, а также понятие наследственного замыкания класса графов.

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф. Через $Q(G)$ обозначим граф на множестве вершин $V \cup E$, в котором

$$E(Q(G)) = \{xy \mid x, y \in V,\ x \neq y\} \cup \{xe \mid x \in V,\ e \in E\colon x \text{ инцидентна } e \text{ в } G\}.$$

Пусть $G = (V, E)$ — *субкубический* граф, т. е. граф со степенями всех вершин не более чем 3. Через V' обозначим множество всех его вершин степени 3. Положим $V'' = V \setminus V'$. Граф $Q^*(G)$ имеет множество вершин $V'' \cup E$ и множество рёбер

$$E(Q^*(G)) = \{xy \mid x, y \in V'',\ x \neq y\} \cup \{xe \mid x \in V'',\ e \in E\colon x \text{ инцидентна } e \text{ в } G\} \cup \bigcup_{x \in V'} \{e_1(x)e_2(x),\ e_1(x)e_3(x),\ e_2(x)e_3(x)\},$$

где $e_1(x), e_2(x), e_3(x)$ — рёбра, инцидентные вершине x.

Пусть $\mathcal{X}$ — произвольный класс графов, а F — какой-нибудь оператор над графами. Через $F(\mathcal{X})$ обозначим множество $\{F(G) \mid G \in \mathcal{X}\}$. Через $[\mathcal{X}]$ обозначим *наследственное замыкание* $\mathcal{X}$, т. е. множество всех графов, порождённых в графах из $\mathcal{X}$. Через $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}^*$ обозначим множества $[\{Q(G) \mid G \in \mathcal{T}\}]$ и $[\{Q^*(G) \mid G \in \mathcal{T}\}]$.

Классы $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{Q}^*$ ДМ-граничные. Этот результат обобщается в настоящей работе. Для ребра xy произвольного графа его *l-подразбиение*, где l — целое неотрицательное число, состоит в удалении этого ребра, добавлении вершин $z_1, \ldots, z_l$ и рёбер $xz_1, z_1z_2, \ldots, z_{l-1}z_l, z_ly$. Операция 1-подразбиения ребра называется просто *подразбиением ребра*. Операция, обратная к l-подразбиению, называется *l-стягиванием*. Через $Q_k(G)$ обозначим результат $3k$-подразбиения всех рёбер вида xe, ye графа $Q(G)$, где $e = xy \in E(G)$. Через $\mathcal{Q}_k$ обозначим множество $[Q_k(\mathcal{T})]$. Отметим, что $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}$. В этой работе доказывается, что при любом k класс $\mathcal{Q}_k$ ДМ-граничный.

В работе [5] была получена полная классификация сложности задачи ДМ для *моногенных классов*, т. е. наследственных классов, определяемых ровно одним запрещённым порождённым подграфом. Она в ней сформулирована в терминах явного описания соответствующих подграфов. В терминах ДМ-граничных классов это можно переформулировать так: моногенный класс ДМ-простой, если он не включает ни один из классов $\mathcal{T}, \mathcal{D}, \mathcal{Q}$, в противном случае он ДМ-сложный. В [6] получен аналогичный результат (и с той же формулировкой) для семейства наследственных классов, определяемых минимальными запрещёнными порождёнными подграфами с не более чем 5 вершинами каждый.

По сведениям авторов этой работы на данный момент для задачи ДМ не получено полных дихотомий её сложности в семействах наследственных классов, определяемых двумя минимальными запрещёнными порождёнными подграфами или минимальными запрещёнными порождёнными подграфами с не более чем 6 вершинами каждый. В данной

работе делается новый шаг в обоих этих направлениях. А именно, доказывается, что класс графов, определяемый запрещением порождённого пути с 6 вершинами и полного подграфа с 4 вершинами, ДМ-сложный. Отсюда и из теоремы 1 следует, что существуют ДМ-граничные классы, отличные от $\mathcal{T}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{Q}_k$ ($k \geqslant 0$), $\mathcal{Q}^*$.

Интересующийся читатель может обратиться к обзорным работам [4, 7], в которых просуммированы последние на тот момент достижения в области граничных классов графов. В частности, возможны континуальность множества граничных классов (см. [8]) и достижение полного описания граничных классов для неискусственных задач на графах (см. [9]).

1. Некоторые определения, обозначения и факты

1.1. Графы, подграфы и операции над ними. Как обычно, через P_n, C_n, K_n обозначаются простой путь, простой цикл и полный граф на n вершинах соответственно. Графы P_n и C_n называются *n-путём* и *n-циклом* соответственно. Через $K_{p,q}$ обозначается полный двудольный граф с p вершинами в одной доле и с q вершинами в другой доле. Граф diamond получается удалением ребра из K_4, а граф butterfly получается отождествлением двух треугольников по общей вершине.

Графы P'_k и C'_k получаются добавлением 3-пути (x, y, z) к P_k и C_k соответственно, где $x, y, z \notin V(P_k)$ и $x, y, z \notin V(C_k)$, и ребра yv, где v — конец P_k или $v \in V(C_k)$. Графы P''_k и C''_k получаются добавлением ребра xz к P'_k и C'_k соответственно. Граф $C^e_{k,l}$ получается отождествлением C_k и C_l по одному ребру.

Граф A_1 изоморфен C'_3, граф A_2 изоморфен C''_3, граф A_3 получается из A_1 подразбиением yv, граф A_4 получается из A_3 удалением ребра, инцидентного его вершинам степени 2, граф A_5 получается из A_4 подразбиением его ребра, инцидентного вершинам степени 2 и 3.

Пусть $G = (V, E)$ — граф, а $V' \subseteq V$ — некоторое подмножество его вершин. Через $G \setminus V'$ обозначается результат удаления из G всех вершин, принадлежащих множеству V'.

Через $\overline{G}$ обозначается граф, дополнительный к графу G. Операция дизъюнктного объединения графов применяется только к графам с непересекающимися множествами вершин. Для графов G_1 и G_2 через $G_1 + G_2$ обозначим их дизъюнктное объединение. Через kG обозначим дизъюнктное объединение k графов, каждый из которых изоморфен графу G.

1.2. Классы графов. *Монотонным классом* графов называется наследственный класс, замкнутый ещё и относительно удаления рёбер. Каждый такой класс задаётся множеством своих *минимальных запрещённых подграфов* (т. е. графов, минимальных относительно удаления

вершин и рёбер, не принадлежащих классу). Если оно конечно, то он также называется *конечно определённым*. Если $\mathcal{X}$ — монотонный класс графов, а $\mathcal{Y}$ — множество его запрещённых подграфов, то $\mathcal{X} = \mathrm{Free}_m(\mathcal{Y})$. Через $\mathcal{G}$ обозначим множество всех графов, а через $\mathcal{G}_3$ — множество субкубических графов.

1.3. Специальные подмножества вершин. *Независимым множеством* графа называется произвольное его подмножество попарно не смежных вершин. Мощность наибольшего независимого множества графа G обозначается через $\alpha(G)$. *Вершинным покрытием* графа называется такое подмножество его вершин, что каждое ребро графа инцидентно хотя бы одной вершине из подмножества. *Кликой* графа называется любое подмножество его попарно смежных вершин. Нетрудно видеть, что для любого графа $G = (V, E)$ его подмножество вершин V' будет независимым множеством G тогда и только тогда, когда $V \setminus V'$ будет вершинным покрытием G или когда V' будет кликой в $\overline{G}$.

Задача о независимом множестве (задача НМ) для заданных графа G и числа k состоит в том, чтобы определить, выполняется ли неравенство $\alpha(G) \geqslant k$. Класс $\mathcal{T}$ НМ-граничный, более того, он единственный НМ-граничный в семействе монотонных классов графов (см. теоремы 4 и 5 из [3]). Единственность $\mathcal{T}$ как НМ-граничного в семействе монотонных классов и связь между независимыми множествами/вершинными покрытиями в графе G и доминирующими множествами в графе $Q(G)$ использовалась в [1] для доказательства ДМ-граничности $\mathcal{Q}$. Подобная идея будет использоваться и в данной работе.

2. О ДМ-граничности классов $\mathcal{Q}_k$

Следующее утверждение показывает, что при любом k класс $[Q_k(\mathcal{G}_3)]$ конечно определённый.

Лемма 1. *Для любого $k \geqslant 1$ выполнено равенство*

$$[Q_k(\mathcal{G}_3)] = \mathrm{Free}(\mathcal{X}_k),$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_k = \big\{ & K_{1,5}, C_4, \ldots, C_{6k+2}, C_{6k+4}, \ldots, C_{12k+5}, \mathrm{diamond}, \mathrm{butterfly}, \\ & K_{1,3} + C_3, K_{1,3} + P_{6k+2}, C_3 + P_{6k+2}, 2K_{1,3}, 2C_3, 2P_{6k+2}, \\ & P'_{6k+3}, C'_{6k+3}, P''_{6k+2}, C^e_{6k+3,6k+3}, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 \big\}.\end{aligned}$$

Доказательство. Можно доказать, что каждый элемент множества $\mathcal{X}_k$ является минимальным запрещённым порождённым подграфом класса $[Q_k(\mathcal{G}_3)]$, поэтому $[Q_k(\mathcal{G}_3)] \subseteq \mathrm{Free}(\mathcal{X}_k)$. Покажем, что это включение является равенством. Рассмотрим произвольный граф $G \in \mathrm{Free}(\mathcal{X}_k)$.

Поскольку

$$2P_{6k+2}, C_4, \ldots, C_{6k+2}, C_{6k+4}, \ldots, C_{12k+5} \in \mathcal{X}_k,$$

все порождённые циклы G являются 3- или $(6k+3)$-циклами и каждый его порождённый путь имеет не более чем $12k+4$ вершин. Так как

$$C_4, C_5, C_6, K_{1,3}+C_3, 2K_{1,3}, 2C_3, \text{diamond}, \text{butterfly}, A_2, A_3, A_4, A_5 \in \mathcal{X}_k,$$

любые две вершины графа G степени не менее чем три смежны.

Пусть G не содержит треугольников. Если $G \in \text{Free}(\{C_{6k+3}\})$, то поскольку $2K_{1,3} \in \mathcal{X}_k$, граф G — лес, все компоненты которого, кроме, быть может, одной, являются простыми путями. Каждый такой $\{K_{1,5}, 2P_{6k+2}, K_{1,3}+P_{6k+2}, P'_{6k+3}\}$-свободный граф принадлежит $[Q_k(\mathcal{G}_3)]$. Если G содержит порождённый $(6k+3)$-цикл, то он единственный, так как

$$2P_{6k+2}, C'_{6k+3}, C^e_{6k+3,6k+3} \in \mathcal{X}_k.$$

Каждый такой $\{K_{1,5}, 2P_{6k+2}, K_{1,3}+P_{6k+2}, P'_{6k+3}\}$-свободный граф принадлежит $[Q_k(\mathcal{G}_3)]$.

Предположим, что G содержит треугольники. Рассмотрим V' — наибольшую клику G, она содержит не менее трёх вершин. Нетрудно видеть, что каждая компонента связности $G \setminus V'$ является путём с не более чем $6k+1$ вершинами, причём каждая внутренняя их вершина не смежна ни с одной вершиной V', а каждая концевая их вершина имеет не более одного соседа в V'. Каждый такой $\{K_{1,5}, \text{butterfly}, C^e_{6k+3,6k+3}\}$-свободный граф принадлежит $[Q_k(\mathcal{G}_3)]$. Лемма 1 доказана.

Следующая лемма является обобщением леммы 11 из [3] (отметим, что в формулировке той леммы речь на самом деле идёт о монотонных классах, а не о просто наследственных).

Лемма 2. *Для любых числа k и монотонного класса $\mathcal{X}$ задача* НМ *в классе $\mathcal{X}$ полиномиально эквивалентна задаче* ДМ *в классе $[Q_k(\mathcal{X})]$.*

Доказательство. Тройное подразбиение (т. е. 3-подразбиение) любого ребра произвольного графа увеличивает его число доминирования ровно на единицу (см., например, лемму 3 из [5]), поэтому $\gamma(Q_k(G)) = \gamma(Q_0(G)) + 2k|E(G)|$ для любого графа G. При доказательстве леммы 11 из [3] было доказано (см. п. (a) и (b)), что для любого непустого графа G число доминирования графа $Q_0(G)$ равно мощности наименьшего вершинного покрытия G, что совпадает с $|V(G)| - \alpha(G)$. Тем самым соотношение

$$\gamma(Q_k(G)) = |V(G)| + 2k|E(G)| - \alpha(G)$$

верно для любого непустого графа G.

Заметим, что для любого графа H, изоморфного $Q_k(G)$, можно вычислить G за полиномиальное от $|V(H)|$ время. Для этого достаточно

найти максимальную по включению клику в графе H (она будет наибольшей и соответствует множеству $V(G)$), удалить её из H и найти компоненты связности результата, которые будут путями на $6k+1$ вершинах. Соседи концов этих путей в клике соответствуют рёбрам G. Ясно, что для любого графа G граф $Q_k(G)$ вычисляется за полиномиальное от $|V(G)|$ время. Тем самым задача НМ в любом классе $\mathcal{Y}$ (не обязательно даже наследственном) полиномиально эквивалентна задаче ДМ в классе $Q_k(\mathcal{Y})$.

Рассмотрим произвольный граф $G \in [Q_k(\mathcal{X})] \setminus Q_k(\mathcal{X})$. Можно предполагать, что G содержит клику V^* с не менее чем тремя вершинами, иначе G является дизъюнктным объединением только простых путей или $(6k+3)$-цикла и простых путей, а для таких графов задача ДМ решается за линейное время. По тем же причинам можно предполагать, что G отличен от полного графа, поэтому G состоит из V^*, нескольких порождённых $(6k+3)$-циклов, каждый из которых имеет ровно одно общее ребро с V^*, а также нескольких простых путей, каждый из которых имеет не более чем $6k+2$ вершин, а также общую с V^* вершину.

В графе G будем выполнять 3-стягивания до тех пор, пока это возможно. Получим некоторый граф G', он определяется единственным образом. Ясно, что $\gamma(G) - \gamma(G') = k'$, где k' — количество выполненных 3-стягиваний в G. Граф G' состоит из V^*, нескольких треугольников, каждый из которых имеет ровно одно общее с V^* ребро, порождённых 2-, 3-, 4-путей, каждый из которых имеет с V^* ровно одну общую вершину. Если таких путей в G' нет, то $G' = Q_0(H')$ для некоторого графа $H' \in \mathcal{X}$ (напомним, что $\mathcal{X}$ монотонный).

Предположим, что множество упомянутых путей в G' непусто. Ясно, что существует наименьшее доминирующее множество G', содержащее для каждого i-пути, где $1 \leqslant i \leqslant 4$, i-ю вершину от конца i-пути, принадлежащего V^*. Рассмотрим множество $\widetilde{V}$ тех вершин G', которые не доминируются этими вершинами i-путей, а также подграф G'' графа G', порождённый $\widetilde{V}$ и всеми их соседями в V^*. Если G'' полный, то $\gamma(G) = 1$. Иначе существует такой граф $H'' \in \mathcal{X}$, что $G'' = Q_0(H'')$ и $\gamma(G'') = |V(H'')| - \alpha(H'')$. Тем самым задача ДМ в классе $[Q_k(\mathcal{X})] \setminus Q_k(\mathcal{X})$ полиномиально сводится к задаче НМ в классе $\mathcal{X}$. Лемма 2 доказана.

Теорема 2. *При любом k класс $\mathcal{Q}_k$* ДМ*-граничный.*

Доказательство. Множество субкубических графов, не содержащих циклов длины до i включительно, обозначим через $\mathcal{X}_i$. При любом i класс $\mathcal{X}_i$ монотонный и НМ-сложный (см. [10]), причём $\mathcal{X}_1 \supseteq \mathcal{X}_2 \supseteq \ldots$ и $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{X}_i = \mathcal{T}$, поэтому по лемме 2 при любых k и i класс $[Q_k(\mathcal{X}_i)]$ ДМ-сложный. Нетрудно видеть, что

$$[Q_k(\mathcal{X}_1)] \supseteq [Q_k(\mathcal{X}_2)] \supseteq \ldots \quad \text{и} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} [Q_k(\mathcal{X}_i)] = \mathcal{Q}_k,$$

поэтому при любом k класс $\mathcal{Q}_k$ ДМ-предельный.

Докажем ДМ-граничность класса $\mathcal{Q}_k$ при любом k. Предположим, напротив, что существует последовательность $\mathcal{Y}_{1,k} \supseteq \mathcal{Y}_{2,k} \supseteq \ldots$ из ДМ-сложных классов, для которой $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathcal{Y}_{i,k} = \mathcal{Q}'_k \subset \mathcal{Q}_k = [Q_k(\mathcal{T})]$. Тогда для некоторого $G \in \mathcal{T}$ выполнено

$$\mathcal{Q}'_k \subseteq [Q_k(\mathcal{G}_3)] \cap \mathrm{Free}(\{Q_k(G)\}) \subseteq [Q_k(\mathrm{Free}_m(\{G\}))].$$

По лемме 1 класс $[Q_k(\mathcal{G}_3)] \cap \mathrm{Free}(\{Q_k(G)\})$ конечно определённый. Следовательно, существует такое i', что выполнено включение

$$\mathcal{Y}_{i',k} \subseteq [Q_k(\mathrm{Free}_m(\{G\}))].$$

Класс $\mathrm{Free}_m(\{G\})$ монотонный и не включает класс $\mathcal{T}$. По теореме 2 из [3] класс $\mathrm{Free}_m(\{G\})$ НМ-простой. Следовательно, класс $\mathcal{Y}_{i',k}$ ДМ-простой по лемме 2. Получаем противоречие с предположением о том, что $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$. Теорема 2 доказана.

3. $\mathbb{NP}$-полнота задачи ДМ в классе $\mathrm{Free}(\{P_6, K_4\})$

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф, где $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Через $R(G)$ обозначим граф, который получается из G с помощью описанных ниже преобразований. Предлагаемая нами конструкция похожа на конструкцию из [11], в которой доказана $\mathbb{NP}$-полнота задачи ДМ в классе *хордальных двудольных графов*, т. е. графов из класса $\mathrm{Free}(\{C_3, C_5, C_6, \ldots\})$.

Каждая вершина $v_i \in V$ преобразуется в граф (V_i, E_i), где

$$V_i = \{x_i, y_i, z_i, a_i, b_i\}, \quad E_i = \{a_i x_i, x_i y_i, y_i b_i, a_i z_i, x_i z_i, y_i z_i, b_i z_i\}.$$

Каждое ребро $v_i v_j \in E$ преобразуется в пару вершин p_{ij}, q_{ij}. Имеем

$$V(R(G)) = \bigcup_{i=1}^{n} V_i \ \cup \bigcup_{v_i v_j \in E} \{p_{ij}, q_{ij}\},$$

$$E(R(G)) = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \cup \bigcup_{v_i v_j \in E} \{p_{ij}x_i,\, p_{ij}y_j,\, q_{ij}y_i,\, q_{ij}x_j\} \cup \bigcup_{\substack{i,j \in \overline{1,n}, \\ i \neq j}} \{x_i y_j, x_i z_j, y_i z_j\}.$$

Лемма 3. *Для любого графа G выполнено соотношение*

$$\gamma(R(G)) = 2|V(G)| - \alpha(G).$$

Доказательство. Сначала докажем, что $\gamma(R(G)) \leqslant n + k$, где $k = n - \alpha(G)$ — мощность наименьшего вершинного покрытия графа G. Действительно, если $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}\}$ — наименьшее вершинное покрытие графа G, то

$$\{x_{i_1}, y_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, y_{i_k}\} \cup \{z_i \mid i \notin \{i_1, \ldots, i_k\}\}$$

является доминирующим множеством графа $R(G)$.

Теперь докажем, что $\gamma(R(G)) \geqslant n + k$. Покажем, что существует такое наименьшее доминирующее множество графа $R(G)$, что для любого $i \in \overline{1,n}$ вершины x_i и y_i либо одновременно ему принадлежат, либо одновременно ему не принадлежат. Действительно, если для некоторого наименьшего доминирующего множества D графа $R(G)$ выполнено $x_i \in D$, $y_i \notin D$, то либо $b_i \in D$, либо $z_i \in D$, так как b_i доминируется множеством D. Если $v \in D$, где $v \in \{b_i, z_i\}$, то $(D \setminus \{v\}) \cup \{y_i\}$ — доминирующее множество графа $R(G)$.

Пусть D — такое наименьшее доминирующее множество графа $R(G)$, что для любого $i \in \overline{1,n}$ либо $x_i, y_i \notin D$, либо $x_i, y_i \in D$. Положим $I = \{i \mid x_i, y_i \in D\}$. Из минимальности D следует, что если $p_{ij} \in D$, то $x_i, x_j, y_i, y_j \notin D$ и $q_{ij} \in D$. Тогда $(D \setminus \{p_{ij}, q_{ij}\}) \cup \{x_i, y_i\}$ — тоже доминирующее множество $R(G)$, поэтому можно считать, что ни одна из вершин p_{ij} и q_{ij} не принадлежит D. Следовательно, множество $\{v_i \mid i \in I\}$ является вершинным покрытием графа G, а значит, $|I| \geqslant k$. Для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus I$ множество D одновременно доминирует вершины a_i и b_i, поэтому $a_i, b_i \in D$ либо $z_i \in D$ для любого такого i. Ввиду минимальности D выполнено $z_i \in D$ для любого такого i. Тем самым

$$\gamma(R(G)) = |D| = 2|I| + n - |I| \geqslant n + k.$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Выполнено включение* $R(\mathcal{G}) \subseteq \mathrm{Free}(\{P_6, K_4\})$.

Доказательство. Рассмотрим множество графов $R(\mathcal{G})$. В каждом из них степени вершин a_i, b_i, p_{ij}, q_{ij} равны 2, поэтому они не могут содержаться в подграфе K_4. В каждом графе из $R(\mathcal{G})$ подмножества

$$X = \{x_i\}_{i=1}^n, \quad Y = \{y_i\}_{i=1}^n, \quad Z = \{z_i\}_{i=1}^n$$

независимы, значит, $R(\mathcal{G}) \subseteq \mathrm{Free}(\{K_4\})$.

Заметим, что в каждом графе из $R(\mathcal{G})$ каждая из вершин a_i, b_i, p_{ij}, q_{ij} имеет ровно два соседа, причём они смежные. Нетрудно видеть, что подграф каждого графа из $R(\mathcal{G})$, порождённый подмножеством $X \cup Y \cup Z$, $\{P_4\}$-свободный, что означает $R(\mathcal{G}) \subseteq \mathrm{Free}(\{P_6\})$. Лемма 4 доказана.

Теорема 3. *Класс* $\mathrm{Free}(\{P_6, K_4\})$ ДМ-*сложный.*

Доказательство. Граф $R(G)$ вычисляется по графу G за полиномиальное от $|V(G)|$ время, поэтому по лемме 3 $\mathbb{NP}$-полная в классе $\mathcal{G}$

задача НМ полиномиально сводится к задаче ДМ в классе $R(\mathcal{G})$. Тем самым задача ДМ $\mathbb{NP}$-полна в классе $R(\mathcal{G})$, который по лемме 4 является подмножеством класса $\mathrm{Free}(\{P_6, K_4\})$. Теорема 3 доказана.

Заметим, что $P_6 \in \mathcal{T}$, $P_6 \in \mathcal{D}$ и $K_4 \in \mathcal{Q}_k$ $(k \geqslant 0)$, $K_4 \in \mathcal{Q}^*$. Отсюда и из теорем 1 и 3 следует, что справедливо

Следствие 1. *Существуют* ДМ*-граничные классы, отличные от* $\mathcal{T}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{Q}_k$ $(k \geqslant 0)$, $\mathcal{Q}^*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Alekseev V. E., Korobitsyn D. V., Lozin V. V.** Boundary classes of graphs for the dominating set problem // Discrete Math. 2004. V. 285, No. 1–3. P. 1–6.
2. **Malyshev D. S.** A complexity dichotomy and a new boundary class for the dominating set problem // J. Comb. Optim. 2016. V. 32. P. 226–243.
3. **Alekseev V. E.** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem // Discrete Appl. Math. 2003. V. 132, No. 1–3. P. 17–26.
4. **Alekseev V. E., Boliac R., Korobitsyn D. V., Lozin V. V.** NP-hard graph problems and boundary classes of graphs // Theor. Comput. Sci. 2007. V. 389, No. 1–2. P. 219–236.
5. **Коробицын Д. В.** О сложности определения числа доминирования в моногенных классах графов // Дискрет. математика. 1990. Т. 2, № 3. С. 90–96.
6. **Malyshev D. S.** A dichotomy for the dominating set problem for classes defined by small forbidden induced subgraphs // Discrete Appl. Math. 2016. V. 203. P. 117–126.
7. **Malyshev D. S., Pardalos P. M.** Critical hereditary graph classes: A survey // Optim. Lett. 2016. V. 10, No. 8. P. 1593–1612.
8. **Малышев Д. С.** Континуальные множества граничных классов графов для задач о раскраске // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 5. С. 41–51.
9. **Малышев Д. С.** Критические классы графов для задачи о рёберном списковом ранжировании // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. Т. 20, № 6. С. 59–76.
10. **Murphy O. J.** Computing independent sets in graphs with large girth // Discrete Appl. Math. 1992. V. 35, No. 2. P. 167–170.
11. **Müller H., Brandstädt A.** The NP-completeness of Steiner tree and dominating set for chordal bipartite graphs // Theor. Comput. Sci. 1987. V. 53, No. 2–3. P. 257–265.

Дахно Григорий Сергеевич
Малышев Дмитрий Сергеевич

Статья поступила
29 мая 2022 г.
После доработки —
23 октября 2022 г.
Принята к публикации
24 октября 2022 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2023. Vol. 30, No. 1. P. 28–39

UDC 519.17 DOI 10.33048/daio.2023.30.742

ON A COUNTABLE FAMILY OF BOUNDARY GRAPH CLASSES FOR THE DOMINATING SET PROBLEM

G. S. Dakhno[1, a] and *D. S. Malyshev*[1, 2, b]

[1] National Research University "Higher School of Economics",
25/12 Bolshaya Pechyorskaya Street, 603155 Nizhny Novgorod, Russia
[2] Lobachevsky Nizhny Novgorod University,
23 Gagarin Avenue, 603950 Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: [a] dahnogrigory@yandex.ru, [b] dsmalyshev@rambler.ru

Abstract. The hereditary class is a set of simple graphs closed under deletion of vertices; every such class is defined by the set of its minimal forbidden induced subgraphs. If this set is finite, then it is called finitely defined. The concept of a boundary class is a useful tool for analysis of the computational complexity of graph problems in the finitely defined classes family. The dominating set problem for a given graph is to determine whether it has a given-size subset of vertices such that every vertex outside the subset has at least one neighbor in the subset. Previously, exactly 4 boundary classes were known for this problem (if $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$). This work considers some countable set of concrete classes of graphs and proves that each its element is a boundary class for the dominating set problem (if $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$). We also prove $\mathbb{NP}$-completeness of this problem for graphs that contain neither induced 6-path nor induced 4-clique, which means that the set of known boundary classes for the dominating set problem is not complete (if $\mathbb{P} \neq \mathbb{NP}$). Bibliogr. 11.

Keywords: hereditary graph class, computational complexity, dominating set.

REFERENCES

1. **V. E. Alekseev, D. V. Korobitsyn,** and **V. V. Lozin,** Boundary classes of graphs for the dominating set problem, *Discrete Math.* **285** (1–3) 1–6 (2004).
2. **D. S. Malyshev,** A complexity dichotomy and a new boundary class for the dominating set problem, *J. Comb. Optim.* **32**, 226–243 (2016).

This research is carried out within the framework of the Basic Research Program at the National Research University "Higher School of Economics".

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **17** (1) (2023).

3. **V. E. Alekseev,** On easy and hard hereditary classes of graphs with respect to the independent set problem, *Discrete Appl. Math.* **132** (1–3), 17–26 (2003).
4. **V. E. Alekseev, R. Boliac, D. V. Korobitsyn,** and **V. V. Lozin,** NP-hard graph problems and boundary classes of graphs, *Theor. Comput. Sci.* **389** (1–2), 219–236 (2007).
5. **D. V. Korobitsyn,** Complexity of some problems on hereditary classes of graphs, *Diskretn. Mat.* **2** (3), 90–96 (1990) [Russian] [*Discrete Math. Appl.* **2** (2), 191–199 (1992)].
6. **D. S. Malyshev,** A dichotomy for the dominating set problem for classes defined by small forbidden induced subgraphs, *Discrete Appl. Math.* **203**, 117–126 (2016).
7. **D. S. Malyshev** and **P. M. Pardalos,** Critical hereditary graph classes: A survey, *Optim. Lett.* **10** (8), 1593–1612 (2016).
8. **D. S. Malyshev,** Continued sets of boundary classes of graphs for colorability problems, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **16** (5), 41–51 (2009) [Russian].
9. **D. S. Malyshev,** Critical graph classes for the edge list-ranking problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **20** (6), 59–76 (2013) [Russian] [*J. Appl. Industr. Math.* **8** (2), 245–255 (2014)].
10. **O. J. Murphy,** Computing independent sets in graphs with large girth, *Discrete Appl. Math.* **35** (2), 167–170 (1992).
11. **H. Müller** and **A. Brandstädt,** The NP-completeness of Steiner tree and dominating set for chordal bipartite graphs, *Theor. Comput. Sci.* **53** (2–3), 257–265 (1987).

Grigory S. Dakhno
Dmitry S. Malyshev

Received May 29, 2022
Revised October 23, 2022
Accepted October 24, 2022

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2023. Т. 30, № 1. С. 40–66

УДК 519.8+518.25 DOI 10.33048/daio.2023.30.746

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЦЕНАРИЕВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ COVID-19 В РЕСПУБЛИКЕ КАЗАХСТАН НА ОСНОВЕ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ АГЕНТНОЙ МОДЕЛИ

О. И. Криворотько[1,2,3,a], *С. И. Кабанихин*[2,3,b], *М. А. Бектемесов*[4,c], *М. И. Сосновская*[3,d], *А. В. Неверов*[1,3,e]

[1] Институт вычислительной математики и математической геофизики, пр. Акад. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия

[2] Институт математики им. С. Л. Соболева, пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

[3] Новосибирский гос. университет, ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия

[4] Казахский национальный педагогический университет им. Абая, пр. Достык, 13, 050010 Алматы, Казахстан

E-mail: [a] krivorotko.olya@mail.ru, [b] ksi52@mail.ru, [c] maktagali@mail.ru, [d] m.sosnovskaya@alumni.nsu.ru, [e] a.neverov@g.nsu.ru

Аннотация. В работе построен алгоритм расчёта сценариев динамики выявленных случаев COVID-19 в Республике Казахстан, в основе которого лежат обработка неполных эпидемиологических данных и решение обратной задачи восстановления параметров агентной модели по совокупности доступных эпидемиологических данных. Основным инструментом построения модели является открытая библиотека Covasim. В случае резкого изменения ситуации (появление нового штамма, отмена или введение ограничительных мер и т. п.) параметры модели обновляются с учётом дополнительной информации за предыдущий месяц (оперативное усвоение данных). Обратная задача решалась методом стохастической глобальной оптимизации (древовидных оценок Парзена). В качестве примера приведены два сценария распространения COVID-19, рассчитанных 12 декабря 2021 г. на период до 20 января 2022 г. Сценарий, в котором учитывались новогодние праздники (опубликован 12 декабря 2021 г. на сайте `covid19-modeling.ru`), практически совпал с тем,

Исследование выполнено при финансовой поддержке Совета по грантам при Президенте Российской Федерации (проект № МК–4994.2021.1.1), Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 21–51–10003) и Министерства образования и науки Республики Казахстан (проект № ИРН AP09260317).

© О. И. Криворотько, С. И. Кабанихин, М. А. Бектемесов, М. И. Сосновская, А. В. Неверов, 2023

что произошло в реальности (погрешность составила 0,2%). Табл. 3, ил. 6, библиогр. 33.

Ключевые слова: агентно-ориентированная модель, COVID-19, обратная задача, оптимизация, регуляризация, сценарий развития, индекс репродукции вируса.

Введение

С декабря 2019 г. по сентябрь 2022 г. в мире было зарегистрировано более 604 млн случаев заражения COVID-19, из которых около 6,5 млн оказались летальными. По состоянию на 5.09.2022 г. Республика Казахстан (РК) занимает 51 место среди 216 стран по количеству выявленных случаев COVID-19 и 119 место по доле вакцинированного от COVID-19 населения. Для мониторинга эпидемиологической ситуации в регионах и странах, а также анализа эффективности сдерживающих мер применяются агентные модели распространения инфекционных заболеваний.

Агентная модель (АМ) распространения COVID-19 позволяет

- учитывать демографическую информацию по конкретной стране (численность и возрастную структуру населения);
- строить реалистичные сети передачи инфекции в различных социальных слоях, включая домохозяйства, школы, организации, общественные места;
- учитывать возрастные особенности развития заболевания;
- определять вирусную нагрузку агента, включая скорость передачи инфекции;
- учитывать физическое дистанцирование и ношение масок, вакцинацию, тестирование (включая бессимптомных), изоляцию, мониторинг контактов, карантин в регионах с населением от 100 до 20 млн человек [1–3].

В агентной модели каждый действующий агент наделяется признаками (возраст, социальный статус, восприимчивость к заболеванию и т. д.).

Краткий обзор работ по АМ COVID-19. Приведём краткий обзор работ по агентному моделированию COVID-19, во многом опирающихся на более ранние работы по моделированию инфекционных заболеваний 2013 г. [4] и 2020 г. [5].

В [6] АМ применялась для описания распространения COVID-19 в Бостоне. Показано, что система реагирования, основанная на расширенном тестировании и отслеживании контактов, может играть важную роль в ослаблении ограничений по соблюдению социальной дистанции при отсутствии коллективного иммунитета против SARS-CoV-2.

В [7] авторы подсчитали на примере штата Джорджия в США, что инфицированные люди возраста до 60 лет могут быть в 2,78 раза более

заразными, чем пожилые люди, и они, как правило, являются основной движущей силой сверхраспространения.

В [8–10] на основе АМ распространения COVID-19 проанализированы противоэпидемические программы в различных регионах Франции и Великобритании. Показано, что для контроля новой волны вспышки COVID-19 достаточно использовать данные о контактах и изоляции в течение ближайших трёх месяцев.

В [11] построена АМ, в которой источниками заражения выступали суперраспространители, и показано, что сверхраспространение резко усиливает значимость ограничений личных контактов.

Группа американских учёных в 2021 г. [3] разработала программный комплекс Covasim [12], основу которого составляет агентный подход моделирования эпидемии с учётом особенностей заболевания, фармацевтических (вакцинация) и социальных (ограничения посещений, ношение масок) мер. Этот программный комплекс применялся для построения сценариев развития эпидемии COVID-19, изучения динамики пандемии и поддержке принятия административных решений более чем в десятке стран Африки, Азиатско-Тихоокеанского региона, Европы и Северной Америки.

Открытые программные комплексы. Приведём краткий обзор программных комплексов распространения COVID-19.

1) `covid19-scenarios.org`, Базельский университет, Швейцария. Реализуется структурированная по возрастам компартментная модель распространения коронавирусной инфекции, основанная на 9 дифференциальных уравнениях, с возможностью варьирования параметров модели [13].

2) `covid19.biouml.org`, ИВТ СО РАН, Новосибирск. Моделируется распространение COVID-19 в Москве, Новосибирской области, Германии, Франции и Италии. В комплексе применяются расширенная камерная и агентная модели, параметры которых идентифицируются на основе опубликованной статистики. Строятся прогнозы не только числа регистрируемых заболевших, вылечившихся и умерших, но и количества свободных койко-мест, аппаратов искусственной вентиляции лёгких (ИВЛ) и других характеристик, необходимых для эффективного управления ситуацией в условиях эпидемии.

3) `anylogic.com/healthcare`, Богота, Колумбия. Комплекс основан на агентной модели с учётом географических особенностей города (расположение школ, медицинских учреждений, общественных мест) и социальной дистанции между агентами с возможностью варьирования параметров.

4) `github.com/kausaltech/reina-model`, Хельсинки, Финляндия. На основе агентной модели учитывается различный возраст агентов и семь возможных состояний прогрессирования заболевания, а также рассматривается случайная структура контактов, т. е. агенты взаимодействуют между собой хаотично [14].

5) `github.com/institutefordiseasemodeling/covasim`, США. Комплекс основан на агентной модели со случайной структурой с возможностью идентификации параметров для конкретного региона [3]. Он послужил основой создания собственного программного комплекса (см. п. 6), а также был адаптирован для получения результатов для Республики Казахстан в рамках данной работы.

6) `covid19-modeling.ru`, ИВМиМГ СО РАН, Новосибирск. Комплекс на основе комбинации камерной и агентной моделей предоставляет возможность построения сценариев развития с помощью решения обратных задач [15, 16].

Обратные задачи для АМ. В разных регионах один и тот же вирус может распространяться и воздействовать на людей по-разному. В силу новизны и сложности заболевания COVID-19 (частые изменения заразности вируса и среднего возраста тяжёлого течения заболевания, длительность инкубационного периода и др.) параметры большинства математических моделей, как правило, неизвестны, что затрудняет адаптацию существующих программных решений для анализа ситуации в конкретном регионе с учётом введения ограничений в разные периоды и фармацевтических вмешательств. Основные проблемы моделирования распространения COVID-19 следующие.

1. Данные для решения обратной задачи неполные и зашумлённые, а также представляют собой большие данные (ежедневные сводки о заболевших, заразившихся, вакцинированных и т. д.).

2. Параметры меняются со временем: контагиозность вируса $\beta(t)$, вероятность появления тяжёлых случаев $p_{\text{sev}}(t)$, смертность $p_{\text{death}}(t)$ и т. д.

3. Процесс распространения COVID-19 существенно изменяется при введении или отмене ограничительных мер (маски, социальная дистанция, перевод на удалённый рабочий режим, закрытие школ, предприятий, районов и городов).

Указанные проблемы приводят к необходимости рассматривать и решать обратные задачи идентификации неизвестных эпидемиологических параметров в конкретном регионе с учётом мутации вируса и различных вмешательств (административные, фармацевтические) по дополнительной информации о количестве проведённых ПЦР-тестов, выявленных случаев, госпитализированных, критических больных и умерших от COVID-19. Ввиду некорректности обратных задач (решение может

быть неединственным и/или неустойчивым) используется регуляризация с учётом ограничений на искомые параметры, которые получены по данным Всемирной организации здравоохранения (ВОЗ) и Министерства здравоохранения исследуемого региона (в нашем случае РК).

Особенность АМ в Республике Казахстан. Особенность представленной нами работы заключается в адаптации агентной модели к РК с учётом распределения населения (по возрастам, регионам), ограничительных мер и типа и качества статистических данных (неполные и неточные данные). По состоянию на 2021 г. 40,8% населения Республики Казахстан сельское, а его плотность сравнима с плотностью городского населения.

В работе предполагалось, что городское и сельское население РК находится в равных условиях по тестированию методом полимеразной цепной реакции (ПЦР) и скорости распространения COVID-19. В работе предложен алгоритм поэтапного уточнения эпидемиологических параметров АМ распространения COVID-19 в РК, а также алгоритм построения сценариев развития эпидемии в регионе на основе комбинации методов машинного обучения и решения обратных задач.

Структура статьи. Для достоверного моделирования тех или иных факторов распространения COVID-19 в основу расчётов должны закладываться адекватные исходные данные — от численности населения и его распределения по социальным группам до загруженности различных видов транспорта или магазинов [1]. В силу неполных и зашумлённых статистических данных в работе применяются методы машинного обучения и регрессионного анализа обработки и анализа временных рядов. Временной ряд (количество проведённых ПЦР-тестов) экстраполирован на основе статистических моделей с целью построения сценариев распространения COVID-19, используемых в агентном подходе (разд. 1). Исходя из особенностей данных для Республики Казахстан, в разд. 2 строится агентная модель, основная цель которой — составление сценариев развития и оценка влияния различных вмешательств на эпидемию, формулируются прямая и обратная задачи для АМ. В разд. 3 описан алгоритм решения обратной задачи на основе метода древовидных оценок Парзена минимизации абсолютного целевого функционала и усвоения данных. В разд. 4 построены и проанализированы сценарии распространения COVID-19 в Республике Казахстан с учётом ограничительных мер с 13.12.2021 г. по 20.01.2022 г. Показано, что увеличение концентрации агентов в новогодние праздники в общественных местах (магазины, театры, парки) увеличивает количество выявленных случаев COVID-19 (к 15.01.2022 г. увеличилось в 3,5 раза по сравнению с 1.12.2021 г.). В заключении приведены основные выводы.

1. Анализ данных по Республике Казахстан

Представим основные демографические и эпидемиологические данные по Республике Казахстан, использованные в последующем построении агентной модели распространения COVID-19, описанной в разд. 2.

1.1. Демографические данные. Статистические данные о численности населения по возрастным категориям (возрастные группы разбиты на периоды по 10 лет) были предоставлены М. А. Бектемесовым (табл. 1). Такого рода данные используются при инициации искусственной популяции АМ (см. разд. 2.2). Общая численность населения в РК составляет 18 879 552 человек.

Таблица 1

Распределение населения по возрастам в Республике Казахстан на 1.10.2021 г.

Возрастная категория (лет)	Количество (чел.)
0–9	3 890 241
10–19	2 855 522
20–29	2 537 252
30–39	2 987 296
40–49	2 292 980
50–59	1 994 801
60–69	1 439 848
70–79	588 375
80+	293 237

1.2. Эпидемиологические данные. Источники данных:

- `ourworldindata.org` (OWD),
- `worldhealthorg.shinyapps.io/covid` (WHO),
- `coronavirus2020.kz/ru` (CV2020),
- `kt.kz` (KT).

Для сбора и обработки эпидемиологических данных была создана программа, написанная на языке программирования Python. Схема работы программы следующая.

1. Задаётся URL ресурса, с которого будет происходить сбор данных.
2. Для новостных сайтов проводится поиск по статьям инструментами сайта и выделяются необходимые статистические данные.
3. В разметке html страницы по заранее подобранным ключам выделяются элементы, содержащие следующие данные.
   - Для новостных сайтов данные находятся по заданным ключевым словам в предложениях.

• Для сайтов со статистикой данные не требуют дополнительного поиска и выделяются в заранее заданном порядке.

Были собраны и обработаны следующие эпидемиологические данные о распространённости COVID-19 в день t:

• количество проведённых ПЦР тестов $\mathcal{T}(t)$ (рис. 1) — OWD,

• количество диагностированных случаев COVID-19 (пациентов с положительным ПЦР тестом) $f(t)$ (рис. 2) — OWD, WHO, CV2020, KT,

• количество вакцинированных — OWD, WHO, KT,

• количество госпитализированных с COVID-19 $H(t)$ — OWD (только количество коек-мест), KT, CV2020,

• количество пациентов, подключённых к аппарату ИВЛ $C(t)$ — KT, CV2020,

• число умерших от COVID-19 $D(t)$ — OWD, WHO, CV2020, KT.

Некоторые данные, размещённые на указанных сайтах, неполны (пропущены некоторые дни, недели, месяцы). Пропущенные данные промежуточных значений во временных рядах были интерполированы с помощью кубических сплайнов методом *interpolate* библиотеки *pandas* [17].

1.3. Регрессионная модель обработки и экстраполяции сезонных временных рядов. Статистические данные $\mathcal{T}(t)$ о количестве проведённых ПЦР тестов в РК имеют пропуски с 6.08.2021 г., а также свойственную недельную сезонность (периодичность), поэтому для построения сценариев распространения COVID-19 на базе АМ был использован экстраполированный временной ряд $\mathcal{T}(t)$ сезонной авторегрессионной моделью SARIMA, являющейся модификацией модели ARIMA (AutoRegressive Integrated Moving Average) [18], которая описывает одномерные временные ряды с сезонной компонентой.

Модель SARIMA$(p,d,q)(P,D,Q)_s$ для нестационарного временного ряда $\mathcal{T}(n)$ имеет вид [19]

$$\Phi(L^s)\varphi(L)\triangle^d\triangle_s^D\mathcal{T}(n) = \theta_0 + \Theta(L^s)\theta(L)\varepsilon(n).$$

Здесь параметры p,d,q отвечают за несезонную часть временного ряда, а P,D,Q соответствуют сезонным компонентам ряда, $s=7$ — длина сезона, $\epsilon(n)$ — стационарный временной ряд белого шума, $\triangle^d$ — оператор разности временного ряда порядка d, гарантирующий стационарность ряда (последовательное взятие d раз разностей первого порядка — сначала от временного ряда, затем от полученных разностей первого порядка, затем от второго порядка и т. д.), $\triangle_s^D$ — оператор разности временного ряда порядка D для сезонной компоненты, φ и Φ — параметры авторегрессии для несезонных и сезонных компонент ряда, θ и Θ — параметры несезонного и сезонного скользящего среднего соответственно, n — временной параметр (день).

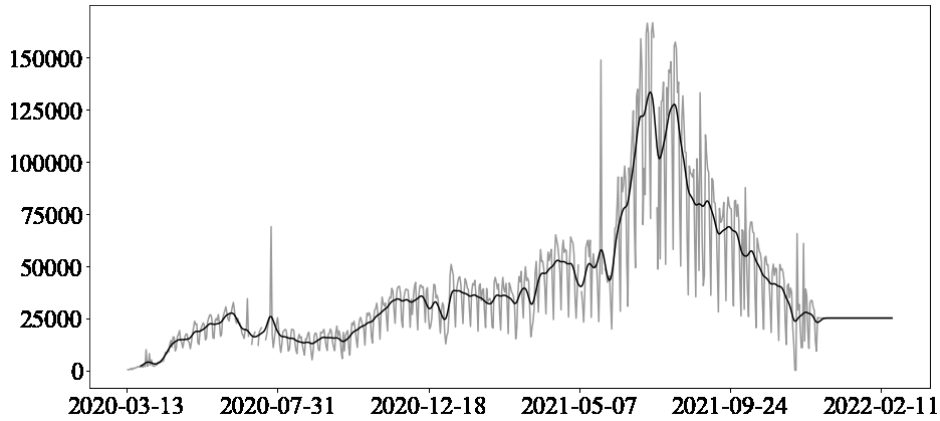


Рис. 1. Статистические данные о количестве проведённых ПЦР тестов $\mathcal{T}(t)$ в Республике Казахстан, используемые в построении модели

Алгоритм экстраполяции временного ряда следующий.

Шаг 1. Применяем преобразование Бокса — Кокса [18] для уменьшения дисперсии.

Шаг 2. Вычисляем сезонную разность (сдвиг на $s = 7$ дней) первого порядка.

Шаг 3. Вычисляем вторую разность (сдвиг на 1 день) ряда, полученного на Шаге 2.

Шаг 4. Проверяем стационарность ряда, полученного на Шаге 3, критерием Дики — Фуллера [20].

Шаг 5. Параметры, соответствующие Шагам 1–4, передаём в модель $\mathrm{SARIMA}(1,1,2)(0,1,1)_7$ и подбираем остальные на основе минимизации информационного критерия Акаике. В качестве данных передаётся ряд с Шага 1.

Шаг 6. Применяем обратное преобразование Бокса — Кокса к полученной модели с настроенными гиперпараметрами.

1.4. Результат экстраполяции временного ряда. Прогноз временного ряда $\mathcal{T}(t)$ количества ежедневных ПЦР-тестов в Республике Казахстан с 6.08.2021 г. по 20.01.2022 г. представлен на рис. 1.

Ввиду высокой флуктуации из-за сезонности, а также скачков во временных рядах в результате некорректного сбора данных, было решено провести предварительное сглаживание рядов перед передачей в модель с помощью гауссовского фильтра [21]. Таким образом мы избавляемся

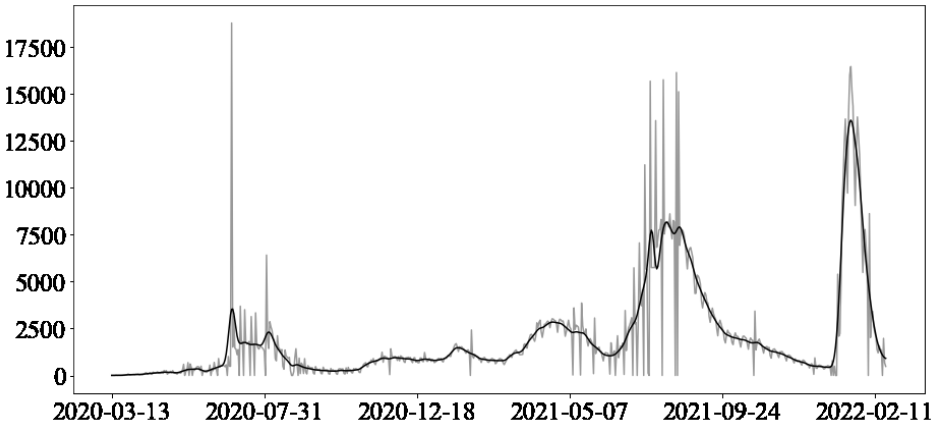


Рис. 2. Статистические данные по выявленным случаям COVID-19 $f(t)$ в Республике Казахстан, используемые в построении модели

от возможной неустойчивости и неинтерпретируемости результатов модели ввиду резких скачков в данных, полученных из открытого источника OWD (серая линия на рис. 1 и 2). Сглаженные данные, которые были переданы в модель, представлены чёрной линией на рис. 1 и 2.

2. Агентная модель

Агентное моделирование основано на исследовании динамики развития заболевания путём изучения взаимодействия между отдельно взятыми индивидуумами, а глобальные изменения в системе возникают как результат деятельности множества агентов (моделирование «снизу вверх»). Общее описание АМ распространения COVID-19 в регионе приведено в п. 2.1. Оно включает в себя инициацию популяции (п. 2.2), правила распространения заболевания (п. 2.3) и тестирования агентов (п. 2.4). В п. 2.5 приведена постановка прямой задачи для АМ, а в п. 2.6 — постановка обратной задачи для АМ.

2.1. Общее описание модели. В рамках данного исследования была реализована стохастическая АМ для Республики Казахстан. Основным инструментом для создания модели была библиотека Covasim [3], реализованная на языке Python (открытый код доступен по ссылке [12]) и созданная для исследования агентных моделей COVID-19 с нетривиальными структурами. Общий алгоритм выглядит следующим образом: загружаются все необходимые параметры и статистические данные, создаётся искусственная популяция с учётом распределения по возрастам в регионе. Далее агенты соединяются в контактные сети, представляющие собой полные графы. Затем начинается цикл по времени: на каждом

шаге (временной интервал равен одному дню) обновляется эпидемиологический статус агента как суперпозиция вероятностей с учётом его структуры контактов и введённых ограничительных мер (самоизоляция, закрытие общественных мест, ношение масок и т. д.).

2.2. Инициация популяции. Инициация искусственной популяции производится на основании статистических данных в регионе и зависит от следующих параметров агентов.

• Возраст (t^*). Все агенты делятся на возрастные группы по 10 лет (0–9, 10–19, ..., 80+ лет) согласно статистическим данным Республики Казахстан (табл. 1).

• Социальный статус (рабочий, студент, ребёнок, пенсионер), который зависит от возраста агента t^*.

Домохозяйства заполняются агентами согласно статистическим данным о среднем размере семьи в регионе. В зависимости от возраста агенты контактируют друг с другом в контактных сетях, представляющих собой полные графы, степень которых определяется пуассоновской случайной величиной с параметром λ:

- для домохозяйств $\lambda = 3{,}496$ — средний размер семьи (чел.) [22];
- для организаций $\lambda = 8$;
- для общественных мест и образовательных учреждений $\lambda = 20$.

Все агенты имеют контакты в домохозяйствах и в общественных местах, агенты в возрасте 6–21 лет также могут контактировать в образовательных учреждениях с агентами своего возраста, агенты в возрасте 22–65 лет — на работе. Сети контактов строятся на основе открытого алгоритма SynthPops [23], способного генерировать реалистичные контактные сети для популяций. Этот метод основывается на ранее опубликованных моделях и эмпирических исследованиях, позволяющих определить характерное для конкретных возрастных групп модели количество контактов.

В случае образовательных учреждений алгоритм выбирает ученика или студента и в зависимости от возраста формирует матрицу смешения возрастов в образовательном учреждении для определения вероятного возраста в контактной сети. Ученики выбираются из упорядоченного списка домохозяйств, так что они воспроизводят приближение динамики соседства детей, посещающих районные образовательные организации вместе. Преподаватели и другой вспомогательный персонал отбираются из числа взрослого населения, входящего в состав рабочей силы, и распределяются по мере необходимости по школам, что отражает средние данные о соотношении учащихся и учителей и учащихся и персонала. В крупных образовательных учреждениях близкие контакты моделируются случайным набором n контактов из числа возможных

в учреждении, где n определяется как случайная величина с распределением Пуассона с параметром $\lambda = 20$, соответствующим среднему размеру класса или группы.

Численность рабочей силы рассчитывается с использованием коэффициентов занятости с разбивкой по возрасту, а лица, не относящиеся к числу занятых, распределяются по рабочим местам с использованием данных о размерах организаций. Первичный эталонный работник отбирается из числа рабочей силы, а его коллеги выводятся на основе возрастных моделей смешения рабочей силы. Все работники (включая учителей) отбираются произвольно из числа населения, чтобы отразить общее смешение взрослых из разных районов на работе. Близкие контакты моделируются случайным набором n контактов в организации, где n — случайная величина с распределением Пуассона с параметром $\lambda = 8$, равным предполагаемому максимальному числу тесных контактов на рабочем месте.

Для моделирования контактов в общественных местах для каждого человека используются n случайных контактов в популяции, где n имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda = 20$. Соединения в этом уровне отражают природу контактов в парках и зонах отдыха, торговых центрах, общественном транспорте и т. п. Все связи между индивидами считаются неориентированными, чтобы отразить способность любого индивида в паре заражать другого.

2.3. Распространение заболевания в АМ. В рамках модели предполагается, что вирус передаётся между агентами, соединёнными ребром графа. Заражение при близком контакте описывается кусочно постоянным параметром $\beta(t)$, который в зависимости от структуры контакта умножается на соответствующую константу w_β (для домохозяйств

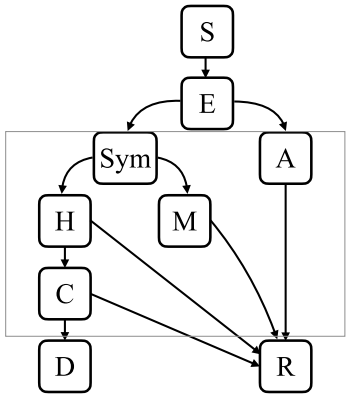


Рис. 3. Диаграмма состояний агентов в Covasim

$w_\beta = 3$, для образовательных учреждений и работы $w_\beta = 0{,}6$, для общественных мест $w_\beta = 0{,}3$). Таким образом, вероятность передачи вируса для каждой контактной сети различная.

Каждый агент может находиться в 9 стадиях заболевания: S — восприимчивые к заражению, E — заражённые незаразные, A — бессимптомные больные, Sym — больные с симптомами, M — больные лёгкой степени тяжести, H — госпитализированные, C — больные в критическом состоянии (нуждаются в реанимации), R — вылечившиеся, D — умершие (рис. 3). В рамку обведены те состояния, находясь в которых агент имеет возможность получить положительный тест на COVID-19. Переход из одной стадии заболевания в другую контролируется параметрами, зависящими от возраста (т. е. чем старше агент, тем он более уязвим): p_{sym} — вероятность проявлять симптомы после заражения, p_{sev} — вероятность перехода больного с симптомами в тяжёлое состояние (нуждается в госпитализации), p_{crit} — вероятность перехода больного из тяжёлого состояния в критическое (нуждается в реанимации), p_{death} — вероятность смерти для больного, находящегося в реанимации. Численные значения параметров для каждой возрастной группы приведены в табл. 2 [3].

Таблица 2

Вероятности перехода между состояниями заболевания в зависимости от возрастной группы

Пар-р \ Возраст	0–9	10–19	20–29	30–39	40–49
p_{sym}	0,5	0,55	0,6	0,65	0,7
p_{sev}	$5 \cdot 10^{-4}$	0,0016	0,0072	0,0208	0,0343
p_{crit}	$3 \cdot 10^{-5}$	$8 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^{-4}$	0,001	0,0022
p_{death}	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	10^{-4}	$3 \cdot 10^{-4}$	0,0098

Пар-р \ Возраст	50–59	60–69	70–79	80+	
p_{sym}	0,75	0,8	0,85	0,9	
p_{sev}	0,0765	0,133	0,207	0,246	
p_{crit}	0,0093	0,0364	0,089	0,174	
p_{death}	0,0026	0,008	0,024	0,082	

Продолжительность каждой стадии заболевания представляет собой случайную логнормальную величину с различными средними и параметрами дисперсии, согласованными со статистическими оценками ВОЗ (средние и дисперсии распределений представлены в табл. 3).

Таким образом, восприимчивый к заражению агент (S) при контакте с заражёнными агентами, соединёнными ребром графа, переходит в стадию заражённого незаразного (E) с вероятностью β в момент времени t.

Таблица 3

Продолжительность стадий заболевания в каждом эпидемиологическом состоянии

Параметр	Описание	Распределение
t_{inc}	количество дней с момента контакта до того, как агент станет заразным	LogN(4,6, 4,8) [24]
t_{sym}	количество дней с момента, когда агент стал заразен, до проявления симптомов	LogN(1, 0,9) [24]
t_{rec1}	продолжительность болезни для бессимптомных и лёгких случаев	LogN(8, 2) [25]
t_{rec2}	продолжительность болезни для тяжёлых и критических случаев	LogN(14, 2,4) [26]
t_{inf}	количество дней, за которое агент переходит из лёгкого состояния в тяжёлое	LogN(6,6, 4,9) [24]
t_{hosp}	количество дней, за которое агент переходит из тяжёлого состояния в критическое	LogN(3, 7,4) [27]
t_{crit}	длительность пребывания агента в критическом состоянии	LogN(6,2, 1,7) [26]

Затем агент в состоянии заражённого незаразного (E) может перейти в состояние инфицированного с симптомами (Sym) с вероятностью p_{sym} через t_{sym} дней или остаться бессимптомным больным (A) с вероятностью $1 - p_{\text{sym}}$ через t_{inc} после заражения. Бессимптомные больные вылечиваются через t_{rec1} дней и переходят в группу (R). Инфицированные с симптомами (Sym) могут развить тяжёлую степень заболевания и быть госпитализированными (H) с вероятностью p_{sev} или остаться больным лёгкой степени тяжести (M) с вероятностью $1-p_{\text{sev}}$ через t_{inf} дней после попадания в группу (Sym). Больные лёгкой степени тяжести вылечиваются через t_{rec2} дней и переходят в группу (R). Госпитализированные (H) могут перейти развить критическое состояние (C), т. е. нуждаться в подключении аппарата ИВЛ, с вероятностью p_{crit} через t_{hosp} дней после госпитализации или выздороветь с вероятностью $1 - p_{\text{crit}}$ через t_{rec2} дней. Больные в критическом состоянии (C) умирают с вероятностью p_{death} через t_{crit} дней или вылечиваются с вероятностью $1 - p_{\text{death}}$ через t_{rec2} дней. Все перечисленные вероятности можно записать в следующем виде:

$$p(S \to E) = \beta, \quad p(E \to \text{Sym}) = \frac{p_{\text{sym}}}{t_{\text{sym}}}, \quad p(E \to A) = \frac{1 - p_{\text{sym}}}{t_{\text{inc}}},$$

$$p(\text{Sym} \to H) = \frac{p_{\text{sev}}}{t_{\text{inf}}}, \quad p(\text{Sym} \to M) = \frac{1 - p_{\text{sev}}}{t_{\text{inf}}}, \quad p(H \to C) = \frac{p_{\text{crit}}}{t_{\text{hosp}}},$$

$$p(H \to R) = \frac{1 - p_{\text{crit}}}{t_{\text{rec2}}}, \quad p(M \to R) = \frac{1}{t_{\text{rec1}}}, \quad p(A \to R) = \frac{1}{t_{\text{rec1}}},$$
$$p(C \to D) = \frac{p_{\text{death}}}{t_{\text{crit}}}, \quad p(C \to R) = \frac{1 - p_{\text{death}}}{t_{\text{rec2}}}.$$

2.4. Тестирование агентов в АМ. Тестирование агентов проводится в количестве, соответствующем ежедневным статистическим данным в Республике Казахстан (см. п. 1.2). Шанс быть протестированным на COVID-19 зависит от эпидемиологического состояния агента (восприимчивый, инфицированный с симптомами, госпитализированные и т. п.). На каждом шаге моделирования тесты распределяются среди всей популяции (исключая умерших). Положительный результат могут получить агенты, статус которых обведён в рамку на рис. 3 (инфицированные бессимптомные и с симптомами, госпитализированные, больные лёгкой степени тяжести и критические случаи). В случае положительного теста на COVID-19 агенты попадают в статистику ежедневно выявленных. В модели предполагается, что вероятность тестирования агентов с симптомами выше, чем у бессимптомных больных. Данное соотношение шансов контролируется параметром p, который восстанавливается в ходе решения обратной задачи (см. п. 2.6).

2.5. Постановка прямой задачи для АМ. Прямая задача агентного моделирования состоит в определении количества инфицированных (в том числе $f(t)$ выявленных случаев в результате ПЦР тестирования), госпитализированных, умерших и других состояний агента, которые учитываются в АМ. В прямой задаче все входные параметры модели считаются известными. В этом случае агентная модель позволяет вычислить значения вектора

$$\vec{X}(t) = (S(t), E(t), A(t), \text{Sym}(t), M(t), H(t), C(t), R(t), D(t))$$

на следующий день, т. е. $\vec{X}(t+1)$. Поскольку многие параметры вектора

$$\vec{q}(t) = (E(0), \beta, p, \beta_d(i), \beta_c(i)), \quad i = 1, \ldots, N,$$

АМ распространения COVID-19 неизвестны, необходимо сформулировать и решить обратную задачу, используя дополнительную информацию в текущий день t. Здесь $E(0)$ — начальное количество инфицированных, β — параметр передачи вируса, p — параметр тестирования, $\beta_d(i)$ — дни изменения параметра β, $\beta_c(i)$ — значения, на которые изменяется параметр β в дни $\beta_d(i)$, i соответствует месяцу изменения параметра контагиозности β, т. е. $i + 1 = t + 30$.

2.6. Постановка обратной задачи для АМ. В данной работе на каждом временном этапе (равном 30 дням; подробнее см. п. 3.2) решается своя обратная задача. Обратная задача 1 состоит в восстановлении

вектора параметров

$$\vec{q}(0) = (E(0), \beta, p, \beta_d(1), \beta_c(1))$$

по дополнительной информации о количестве ежедневно выявленных случаев $f(t)$, t измеряется в днях.

В модели предполагается, что изменчивость вируса (появление новых штаммов, фармацевтические и социальные меры) происходит не чаще, чем раз в месяц. Ввиду этого решается обратная задача 2, которая состоит в восстановлении вектора параметров ежемесячно

$$\vec{q}(t+30) = (\beta_d(i), \beta_c(i)), \quad i+1 = t+30,$$

по дополнительной информации о количестве ежедневно выявленных случаев $f(t)$. Здесь i соответствует месяцу моделирования.

Решения обратных задач восстановления вектора $\vec{q}(t)$ сводились к решению задачи минимизации целевого функционала

$$J(\vec{q}) = \sum_{t_i=1}^{T} \frac{|f_d(t_i) - f_m(t_i, \vec{q})|}{M_{\text{diag}}}. \tag{1}$$

Здесь $f_d(t_i), f_m(t_i, \vec{q})$ — сглаженные данные и результат моделирования ежедневно выявленных случаев соответственно, T — количество дней моделирования, $M_{\text{diag}} = \max\limits_{t_i}\{f_d(t_i)\}$ — нормирующий член.

В работах [28, 29] для исследуемой модели авторы провели анализ чувствительности неизвестных параметров к измерениям на основе методов дифференциальной алгебры и байесовского подхода. Показано, что параметр β, отвечающий за передачу вируса, наиболее чувствителен к измерениям. С помощью методов анализа чувствительности область изменения параметра β удалось уменьшить в два раза благодаря добавлению дополнительной информации об эпидемии (а именно, к измерениям о количестве выявленных случаев и умерших была добавлена информация о критических случаях).

3. Алгоритм решения обратной задачи

В ходе решения обратной задачи вектор неизвестных параметров $\vec{q}$ восстанавливался с помощью применения пакета Optuna [30], в основе которого лежит метод древовидных оценок Парзена (Tree-structured Parzen estimators или коротко TPE), а также подхода усвоения данных для поэтапного восстановления параметров агентной модели (п. 3.2).

3.1. Метод древовидных оценок Парзена. Идея метода состоит в следующем: вычисляются вероятности $p(\vec{q} \mid J(\vec{q}))$ и $p(J(\vec{q}))$ для определения области параметров для минимизации функционала J. Для этого пространство значений параметров $\mathcal{D}_K = \{q_k, J(q_k) \mid k = 1, \ldots, K\}$

разделяется на 2 подмножества $\mathcal{D}^l_{K_l}$ и $\mathcal{D}^g_{K_g}$ такие, что $\mathcal{D}^l_{K_l}$ содержит квантиль уровня γ наименьших значений функционала в точках из $\mathcal{D}_K(J_\gamma)$, т. е. $P(J < J_\gamma) = \gamma$. Подмножество $\mathcal{D}^g_{K_g}$ содержит все остальные точки из $\mathcal{D}_K$. Далее с помощью метода парзеновского окна оцениваются плотности распределения $l(x)$ и $g(x)$, которые получены из $\mathcal{D}^l_{K_l}$ и $\mathcal{D}^g_{K_g}$ соответственно. Таким образом, с помощью $l(x)$ можно получить область точек, в которых функционал достигает наименьших значений. Тем самым вероятность $p(\vec{q}_{K+1}|J(\vec{q}))$ определяется следующим образом:

$$p(\vec{q}_{K+1}|J(\vec{q})) = \begin{cases} l(\vec{q}), & J(\vec{q}_{K+1}) < J^\gamma, \\ g(\vec{q}), & J(\vec{q}_{K+1}) \geqslant J^\gamma. \end{cases}$$

Затем генерируется набор векторов согласно плотности $l(x)$. Из них выбирается вектор $\vec{q}^*$, на котором достигается максимальное ожидаемое улучшение $EI(x)$, выражающееся по формуле

$$EI(\vec{q}) = \left(\gamma + \frac{g(\vec{q})}{l(\vec{q})}(1-\gamma)\right)^{-1}.$$

Сходимость по вероятности статистических методов отражена в общей теореме в [31].

Критерием остановки в представленном алгоритме выбрано ограничение на количество итераций max_iter = 100. Схема алгоритма выглядит следующим образом.

Алгоритм 1. Алгоритм древовидных оценок Парзена

Вход: Значения параметров γ, n_{samp} и max_iter

1: **Инициализация**: пространство значений неизвестных параметров $\mathcal{D}_{init} = \{\vec{q}_k, J(\vec{q}_k), k = 1, \ldots, n_{\text{init}}\}$
2: **for** $m = 0, \ldots, \text{max_iter}$ **do**
3: Разделить $\mathcal{D}_{n_{\text{init}}+m}$ для генерации пространств $\mathcal{D}^g_{m_g}, \mathcal{D}^l_{m_l}$
4: Получить оценку плотности $l(\vec{q})$ для наборов параметров из $\mathcal{D}^l_{n_{\text{init}}+m_l}$
5: Получить оценку плотности $g(\vec{q})$ для наборов параметров из $\mathcal{D}^g_{n_{\text{init}}+m_g}$
6: Сгенерировать $\vec{q}^s = \left\{\vec{q}^s_k \mid k = 1, \ldots, n_{\text{samp}}\right\}$, где $\vec{q}^s_k \sim l(\vec{q}))$
7: Выбрать $\vec{q}_{m+1} = \underset{\vec{q} \subset \vec{q}^s}{\operatorname{argmax}} EI(\vec{q})$
8: Вычислить $J(\vec{q}_{m+1})$
9: $\mathcal{D}_{n_{\text{init}}+m} \leftarrow \mathcal{D}_{n_{\text{init}}+m+1}$

Подробнее с методом древовидных оценок Парзена можно ознакомиться в [32].

3.2. Поэтапное восстановление неизвестных параметров. Параметр β предполагается кусочно постоянным. Соответственно, чем продолжительнее рассматриваемый период моделирования, тем больше число неизвестных параметров. Однако каждый из параметров $\beta_d(i)$ и $\beta_c(i)$, $i = 1, \ldots, N$, где $N = 18$ — количество месяцев моделирования, зависит только от данных на конкретном подпериоде моделирования. Каждый промежуток последовательно калибровался один за другим (метод усвоения данных), и параметры, восстановленные на предыдущем шаге, использовались в последующем запуске алгоритма оптимизации (алгоритм описан в [33]). Таким образом, на первом промежутке 13.03.2020 г. — 12.04.2020 г. ($i = 1$) использовался вектор неизвестных параметров (начальные условия $t = 0$ соответствуют дате 13.03.2020 г.)

$$\vec{q}(0) = (E(0), \beta, p, \beta_d(1), \beta_c(1)),$$

а на всех последующих промежутках —

$$\vec{q}(i) = (\beta_d(i), \beta_c(i)), \quad i = 2, \ldots, N,$$

где N — количество месяцев моделирования.

Регуляризация решения обратной задачи состоит в использовании ограничений на искомые параметры, полученные при анализе чувствительности на основе используемых измерений [28, 29].

4. Численные результаты

Представим результаты математического моделирования распространения COVID-19 в Республике Казахстан. Как было показано в разд. 3.2,

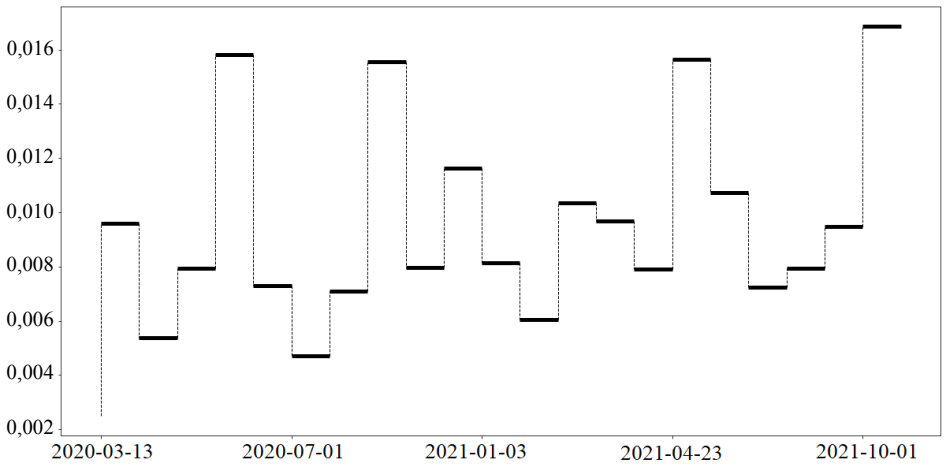


Рис. 4. График изменения параметра заразности $\beta_c(i)$ и дней его изменения $\beta_d(i)$ в РК с 13.03.2020 г. по 12.12.2021 г.

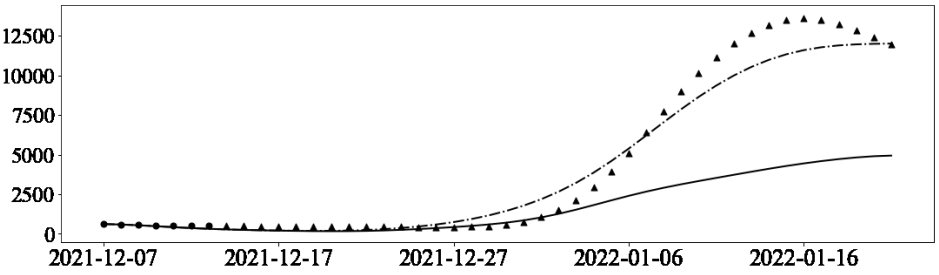


Рис. 5. Моделирование двух сценариев распространения ежедневно выявленных случаев в результате ПЦР-тестирования в РК

на первом этапе восстанавливаются количество бессимптомных инфицированных $E(0)$, скорость передачи вируса от инфицированного к восприимчивому агенту β и значение $\beta_c(1)$, на которое изменится параметр β в день $\beta_d(1)$, а также шанс быть протестированным p. Ежемесячно на основе решения обратной задачи обновлялись параметры дня $\beta_d(i)$ и значения $\beta_c(i)$ изменения скорости передачи вируса в РК (результат восстановления $\beta_d(i)$ и $\beta_c(i)$ приведён на рис. 4).

При построении сценариев распространения ежедневно выявленных случаев COVID-19 предполагается, что в регионе сохранится средний уровень тестирования населения $\mathcal{T}(t)$. Количество ПЦР тестов в день t рассчитан по регрессионной модели SARIMA (см. разд. 1).

4.1. Сценарии распространения COVID-19 в РК. На рис. 5 представлен результат моделирования среднего количества ежедневно выявленных случаев в результате ПЦР-тестирования в РК с прогнозом на 45 дней (точками изображены реальные данные с 13.03.2020 г. по 12.12.2021 г., которые участвуют в решении обратной задачи, а треугольниками — данные с 13.12.2021 г. по 20.01.2022 г., которые использовались для проверки прогнозирования). При построении прогноза были учтены 2 вида сценариев:

- базовый сценарий (сплошная линия), в котором не учитывалось повышенное скопление людей во время новогодних праздников, а учитывалось только увеличение мобильности граждан в период подготовки к каникулам (с 20.12.2021 г. по 30.12.2021 г.);
- повышенная мобильность граждан на новогодние праздники (пунктирная линия) — учитывалась повышенная передача вируса в общественных местах в период с 2.01.2022 г. по 6.01.2022 г. Характеризуется увеличением значения $\beta_c(t)$ передачи вируса в 2,5 раза на период предновогодних праздников 20–30.12.2021 г.: достигает значения 0,039, затем увеличивается до 0,548 в период 1–10.01.2022 г., после чего спадает до 0,03.

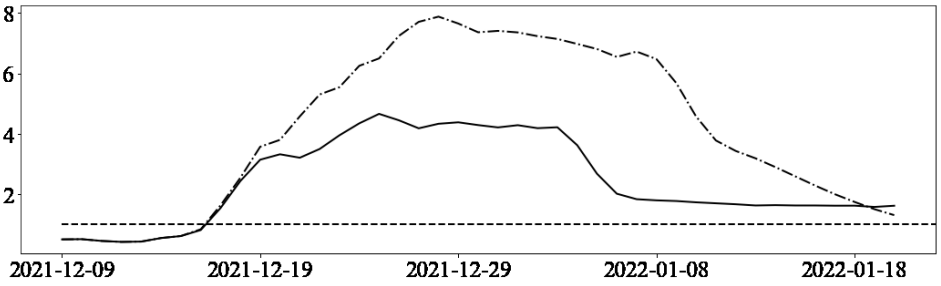


Рис. 6. Значение индекса репродукции $\mathcal{R}(t)$

По результатам валидации модели можно сделать вывод, что учёт повышенной мобильности граждан демонстрирует более точное соответствие реальным данным. Значения параметра β во втором сценарии (пунктирная линия) говорят о том, что в период новогодних праздников передача вируса увеличилась в 3,5 раза по сравнению с началом декабря. Так, на 20.01.2022 г. число выявленных случаев COVID-19 составляло 12 032 человека, число ожидаемых выявленных случаев в Республике Казахстан по базовому сценарию АМ (сплошная линия), рассчитанному 12.12.2021 г., равнялось 4 939 человек (погрешность составила 59%), а с учётом повышенной мобильности граждан в общественных местах — 12 007 человек (погрешность составила 0,2%).

4.2. Базовый индекс репродукции вируса в РК. Основным показателем распространения эпидемии является базовый индекс репродукции вируса $R(t)$, который характеризует среднее количество людей, которые заражаются от активно инфицированных в полностью неиммунизированном окружении при отсутствии специальных эпидемиологических мер. В данной работе мы использовали выражение для базового индекса репродукции, предложенное авторами работы [3]:

$$\mathcal{R}(t) = \frac{I_N(t) \cdot d}{I_C(t)}. \tag{2}$$

Здесь $I_N(t)$ — количество новых заражённых в день t, $I_C(t)$ — текущее количество заражённых в день t, d — средняя продолжительность заболевания в днях. Если $\mathcal{R}(t) < 1$, то считается, что эпидемия перестаёт распространяться, в противном случае она растёт. На рис. 6 представлен график $\mathcal{R}(t)$ для Республики Казахстан для двух рассматриваемых выше сценариев. Результаты показывают рост количества выявленных случаев COVID-19 в Республике Казахстан и высокую нагрузку на систему здравоохранения в период с 19.12.2021 г. по 18.01.2022 г. для сценария

с увеличением мобильности граждан в общественных местах ввиду новогодних праздников (штрих-пунктирная линия), после чего количество новых выявленных случаев сокращается до размеров базового сценария развития (сплошная линия). Горизонтальной штриховой линией обозначено пороговое значение $\mathcal{R}(t) = 1$.

Заключение

Разработана агентная модель распространения COVID-19 в РК, основанная на программном пакете Covasim, реализованном на языке Python, и включающая в себя инициацию популяции на основе демографических данных страны, правила распространения заболевания и тестирования агентов в зависимости от возраста и эпидемиологического статуса. На первом этапе происходит сбор, обработка и анализ неполных данных методами регрессионного анализа и машинного обучения. На втором этапе уточняются эпидемиологические параметры агентной модели (скорости передачи инфекции, тестирования, начальное количество инфицированных агентов) по дополнительной информации о количестве выявленных случаев COVID-19 в РК. Для этого разработан алгоритм усвоения данных, в рамках которого неизвестные параметры идентифицируются ежемесячно по дополнительной информации о количестве ежедневно выявленных случаев COVID-19 на основе метода глобальной оптимизации древовидных оценок Парзена. На третьем этапе учитываются нефармацевтические вмешательства в процесс распространения эпидемии с целью построения наиболее реалистичных сценариев распространения COVID-19.

При реализации модели использовались данные о количестве выявленных случаев с 13.03.2020 г. по 12.12.2021 г. в Республике Казахстан. Показано, что увеличение плотности агентов в новогодние праздники в общественных местах (магазины, театры, парки) увеличивает количество выявленных случаев COVID-19 (к 15.01.2022 г. увеличилось в 3,5 раза по сравнению с 1.12.2021 г.). В качестве примера приведены два сценария распространения COVID-19, рассчитанных 12.12.2021 г. на период до 20.01.2022 г. Сценарий, в котором учитывались новогодние праздники (опубликован 12.12.2021 г. на сайте `covid19-modeling.ru`), практически совпал с тем, что произошло в реальности (погрешность составила 0,2% или 25 человек). Таким образом, математическое моделирование позволяет получить качественное и количественное совпадение прогноза эпидемиологической ситуации с действительностью.

Особенность моделирования распространения коронавирусной инфекции в Республике Казахстан состоит в том, что необходимо учитывать концентрацию населения в крупных городах: Алматы (1 993 067 человек), Астана (1 199 083 человека), Шымкент (1 090 160 человек) и др., —

в которых проживает более 11 млн человек, а в сёлах — более 7 млн человек. Для более детального моделирования сценариев распространения COVID-19 необходимо учитывать транспортные потоки между крупнейшими городами, а также транспортные потоки на уровне город-область. Для получения более детальных сценариев распространения COVID-19 необходимо комбинировать агентные и SIR-модели, как это сделано в Новосибирской области [2, 15, 16].

Вклад каждого автора в работу следующий:

• О. И. Криворотько и С. И. Кабанихин — постановка прямой и обратной задач, формулировка алгоритмов решения и анализ результатов расчётов, координация работ;

• М. А. Бектемесов — предоставление данных по Республике Казахстан;

• М. И. Сосновская — реализация агентной модели и алгоритмов решения прямой и обратной задач;

• А. В. Неверов — обработка данных, разработка программы для вычисления на кластере ССКЦ СО РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Адарченко В. А., Бабань С. А., Брагин А. А.** [и др.]. Моделирование развития эпидемии коронавируса по дифференциальной и статистической моделям. Снежинск, 2020. (Препринт РФЯЦ — ВНИИТФ; № 264).
2. **Криворотько О. И., Кабанихин С. И.** Математические модели распространения COVID-19. Новосибирск, 2022. (Препринт Ин-та математики им. С. Л. Соболева; № 300).
3. **Kerr C. C., Stuart R. M., Mistry D.** [et al.]. Covasim: An agent-based model of COVID-19 dynamics and interventions // PLoS Comput. Biol. 2021. V. 17, No. 7, ID e1009149. 32 p.
4. **Laubenbacher R., Hinkelmann F., Oremland M.** Agent-based models and optimal control in biology: A discrete approach // Mathematical concepts and methods in modern biology: Using modern discrete models. Ch. 5. San Diego, CA: Acad. Press, 2013. P. 143–178.
5. **Влад А. И., Санникова Т. Е., Романюха А. А.** Моделирование распространения респираторных вирусных инфекций в городе: мультиагентный подход // Мат. биология и биоинформатика. 2020. Т. 15, № 2. С. 338–356.
6. **Aleta A., Martín-Corral D., Pastore y Piontti A.** [et al.]. Modelling the impact of testing, contact tracing and household quarantine on second waves of COVID-19 // Nat. Hum. Behav. 2020. V. 4, No. 9. P. 964–971.
7. **Lau M. S. Y., Grenfell B., Thomas M., Bryan M., Nelson K., Lopman B.** Characterizing superspreading events and age-specific infectiousness of SARS-CoV-2 transmission in Georgia, USA // PNAS. 2020. V. 117, No. 36. P. 22430–22435.

8. **Kucharski A. J., Klepac P., Conlan A. J. K.** [et al.]. Effectiveness of isolation, testing, contact tracing, and physical distancing on reducing transmission of SARS-CoV-2 in different settings: A mathematical modelling study // Lancet Infect. Dis. 2020. Vol. 20, No. 10. P. 1151–1160.
9. **Hoertel N., Blachier M., Blanco C.** [et al.]. A stochastic agent-based model of the SARS-CoV-2 epidemic in France // Nat. Med. 2020. V. 26, No. 9. P. 1417–1421.
10. **Hellewell J., Abbott S., Gimma A.** [et al.]. Feasibility of controlling COVID-19 outbreaks by isolation of cases and contacts // Lancet Glob. Health. 2020. V. 8, No. 4. P. e488–e496.
11. **Nielsen B. F., Simonsen L., Sneppen K.** COVID-19 superspreading suggests mitigation by social network modulation // Phys. Rev. Lett. 2021. V. 126, No. 11, ID 118301. 6 p.
12. COVID-19 agent-based simulator. Bellevue, WA: Inst. Disease Modeling, 2022. Available at `github.com/InstituteforDiseaseModeling/covasim/` (accessed Jan. 9, 2023).
13. **Noll N. B., Aksamentov I., Druelle V.** [et al.]. COVID-19 scenarios: An interactive tool to explore the spread and associated morbidity and mortality of SARS-CoV-2. Oyster Bay, NY: Cold Spring Harbor Lab., 2020. (Prepr. Server Health Sci. medRxiv). Available at `medrxiv.org/content/10.1101/2020.05.05.20091363` (accessed Jan. 9, 2023).
14. **Tuomisto J. T., Yrjölä J., Kolehmainen M., Bonsdorff J., Pekkanen J., Tikkanen T.** An agent-based epidemic model REINA for COVID-19 to identify destructive policies. Oyster Bay, NY: Cold Spring Harbor Lab., 2020. (Prepr. Server Health Sci. medRxiv). Available at `medrxiv.org/content/10.1101/2020.04.09.20047498` (accessed Jan. 9, 2023).
15. **Криворотько О. И., Кабанихин С. И., Зятьков Н. Ю., Приходько А. Ю., Прохошин Н. М., Шишленин М. А.** Математическое моделирование и прогнозирование COVID-19 в Москве и Новосибирской области // Сиб. журн. вычисл. математики. 2020. Т. 23, № 4. С. 395–414.
16. **Krivorotko O. I., Sosnovskaia M. I., Vashchenko I. A., Kerr C. C., Lesnic D.** Agent-based modeling of COVID-19 outbreaks for New York state and UK: Parameter identification algorithm // Infect. Dis. Model. 2022. V. 7, No. 1. P. 30–44.
17. API reference — pandas 1.5.2 documentation. Austin, TX: NumFOCUS, 2022. Available at `pandas.pydata.org/docs/reference/` (accessed Jan. 9, 2023).
18. **Бокс Дж., Дженкинс Г.** Анализ временных рядов: Прогноз и управление. Вып. 1. М.: Мир, 1974. 406 с.
19. **Dabral P. P., Murry M. Z.** Modelling and forecasting of rainfall time series using SARIMA // Environ. Process. 2017. V. 4, No. 2. P. 399–419.
20. **Dickey D. A., Fuller W. A.** Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root // J. Am. Stat. Assoc. 1979. V. 74, No. 366a. P. 427–431.
21. SciPy API — SciPy v1.10.0 manual. Austin, TX: Enthought, 2022. Available at `docs.scipy.org/doc/scipy/reference/` (accessed Jan. 9, 2023).

22. Household: Size & composition, 2022. New York: United Nations, 2022. Available at `population.un.org/Household/#/countries/840` (accessed Jan. 9, 2023).
23. SynthPops — create synthetic populations for COVID-19 epidemic analyses. Bellevue, WA: Inst. Disease Modeling, 2021. Available at `github.com/InstituteforDiseaseModeling/synthpops/` (accessed Jan. 9, 2023).
24. Lauer S. A., Grantz K. H., Bi Q. [et al.]. The incubation period of coronavirus disease 2019 (COVID-19) from publicly reported confirmed cases: Estimation and application // Ann. Intern. Med. 2020. V. 172, No. 9. P. 577–582.
25. Wölfel R., Corman V. M., Guggemos W. [et al.]. Virological assessment of hospitalized patients with COVID-2019 // Nature. 2020. V. 581, No. 7809. P. 465–469.
26. Verity R., Okell L. C., Dorigatti I. [et al.]. Estimates of the severity of coronavirus disease 2019: A model-based analysis // Lancet Infect. Dis. 2020. V. 20, No. 6. P. 669–677.
27. Wang D., Hu B., Hu C. [et al.]. Clinical characteristics of 138 hospitalized patients with 2019 novel coronavirus-infected pneumonia in Wuhan, China // JAMA. 2020. V. 323, No. 11. P. 1061–1069.
28. Криворотько О. И., Кабанихин С. И., Сосновская М. И., Андорная Д. В. Анализ чувствительности и идентифицируемости математических моделей распространения эпидемии COVID-19 // Вавиловский журн. генетики и селекции. 2021. Т. 25, № 1. С. 82–91.
29. Krivorotko O. I., Sosnovskaia M. I., Vashchenko I. A. Agent-based mathematical model of COVID-19 spread in Novosibirsk region: Identifiability, optimization and forecasting // J. Inverse Ill-Posed Probl. [in print].
30. Optuna — a hyperparameter optimization framework. Tokyo: Preferred Networks, 2018. Available at `optuna.org` (accessed Jan. 9, 2023).
31. Жиглявский А. А., Жилинскас А. Г. Методы поиска глобального экстремума. М.: Наука, 1991.
32. Bergstra J., Bardenet R., Bengio Y., Kégl B. Algorithms for hyper-parameter optimization // Advances in neural information processing systems 24. 25th Annual Conf. (Granada, Spain, Dec. 12–15, 2011). V. 3. Red Hook, NY: Curran Associates, 2012. P. 2546–2554.
33. Daza-Torres M. L., Capistrán M. A., Capella A., Andrés Christen J. Bayesian sequential data assimilation for COVID-19 forecasting // Epidemics. 2022. V. 39, ID 100564. 10 p.

Криворотько Ольга Игоревна
Кабанихин Сергей Игоревич
Бектемесов Мактагали Абдимажитович
Сосновская Мария Игоревна
Неверов Андрей Вячеславович

Статья поступила
4 июля 2022 г.
После доработки —
27 сентября 2022 г.
Принята к публикации
28 сентября 2022 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2023. Vol. 30, No. 1. P. 40–66

UDC 519.8+518.25 DOI 10.33048/daio.2023.30.746

SIMULATION OF COVID-19 PROPAGATION SCENARIOS IN THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN BASED ON REGULARIZATION OF AGENT MODEL

O. I. Krivorotko[1, 2, 3, a], *S. I. Kabanikhin*[2, 3, b], *M. A. Bektemesov*[4, c], *M. I. Sosnovskaya*[3, d], and *A. V. Neverov*[1, 3, e]

[1] Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, 6 Acad. Lavrentiev Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia

[2] Sobolev Institute of Mathematics, 4 Acad. Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia

[3] Novosibirsk State University, 2 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia

[4] Abai Kazakh National Pedagogical University, 13 Dostyk Avenue, 050010 Almaty, Kazakhstan

E-mail: [a] krivorotko.olya@mail.ru, [b] ksi52@mail.ru, [c] maktagali@mail.ru, [d] m.sosnovskaya@alumni.nsu.ru, [e] a.neverov@g.nsu.ru

Abstract. An algorithm for modeling scenarios for new diagnosed cases of COVID-19 in the Republic of Kazakhstan is proposed. The algorithm is based on the treatment of incomplete epidemiological data and the inverse problem solving for the agent-based model (ABM) using a set of available epidemiological data. The main tool for building the ABM is the open library Covasim. In the event of a sudden change in the situation (appearance of a new strain, removal or introduction of restrictive measures, etc.), the model parameters are updated with additional information for the previous month (data assimilation). The inverse problem was solved by tree Parzen estimates optimization. As an example, two scenarios of COVID-19 propagation are given, calculated on December 12, 2021 for the period up to January 20, 2022. The scenario,

This research is supported by the Council for Grants under the President of the Russian Federation (Project MK–4994.2021.1.1), Russian Foundation for Basic Research (Project 21–51–10003) and Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Project AP09260317).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **17** (1) (2023).

which took into account the New Year holidays (published on December 12, 2021 on `covid19-modeling.ru`), almost coincided with what happened in reality (the error was 0,2%). Tab. 3, illustr. 6, bibliogr. 33.

Keywords: agent oriented model, COVID-19, inverse problem, optimization, regularization, scenario, index of virus reproduction.

REFERENCES

1. **V. A. Adarchenko, S. A. Baban', A. A. Bragin,** [et al.]. Modelling the coronavirus epidemic development with the use of differential and statistical models (Snezhinsk, 2020) (Prepr. RFYaTs—VNIITF, No. 264) [Russian].
2. **O. I. Krivorotko** and **S. I. Kabanikhin,** Mathematical models for the spread of COVID-19 (Novosibirsk, 2022) (Prepr. Inst. Mat. Sobolev., No. 300) [Russian].
3. **C. C. Kerr, R. M. Stuart, D. Mistry,** [et al.]. Covasim: An agent-based model of COVID-19 dynamics and interventions, *PLoS Comput. Biol.* **17** (7), ID e1009149, 32 p. (2021).
4. **R. Laubenbacher, F. Hinkelmann,** and **M. Oremland,** Agent-based models and optimal control in biology: A discrete approach, in *Mathematical Concepts and Methods in Modern Biology: Using Modern Discrete Models,* Ch. 5 (Acad. Press, San Diego, CA, 2013), pp. 143–178.
5. **A. I. Vlad, T. E. Sannikova,** and **A. A. Romanyukha,** Modelling the spread of respiratory viral infections in a city: Multi-agent approach, *Mat. Biol. Bioinform.* **15** (2), 338–356 (2020) [Russian].
6. **A. Aleta, D. Martín-Corral, A. Pastore y Piontti,** [et al.]. Modelling the impact of testing, contact tracing and household quarantine on second waves of COVID-19, *Nat. Hum. Behav.* **4** (9), 964–971 (2020).
7. **M. S. Y. Lau, B. Grenfell, M. Thomas, M. Bryan, K. Nelson,** and **B. Lopman,** Characterizing superspreading events and age-specific infectiousness of SARS-CoV-2 transmission in Georgia, USA, *PNAS* **117** (36), 22430–22435 (2020).
8. **A. J. Kucharski, P. Klepac, A. J. K. Conlan,** [et al.]. Effectiveness of isolation, testing, contact tracing, and physical distancing on reducing transmission of SARS-CoV-2 in different settings: A mathematical modelling study, *Lancet Infect. Dis.* **20** (10), 1151–1160 (2020).
9. **N. Hoertel, M. Blachier, C. Blanco,** [et al.]. A stochastic agent-based model of the SARS-CoV-2 epidemic in France, *Nat. Med.* **26** (9), 1417–1421 (2020).
10. **J. Hellewell, S. Abbott, A. Gimma,** [et al.]. Feasibility of controlling COVID-19 outbreaks by isolation of cases and contacts, *Lancet Glob. Health.* **8** (4), e488–e496 (2020).
11. **B. F. Nielsen, L. Simonsen,** and **K. Sneppen,** COVID-19 superspreading suggests mitigation by social network modulation, *Phys. Rev. Lett.* **126** (11), ID 118301, 6 p. (2021).

12. COVID-19 Agent-Based Simulator (Inst. Disease Modeling, Bellevue, WA, 2022). Available at `github.com/InstituteforDiseaseModeling/covasim/` (accessed Jan. 9, 2023).

13. **N. B. Noll, I. Aksamentov, V. Druelle,** [et al.]. *COVID-19 scenarios: An interactive tool to explore the spread and associated morbidity and mortality of SARS-CoV-2* (Cold Spring Harbor Lab., Oyster Bay, NY, 2020). (Prepr. Server Health Sci. medRxiv). Available at `medrxiv.org/content/10.1101/2020.05.05.20091363` (accessed Jan. 9, 2023).

14. **J. T. Tuomisto, J. Yrjölä, M. Kolehmainen, J. Bonsdorff, J. Pekkanen,** and **T. Tikkanen,** *An agent-based epidemic model REINA for COVID-19 to identify destructive policies* (Cold Spring Harbor Lab., Oyster Bay, NY, 2020). (Prepr. Server Health Sci. medRxiv). Available at `medrxiv.org/content/10.1101/2020.04.09.20047498` (accessed Jan. 9, 2023).

15. **O. I. Krivorotko, S. I. Kabanikhin, N. Yu. Zyatkov, A. Yu. Prikhodko, N. M. Prokhoshin,** and **M. A. Shishlenin,** Mathematical modeling and forecasting of COVID-19 in Moscow and Novosibirsk region, *Sib. Zh. Vychisl. Mat.* **23** (4), 395–414 (2020) [Russian] [*Num. Anal. Appl.* **13** (4), 332–348 (2020)].

16. **O. I. Krivorotko, M. I. Sosnovskaia, I. A. Vashchenko, C. C. Kerr,** and **D. Lesnic,** Agent-based modeling of COVID-19 outbreaks for New York state and UK: Parameter identification algorithm, *Infect. Dis. Model.* **7** (1), 30–44 (2022).

17. API Reference — Pandas 1.5.2 Documentation (NumFOCUS, Austin, TX, 2022). Available at `pandas.pydata.org/docs/reference/` (accessed Jan. 9, 2023).

18. **G. E. P. Box** and **G. M. Jenkins,** *Time Series Analysis: Forecasting and Control* (Holden-Day, San Francisco, 1970; Mir, Moscow, 1974 [Russian]).

19. **P. P. Dabral** and **M. Z. Murry,** Modelling and forecasting of rainfall time series using SARIMA, *Environ. Process.* **4** (2), 399–419 (2017).

20. **D. A. Dickey** and **W. A. Fuller,** Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root, *J. Am. Stat. Assoc.* **74** (366a), 427–431 (1979).

21. SciPy API — SciPy v1.10.0 Manual (Enthought, Austin, TX, 2022). Available at `docs.scipy.org/doc/scipy/reference/` (accessed Jan. 9, 2023).

22. Household: Size & Composition, 2022 (United Nations, New York, 2022). Available at `population.un.org/Household/#/countries/840` (accessed Jan. 9, 2023).

23. SynthPops — create synthetic populations for COVID-19 epidemic analyses (Inst. Disease Modeling, Bellevue, WA, 2021). Available at `github.com/InstituteforDiseaseModeling/synthpops/` (accessed Jan. 9, 2023).

24. **S. A. Lauer, K. H. Grantz, Q. Bi,** [et al.]. The incubation period of coronavirus disease 2019 (COVID-19) from publicly reported confirmed cases: Estimation and application, *Ann. Intern. Med.* **172** (9), 577–582 (2020).

25. **R. Wölfel, V. M. Corman, W. Guggemos,** [et al.]. Virological assessment of hospitalized patients with COVID-2019, *Nature* **581** (7809), 465–469 (2020).

26. R. Verity, L. C. Okell, I. Dorigatti, [et al.]. Estimates of the severity of coronavirus disease 2019: A model-based analysis, *Lancet Infect. Dis.* **20** (6), 669–677 (2020).

27. D. Wang, B. Hu, C. Hu, [et al.]. Clinical characteristics of 138 hospitalized patients with 2019 novel coronavirus-infected pneumonia in Wuhan, China, *JAMA* **323** (11), 1061–1069 (2020).

28. O. I. Krivorotko, S. I. Kabanikhin, M. I. Sosnovskaya, and **D. V. Andornaya,** Sensitivity and identifiability analysis of COVID-19 pandemic models, *Vavilov. Zh. Genet. Sel.* **25** (1), 82–91 (2021) [Russian].

29. O. I. Krivorotko, M. I. Sosnovskaya, and **I. A. Vashchenko,** Agent-based mathematical model of COVID-19 spread in Novosibirsk region: Identifiability, optimization and forecasting, *J. Inverse Ill-Posed Probl.* [in print].

30. Optuna — A Hyperparameter Optimization Framework (Preferred Networks, Tokyo, 2018). Available at `optuna.org` (accessed Jan. 9, 2023).

31. A. A. Zhiglyavskii and **A. G. Zhilinskas,** *Methods for Global Extremum Search* (Moscow, Nauka, 1991).

32. J. Bergstra, R. Bardenet, Y. Bengio, and **B. Kégl,** Algorithms for hyper-parameter optimization, in *Advances in Neural Information Processing Systems 24* (25th Annual Conf., Granada, Spain, Dec. 12–15, 2011), Vol. 3 (Curran Associates, Red Hook, NY, 2012), pp. 2546–2554.

33. M. L. Daza-Torres, M. A. Capistrán, A. Capella, and **J. Andrés Christen,** Bayesian sequential data assimilation for COVID-19 forecasting, *Epidemics* **39**, ID 100564, 10 p. (2022).

Olga I. Krivorotko
Sergey I. Kabanikhin
Maktagali A. Bektemesov
Mariya I. Sosnovskaya
Andrey V. Neverov

Received July 4, 2022
Revised September 27, 2022
Accepted September 28, 2022

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2023. Т. 30, № 1. С. 67–84

УДК 519.833.2 DOI 10.33048/daio.2023.30.754

О ПОИСКЕ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ В КВАЗИВОГНУТЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ИГРАХ

И. М. Минарченко

Институт систем энергетики им Л. А. Мелентьева СО РАН,
ул. Лермонтова, 130, 664033 Иркутск, Россия

E-mail: minar@isem.irk.ru

Аннотация. Рассматривается задача поиска равновесия по Нэшу в играх с невогнутыми квадратичными функциями выигрыша. Анализируются условия, при которых функции выигрыша квазивогнуты по собственным переменным на соответствующих множествах стратегий, что гарантирует существование равновесной точки. Одним из таких условий, принимаемым в качестве основного предположения в данной работе, является наличие ровно одного положительного собственного числа у матриц целевых функций игроков. Предложен алгоритм поиска равновесия, который либо сходится к равновесной точке, либо показывает, что игра не имеет таковых. Показано, что для квазивогнутых игр часть этапов алгоритма значительно упрощается. Работа алгоритма продемонстрирована на примерах небольшой размерности. Ил. 1, библиогр. 30.

Ключевые слова: равновесие по Нэшу, квазивогнутые функции, глобальная оптимизация.

Введение

В настоящей работе рассматривается задача поиска равновесия по Нэшу в играх с квадратичными функциями выигрыша игроков. Такие игры будем называть квадратичными [1]. Квадратичные игры ранее исследовались в [2] как частный случай задач билинейного равновесного программирования. Также рассматривались обобщённые постановки, при которых не только функции выигрыша, но и множества стратегий зависят от значений переменных других игроков. При этом наиболее широко в литературе освещён специальный случай, при котором зависимость

Исследование выполнено в рамках государственного задания по программе фундаментальных исследований РФ на 2021–2030 гг. (проект № FWEU–2021–0006 [АААА–А21–121012090034–3]).

© И. М. Минарченко, 2023

множеств стратегий от чужих переменных задаётся общими для всех игроков ограничениями [2–4], в том числе линейными. Квадратичные игры с общими линейными ограничениями имеют ряд практических приложений [3], таких как модели регулирования уровня вредных выбросов в окружающую среду [5], задачи управления потоками в сетях связи [6] и модели электроэнергетических рынков [7].

Для поиска равновесия как в стандартных квадратичных играх, где допустимый набор стратегий не зависит от решений остальных участников, так и в обобщённых, были разработаны различные методы, учитывающие специфику задачи. В частности, предложены модификация метода Лемке [3], алгоритм для отыскания всех равновесий в квадратичных играх со скалярными стратегиями и общими линейными ограничениями [4], а также экстраградиентный метод [2]. Помимо этого целый ряд методов предназначен для игр с функциями выигрыша общего вида, например, релаксационные методы [8], метод Ньютона [9], методы градиентного типа [10, 11] и др.

Общим для упомянутых работ является то, что они рассматривают задачи только с вогнутыми по собственным переменным функциями выигрыша. Это стандартное предположение, которое, с одной стороны, при дополнительных естественных условиях гарантирует существование равновесия, с другой — необходимо для сходимости предлагаемых алгоритмов. Другим условием, которое, как правило, используется в литературе для обоснования сходимости методов, является монотонность соответствующего градиентного отображения или его аналоги (см., например, [9, 10, 12]).

В этой работе мы отказываемся от данных предположений и исследуем невогнутые квадратичные игры, в которых может не выполняться условие монотонности. Ранее автором анализировалась такая постановка в общем виде [13], однако в настоящем исследовании мы дополнительно предполагаем, что матрицы, определяющие функции выигрыша, имеют ровно одно положительное собственное число. Данное предположение преследует две цели. Во-первых, оно является необходимым условием квазивогнутости невогнутых функций выигрыша на собственных множествах стратегий. В свою очередь, в силу теоремы Какутани [14] это гарантирует существование равновесия в игре, если множества стратегий выпуклы и компактны, а функции выигрыша непрерывны. Более того, квазивогнутость функций выигрыша значительно упрощает нахождение равновесия по сравнению с невогнутыми функциями общего вида. Во-вторых, ровно одно положительное собственное число у матриц функций выигрыша даже при отсутствии квазивогнутости позволяет осуществлять поиск равновесия за меньшее время по сравнению со знаконеопределёнными матрицами общего вида.

Тем самым основная цель данной статьи — проанализировать условия, при которых в невогнутых квадратичных играх гарантируется существование равновесия классическими теоремами существования, использующими квазивогнутость, а также предложить метод поиска равновесия. В литературе представлены различные обобщения теорем существования, в которых условие квазивогнутости может нарушаться [15], однако мы оставляем данные результаты за рамками настоящего исследования, поскольку они не обеспечивают существенного упрощения алгоритмов поиска равновесия. Проблеме отыскания равновесных точек в квазивогнутых играх посвящено немного работ, в отличие от таковых для вогнутых игр. Например, к квазивогнутым играм были применены субградиентный [16] и проксимальный [17] методы.

1. Квадратичные квазивогнутые функции

Напомним, функция $f\colon D \to \mathbb{R}$, где $D \subseteq \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}$ обозначает множество действительных чисел, называется *квазивогнутой*, если D выпукло и верхнее множество уровня $\{x \in D \mid f(x) \geqslant \alpha\}$ выпукло для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ [18]. Дифференцируемая функция f, определённая на открытом множестве $C \subseteq \mathbb{R}^n$, называется *псевдовогнутой* на множестве $D \subseteq C$, если выполнено соотношение

$$\nabla f(x)^\top (y - x) \leqslant 0 \Rightarrow f(y) \leqslant f(x), \quad x, y \in D.$$

Как известно, для задачи максимизации псевдовогнутой функции необходимые условия оптимальности являются достаточными [19], и этот факт будет использован ниже при разработке метода поиска равновесия.

Рассмотрим квадратичную функцию

$$q(x) = \frac{1}{2} x^\top A x + b^\top x,$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — симметричная матрица, $b \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ обозначает вектор собственных чисел матрицы A, при этом $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$, и $w^1, w^2, \ldots, w^n$ — ортонормированный базис системы собственных векторов матрицы A, соответствующих $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. В дальнейшем нам потребуется

Теорема 1 [20]**.** *Невогнутая функция q квазивогнута* (*псевдовогнута*) *на некотором множестве $D \subset \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- $\operatorname{rk}(A, b) = \operatorname{rk} A$,
- *A имеет ровно одно положительное собственное число,*

- $D \subseteq D_1$ *или* $D \subseteq D_2$ ($D \subseteq D_1^0$ *или* $D \subseteq D_2^0$), *где*

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geqslant \delta,\ (w^1)^\top x \geqslant -b^\top w^1/\lambda_1\},$$
$$D_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geqslant \delta,\ (w^1)^\top x \leqslant -b^\top w^1/\lambda_1\},$$
$$D_1^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geqslant \delta,\ (w^1)^\top x > -b^\top w^1/\lambda_1\},$$
$$D_2^0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geqslant \delta,\ (w^1)^\top x < -b^\top w^1/\lambda_1\},$$
$$\delta = -\frac{1}{2}\sum_{i\in J}\frac{(b^\top w^i)^2}{\lambda_i}, \quad J = \{i \in \{1,2,\ldots,n\} \mid \lambda_i \neq 0\}.$$

Множества D_1 и D_2 могут быть представлены посредством стационарной точки функции q. Пусть для $s \in \mathbb{R}^n$ выполнено равенство $\nabla q(s) = As + b = 0$. Тогда

$$D_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geqslant q(s),\ (w^1)^\top x \geqslant (w^1)^\top s\}, \tag{1}$$
$$D_2 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \geqslant q(s),\ (w^1)^\top x \leqslant (w^1)^\top s\}. \tag{2}$$

Отсюда следуют эквивалентная форма записи

$$D_1 = s + \{z \in \mathbb{R}^n \mid z^\top Az \geqslant 0,\ (w^1)^\top z \geqslant 0\}, \tag{3}$$
$$D_2 = s + \{z \in \mathbb{R}^n \mid z^\top Az \geqslant 0,\ (w^1)^\top z \leqslant 0\} \tag{4}$$

и равенство $\delta = q(s)$. Из (3) и (4) видно, что D_1 и D_2 являются конусами с вершиной в точке s. При этом в случае неединственности стационарной точки s множества D_1 и D_2 не зависят от выбора s [20].

Для случая неотрицательных переменных имеет место следующий результат. Обозначим $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geqslant 0,\ i = 1,\ldots,n\}$.

Теорема 2 [20]**.** *Невогнутая квадратичная функция q квазивогнута на $\mathbb{R}^n_+$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

- $A \geqslant 0$, $b \geqslant 0$;
- *A имеет ровно одно положительное собственное число;*
- *существует точка $s \in \mathbb{R}^n$ такая, что $As + b = 0$, $b^\top s \leqslant 0$.*

Известно, что любой локальный максимум квадратичной квазивогнутой функции глобален [20]. Однако могут существовать стационарные точки, не являющиеся глобальным максимумом, что подтверждает

Пример 1. Рассмотрим квадратичную форму

$$q(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Собственные числа матрицы A равны $\lambda = (7, -3)$. В силу теоремы 2 функция q квазивогнута на $\mathbb{R}^2_+$, поскольку $s = (0, 0)$. Выпишем для задачи

$$q(x) \to \max, \quad 0 \leqslant x_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1, \tag{5}$$

необходимые условия оптимальности Каруша — Куна — Таккера:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 + 5x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} - \mu_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \mu_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \mu_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \mu_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$-\mu_1 x_1 = 0, \quad -\mu_2 x_2 = 0, \quad \mu_3(x_1 - 1) = 0, \quad \mu_4(x_2 - 1) = 0, \quad \mu \geqslant 0.$$

Данная система условий выполнена при $x' = s = (0, 0)$, $\mu = 0$ и $x'' = (1, 1)$, $\mu = (0, 0, 7, 7)$. Следовательно, x' и x'' являются стационарными точками в задаче (5), при этом $q(x') = 0 < q(x'') = 7$. График функции q изображён на рис. 1.

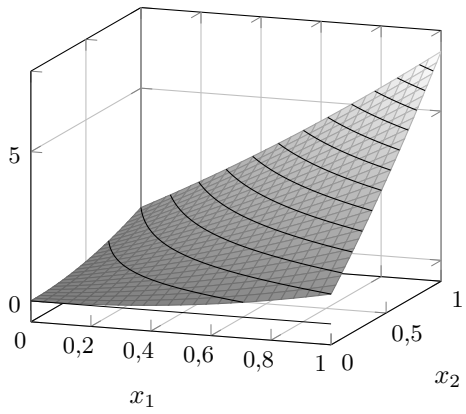


Рис. 1. Квазивогнутая на $\mathbb{R}^2_+$ квадратичная функция

В данном примере стационарная неоптимальная точка в задаче (5) будет стационарной для q на всём пространстве $\mathbb{R}^2$. Покажем, что это верно и для более общего случая.

Теорема 3. *Пусть невогнутая квадратичная функция q квазивогнута на некотором подмножестве пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда любая точка $x \in \mathbb{R}^n$ такая, что*

$$x \in D_1 \setminus D_1^0 = D_2 \setminus D_2^0, \tag{6}$$

является точкой глобального минимума функции q на D_1 и на D_2, причём $\nabla q(x) = 0$.

Доказательство. Пусть для $s \in \mathbb{R}^n$ выполняется $\nabla q(s) = 0$. Из (3), (4) и (6) следует, что $(w^1)^\top z = 0$, где $x = s + z$. Значит, z является линейной комбинацией собственных векторов $w^2, w^3, \ldots, w^n$:

$$z = t_2 w^2 + t_3 w^3 + \cdots + t_n w^n, \quad t_i \in \mathbb{R},\ i = 2, \ldots, n.$$

Поскольку $\lambda_i \leqslant 0$, $i = 2, \ldots, n$, имеем

$$z^\top A z = \lambda_2 t_2^2 \|w^2\|^2 + \cdots + \lambda_n t_n^2 \|w^n\|^2 \leqslant 0.$$

Из (6) следует, что $z^\top Az \geqslant 0$, откуда с учётом предыдущего неравенства вытекает, что $z^\top Az = 0$. Тогда нетрудно показать, что $q(x) = q(s+z) = q(s)$, откуда с учётом (1) и (2) следует, что x доставляет глобальный минимум q на D_1 и на D_2.

Равенство $z^\top Az = 0$ выполнено при $z = 0$, что сразу означает $\nabla q(x) = 0$. Пусть $z \neq 0$. Тогда для $i \in K \subseteq \{2, \ldots, n\}$ имеем $t_i \neq 0$. В этом случае из $z^\top Az = 0$ следует, что $\lambda_i = 0$, $i \in K$, откуда

$$Az = A\sum_{i\in K} t_i w^i = \sum_{i\in K} \lambda_i t_i w^i = 0.$$

В этом случае $\nabla q(x) = A(s+z) + b = 0$. Теорема 3 доказана.

Поскольку квазивогнутая функция q псевдовогнута на множествах D_1^0 и D_2^0, теорема 3 позволяет максимизировать q стандартными градиентными методами на подмножестве множества D_1 или D_2. Так, для проверки полученной стационарной точки достаточно вычислить в ней значение градиента целевой функции.

2. Квадратичные игры с функциями выигрыша, имеющими ровно одно положительное собственное число

В дальнейшем мы сосредоточимся на квадратичных играх, в которых функция выигрыша каждого игрока имеет ровно одно положительное собственное число. Поскольку данное условие может быть проверено для каждого игрока независимо, будем считать его выполненным на протяжении оставшейся части статьи. Заметим, что это не гарантирует квазивогнутости функций выигрыша. Также полагаем, что собственные векторы и собственные значения соответствующих матриц известны или же могут быть вычислены за приемлемое время.

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество игроков, $X_i \subset \mathbb{R}^{m_i}$ — выпуклое компактное множество стратегий i-го игрока, $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ — множество ситуаций игры, $f_i \colon X \to \mathbb{R}$ — функция выигрыша i-го игрока, при этом

$$f_i(x) = \frac{1}{2} x_i^\top B_i x_i + \sum_{j\in N\setminus\{i\}} x_i^\top C_{ij} x_j + x_i^\top d_i, \tag{7}$$

где $B_i \in \mathbb{R}^{m_i\times m_i}$, $C_{ij} \in \mathbb{R}^{m_i\times m_j}$ для всех $j \in N$ и $j \neq i$, $d_i \in \mathbb{R}^{m_i}$. Будем считать, что матрица B_i, $i \in N$, имеет ровно одно положительное собственное число. Введём обозначения: $x_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $X_{-i} = X_1 \times \cdots \times X_{i-1} \times X_{i+1} \times \cdots \times X_n$. Задача заключается в том, чтобы найти равновесие по Нэшу в заданной игре, т. е. вектор $x^* \in X$ такой, что

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geqslant f_i(x_i, x_{-i}^*), \quad x_i \in X_i,\ i \in N.$$

Пусть $\lambda^i = \left(\lambda^i_1, \lambda^i_2, \ldots, \lambda^i_{m_i}\right)$ — вектор собственных чисел матрицы B_i. Не умаляя общности, положим $\lambda^i_1 > 0$, $\lambda^i_s \leqslant 0$, $s = 2, 3, \ldots, m_i$, для всех $i \in N$. Обозначим через $w^{i1}, w^{i2}, \ldots, w^{im_i}$ ортонормированный базис системы собственных векторов матрицы B_i, соответствующих λ^i, $i \in N$. Обозначим

$$l_i(x_{-i}) = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} C_{ij} x_j + d_i, \quad i \in N.$$

По теореме 1 функция выигрыша i-го игрока f_i квазивогнута по собственной переменной x_i на множестве стратегий X_i при фиксированном $x_{-i} \in X_{-i}$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

$$\operatorname{rk}(B_i, l_i(x_{-i})) = \operatorname{rk} B_i, \tag{8}$$

$$X_i \subset D_{i1}(x_{-i}) \text{ или } X_i \subset D_{i2}(x_{-i}), \tag{9}$$

где

$$D_{i1}(x_{-i}) = \left\{ x_i \in \mathbb{R}^{m_i} \mid f_i(x) \geqslant \delta_i(x_{-i}),\ (w^{i1})^\top x_i \geqslant \frac{-l_i(x_{-i})^\top w^{i1}}{\lambda^i_1} \right\}, \tag{10}$$

$$D_{i2}(x_{-i}) = \left\{ x_i \in \mathbb{R}^{m_i} \mid f_i(x) \geqslant \delta_i(x_{-i}),\ (w^{i1})^\top x_i \leqslant \frac{-l_i(x_{-i})^\top w^{i1}}{\lambda^i_1} \right\}, \tag{11}$$

$$\delta_i(x_{-i}) = -\frac{1}{2} \sum_{j \in J_i} \frac{(l_i(x_{-i})^\top w^{ij})^2}{\lambda^i_j}, \quad J_i = \left\{ j \in \{1, 2, \ldots, m_i\} \mid \lambda^i_j \neq 0 \right\}.$$

Тем самым конусы квазивогнутости $D_{i1}(x_{-i})$ и $D_{i2}(x_{-i})$ зависят от стратегий остальных участников, при этом в зависимости от x_{-i} меняется только сдвиг данных конусов относительно начала координат, поскольку матрица B_i не зависит от x. Данный факт можно продемонстрировать с помощью представления (3), (4):

$$D_{i1}(x_{-i}) = s_i(x_{-i}) + \{ z \in \mathbb{R}^{m_i} \mid z^\top B_i z \geqslant 0,\ (w^{i1})^\top z \geqslant 0 \},$$

$$D_{i2}(x_{-i}) = s_i(x_{-i}) + \{ z \in \mathbb{R}^{m_i} \mid z^\top B_i z \geqslant 0,\ (w^{i1})^\top z \leqslant 0 \},$$

где $s_i(x_{-i})$ — стационарная точка функции $f_i(\cdot, x_{-i})$ на $\mathbb{R}^{m_i}$, т. е. точка, которая удовлетворяет соотношению

$$\nabla_{x_i} f_i(x_i, x_{-i})|_{x_i = s(x_{-i})} = B_i s_i(x_{-i}) + l_i(x_{-i}) = 0. \tag{12}$$

Если условия (8), (9) выполнены для любых $x_{-i} \in X_{-i}$ и для всех $i \in N$, т. е. функция выигрыша каждого игрока квазивогнута по собственной переменной при любых допустимых значениях чужих переменных, то по теореме Какутани в игре существует равновесие по Нэшу. Более того, в этом случае игра принадлежит классу сложности PPAD [21], поскольку равновесие существует и может быть проверено эффективно

одним из методов квазивыпуклой оптимизации [22, 23]. Необходимо отметить, что в общем случае невогнутая квадратичная игра NP-трудна, может не иметь равновесных точек, а для их проверки требуется привлечение методов глобальной оптимизации [13].

3. Проверка условий квазивогнутости

В общем случае условия (8), (9) сложны для проверки. Заметим, что соотношение (8) эквивалентно совместности системы линейных уравнений (12) относительно s_i. Далее для всех $i \in N$ будем считать, что B_i является матрицей полного ранга, т. е. $\operatorname{rk} B_i = m_i$. В этом случае условие (8) выполняется для любых $x_{-i} \in X_{-i}$.

Проверка условия (9) может быть сведена к решению задач оптимизации следующим образом. С учётом (10), (11) для каждого $i \in N$ введём функции

$$\psi_{i1}(x) = f_i(x) - \delta_i(x_{-i}), \quad \psi_{i2}(x) = (w^{i1})^\top \big(\lambda_1^i x_i + l_i(x_{-i})\big).$$

Если $\psi_{i1}(x) \geqslant 0$ и $\psi_{i2}(x) \geqslant 0$ ($\psi_{i2}(x) \leqslant 0$) для всех $x \in X$, то $X_i \subset D_{i1}(x_{-i})$ ($X_i \subset D_{i2}(x_{-i})$) для любых $x_{-i} \in X_{-i}$. Таким образом, для того чтобы проверить (9), достаточно для всех $i \in N$ решить следующие задачи:

$$\psi_{i1}(x) \to \min, \quad x \in X, \tag{13}$$

$$\psi_{i2}(x) \to \min, \quad x \in X, \tag{14}$$

$$\psi_{i2}(x) \to \max, \quad x \in X. \tag{15}$$

Очевидно, что в паре задач (14), (15) достаточно решить только одну, если оптимальное значение целевой функции ψ_{i2} после решения первой задачи имеет соответствующий знак.

Задача (13) имеет квадратичную невыпуклую целевую функцию, в то время как в (14) и (15) целевая функция линейна. Хотя в общем случае задача (13) сложна, на практике для её решения в качестве первого шага можно использовать метод локального поиска и, получив $\psi_{i1}(x) < 0$ для какого-либо $x \in X$, следует остановить проверку, поскольку функция f_i не будет квазивогнутой на X_i в данном случае. Если же локальным поиском не удаётся доказать отсутствие квазивогнутости, то задачу (13) необходимо решать методом глобальной оптимизации.

4. Метод поиска равновесия

Предлагаемый метод поиска равновесия основан на использовании функции Никайдо — Исоды [24] и предназначен как для квазивогнутых игр, так и для игр, в которых квазивогнутость нарушена. Схема метода, разработанная для невыпуклых квадратичных игр общего вида,

приведена в [13]. Как будет показано ниже, при применении данного метода к играм, рассматриваемым в настоящей работе, часть вычислительных этапов алгоритма упрощается. Данный метод либо сходится к одной из равновесных точек, либо показывает, что игра не имеет таковых.

Функция Никайдо — Исоды $\varphi\colon X \times X \to \mathbb{R}$ для рассматриваемой игры имеет следующий вид:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i \in N} [f_i(y_i, x_{-i}) - f_i(x_i, x_{-i})].$$

Введём функцию оптимального значения

$$V(x) = \max_{y \in X} \varphi(x, y).$$

Нетрудно убедиться, что $V(x) \geqslant 0$ для всех $x \in X$. Для того чтобы вектор $x^* \in X$ являлся равновесием по Нэшу, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось $V(x^*) = 0$. Таким образом, если множество равновесий непусто, то оно совпадает с множеством решений задачи

$$V(x) \to \min, \quad x \in X. \tag{16}$$

Рассмотрим следующие блочные матрицы:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B_n \end{pmatrix}.$$

Тогда функция V для функций выигрыша (7) примет следующий вид:

$$V(x) = \max_{y \in X} \left(\frac{1}{2} y^\top B y + y^\top (Cx + d) \right) - x^\top \left(\frac{1}{2} B + C \right) x - x^\top d.$$

Введём обозначение

$$g(x, y) = \sum_{i \in N} f_i(y_i, x_{-i}) = \frac{1}{2} y^\top B y + y^\top (Cx + d). \tag{17}$$

Идея алгоритма решения задачи (16) заключается в том, чтобы на каждой итерации k в текущей точке x^k строить опорную к V миноранту $\widetilde{V}_k\colon X \to \mathbb{R}$ [25] вида

$$\widetilde{V}_k(x) = \max_{0 \leqslant j \leqslant k} \{g(x, y^j)\} - x^\top \left(\frac{1}{2} B + C \right) x - x^\top d,$$

где y^j, $j = 0, 1, \dots, k$, — решение задачи

$$g(x^j, y) \to \max, \quad y \in X. \tag{18}$$

Затем очередное приближение x^{k+1} выбирается как решение задачи

$$\widetilde{V}_k(x) \to \min, \quad x \in X. \tag{19}$$

Поскольку g линейна по первой переменной, функция

$$v(x) = \max_{y \in X} g(x, y)$$

выпукла. В силу этого $g(x, y^j) \leqslant v(x)$ и $g(x^j, y^j) = v(x^j)$ для любых $x \in X$, $j = 0, 1, \ldots$. Таким образом, для функции $\widetilde{V}_k$ выполняются соотношения $\widetilde{V}_k(x) \leqslant V(x)$ и $\widetilde{V}_k(x^k) = V(x^k)$ для всех $x \in X$ и $k = 0, 1, \ldots$. С увеличением k улучшается аппроксимация функции V функцией $\widetilde{V}_k$. На практике задачу (19) удобнее записать в виде

$$\alpha - x^\top \Big(\frac{1}{2}B + C\Big)x - x^\top d \to \min_{(\alpha, x)}, \quad x \in X, \tag{20}$$

$$\alpha \geqslant g(x, y^j), \quad 0 \leqslant j \leqslant k. \tag{21}$$

Если вектор (α^*, x^*) — решение задачи (20), (21), то x^* — решение (19). Более того, оптимальные значения целевых функций обеих задач совпадают.

При заданном $\varepsilon \geqslant 0$ вектор $x^* \in X$ называют *ε-равновесием по Нэшу* [26], если

$$f_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geqslant f_i(x_i, x_{-i}^*) - \varepsilon, \quad x_i \in X_i, \ i \in N.$$

Для заданного $\varepsilon \geqslant 0$ будем называть вектор $x^* \in X$ *нормализованным ε-равновесием* [12], если $V(x^*) \leqslant \varepsilon$. Нетрудно убедиться, что любое нормализованное ε-равновесие является ε-равновесием, однако обратное неверно. Алгоритм решения задачи (16) следующий:

1) выбрать $x^0 \in X$, $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2 > 0$, положить $V^* := +\infty$, $k := 0$;

2) определить y^k как решение задачи (18) при $j = k$;

3) обновить рекорд: если $\varphi(x^k, y^k) < V^*$, то $V^* := \varphi(x^k, y^k)$, $x^* := x^k$;

4) если $V^* \leqslant \varepsilon_1$, то СТОП: x^* является нормализованным ε_1-равновесием;

5) определить $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{x})$ как решение задачи (20), (21); $x^{k+1} := \widetilde{x}$;

6) если $V^* - \widetilde{V}_k(x^{k+1}) \leqslant \varepsilon_2$, то СТОП: нормализованных $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$-равновесий нет; иначе $k := k + 1$, перейти на шаг 2.

Замечание 1. Переход к шагу 6 алгоритма возможен только при $V^* > \varepsilon_1$. Если критерий останова на шаге 6 выполнен, то

$$\varepsilon_1 < V^* \leqslant \widetilde{V}_k(x^{k+1}) + \varepsilon_2,$$

откуда немедленно следует, что $V(x) > \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \geqslant 0$ для всех $x \in X$.

Как показано в [27], если семейство опорных функций $\{\widetilde{V}_k\}$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то любая предельная точка последовательности x^k, $k = 0, 1, \ldots$, генерируемой предложенным алгоритмом, является точкой глобального минимума в задаче (16).

На каждой итерации алгоритма требуется решать две невыпуклые задачи квадратичного программирования: (18) и (20), (21). Заметим, что целевая функция g в задаче (18) при фиксированном значении переменной x представляет собой сумму функций выигрыша относительно собственных переменных и с фиксированными переменными остальных участников (см. (17)). Таким образом, $g(x, y)$ сепарабельна по y при фиксированном x. Если условия квазивогнутости (8), (9) выполнены для всех $x_{-i} \in X_{-i}$, $i \in N$, то задача (18) с учётом сепарабельности g распадается на n задач квазивыпуклой оптимизации, для решения которых могут быть использованы стандартные методы локального поиска в соответствии с теоремой 3. В этом случае необходимо проверять значение градиента целевой функции в получившейся точке.

Если условия квазивогнутости нарушены, то при решении задачи (18) может быть использован тот факт, что функция выигрыша каждого игрока относительно собственной переменной представляет собой квадратичную функцию, матрица которой имеет ровно одно положительное собственное число. В [28] показано, что максимизация квадратичной функции с ровно одним положительным собственным числом может быть осуществлена за приемлемое время, если входные данные задачи, такие как границы переменных и собственные числа матрицы, не зависят от размерности задачи. Важно помнить, что при нарушении условий квазивогнутости условия теоремы Какутани не выполняются и игра может не иметь равновесных ситуаций. При отсутствии равновесий результатом работы алгоритма является точка $x^* \in X$ такая, что $V(x^*) > 0$.

Наконец, отметим, что задача (20), (21) невыпуклая и требует привлечения методов глобальной оптимизации независимо от квазивогнутости функций выигрыша.

5. Вычислительный эксперимент

Для демонстрации работы алгоритма сгенерирован ряд примеров малой размерности. В каждом примере матрица B_i, $i \in N$, полного ранга и имеет ровно одно положительное собственное число. Множество стратегий каждого игрока задано в виде $X_i = \{x_i \in \mathbb{R}^{m_i} \mid l_i \leqslant x_i \leqslant u_i\}$, $i \in N$. Задачи генерировались случайно, и среди них отбирались те, для которых условие квазивогнутости (9) было выполнено для всех $x_{-i} \in X_{-i}$, $i \in N$. Таким образом, каждая выбранная игра имеет равновесную точку.

Программирование осуществлялось в системе моделирования AIMMS 4.85 [29]. Для решения задач (13)–(15), (18) и (20), (21) использовался пакет прикладных программ IBM ILOG CPLEX 22.1 [30]. Для поиска глобального решения невыпуклых квадратичных задач (13) и (20), (21) параметру «Solution_target» пакета CPLEX было присвоено значение «Search for global optimum». Для решения (18), а также для быстрого

поиска локального оптимума в (13) было использовано значение «Search for local optimum». Для задач линейного программирования (14), (15) параметр «Solution_target» не используется. Для всех остальных параметров CPLEX были установлены значения по умолчанию. Вычисления проводились на компьютере с 16-поточным процессором AMD Ryzen 7 1700X 3,4 ГГц, 16 ГБ RAM. При поиске глобального решения невыпуклых задач CPLEX использовал собственные средства распараллеливания, задействуя максимум 16 вычислительных потоков.

Пример 2. Пусть $n = 2$, $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $d = 0$, $l = (0;5;0)$, $u = (5;5{,}5;8)$,

$$B_1 = 2, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_{21} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Для данной игры имеем $\lambda^1 = 2$, $\lambda^2 = (2{,}2361; -2{,}2361)$, $w^{11} = 1$, $w^{21} = (0{,}9732; 0{,}2298)$, $w^{22} = (-0{,}2298; 0{,}9732)$. Равновесие $x^* = (5; 5{,}5; 5{,}2511)$ было найдено за 2 итерации. Общее время проверки квазивогнутости и поиска равновесия составило менее 0,5 с.

Пример 3. Пусть $n = 2$, $m_1 = m_2 = 2$, $d = 0$, $l = 3$, $u = 8$,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для данной игры имеем $\lambda^1 = (3{,}7016; -2{,}7016)$, $\lambda^2 = (2{,}2361; -2{,}2361)$, $w^{11} = (0{,}9436; 0{,}331)$, $w^{12} = (-0{,}331; 0{,}9436)$, $w^{21} = (0{,}9732; 0{,}2298)$, $w^{22} = (-0{,}2298; 0{,}9732)$. Равновесие $x^* = (8; 8; 8; 8)$ было найдено за 1 итерацию. Общее время проверки квазивогнутости и поиска равновесия составило менее 0,5 с.

Пример 4. Пусть $n = 2$, $m_1 = m_2 = 3$, $d_1 = (25{,}4; 27{,}43; 7{,}64)$, $d_2 = (13{,}96; 26{,}79; 21{,}1)$, $l_1 = (4{,}2; 4{,}7; 4{,}7)$, $l_2 = (4{,}8; 4{,}3; 4{,}5)$, $u_1 = (6{,}2; 6{,}3; 6{,}4)$, $u_2 = (6{,}7; 6{,}4; 6{,}6)$,

$$B_1 = \begin{pmatrix} -14{,}9915 & 1{,}4696 & -1{,}0867 \\ 1{,}4696 & -12{,}5337 & 3{,}3904 \\ -1{,}0867 & 3{,}3904 & 7{,}2651 \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -9{,}265 & -1{,}6576 & 0{,}7211 \\ -1{,}6576 & -4{,}5165 & -5{,}9453 \\ 0{,}7211 & -5{,}9453 & -3{,}6885 \end{pmatrix},$$

$$C_{12} = \begin{pmatrix} -4{,}53 & 12{,}38 & 2{,}54 \\ 4{,}6 & -10{,}75 & -12{,}88 \\ 11{,}67 & 12{,}55 & 7{,}46 \end{pmatrix}, \quad C_{21} = \begin{pmatrix} 8{,}05 & 2{,}3 & 1{,}48 \\ 8{,}57 & -10{,}78 & 7{,}02 \\ -11{,}7 & -10{,}41 & 2{,}45 \end{pmatrix}.$$

Для данной игры имеем

$$\lambda^1 = (7{,}86; -15{,}95; -12{,}17), \quad \lambda^2 = (2{,}1; -9{,}02; -10{,}55),$$

$$(w^{11}w^{12}w^{13}) = \begin{pmatrix} 0{,}0365 & 0{,}8680 & -0{,}4951 \\ -0{,}1613 & -0{,}4839 & -0{,}8601 \\ -0{,}9862 & 0{,}1113 & 0{,}1224 \end{pmatrix},$$

$$(w^{21}w^{22}w^{23}) = \begin{pmatrix} 0{,}1449 & -0{,}8163 & 0{,}5592 \\ -0{,}6812 & 0{,}3276 & 0{,}6547 \\ 0{,}7177 & 0{,}4758 & 0{,}5086 \end{pmatrix}.$$

Равновесие $x^* = (4{,}6645; 4{,}7; 6{,}4; 6{,}7; 5{,}1325; 4{,}5)$ было найдено за 35 итераций. Общее время проверки квазивогнутости и поиска равновесия составило 2,5 с.

6. Заключение

Рассмотрен специальный вид невогнутых квадратичных игр — игры, в которых функции выигрыша имеют ровно одно положительное собственное число. Представлены условия, при которых такие игры квазивогнуты, что гарантирует существование равновесия по Нэшу. Описан численный способ проверки условия принадлежности множества стратегий конусу квазивогнутости путём решения ряда задач оптимизации. Предложен алгоритм поиска равновесия, который либо сходится к равновесной точке, либо показывает, что игра не имеет таковых. Показано, что для квазивогнутых игр часть этапов алгоритма значительно упрощается. В качестве направлений для дальнейшего исследования следует рассмотреть способы проверки условия квазивогнутости на ранг матрицы, а также провести более представительное численное тестирование алгоритма.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильев Н. С.** О вычислении равновесия по Нэшу в квадратичных играх // Вопросы кибернетики. Вып. 154. Вычислительные вопросы анализа больших систем. М.: Науч. совет по комплекс. пробл. «Кибернетика» АН СССР, 1989. С. 64–69.
2. **Антипин А. С.** Градиентный и экстраградиентный подходы в билинейном равновесном программировании. М.: Вычисл. центр им. А. А. Дородницына РАН, 2002. 130 с.
3. **Schiro D. A., Pang J.-S., Shanbhag U. V.** On the solution of affine generalized Nash equilibrium problems with shared constraints by Lemke's method // Math. Program. Ser. A. 2013. V. 142. P. 1–46.
4. **Dreves A.** Finding all solutions of affine generalized Nash equilibrium problems with one-dimensional strategy sets // Math. Methods Oper. Res. 2014. V. 80, No. 2. P. 139–159.

5. **Haurie A., Krawczyk J. B.** Optimal charges on river effluent from lumped and distributed sources // Environ. Model. Assess. 1997. V. 2, No. 3. P. 177–189.
6. **Yin H., Shanbhag U. V., Mehta P. G.** Nash equilibrium problems with scaled congestion costs and shared constraints // IEEE Trans. Autom. Control. 2011. V. 56, No. 7. P. 1702–1708.
7. **Hobbs B. F., Pang J.-S.** Nash–Cournot equilibria in electric power markets with piecewise linear demand functions and joint constraints // Oper. Res. 2007. V. 55, No. 1. P. 113–127.
8. **Von Heusinger A., Kanzow C.** Relaxation methods for generalized Nash equilibrium problems with inexact line search // J. Optim. Theory Appl. 2009. V. 143, No. 1. P. 159–183.
9. **Dreves A., von Heusinger A., Kanzow C., Fukushima M.** A globalized Newton method for the computation of normalized Nash equilibria // J. Glob. Optim. 2013. V. 56, No. 2. P. 327–340.
10. **Rosen J. B.** Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games // Econometrica. 1965. V. 33, No. 3. P. 520–534.
11. **Антипин А. С.** Равновесное программирование: методы градиентного типа // Автоматика и телемеханика. 1997. № 8. С. 125–137.
12. **Зуховицкий С. И., Поляк Р. А., Примак М. Е.** Вогнутые игры многих лиц // Экономика и мат. методы. 1971. Т. 7, № 6. С. 888–900.
13. **Minarchenko I. M.** Search of Nash equilibrium in quadratic n-person game // Discrete optimization and operations research. Proc. 9th Int. Conf. (Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016). Cham: Springer, 2016. P. 509–521. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 9869).
14. **Kakutani S.** A generalization of Brouwer's fixed point theorem // Duke Math. J. 1941. V. 8, No. 3. P. 457–459.
15. **Kim W. K., Lee K. H.** The existence of Nash equilibrium in n-person games with C-concavity // Comput. Math. Appl. 2002. V. 44, No. 8. P. 1219–1228.
16. **Yen L. H., Muu L. D.** A parallel subgradient projection algorithm for quasiconvex equilibrium problems under the intersection of convex sets // Optimization. 2022. V. 71, No. 15. P. 4447–4462.
17. **Cruz Neto J. X., Lopes J. O., Soares P. A.** A minimization algorithm for equilibrium problems with polyhedral constraints // Optimization. 2016. V. 65, No. 5. P. 1061–1068.
18. **Boyd S., Vandenberghe L.** Convex optimization. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2004. 716 p.
19. **Mangasarian O. L.** Pseudo-convex functions // J. SIAM Control. Ser. A. 1965. V. 3, No. 2. P. 281–290.
20. **Avriel M., Diewert W. E., Schaible S., Zang I.** Generalized concavity. Philadelphia: SIAM, 2010. 342 p.
21. **Papadimitriou C. H.** On the complexity of the parity argument and other inefficient proofs of existence // J. Comput. Syst. Sci. 1994. V. 48, No. 3. P. 498–532.

22. Kiwiel K. C. Convergence and efficiency of subgradient methods for quasiconvex minimization // Math. Program. 2001. V. 90, No. 1. P. 1–25.
23. Murray R., Swenson B., Kar S. Revisiting normalized gradient descent: Fast evasion of saddle points // IEEE Trans. Autom. Control. 2019. V. 64, No. 11. P. 4818–4824.
24. Nikaidô H., Isoda K. Note on non-cooperative convex game // Pac. J. Math. 1955. V. 5, No. S1. P. 807–815.
25. Khamisov O. V. A global optimization approach to solving equilibrium programming problems // Optimization and optimal control. Singapore: World Scientific, 2003. P. 155–164. (Ser. Comput. Oper. Res.; V. 1).
26. Algorithmic game theory. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2007. 754 p.
27. Булатов В. П., Белых Т. И. Численные методы решения многоэкстремальных задач, связанных с обратными задачами математического программирования // Изв. вузов. Математика. 2007. № 6. С. 14–20.
28. Minarchenko I. M., Khamisov O. V. On minimization of a quadratic function with one negative eigenvalue // Optim. Lett. 2021. V. 15, No. 4. P. 1447–1455.
29. The advanced interactive multidimensional modeling system. Haarlem: AIMMS, 2022. Available at `aimms.com` (accessed Jan. 13, 2023).
30. IBM ILOG CPLEX optimization studio. Armonk: IBM, 2022. Available at `ibm.com/products/ilog-cplex-optimization-studio` (accessed Jan. 13, 2023).

Минарченко Илья Михайлович

Статья поступила
29 сентября 2022 г.
После доработки —
29 сентября 2022 г.
Принята к публикации
6 октября 2022 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2023. Vol. 30, No. 1. P. 67–84

UDC 519.833.2 DOI 10.33048/daio.2023.30.754

ON SEARCH OF NASH EQUILIBRIUM IN QUASICONCAVE QUADRATIC GAMES

I. M. Minarchenko

Melentiev Energy Systems Institute SB RAS,
130 Lermontov Street, 664033 Irkutsk, Russia
E-mail: minar@isem.irk.ru

Abstract. The Nash equilibrium problem with nonconcave quadratic payoff functions is considered. We analyze conditions which provide quasiconcavity of payoff functions in their own variables on the respective strategy sets and, consequently, guarantee existence of an equilibrium point. One of such conditions is that the matrix of every payoff function has exactly one positive eigenvalue; this condition is viewed as a basic assumption in the paper. We propose an algorithm that either converges to an equilibrium point or declares that the game has no equilibria. It is shown that some stages of the algorithm are noticeably simplified for quasiconcave games. The algorithm is tested on small-scale instances. Illustr. 1, bibliogr. 30.

Keywords: Nash equilibrium, quasiconcave functions, global optimization.

REFERENCES

1. **N. S. Vasil'ev,** Computing Nash equilibrium in quadratic games, in *Problems of Cybernetics,* No. 154. (Computational Problems in Analysis of Large-Scale Systems) (Nauchn. Sovet Kompleks. Probl. «Kibernetika» AN SSSR, Moscow, 1989), pp. 64–69 [Russian].
2. **A. S. Antipin,** *Gradient and Extra-Gradient Approaches in Bilinear Equilibrium Programming* (Vychisl. Tsentr Dorodnitsyn. RAN, Moscow, 2002) [Russian].

This research is carried out within the state assignment under the Program of Fundamental Research in Russia 2021–2030 (Project FWEU–2021–0006 [AAAA–A21–121012090034–3]).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **17** (1) (2023).

3. **D. A. Schiro, J.-S. Pang,** and **U. V. Shanbhag,** On the solution of affine generalized Nash equilibrium problems with shared constraints by Lemke's method, *Math. Program., Ser. A,* **142**, 1–46 (2013).
4. **A. Dreves,** Finding all solutions of affine generalized Nash equilibrium problems with one-dimensional strategy sets, *Math. Methods Oper. Res.* **80** (2), 139–159 (2014).
5. **A. Haurie** and **J. B. Krawczyk,** Optimal charges on river effluent from lumped and distributed sources, *Environ. Model. Assess.* **2** (3), 177–189 (1997).
6. **H. Yin, U. V. Shanbhag,** and **P. G. Mehta,** Nash equilibrium problems with scaled congestion costs and shared constraints, *IEEE Trans. Autom. Control* **56** (7), 1702–1708 (2011).
7. **B. F. Hobbs** and **J.-S. Pang,** Nash–Cournot equilibria in electric power markets with piecewise linear demand functions and joint constraints, *Oper. Res.* **55** (1), 113–127 (2007).
8. **A. von Heusinger** and **C. Kanzow,** Relaxation methods for generalized Nash equilibrium problems with inexact line search, *J. Optim. Theory Appl.* **143** (1), 159–183 (2009).
9. **A. Dreves, A. von Heusinger, C. Kanzow,** and **M. Fukushima,** A globalized Newton method for the computation of normalized Nash equilibria, *J. Glob. Optim.* **56** (2), 327–340 (2013).
10. **J. B. Rosen,** Existence and uniqueness of equilibrium points for concave n-person games, *Econometrica* **33** (3), 520–534 (1965).
11. **A. S. Antipin,** Equilibrium programming: Gradient methods, *Avtom. Telemekh.,* No. 8, 125–137 (1997) [Russian] [*Autom. Remote Control* **58** (8), Pt. 2, 1337–1347 (1997)].
12. **S. I. Zukhovitskii, R. A. Polyak,** and **M. E. Primak,** Concave many-person games, *Ekon. Mat. Metody* **7** (6), 888–900 (1971) [Russian].
13. **I. M. Minarchenko,** Search of Nash equilibrium in quadratic n-person game, in *Discrete Optimization and Operations Research* (Proc. 9th Int. Conf., Vladivostok, Russia, Sept. 19–23, 2016) (Springer, Cham, 2016), pp. 509–521. (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9869).
14. **S. Kakutani,** A generalization of Brouwer's fixed point theorem, *Duke Math. J.* **8** (3), 457–459 (1941).
15. **W. K. Kim** and **K. H. Lee,** The existence of Nash equilibrium in n-person games with C-concavity, *Comput. Math. Appl.* **44** (8), 1219–1228 (2002).
16. **L. H. Yen** and **L. D. Muu,** A parallel subgradient projection algorithm for quasiconvex equilibrium problems under the intersection of convex sets, *Optimization* **71** (15), 4447–4462 (2022).
17. **J. X. Cruz Neto, J. O. Lopes,** and **P. A. Soares,** A minimization algorithm for equilibrium problems with polyhedral constraints, *Optimization* **65** (5), 1061–1068 (2016).
18. **S. Boyd** and **L. Vandenberghe,** *Convex Optimization* (Camb. Univ. Press, Cambridge, 2004).
19. **O. L. Mangasarian,** Pseudo-convex functions, *J. SIAM Control, Ser. A,* **3** (2), 281–290 (1965).

20. M. Avriel, W. E. Diewert, S. Schaible, and **I. Zang,** *Generalized Concavity* (SIAM, Philadelphia, 2010).
21. C. H. Papadimitriou, On the complexity of the parity argument and other inefficient proofs of existence, *J. Comput. Syst. Sci.* **48** (3), 498–532 (1994).
22. K. C. Kiwiel, Convergence and efficiency of subgradient methods for quasiconvex minimization, *Math. Program.* **90** (1), 1–25 (2001).
23. R. Murray, B. Swenson, and **S. Kar,** Revisiting normalized gradient descent: Fast evasion of saddle points, *IEEE Trans. Autom. Control* **64** (11), 4818–4824 (2019).
24. H. Nikaidô and **K. Isoda,** Note on non-cooperative convex game, *Pac. J. Math.* **5** (S1), 807–815 (1955).
25. O. V. Khamisov, A global optimization approach to solving equilibrium programming problems, in *Optimization and Optimal Control* (World Scientific, Singapore, 2003), pp. 155–164. (Ser. Comput. Oper. Res., Vol. 1).
26. Algorithmic Game Theory (Camb. Univ. Press, Cambridge, 2007).
27. V. P. Bulatov and **T. I. Belykh,** Numerical solution methods for multiextremal problems connected with inverse problems in mathematical programming, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.,* No. 6, 14–20 (2007) [Russian] [*Russ. Math.* **51** (6), 11–17 (2007)].
28. I. M. Minarchenko and **O. V. Khamisov,** On minimization of a quadratic function with one negative eigenvalue, *Optim. Lett.* **15** (4), 1447–1455 (2021).
29. The Advanced Interactive Multidimensional Modeling System (AIMMS, Haarlem, 2022). Available at `aimms.com` (accessed Jan. 13, 2023).
30. IBM ILOG CPLEX Optimization Studio (IBM, Armonk, 2022). Available at `ibm.com/products/ilog-cplex-optimization-studio` (accessed Jan. 13, 2023).

Ilya M. Minarchenko

Received September 29, 2022
Revised September 29, 2022
Accepted October 6, 2022

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2023. Т. 30, № 1. С. 85–109

УДК 519.178 DOI 10.33048/daio.2023.30.752

НОВЫЕ СЛУЧАИ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ О НЕЗАВИСИМОМ МНОЖЕСТВЕ ДЛЯ ГРАФОВ С ЗАПРЕЩЁННЫМИ ТРИОДАМИ

С. В. Сорочан

Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского,
пр. Гагарина, 23, 603950 Нижний Новгород, Россия
E-mail: sergey.sorochan@itmm.unn.ru

Аннотация. Триод — это дерево с тремя листьями и единственной вершиной степени 3. Задача о независимом множестве разрешима за полиномиальное время для графов, не содержащих в качестве подграфа триод с любым фиксированным числом вершин. Если же запрещается порождённый триод с k вершинами, то при $k > 5$ сложность решения этой задачи неизвестна. В статье рассматриваются промежуточные случаи, когда запрещаются порождённый триод с любым фиксированным числом вершин и некоторые его надграфы. Для произвольного триода с фиксированным числом вершин доказана разрешимость задачи о независимом множестве за полиномиальное время в следующих случаях:

1) запрещаются триод и все его остовные надграфы с ограниченными степенями вершин;

2) запрещаются триод и все его остовные надграфы с большим дефицитом (числом рёбер в дополнительном графе);

3) запрещаются триод и все его надграфы, из которых с помощью операции пересечения графов можно получить этот триод, а в самом графе есть вершина с ограниченной антистепенью.

Библиогр. 20.

Ключевые слова: независимое множество, НМ-простой класс, НМ-сложный класс, монотонный класс, наследственный класс, запрещённый подграф, триод, надграф, полиномиальный алгоритм.

Введение

Под *классом графов* понимается множество графов, замкнутое относительно переименования вершин. Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин, и *монотонным*, если он замкнут относительно удаления вершин и рёбер. Отметим,

© С. В. Сорочан, 2023

что в работе [1] монотонные классы были названы по-другому, а именно, *сильно наследственными*. Чтобы чётче различать понятия «наследственный класс» и «сильно наследственный класс», в отношении последнего в этой статье всегда будем использовать термин «монотонный класс», так же, как это сделано в работе [2].

Любой наследственный класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством *запрещённых подграфов* $\mathcal{M}$: $\mathcal{X}$ состоит из всех графов, не содержащих порождённых подграфов, изоморфных графам из $\mathcal{M}$. В этом случае пишут $\mathcal{X} = \mathrm{Free}(\mathcal{M})$, а графы из $\mathcal{X}$ называют $\mathcal{M}$-*свободными*. Если $\mathcal{M}$ конечное, класс $\mathrm{Free}(\mathcal{M})$ называется *конечно определённым*. Всякий монотонный класс наследственный, поэтому может быть задан множеством запрещённых (порождённых) подграфов. При этом множество запрещённых подграфов для монотонного класса имеет очевидную особенность: вместе со всяким содержащимся в нём графом оно содержит также все графы, получающиеся из него добавлением рёбер.

Независимое множество в графе — это множество не смежных между собой вершин. *Задача о независимом множестве* состоит в том, чтобы в заданном графе найти независимое множество наибольшей мощности. Размер *наибольшего независимого множества* (ННМ) графа G называется его *числом независимости* и обозначается через $\alpha(G)$. Задача о независимом множестве NP-трудна в множестве всех графов и остаётся такой для многих классов графов, такие классы называем НМ-*сложными*. Известно также немало классов графов, для которых она может быть решена за полиномиальное время, их называем НМ-*простыми*. Есть результаты и общего характера, относящиеся не к отдельным классам, а к семействам классов. Так, в [1] установлено, что конечно определённый монотонный класс $\mathcal{X}$ будет НМ-сложным, если $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{X}$, и НМ-простым в противном случае. Здесь $\mathcal{T}$ — класс всех графов, у которых каждая компонента связности является деревом с не более чем тремя листьями. Такое дерево называется *триодом*. Обозначенную дихотомию пока не удалось распространить на наследственные классы. В работе [3] доказано, что любой конечно определённый наследственный класс, включающий класс $\mathcal{T}$, НМ-сложный. Движение во встречном направлении связано с разработкой полиномиальных алгоритмов для классов, определяемых запрещёнными подграфами из $\mathcal{T}$. Если говорить о классах, определяемых одним запрещённым подграфом из $\mathcal{T}$, то наибольшие продвижения здесь состоят в установлении НМ-простоты классов

- $\mathrm{Free}(mK_2)$ при любом m [4],
- $\mathrm{Free}(T_{1,1,2})$, где $T_{1,1,2}$ — триод на пяти вершинах, т. е. граф, получаемый из графа $K_{1,3}$ подразбиением одного ребра [5],
- $\mathrm{Free}(K_2 + K_{1,3})$, где $K_2 + K_{1,3}$ — это дизъюнктное объединение графов K_2 и $K_{1,3}$ [6],

- Free(P_5) [7],
- Free(P_6) [8].

Кроме того, имеется ряд результатов о НМ-простоте некоторых подклассов классов, определяемых запрещёнными подграфами из $\mathcal{T}$ (см., например, [9–13]). Также можно отметить работы [14, 15], содержащие довольно много идей, которые используются в [10].

Заметим, что в отличие от монотонных классов для конечно определённых наследственных классов графов имеется значительный разрыв в наших знаниях о НМ-простых и НМ-сложных классах. По-видимому, трудно рассчитывать на ликвидацию этого разрыва в близком будущем, и имеет смысл испытать другие подходы к проблеме разделения НМ-простых и НМ-сложных классов. Одним из направлений может быть рассмотрение семейств классов графов, промежуточных между семействами монотонных и наследственных классов. Для этих промежуточных семейств можно надеяться получить результаты дихотомического характера типа упомянутого выше, либо хотя бы приблизиться к этому.

Первая попытка получения новых результатов в данном направлении была предпринята в работе [2]. Если наследственный класс определяется одним запрещённым подграфом G, то множество запрещённых подграфов, состоящее из всех остовных надграфов графа G, определяет монотонный класс. Если ограничить добавление рёбер какими-либо правилами, то получится класс, заключённый между этими двумя. Вводя ограничения на множество добавляемых рёбер, получаем возможность определять семейства классов графов, промежуточные между семействами монотонных и наследственных классов. В [2] было рассмотрено три типа ограничений на добавление рёбер к графу P_k (путь с k вершинами) и доказана НМ-простота следующих наследственных классов:

- множество запрещённых подграфов состоит из всех остовных надграфов пути P_k, у которых минимальная степень вершины меньше $\frac{k}{2}$;
- множество запрещённых подграфов состоит из всех остовных надграфов пути P_k, у которых дополнительный граф имеет меньше $\frac{k}{2}$ рёбер;
- множество запрещённых подграфов состоит из всех остовных надграфов пути P_k, из которых с помощью операции пересечения графов можно получить P_k.

Эта статья продолжает исследования, начатые в [2]. Так как всякий простой путь содержится в качестве порождённого подграфа в некотором триоде, следующим естественным шагом в заданном направлении является рассмотрение указанных выше типов ограничений по отношению к триодам.

Пусть натуральные числа i, j, k связаны неравенствами $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$. Через $T_{i,j,k}$ обозначим триод, у которого из единственной вершины степени 3 выходят простые цепи длины i, j, k соответственно. Обозначим через

s сумму длин этих трёх цепей: $s = i + j + k$. У триода $T_{i,j,k}$, очевидно, $s + 1$ вершин и s рёбер, где $s \geqslant 4$ при $k \geqslant 2$.

В продолжение результатов работы [2] в этой статье мы рассмотрим три типа ограничений на добавление рёбер к триоду $T_{i,j,k}$. Эти ограничения задают следующие классы, промежуточные между монотонными и наследственными:

• множество запрещённых подграфов состоит из всех остовных надграфов триода $T_{i,j,k}$, у которых минимальная степень вершины меньше $\frac{s+i+1}{2}$;

• множество запрещённых подграфов состоит из всех остовных надграфов триода $T_{i,j,k}$, у которых дополнительный граф имеет меньше чем $\frac{s}{2} - 1$ рёбер;

• множество запрещённых подграфов состоит из всех надграфов триода $T_{i,j,k}$, из которых с помощью операции пересечения графов можно получить $T_{i,j,k}$.

Для первых двух классов и некоторого нетривиального подкласса третьего класса будет доказана их НМ-простота. Мы представим полиномиальные алгоритмы решения задачи о ННМ в этих классах и приведём верхние оценки сложности решающих алгоритмов.

В статье применяются следующие обозначения:

$\langle G \rangle$ — множество всех остовных надграфов графа G, т. е. надграфов, получающихся из G добавлением рёбер;

$N(a)$ — множество вершин рассматриваемого графа, смежных с вершиной a (*окрестность* вершины a);

если X — подмножество множества вершин графа G, то

$G[X]$ — подграф графа G, порождённый множеством X;

$G - X$ — подграф, полученный удалением из графа G всех вершин множества X;

$N(X)$ — множество всех вершин графа, смежных с вершинами из множества X (*окрестность* множества X);

$\deg_X(a)$ — число вершин в X, смежных с a (*степень* вершины a в X).

1. Запрещаются триод $T_{i,j,k}$ и все его остовные надграфы

Этот раздел предварительный. Здесь при любых фиксированных значениях $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$ рассмотрим класс $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k} \rangle)$ всех графов, не содержащих триода $T_{i,j,k}$ (и всех его остовных надграфов). Кроме того, при каждом фиксированном $k \geqslant 3$ рассмотрим класс $\mathcal{L}_k = \mathrm{Free}(\langle \{C_q \mid q \geqslant k\} \rangle)$ всех графов, не содержащих циклов длины не меньше k (и всех их остовных надграфов).

НМ-простота классов $\mathcal{L}_k$ и $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k} \rangle)$ при всех $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$ (так же, как и некоторых других классов графов) установлена в [1]. Однако полиномиальные алгоритмы для нахождения ННМ в графах из этих классов

в явном виде в [1] представлены не были, как и не были даны в явном виде оценки их трудоёмкости. Здесь мы приведём доказательство НМ-простоты именно для этих классов с установлением полиномиальных оценок трудоёмкости решающих алгоритмов. При выводе оценок используются приводимые ниже три леммы, доказанные в [1], и одно утверждение, доказанное в [2].

Лемма 1 [1, лемма 1]**.** *В каждом двусвязном графе из класса $\mathcal{L}_{k+1}$ любые два простых цикла длины k имеют общую вершину.*

Лемма 2 [1, лемма 2]**.** *В любом связном графе из класса* $\mathrm{Free}(\langle T_{k,k,k}\rangle)$ *любой простой цикл длины, не меньшей чем $2k+1$, и всякая простая цепь длины $2k-2$ имеют общую вершину.*

Лемма 3 [1, лемма 4]**.** *Если $\mathcal{X}$ —* НМ*-простой наследственный класс, то класс всех графов, у каждого из которых каждый блок* (*т. е. компонента двусвязности*) *принадлежит $\mathcal{X}$, также является* НМ*-простым наследственным классом.*

Лемма 4 [2, лемма 1]**.** *Задача о независимом множестве для графов с n вершинами из класса* $\mathrm{Free}(\langle P_k\rangle)$ *решается за время $O(n^{k-1})$ при любом фиксированном $k \geqslant 2$.*

Сначала установим оценку сложности алгоритма для решения задачи о ННМ в графах из класса $\mathcal{L}_k$ при каждом фиксированном $k \geqslant 3$. Хотя $\mathcal{L}_k$ и не является конечно определённым классом, оценка сложности решения задачи о ННМ в этом классе играет важную роль для установления сложности решающего алгоритма в классе $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}\rangle)$.

Теорема 1. *Задача о независимом множестве для графов с n вершинами из класса $\mathcal{L}_k$ решается за время $O(n^k)$ при любом фиксированном $k \geqslant 3$.*

Доказательство. Обозначим через $f_k(n)$ сложность решения задачи о независимом множестве для графов с n вершинами из класса $\mathcal{L}_k$. Для установления верхней оценки величины $f_k(n)$ реализуем идею, предложенную в [1] для доказательства леммы 3.

При $k = 3$ класс $\mathcal{L}_3$ является классом всех лесов (ациклических графов), для этого класса известно, что $f_3(n) = O(n)$. Индукцией по k докажем, что $f_k(n) \leqslant 2^{k^2} n^k$ при любом фиксированном $k \geqslant 3$.

Допустим, что $k \geqslant 3$ и имеется алгоритм $\mathbf{A}_k$, находящий наибольшее независимое множество в графах из класса $\mathcal{L}_k$ за время, не превосходящее $f_k(n)$. Пусть $G = (V, E)$ — граф с n вершинами из класса $\mathcal{L}_{k+1}$.

За время, не превосходящее cn^2 (например, используя поиск в глубину), в графе G можно найти все компоненты связности, все блоки (максимальные по включению двусвязные подграфы) и все точки сочленения

(шарниры). Здесь c — некоторая положительная константа. Наибольшее независимое множество графа есть объединение наибольших независимых множеств его компонент связности. Значит, не ограничивая общности, можно считать, что входной граф G связен. Если G не двусвязный, то пусть B — блок графа G, имеющий единственную точку сочленения a. В противном случае считаем, что B — это сам граф G (в таком случае в нём нет точек сочленения). За время, не превосходящее n^k, в блоке B можно найти простой цикл длины k или убедиться, что такого цикла нет. В последнем случае к блоку B применим алгоритм $\mathbf{A}_k$.

Пусть C — цикл длины k в блоке B, $V(C)$ — множество вершин этого цикла. Из леммы 1 следует, что если из блока B удалить все вершины цикла C, то на оставшемся множестве его вершин, т. е. в подграфе $G[V(B) \setminus V(C)]$, больше не будет других циклов длины k. Это значит, что подграф $G[V(B) \setminus V(C)]$ принадлежит классу $\mathcal{L}_k$. Тем самым ННМ в блоке B можно найти следующим образом: перебираем все независимые множества в графе $G[V(C)]$, для каждого такого множества U с помощью алгоритма $\mathbf{A}_k$ находим ННМ в графе $B - (V(C) \cup N(U))$ и объединяем его с U. Наибольшее из полученных множеств будет ННМ блока B. Точно так же можно найти ННМ в графе $B - a$, поскольку он является подграфом блока B. Всего для нахождения ННМ в каждом из графов B и $B - a$ алгоритм $\mathbf{A}_k$ будет применён не более 2^k раз, поэтому суммарная трудоёмкость нахождения ННМ для обоих графов B и $B - a$ не превосходит $2\max\{f_k(n),\, 2^k f_k(n-k)\} \leqslant 2^{k+1} f_k(n)$.

Далее, положим $H = G - (V(B) \setminus \{a\})$. При доказательстве леммы 3 в [1] установлено, что

$$\alpha(G) = \begin{cases} \alpha(B) + \alpha(H - a), & \text{если } \alpha(B) = \alpha(B - a), \\ \alpha(B - a) + \alpha(H), & \text{если } \alpha(B) = \alpha(B - a) + 1. \end{cases}$$

Отсюда следует, что для нахождения ННМ графа G нужно сравнить числа $\alpha(B)$ и $\alpha(B - a)$. Если они равны, то нужно объединить ННМ графов B и $H - a$, в противном случае нужно объединить ННМ графов $B - a$ и H. Заметим, что блок B содержит не менее двух вершин. Значит, число вершин в каждом из графов H и $H - a$ не превосходит $n - 1$. Это даёт возможность после того, как найдены ННМ в графах B и $B - a$, применить рекурсивно алгоритм $\mathbf{A}_{k+1}$ в точности к одному из графов H или $H - a$, у каждого из которых число вершин меньше числа вершин исходного графа G. Отсюда следует рекуррентное соотношение для оценки сложности алгоритма $\mathbf{A}_{k+1}$:

$$\begin{aligned} f_{k+1}(n) &\leqslant cn^2 + n^k + 2^{k+1} f_k(n) + f_{k+1}(n-1) \\ &\leqslant (c+1)n^k + 2^{k+1} f_k(n) + f_{k+1}(n-1). \end{aligned}$$

Решая это соотношение, получаем

$$f_{k+1}(n) \leqslant (c+1)n^{k+1} + 2^{k+1}nf_k(n).$$

В завершение, применив предположение индукции $f_k(n) \leqslant 2^{k^2}n^k$, находим

$$f_{k+1}(n) \leqslant (c+1)n^{k+1} + 2^{k+1}n \cdot 2^{k^2}n^k$$
$$= (c+1+2^{k^2+k+1})n^{k+1} \leqslant 2^{(k+1)^2}n^{k+1}.$$

Таким образом, $f_k(n) = O(n^k)$ при каждом фиксированном $k \geqslant 3$. Теорема 1 доказана.

Установим оценку сложности алгоритма решения задачи о ННМ для графов из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}\rangle)$ при любых фиксированных $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$.

Теорема 2. *Задача о независимом множестве для графов с n вершинами из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}\rangle)$ решается за время $O(n^{2k+1})$ при любых фиксированных $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$.*

Доказательство. Сначала при любом фиксированном $k \geqslant 1$ рассмотрим класс $\mathrm{Free}(\langle T_{k,k,k}\rangle)$. Обозначим через $t_k(n)$ сложность решения задачи о независимом множестве для графов с n вершинами из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{k,k,k}\rangle)$. Для установления верхней оценки величины $t_k(n)$ реализуем идею, предложенную в [1] для доказательства леммы 5.

При $k = 1$ утверждение очевидно, так как

$$\mathrm{Free}(\langle T_{1,1,1}\rangle) = \mathrm{Free}(\langle K_{1,3}\rangle) \subseteq \mathrm{Free}(K_{1,3}),$$

а полиномиальные алгоритмы решения задачи о независимом множестве в графах без звёзд $K_{1,3}$ были предложены, например, в [16–18]. Впрочем, приводимое ниже доказательство справедливо в том числе и для обозначенного частного случая: мы докажем, что $t_k(n) = O(n^{2k+1})$ при любом фиксированном $k \geqslant 1$.

Приводимое ниже доказательство фактически является полиномиальным алгоритмом решения задачи о ННМ для графов из $\mathrm{Free}(\langle T_{k,k,k}\rangle)$. Обозначим этот алгоритм через $\mathbf{A}'_k$.

Пусть $k \geqslant 1$ и $G = (V, E)$ — n-вершинный граф из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{k,k,k}\rangle)$. ННМ графа есть объединение наибольших независимых множеств его компонент связности. Компоненты связности могут быть найдены, скажем, с помощью поиска в глубину за время cn^2, где c — положительная константа. Тем самым, не уменьшая общности, можно предполагать, что входной граф G связен.

За время, не превосходящее n^{2k-1}, в графе G можно найти простой путь на $2k-1$ вершинах или убедиться, что такого пути нет. В последнем случае применим к G алгоритм нахождения ННМ для графов из класса

$\mathrm{Free}(\langle P_{2k-1}\rangle)$, описание и доказательство которого приведены в [2, лемма 4]. Верхняя оценка сложности этого алгоритма равна $a_k n^{2k-2}$, где a_k — положительная константа, зависящая, быть может, только от k.

Пусть P — путь на $2k-1$ вершинах в графе G (длины $2k-2$), $V(P)$ — множество вершин этого пути. Из леммы 2 следует, что $G - V(P) \in \mathcal{L}_{2k+1}$, поэтому наибольшее независимое множество в графе G можно найти следующим образом: перебираем все независимые множества в графе $G[V(P)]$, затем для каждого такого множества U находим с помощью алгоритма $\mathbf{A}_{2k+1}$, описанного в доказательстве теоремы 1, ННМ в графе $G - (V(P) \cup N(U)) \in \mathcal{L}_{2k+1}$ и объединяем его с U. Наибольшее из полученных множеств будет наибольшим независимым множеством графа G. Всего алгоритм $\mathbf{A}_{2k+1}$ будет выполнен не более чем 2^{2k-1} раз, а трудоёмкость алгоритма $\mathbf{A}_{2k+1}$, как установлено в теореме 1, не превосходит $f_{2k+1}(n) \leqslant 2^{(2k+1)^2} n^{2k+1}$. Таким образом, общая трудоёмкость алгоритма $\mathbf{A}'_k$ нахождения ННМ в графе G не превосходит величины

$$t_k(n) \leqslant cn^2 + n^{2k-1} + \max\{a_k n^{2k-2},\, 2^{2k-1} f_{2k+1}(n-2k+1)\}$$
$$\leqslant (c+1)n^{2k} + (2^{(2k+1)^2+2k-1} + a_k)n^{2k+1} = O(n^{2k+1}).$$

В завершение остаётся только заметить, что при всех $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$ справедливо включение $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}\rangle) \subseteq \mathrm{Free}(\langle T_{k,k,k}\rangle)$, поэтому найденная верхняя оценка $t_k(n) = O(n^{2k+1})$ сложности решения задачи о ННМ в классе $\mathrm{Free}(\langle T_{k,k,k}\rangle)$ автоматически справедлива и для любого графа из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}\rangle)$. Теорема 2 доказана.

Сумма $G_1 + G_2$ двух графов — это их объединение (в теоретико-множественном смысле) при условии, что $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$, а *соединение* $G_1 \circ G_2$ получается из суммы добавлением всех рёбер, соединяющих вершины графа G_1 с вершинами графа G_2. Граф, не являющийся суммой или соединением графов, будем называть *неразложимым*. Это означает, что как сам граф, так и дополнительный к нему связны. Очевидно, что ННМ графа $G_1 + G_2$ есть объединение ННМ графов G_1 и G_2, а ННМ графа $G_1 \circ G_2$ есть большее из этих двух множеств. Тем самым для доказательства НМ-простоты некоторого класса $\mathcal{X}$ достаточно установить, что задача о независимом множестве может быть решена за полиномиальное время для всех неразложимых графов из этого класса.

2. Запрещаются триод $T_{i,j,k}$ и все его остовные надграфы ограниченной степени

Для графа G через $\langle G, \delta < d\rangle$ обозначим множество всех остовных надграфов графа G, у которых минимальная степень вершины меньше d. Пусть $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$ и $s = i + j + k$. В этом разделе рассмотрим

класс графов $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < d\rangle)$. Данный класс состоит из всех графов, у которых в любом подграфе, имеющем триод $T_{i,j,k}$ в качестве остовного подграфа, степень каждой вершины не меньше d. Заметим, что случай $i = j = k = 1$ неинтересен, так как $\mathrm{Free}(\langle T_{1,1,1}, \delta < d\rangle) \subseteq \mathrm{Free}(K_{1,3})$, поэтому далее считаем, что $k \geqslant 2$ и, следовательно, $s \geqslant 4$.

Будет доказано, что класс графов $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < d\rangle)$ НМ-простой при любых $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$ и $d = \frac{s+i+1}{2}$.

Приводимая ниже лемма 5 устанавливает тот факт, что из каждого триода $T_{i,j,k}$, содержащегося в графе G из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < \frac{s+i+1}{2}\rangle)$ в качестве остовного подграфа, с помощью замены любой вершины b этого триода вершиной y из $G - V(T_{i,j,k})$, смежной хотя бы с одной вершиной a из $T_{i,j,k} - b$, можно получить новый триод, содержащийся в G и имеющий те же самые длины цепей i, j, k.

Лемма 5 (о замене триода)**.** *Пусть $G \in \mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < \frac{s+i+1}{2}\rangle)$, а множество $X \subset V(G)$ мощности $|X| = s + 1$ порождает подграф $G[X]$, содержащий триод $T_{i,j,k}$ в качестве остовного подграфа. Тогда для любых трёх различных вершин $a, b \in X$ и $y \in V(G) \setminus X$ таких, что y и a смежны, множество $X' = (X \setminus \{b\}) \cup \{y\}$ порождает подграф $G[X']$, содержащий триод $T_{i,j,k}$ в качестве остовного подграфа.*

Доказательство. По условию степень каждой вершины в подграфе $G[X]$ не меньше $\frac{s+i+1}{2}$. Значит, степень каждой вершины в подграфе $G[X \setminus \{b\}]$ не меньше $\frac{s+i-1}{2} \geqslant \frac{s}{2}$. Следовательно, по теореме Дирака (см., например, [19]) в подграфе $G[X \setminus \{b\}]$ существует гамильтонов цикл. Обозначим через $c_1, c_2, \ldots, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_s$ вершины этого цикла, упорядоченные в соответствии с его прохождением, начиная с вершины $c_1 = a$. Добавляя к этой последовательности вершину y, смежную с a, получаем цепь $(y, c_1, c_2, \ldots, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_s)$. Убедимся в том, что начальный сегмент $(y, c_1, c_2, \ldots, c_i)$ этой цепи является цепью длины i некоторого триода $T_{i,j,k}$ с множеством вершин X'.

Пусть $X_0 = \{c_1 = a, c_2, \ldots, c_{i-1}\}$, $|X_0| = i - 1$ ($X_0 = \varnothing$ при $i = 1$). Обозначим $X_1 = (X \setminus \{b\}) \setminus X_0$ и заметим, что $c_i \in X_1$. В подграфе $G[X_1]$ имеется $|X_1| = j+k+1 = s-i+1$ вершин степени не меньше чем $\frac{s+i-1}{2} - (i-1) = \frac{s-i+1}{2}$ каждая. Значит, по теореме Дирака в подграфе $G[X_1]$ есть гамильтонов цикл (на $j+k+1$ вершинах, среди которых есть вершина c_i). Соединяя этот цикл с найденной ранее цепью $(y, c_1 = a, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_i)$, обнаруживаем в графе $G[X']$ в качестве остовного подграфа триод $T_{i,j,k}$, в котором c_i является вершиной степени 3. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Пусть G — связный граф из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < \frac{s+i+1}{2}\rangle)$, а множество $X \subset V(G)$ мощности $|X| = s + 1$ порождает подграф $G[X]$, содержащий триод $T_{i,j,k}$ в качестве остовного подграфа. Тогда каждая вершина из множества $V(G) \setminus X$ смежна хотя бы с одной вершиной из X.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы 6 неверно. Тогда в силу связности графа G найдутся такие две смежные вершины $y_1, y_2 \in V(G) \setminus X$, что y_1 не смежна ни с одной вершиной из X, а y_2 смежна с некоторой вершиной $a \in X$.

Возьмём произвольную вершину $b_1 \in X \setminus \{a\}$ и рассмотрим подграф $G[X']$, порождённый множеством $X' = (X \setminus \{b_1\}) \cup \{y_2\}$. По лемме 5 в этом подграфе содержится триод $T_{i,j,k}$ в качестве остовного подграфа.

Далее возьмём произвольную вершину $b_2 \in X' \setminus \{a, y_2\}$ и рассмотрим подграф $G[X'']$, порождённый множеством вершин

$$X'' = (X' \setminus \{b_2\}) \cup \{y_1\} = (X \setminus \{b_1, b_2\}) \cup \{y_1, y_2\}.$$

Снова из леммы 5 следует, что и в этом подграфе содержится триод $T_{i,j,k}$ в качестве остовного подграфа.

Однако в подграфе $G[X'']$ вершина y_1 смежна с единственной вершиной y_2. Это противоречит тому, что $G \in \mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < \frac{s+i+1}{2} \rangle)$. Действительно, так как $s \geqslant 4$, степень каждой вершины любого графа с $s+1$ вершинами из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < \frac{s+i+1}{2} \rangle)$, содержащего триод $T_{i,j,k}$, должна быть не меньше чем 3. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. *Пусть $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$ и $s = i + j + k$. Тогда каждый неразложимый граф из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < \frac{s+i+1}{2} \rangle)$, в котором более чем $s+1$ вершин, либо принадлежит классу $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k} \rangle)$, либо имеет вершину, не принадлежащую никакому независимому множеству мощности больше $\frac{s-i+1}{2}$.*

Доказательство. Пусть $G = (V(G), E(G))$ — неразложимый граф из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < \frac{s+i+1}{2} \rangle)$, имеющий более $s+1$ вершин и содержащий в качестве подграфа триод $T_{i,j,k}$. Также пусть каждая вершина из множества $V(G)$ принадлежит какому-нибудь независимому множеству мощности больше $\frac{s-i+1}{2}$. Выберем множество $X \subset V(G)$ мощности $|X| = s+1$, которое порождает подграф, содержащий в качестве остовного подграфа триод $T_{i,j,k}$ и имеющий вершину с наименьшим значением минимальной степени в подграфе $G[X]$ среди всех таких подграфов. Обозначим через d эту минимальную степень, и пусть z — вершина из X, имеющая степень d. По условию леммы $d \geqslant \frac{s+i+1}{2} \geqslant 3$.

Так как вершина z принадлежит независимому множеству мощности больше $\frac{s-i+1}{2}$, а в подграфе $G[X]$ имеется не более чем $s - \frac{s+i+1}{2} = \frac{s-i-1}{2}$ не смежных с ней вершин, найдётся вершина $y \in V(G) \setminus X$, не смежная с z. По лемме 6 вершина y смежна с некоторой вершиной $a \in X \setminus \{z\}$.

Выберем произвольную вершину $b \in X \setminus \{a, z\}$, смежную с z. Такая вершина b существует, поскольку $|X| = s+1 \geqslant 5$ и $\deg_X(z) = d \geqslant 3$. По лемме 5 множество $X' = (X \setminus \{b\}) \cup \{y\}$ порождает подграф $G[X']$, содержащий триод $T_{i,j,k}$ в качестве остовного подграфа.

Однако в подграфе $G[X']$ вершина z имеет степень $d-1$. Это противоречит выбору множества X и вершины z. Из полученного противоречия следует, что $G \in \mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}\rangle)$. Лемма 7 доказана.

Остаётся только заметить, что вершины, не принадлежащие независимым множествам мощности, большей $\frac{s-i+1}{2}$, можно выявить и удалить из графа с n вершинами за время $O(n^{1+\frac{1}{2}(s-i+1)})$. После этого по лемме 7 получается либо разложимый граф, либо граф, не содержащий триода $T_{i,j,k}$. Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Класс графов* $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < \frac{s+i+1}{2}\rangle)$ НМ-*простой при любых* $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$. ННМ *для графов с* n *вершинами из класса* $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < \frac{s+i+1}{2}\rangle)$ *можно найти за время* $O(n^{2k+1})$.

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы 3 непосредственно следует из леммы 7 и НМ-простоты класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}\rangle)$, доказанной в теореме 2. Для доказательства второй части на основании леммы 7 предложим описываемый ниже алгоритм $\mathbf{A}^{\delta<d}_{i,j,k}$ решения задачи о независимом множестве для графов из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < d\rangle)$, где $s = i+j+k$, $d = \frac{s+i+1}{2}$. На входе этого алгоритма — n-вершинный граф G из указанного класса, $n > s+1$, на выходе — наибольшее независимое множество U графа G.

Алгоритм $\mathbf{A}^{\delta<d}_{i,j,k}$

1. Проверить, связен ли граф G. Если нет, то найти множество вершин $X \subset V(G)$, порождающее компоненту связности. Применить алгоритм $\mathbf{A}^{\delta<d}_{i,j,k}$ рекурсивно к $G[X]$ и $G-X$. Положить U равным объединению двух полученных независимых множеств и завершить работу.

2. Проверить, связен ли граф $\overline{G}$, дополнительный к графу G. Если нет, то найти множество вершин $X \subset V(G)$, порождающее компоненту связности дополнительного графа. Применить алгоритм $\mathbf{A}^{\delta<d}_{i,j,k}$ рекурсивно к графам $G[X]$ и $G-X$. Положить U равным большему из двух полученных независимых множеств и завершить работу.

3. Перебрать все подмножества мощности $\frac{s-i+1}{2}+1$ множества $V(G)$, среди них выявить все независимые множества графа G. Если среди них нет ни одного независимого множества графа G, то перебрать все подмножества мощности не более $\frac{s-i+1}{2}$ множества $V(G)$, среди них выбрать независимое множество U с наибольшей мощностью и завершить работу.

4. Найти множество $M \subset V(G)$ всех таких вершин, каждая из которых не принадлежит никакому независимому множеству мощности $\frac{s-i+1}{2}+1$. Удалить множество вершин M из графа G. Найти множество U в графе $G-M$ с помощью алгоритма $\mathbf{A}'_k$ (см. доказательство теоремы 2) и завершить работу.

Для завершения доказательства теоремы 3 осталось убедиться в том, что время работы алгоритма $\mathbf{A}^{\delta<d}_{i,j,k}$ ограничено сверху полиномом от n и найти степень этого полинома. Обозначим через $t^{\delta<d}_{i,j,k}(n)$ время работы алгоритма $\mathbf{A}^{\delta<d}_{i,j,k}$ на графах с n вершинами из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \delta < d\rangle)$. Так как компоненты связности графа можно найти за время $O(n^2)$, при подходящих положительных константах a, b, c (некоторые из них, возможно, зависят от k) имеем

$$t^{\delta<d}_{i,j,k}(n) \leqslant cn^2 + \max\Big\{ \max_{1\leqslant m\leqslant n-1} \big\{t^{\delta<d}_{i,j,k}(m) + t^{\delta<d}_{i,j,k}(n-m)\big\}, bn^{1+\frac{1}{2}(s-i+1)} + an^{2k+1}\Big\}.$$

Отсюда $t^{\delta<d}_{i,j,k}(n) = O(n^{2k+1})$ при любых $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$. Теорема 3 доказана.

3. Запрещаются триод $T_{i,j,k}$ и все его остовные надграфы с большим дефицитом

Антистепенью вершины графа будем называть её степень в дополнительном графе. Очевидно, что сумма степени и антистепени любой вершины в любом графе с n вершинами равна $n-1$.

Дефицитом графа будем называть число рёбер в дополнительном графе. Из теоремы о рукопожатиях следует, что дефицит графа равен полусумме антистепеней всех его вершин.

Для графа G через $\langle G, \mathrm{def} > d\rangle$ обозначим множество всех остовных надграфов графа G, имеющих дефицит больше d. Пусть $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$ и $s = i + j + k$. В этом разделе предметом рассмотрения будет класс графов $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \mathrm{def} > d\rangle)$. Данный класс состоит из всех графов, у которых дефицит каждого подграфа, имеющего триод $T_{i,j,k}$ в качестве остовного подграфа, не превосходит d. Так же, как и в разд. 2, случай $i = j = k = 1$ неинтересен, поскольку $\mathrm{Free}(\langle T_{1,1,1}, \mathrm{def} > d\rangle) \subseteq \mathrm{Free}(K_{1,3})$, поэтому далее считаем, что $k \geqslant 2$, откуда следует, что $s \geqslant 4$.

Будет доказано, что класс графов $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \mathrm{def} > d\rangle)$ HM-простой при любых $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$ и $d = \frac{s}{2} - 1$.

Лемма 8. *Если дефицит графа с n вершинами не превосходит $n-3$, то в этом графе имеется гамильтонов цикл.*

Доказательство. В графе G с n вершинами и дефицитом не более $n-3$ сумма антистепеней любых двух вершин, не смежных в G, не может превосходить $n-2$, поэтому сумма их степеней не меньше n. Существование гамильтонова цикла следует из теоремы Оре (см., например, [19]). Лемма 8 доказана.

Лемма 9. *Пусть* $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$ *и* $s = i + j + k$. *Если в неразложимом графе* $G \in \mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \mathrm{def} > s-2\rangle)$ *множество вершин* $X \subset V(G)$ *мощности* $|X| = s+1$ *порождает подграф, содержащий в качестве остовного подграфа триод* $T_{i,j,k}$, *то найдутся три различные вершины* $a, b \in X$ *и* $y \in V(G) \setminus X$ *такие, что вершина* y *смежна с* a, *но не смежна с* b.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы 9 неверно. Это означает, что любая вершина $y \in V(G) \setminus X$ либо смежна одновременно со всеми вершинами из X, либо одновременно с ними не смежна. Так как граф G неразложим, найдутся такие смежные вершины $y_1, y_2 \in V(G) \setminus X$, что y_1 не смежна ни с одной вершиной из X, а y_2 смежна со всеми вершинами из X.

В триоде $T_{i,j,k}$, $V(T_{i,j,k}) = X$, рассмотрим наибольшую из трёх цепей, выходящих из вершины степени 3. Эта цепь имеет длину $k \geqslant 2$. Пусть a — концевая вершина цепи длины k (лист триода), а b — вершина из этой же цепи, смежная (в триоде) с a.

Рассмотрим множество вершин $X' = (X \setminus \{a, b\}) \cup \{y_1, y_2\}$. Согласно выбору вершин y_1 и y_2 граф $G[X']$ содержит триод $T_{i,j,k}$ в качестве остовного подграфа. Однако, так как вершина y_1 не смежна с каждой вершиной из множества $X \setminus \{a, b\}$, дефицит графа $G[X']$ не меньше чем $s - 1$; противоречие. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Пусть* $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$ *и* $s = i + j + k$. *Каждый неразложимый граф из класса* $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \mathrm{def} > \frac{s}{2} - 1\rangle)$ *либо принадлежит классу* $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}\rangle)$, *либо имеет не более чем* $s + 1$ *вершин.*

Доказательство. Пусть $G = (V(G), E(G))$ — неразложимый граф из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \mathrm{def} > \frac{s}{2} - 1\rangle)$, имеющий более $s+1$ вершин и содержащий в качестве подграфа триод $T_{i,j,k}$. Выберем множество $X \subset V(G)$ мощности $|X| = s + 1$, которое порождает подграф, содержащий в качестве остовного подграфа триод $T_{i,j,k}$ и имеющий наибольший дефицит среди всех таких подграфов. Обозначим через m этот максимальный дефицит. По условию леммы $m \leqslant \frac{s}{2} - 1$.

Так как при любом $s \geqslant 2$ выполняется неравенство $\frac{s}{2} - 1 \leqslant s - 2$, по лемме 9 в графе G найдутся такие три вершины $a, b \in X$ и $y \in V(G) \setminus X$, что вершина y смежна с a, но не смежна с b.

Поскольку $m \leqslant \frac{s}{2} - 1$ и $|X| = s+1$, в графе $G[X]$ найдутся по крайней мере три различные доминирующие вершины. Выберем из этих вершин какую-нибудь одну, отличную от a и b. Обозначим через z выбранную доминирующую вершину, $z \neq a$, $z \neq b$. Положим $X' = X \setminus \{z\}$. Граф $G[X']$ имеет s вершин, а его дефицит равен $m \leqslant \frac{s}{2} - 1$.

При любом $s \geqslant 4$ выполняется неравенство $\frac{s}{2} - 1 \leqslant s - 3$. Значит, по лемме 8 в графе $G[X']$ существует гамильтонов цикл. Обозначим через $c_1, c_2, \ldots, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_s$ вершины этого цикла, упорядоченные

в соответствии с его прохождением, начиная с вершины $c_1 = a$. Добавляя к этой последовательности вершину y, смежную с a, получаем цепь $(y, c_1, c_2, \ldots, c_i, c_{i+1}, \ldots, c_s)$. Убедимся в том, что начальный сегмент $(y, c_1, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_i)$ этой цепи является цепью длины i некоторого триода $T_{i,j,k}$, содержащегося в G в качестве подграфа.

Пусть $X_0 = \{c_1 = a, c_2, \ldots, c_{i-1}\}$, $|X_0| = i - 1$ ($X_0 = \varnothing$ при $i = 1$) и $X_1 = X' \setminus X_0$. Рассмотрим граф $G[X_1]$ и заметим, что $c_i \in X_1$. В этом графе $|X_1| = j + k + 1 = s - i + 1$ вершин, а дефицит не больше m. При любых натуральных $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$ выполняется неравенство $i + 2 \leqslant j + k = s - i$, а это значит, что $i \leqslant \frac{s}{2} - 1$. Тогда из неравенств $m \leqslant \frac{s}{2} - 1 \leqslant s - i - 2 = |X_1| - 3$ и леммы 8 следует, что в графе $G[X_1]$ есть гамильтонов цикл (на $j+k+1$ вершинах, среди которых есть вершина c_i). Соединяя этот цикл с найденной ранее цепью $(y, c_1 = a, c_2, \ldots, c_{i-1}, c_i)$, обнаруживаем в графе $G[X' \cup \{y\}]$ в качестве остовного подграфа триод $T_{i,j,k}$, в котором c_i является вершиной степени 3. Однако дефицит графа $G[X']$ равен m, а среди его вершин есть вершина b, не смежная с вершиной y. Следовательно, дефицит графа $G[X' \cup \{y\}]$ не меньше чем $m + 1$. Это противоречит максимальности дефицита подграфа $G[X]$ среди дефицитов всех $(s + 1)$-вершинных подграфов графа G, содержащих в качестве остовного подграфа триод $T_{i,j,k}$.

Из полученного противоречия следует, что неразложимый граф G из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \mathrm{def} > \frac{s}{2} - 1\rangle)$, имеющий более $s+1$ вершин, не содержит в качестве подграфа триод $T_{i,j,k}$. Это означает, что $G \in \mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}\rangle)$. Лемма 10 доказана.

Теорема 4. *Класс графов* $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \mathrm{def} > \frac{s}{2} - 1\rangle)$ НМ-*простой при любых* $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$, $s = i+j+k$. ННМ *для графов с* n *вершинами из класса* $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \mathrm{def} > \frac{s}{2} - 1\rangle)$ *можно найти за время* $O(n^{2k+1})$.

Доказательство. Первая часть утверждения теоремы 4 непосредственно следует из леммы 10 и НМ-простоты класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}\rangle)$, доказанной в теореме 2. Докажем вторую часть. Для этого построим полиномиальный алгоритм $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\mathrm{def}>d}$ решения задачи о независимом множестве для графов из класса $\mathrm{Free}(\langle T_{i,j,k}, \mathrm{def} > d\rangle)$, где $d = \frac{s}{2} - 1$. На входе этого алгоритма — n-вершинный граф G из указанного класса, $n > s+1$, на выходе — наибольшее независимое множество U графа G.

Сопоставив утверждения лемм 7 и 10, легко заметить, что алгоритм $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\mathrm{def}>d}$ можно получить с помощью очевидной модификации алгоритма $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\delta<d}$, построенного в доказательстве теоремы 3.

В самом деле, чтобы получить описание алгоритма $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\mathrm{def}>d}$, достаточно исключить из описания алгоритма $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\delta<d}$ пункт 3, а пункт 4 применить не к графу $G - M$, а к самому графу G. В силу очевидности указанной

модификации алгоритма $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\delta<d}$ пошаговое описание алгоритма $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\mathrm{def}>d}$ опустим. Заметим лишь, что числа d в обозначениях этих двух алгоритмов имеют разные смыслы и разные значения, однако эти различия никак не влияют на их описание.

Из проведённых рассуждений также следует, что верхняя оценка трудоёмкости алгоритма $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\delta<d}$, найденная при доказательстве теоремы 3, остаётся справедливой и для алгоритма $\mathbf{A}_{i,j,k}^{\mathrm{def}>d}$. Таким образом, время работы каждого из двух алгоритмов оценивается как $O(n^{2k+1})$. Теорема 4 доказана.

4. Классы, замкнутые относительно самопересечений

Пересечением графов $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ называется граф $G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$. Для графа $G = (V, E)$ и инъективного отображения $\varphi\colon V \to \varphi(V)$ через $\varphi(G)$ обозначаем граф $(\varphi(V), \varphi(E))$, где $\varphi(V) = \{\varphi(x) \mid x \in V\}$, $\varphi(E) = \{(\varphi(x), \varphi(y)) \mid (x, y) \in E\}$. Граф вида $\varphi_1(G) \cap \varphi_2(G) \cap \cdots \cap \varphi_k(G)$, где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ — инъективные отображения множества V в произвольное множество, будем называть *самопересечением* графа G. В частности, граф вида $G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_k$, где $G_1, G_2, \ldots G_k$ — графы, изоморфные G и имеющие множество вершин V, есть самопересечение графа G. Если граф H является самопересечением графа G, то пишем $G \overset{\cap}{\to} H$. Заметим, что отношение $\overset{\cap}{\to}$ транзитивно.

В [2] доказаны следующие утверждения.

Лемма 11 [2, лемма 4]**.** *Если H — порождённый подграф графа G, то $G \overset{\cap}{\to} H$.*

Лемма 12 [2, теорема 3]**.** *Каждый монотонный класс замкнут относительно самопересечений. Каждый класс, замкнутый относительно самопересечений, наследственный.*

Обозначим через $\langle \overset{\cap}{\to} H \rangle$ (см. [2]) множество всех графов G таких, что $G \overset{\cap}{\to} H$. Это множество состоит из тех и только тех графов, среди самопересечений каждого из которых есть граф, изоморфный H. Одним из основных результатов работы [2] было доказательство НМ-простоты класса $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} P_k \rangle)$ при любом k [2, теорема 4]. Этот класс состоит из всех графов, у каждого из которых самопересечение любого его подграфа не изоморфно пути на k вершинах.

Оставшаяся часть настоящего раздела посвящена исследованию класса графов $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} T_{i,j,k} \rangle)$. Он состоит из всех графов, у каждого из которых самопересечение любого его подграфа не изоморфно триоду $T_{i,j,k}$. Из леммы 12 очевидно, что так же, как и класс $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} P_k \rangle)$, класс

$\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} T_{i,j,k} \rangle)$ принадлежит семейству классов, являющемуся промежуточным между семействами монотонных и наследственных классов, и что $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} P_k \rangle) \subset \mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} T_{i,j,k} \rangle)$.

При любых $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$, рассмотрим некоторый нетривиальный подкласс класса $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} T_{i,j,k} \rangle)$, не содержащийся целиком в классе $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} P_k \rangle)$, и докажем его HM-простоту. Далее используем введённую в [2] терминологию и некоторые доказанные там результаты.

Пусть в графе с множеством вершин $\{1, 2, \ldots, n\}$ есть гамильтонов цикл. Такой цикл назовём *стандартным* [2], если его рёбрами являются пары $(1,2), (2,3), \ldots, (n-1,n), (n,1)$. Цикловым расстоянием между вершинами i и j назовём расстояние между ними на гамильтоновом цикле, т. е. величину $\min\{|i-j|, n-|i-j|\}$. *Хорда* цикла — это ребро графа, соединяющее две вершины цикла и само этому циклу не принадлежащее. Длиной хорды называется цикловое расстояние между её вершинами.

В [2] были введены следующие операции над графами.

1) *Циклический сдвиг.* Пусть G — граф с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, а m — любое натуральное число такое, что $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Преобразование

$$\mathrm{shift}_n^m(x) = \begin{cases} x+m & \text{при } 1 \leqslant x \leqslant n-m, \\ x+m-n & \text{при } n-m+1 \leqslant x \leqslant n \end{cases}$$

называется *циклическим сдвигом порядка* m на множестве V. Циклический сдвиг порядка m преобразует граф G в граф $\mathrm{shift}_n^m(G)$. Очевидно, что $G \overset{\cap}{\to} \mathrm{shift}_n^m(G)$.

2) *Вращение.* Пусть G — граф с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Операция *вращения* rot_n преобразует граф G в граф

$$\mathrm{rot}_n(G) = G \cap \mathrm{shift}_n^1(G) \cap \mathrm{shift}_n^2(G) \cap \cdots \cap \mathrm{shift}_n^{n-1}(G).$$

Очевидно, что $G \overset{\cap}{\to} \mathrm{rot}_n(G)$.

Легко заметить, что если в графе G имеется стандартный гамильтонов цикл, то такой же будет в каждом из графов $\mathrm{shift}_n^m(G)$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, а значит, и в графе $\mathrm{rot}_n(G)$. Кроме того, относительно этого цикла при любом $l = 2, 3, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$ в графе $\mathrm{rot}_n(G)$ имеются либо все возможные хорды длины l, либо ни одной такой хорды. Такие графы называют *циркулянтными*.

3) *Кручение.* Пусть G — граф с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, а m — любое натуральное число такое, что $1 \leqslant m \leqslant n-2$. Преобразование

$$\mathrm{tors}_n^m(x) = \begin{cases} x & \text{при } 1 \leqslant x \leqslant m, \\ n+m+1-x & \text{при } m+1 \leqslant x \leqslant n \end{cases}$$

называется *кручением порядка* m на множестве V. Кручение порядка m преобразует граф G в граф $\mathrm{tors}_n^m(G)$. Очевидно, что $G \overset{\frown}{\to} \mathrm{tors}_n^m(G)$.

Также ясно, что если в графе G имеется стандартный гамильтонов цикл с хордами $(1, m+1)$ и (m, n), то в графе $\mathrm{tors}_n^m(G)$ тоже будет стандартный гамильтонов цикл.

При использовании определённых выше операций в [2] доказана

Лемма 13 [2, лемма 5]**.** *Если G — граф с нечётным числом вершин n, имеющий гамильтонов цикл и не являющийся полным, то $G \overset{\frown}{\to} C_n$.*

Здесь докажем похожее утверждение относительно триодов.

Лемма 14. *Пусть $G = O_1 \circ G'$, где G' — граф с нечётным числом вершин $n \geqslant 3k+2$, имеющий гамильтонов цикл и не являющийся полным. Тогда $G \overset{\frown}{\to} T_{k,k,k}$.*

Доказательство. Предполагаем, что граф G' имеет множество вершин $V' = \{1, 2, \ldots, n\}$, n нечётное, $n \geqslant 3k+2$, а доминирующая вершина графа G, не принадлежащая G', имеет номер $n+1$. По условию в графе G' имеется стандартный гамильтонов цикл. Следовательно, $G' \overset{\frown}{\to} C_n$ по лемме 13.

Более точно, в лемме 13 доказано, что некоторой последовательностью вращений, кручений и пересечений граф G' можно преобразовать в граф C_n (порождённый цикл без хорд). При этом каждый граф H, образующийся на каждом этапе этих преобразований, сохраняет следующие два свойства:

- $G' \overset{\frown}{\to} H$;
- в H есть стандартный гамильтонов цикл на множестве вершин V'.

Выполним следующее преобразование φ графа G. Определим вершину $n+1$ неподвижной точкой φ, а на всех остальных вершинах применим ту же самую последовательность преобразований, как в доказательстве леммы 13. Поскольку $G' \overset{\frown}{\to} C_n$, а вершина $n+1$ смежна с каждой вершиной из V', получаем, что $G \overset{\frown}{\to} \varphi(G) \cong W_n = O_1 \circ C_n$. Здесь граф W_n — это *колесо* с центром в вершине $n+1$, рёбра $(n+1, 1), (n+1, 2), \ldots, (n+1, n)$ — *спицы* этого колеса, а у цикла на множестве вершин V' нет ни одной хорды. Остаётся доказать, что существует самопересечение колеса W_n, изоморфное триоду $T_{k,k,k}$.

На множестве $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ вершин колеса W_n ($n \geqslant 3k+2$ нечётное) выполним циклический сдвиг порядка $k+2$:

$$\mathrm{shift}_{n+1}^{k+2}(x) = \begin{cases} x+k+2 & \text{при } 1 \leqslant x \leqslant n-k-1, \\ x+k-n+1 & \text{при } n-k \leqslant x \leqslant n+1. \end{cases}$$

Рассмотрим граф $G^\circ = W_n \cap \mathrm{shift}_{n+1}^{k+2}(W_n)$. В графах W_n и $\mathrm{shift}_{n+1}^{k+2}(W_n)$ есть стандартный гамильтонов цикл (на $n+1$ вершинах), значит, такой же имеется и в графе G°. Хорда $(1,n)$ этого цикла есть в колесе W_n, но её нет в графе $\mathrm{shift}_{n+1}^{k+2}(W_n)$, поскольку при отображении $\mathrm{shift}_{n+1}^{k+2}$ в пару вершин $(1,n)$ переходит пара $(n-k, n-k-2)$, не являющаяся ребром колеса W_n. Следовательно, пара $(1,n)$ не является ребром графа G°. Кроме того, при отображении $\mathrm{shift}_{n+1}^{k+2}$ в вершину $n+1$, имеющую в колесе W_n степень n, переходит вершина $n-k-1$ со степенью 3. Значит, степень вершины $n+1$ в графе G° тоже равна 3. Нетрудно видеть, что вершинами, смежными в графе G° с вершиной $n+1$, являются вершины с номерами 1, n, $k+2$ и только они (вершина $k+2$ смежна в G° с $n+1$, поскольку $\mathrm{shift}_{n+1}^{k+2}(n-k-1) = n+1$, а $\mathrm{shift}_{n+1}^{k+2}(n+1) = k+2$).

Осталось лишь заметить, что граф G° содержит триод $T_{k,k,k}$ в качестве порождённого подграфа. Действительно, выберем $n+1$ за вершину степени 3 в триоде и обнаружим в графе G° три порождённые цепи длины k каждая, выходящие из вершины $n+1$, а именно, $(n+1, 1, 2, \ldots, k)$, $(n+1, k+2, k+3, \ldots, 2k+1)$ и $(n+1, n, n-1, \ldots, n-k+1)$. Так как $n \geqslant 3k+2$, у любых двух из этих трёх цепей в графе G° имеется только одна общая вершина $n+1$, и никакая другая вершина из одной цепи не смежна в G° ни с одной отличной от $n+1$ вершиной любой другой цепи. Значит, триод $T_{k,k,k}$ является порождённым подграфом графа G°. Его можно получить, удаляя из G° вершины с номерами $k+1$ и $2k+2, \ldots, n-k$.

Таким образом, используя леммы 11, 13 и транзитивность отношения $\overset{\cap}{\to}$, получили

$$G \overset{\cap}{\to} W_n = O_1 \circ C_n \overset{\cap}{\to} G^\circ \overset{\cap}{\to} T_{k,k,k}.$$

Лемма 14 доказана.

На основе леммы 13 в [2] доказано, что при любом $k \geqslant 3$ любой двусвязный граф из класса $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} P_k \rangle)$ либо является полным графом, либо не содержит нечётных циклов длины больше k [2, лемма 6]. Здесь докажем справедливость похожего утверждения для двусвязного графа, принадлежащего классу $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} T_{k,k,k} \rangle)$ и имеющего доминирующую вершину.

Лемма 15. *Пусть $k \geqslant 2$ и в графе $G \in \mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} T_{k,k,k} \rangle)$ есть доминирующая вершина v. Тогда каждый блок графа $G - v$ либо является полным графом, либо не содержит нечётных циклов длины больше $3k+1$.*

Доказательство. Из условия леммы следует, что $G = O_1 \circ (G - v)$. Пусть G' — компонента двусвязности графа $G - v$, содержащая нечётный цикл длины $n \geqslant 3k+2$, H — подграф, порождённый множеством вершин такого цикла. Рассмотрим подграф $G[v \cup V(H)] = O_1 \circ H$. Этот подграф

полный, поскольку иначе, используя леммы 11 и 14, получаем цепочку соотношений $G = O_1 \circ (G - v) \overset{\cap}{\to} O_1 \circ H \overset{\cap}{\to} T_{k,k,k}$; противоречие.

Значит, мощность наибольшей клики в G' не меньше n. Допустим, что граф G' не полный, а X — наибольшая клика в G', $|X| \geqslant n \geqslant 3k+2$. Тогда найдутся такие три различные вершины $x_1, x_2 \in X$ и $y \notin X$, что y смежна с x_1, но не смежна с x_2. Так как граф G' двусвязный, существует путь из вершины y в множество X, не содержащий x_1. Пусть P — кратчайший из таких путей, $y \in P$. Добавив к $V(P)$ вершины x_1, x_2 и необходимое число других вершин из множества X, можно получить множество Y нечётной мощности не меньше n (среди вершин этого множества обязательно есть x_1, x_2 и y). Множество Y порождает подграф, содержащий нечётный цикл длины не меньше n, но не являющийся полным подграфом. Однако выше было доказано, что таких подграфов в графе G' не существует. Следовательно, граф G' полный. Лемма 15 доказана.

Для доказательства основного результата этого раздела используем утверждения леммы 15, леммы 3 и теоремы 1 из разд. 1, а также некоторые утверждения, доказанные в [20].

Теорема 5. *Если в графе с n вершинами из класса* $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} T_{i,j,k} \rangle)$ *имеется вершина с антистепенью, ограниченной сверху величиной $d \log_2 n$ (здесь d — любая положительная константа), то задача о независимом множестве для этого графа решается за время $O(n^{d+3k+2})$ при любых $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$.*

Доказательство. Так как $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} T_{i,j,k} \rangle) \subseteq \mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} T_{k,k,k} \rangle)$, теорему достаточно доказать для каждого графа из $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} T_{k,k,k} \rangle)$, в котором есть вершина с антистепенью, ограниченной сверху величиной $d \log_2 n$, где d — положительная константа.

Пусть G — граф с n вершинами из класса $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\to} T_{k,k,k} \rangle)$, а v — вершина из G, антистепень которой не превосходит $d \log_2 n$. Очевидно, что $\alpha(G) = \max\{\alpha(G - v),\, \alpha(G - N(v))\}$.

Число вершин в графе $G - N(v)$ не превосходит $1 + d \log_2 n$, причём одна из них изолированная (это вершина v). Значит, ННМ в этом графе можно найти, перебрав все подмножества множества мощности не более $d \log_2 n$, а затем выбрав среди них независимое множество с наибольшей мощностью и добавив к нему вершину v. Таким образом, $\alpha(G - N(v))$ находится за время, не превосходящее $2^{d \log_2 n} = n^d$.

Осталось найти ННМ в графе $G - v$. Это можно сделать следующим образом: переберём все независимые множества графа $G - (\{v\} \cup N(v))$ (как уже отмечено выше, их число не превосходит n^d), для каждого такого множества U найдём ННМ в графе $G[N(v) \setminus N(U)]$ и объединим его с U. Наибольшее из полученных множеств будет ННМ графа $G - v$.

Каждая вершина графа $G[N(v)]$ смежна с v, значит, v — доминирующая вершина в графе $G[\{v\} \cup N(v)]$, но $G[\{v\} \cup N(v)] \in \mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\rightarrow} T_{k,k,k} \rangle)$, поэтому по лемме 15 каждый блок графа $G[N(v)]$ либо является полным графом, либо не содержит нечётных циклов длины больше $3k+1$.

В [20] (немного в иной терминологии) доказаны следующие утверждения.

• Класс всех графов, не содержащих нечётных циклов длины, большей K, НМ-простой при любом натуральном K.

• ННМ в каждом n-вершинном графе, не содержащем нечётных циклов длины, большей K, может быть найдено за время $O(n^K)$.

Отсюда при $K = 3k+1$ получаем, что ННМ в каждом блоке графа $G[N(v)]$, не являющемся полным графом, можно найти за время $O(n^{3k+1})$. Теперь, применяя утверждение леммы 3 и ту же самую идею, что описана в доказательстве теоремы 1, заключаем, что ННМ в графе $G[N(v)]$ можно найти за время $O(n^{3k+2})$. Такая же оценка справедлива и для любого порождённого подграфа графа $G[N(v)]$. Следовательно, ННМ в графе $G - v$ можно найти за время $n^d \cdot cn^{3k+2}$, где c — положительная константа, не зависящая от n (возможно, c зависит от k). Эта величина есть $O(n^{d+3k+2})$. Очевидно, что такая же оценка сложности нахождения ННМ справедлива и для графа G. Теорема 5 доказана.

Утверждение теоремы 5 пока не удалось распространить на те графы из класса $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\rightarrow} T_{i,j,k} \rangle)$, у которых нет вершин с антистепенями, ограниченными сверху логарифмом от числа вершин, поэтому в целом вопрос о сложности решения задачи о независимом множестве в этом классе остаётся открытым. Здесь нам удалось лишь установить НМ-простоту одного его нетривиального подкласса, не совпадающего с классом $\mathrm{Free}(\langle \overset{\cap}{\rightarrow} P_k \rangle)$ и не являющегося его собственным подклассом.

Заключение

В этой статье при любых $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, $k \geqslant 2$, и $s = i + j + k$ установлена НМ-простота

• класса графов, не содержащих остовных надграфов триода $T_{i,j,k}$, у которых минимальная степень вершины меньше $\frac{1}{2}(s + i + 1)$;

• класса графов, не содержащих остовных надграфов триода $T_{i,j,k}$, у которых дополнительный граф имеет меньше чем $\frac{s}{2} - 1$ рёбер;

• класса графов, имеющих вершину с антистепенью, ограниченной сверху логарифмом от числа вершин, и не содержащих надграфов триода $T_{i,j,k}$, из которых с помощью операции пересечения графов можно получить $T_{i,j,k}$.

Эти результаты являются промежуточным итогом исследований, выполненных в продолжение совместной с В. Е. Алексеевым работы [2].

Изначально данная статья задумывалась после публикации [2], состоявшейся в 2018 г., как совместная работа, однако, к большому сожалению, в 2020 г. после тяжёлой болезни В. Е. Алексеев ушёл из жизни. Это событие стало невосполнимой утратой для теории графов во всём мире: Владимир Евгеньевич по праву считался учёным с мировым именем, получившим ряд фундаментальных результатов в области теории графов (один из них — это упомянутый во введении результат из [1] о полной классификации НМ-простых и НМ-сложных монотонных классов графов).

В процессе работы при обосновании основных результатов этой статьи автору удалось применить идеи, предложенные В. Е. Алексеевым, которые он не успел воплотить лично. Автор посвящает эту статью его памяти.

Автор выражает благодарность рецензенту за ценные замечания, касающиеся обзора источников, которые относятся к теме исследования.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Алексеев В. Е., Коробицын Д. В.** О сложности некоторых задач на наследственных классах графов // Дискрет. математика. 1992. Т. 4, № 4. С. 34–40.
2. **Алексеев В. Е., Сорочан С. В.** Новые случаи полиномиальной разрешимости задачи о независимом множестве для графов с запрещёнными путями // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2018. Т. 25, № 2. С. 5–18.
3. **Алексеев В. Е.** О влиянии локальных ограничений на сложность определения числа независимости графа // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике. Горький: Изд-во Горьков. ун-та, 1982. С. 3–13.
4. **Алексеев В. Е.** О числе тупиковых независимых множеств в графах из наследственных классов // Комбинаторно-алгебраические методы в дискретной оптимизации. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1991. С. 5–8.
5. **Алексеев В. Е.** Полиномиальный алгоритм для нахождения наибольших независимых множеств в графах без вилок // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 1. 1999. Т. 6, № 4. С. 3–19.
6. **Lozin V. V., Mosca R.** Independent sets in extension of $2K_2$-free graphs // Discrete Appl. Math. 2005. V. 146. P. 74–80.
7. **Lokshantov D., Vatshelle M., Villanger Y.** Independent set in P_5-free graphs in polynomial time // Proc. 25th Annual ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms (Portland, OR, USA, Jan. 5–7, 2014). Philadelphia, PA: SIAM, 2014. P. 570–581.
8. **Grzesik A., Klimošová T., Pilipczuk Mar., Pilipczuk Mic.** Polynomial-time algorithm for maximum weight independent set on P_6-free graphs. Ithaca, NY: Cornell Univ., 2017. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv:1707.05491).

9. **Karthick T., Maffray F.** Weighted independent sets in classes of P_6-free graphs // Discrete Appl. Math. 2016. V. 209. P. 217–226.
10. **Lozin V. V., Monnot J., Ries B.** On the maximum independent set problem in subclasses of subcubic graphs // J. Discrete Algorithms. 2015. V. 31. P. 104–112.
11. **Lozin V. V., Rautenbach D.** Some results on graphs without long induced paths // Inform. Process. Lett. 2003. V. 88. P. 167–171.
12. **Малышев Д. С., Сироткин Д. В.** Полиномиальная разрешимость задачи о независимом множестве в одном классе субкубических планарных графов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2017. V. 24, No. 3. P. 35–60.
13. **Abrishami T., Chudnovsky M., Dibek C., Rzążewski P.** Polynomial-time algorithm for maximum independent set in bounded-degree graphs with no long induced claws // Proc. 33rd Annual ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms (Alexandria, VA, USA, Jan. 9–12, 2022). Philadelphia, PA: SIAM, 2022. P. 1448–1470.
14. **Alekseev V. E., Lozin V. V., Malyshev D. S., Milanič M.** The maximum independent set problem in planar graphs // Mathematical foundations of computer science 2008. Proc. 33rd Int. Symp. (Toruń, Poland, Aug. 25–29, 2008). Heidelberg: Springer, 2008. P. 96–107. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 5162).
15. **Малышев Д. С.** Классы субкубических планарных графов, для которых задача о независимом множестве полиномиально разрешима // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2013. V. 20, No. 3. P. 26–44.
16. **Lovász L., Plummer M. D.** Matching theory. Amsterdam: Norh-Holland, 1986. 544 p. (Ann. Discrete Math.; V. 29).
17. **Minty G.** On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs // J. Comb. Theory. Ser. B. 1980. V. 28, No. 3. P. 284–304.
18. **Sbihi N.** Algorithme de recherche d'un stable de cardinalite maximum dans un graphe sans etoile // Discrete Math. 1980. V. 29, No. 1. P. 53–76. [French].
19. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука, 1990. 384 с.
20. **Hsu W., Ikura Y., Nemhauser G. L.** A polynomial algorithm for maximum weighted vertex packing in graphs without long odd cycles // Math. Program. 1981. V. 20. P. 225–232.

Сорочан Сергей Владимирович

Статья поступила
31 августа 2022 г.
После доработки —
3 ноября 2022 г.
Принята к публикации
3 ноября 2022 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2023. Vol. 30, No. 1. P. 85–109

UDC 519.178 DOI 10.33048/daio.2023.30.752

NEW CASES OF POLYNOMIAL SOLVABILITY OF THE INDEPENDENT SET PROBLEM FOR GRAPHS WITH FORBIDDEN TRIODS

S. V. Sorochan

Lobachevsky Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin Avenue, 603950 Nizhny Novgorod, Russia
E-mail: sergey.sorochan@itmm.unn.ru

Abstract. A triode is a tree with three leaves and a single vertex of degree 3. The independent set problem is solvable in polynomial time for graphs that do not contain a triode as a subgraph with any fixed number of vertices. If the induced triode having k vertices is forbidden, then for $k > 5$ the complexity of this problem is unknown. We consider intermediate cases when an induced triode with any fixed number of vertices and some of its spanning supergraphs are forbidden. For an arbitrary triode with a fixed vertex number, we prove the solvability of the independent set problem in polynomial time in the following cases:

1) a triode and all its spanning supergraphs having bounded vertex degrees are forbidden;

2) a triode and all its spanning supergraphs having large deficit (the number of edges in the complementary graph) are forbidden;

3) a triode and all its supergraphs from which this triode can be obtained using the graph intersection operation are forbidden, provided the fraph has a vertex with bounded anti-degree.

Bibliogr. 20.

Keywords: independent set, IS-easy class, IS-hard class, monotonic class, hereditary class, forbidden subgraph, triode, supergraph, polynomial algorithm.

REFERENCES

1. **V. E. Alekseev** and **D. V. Korobitsyn,** Complexity of some problems on hereditary classes of graphs, *Diskretn. Mat.* **4** (4), 34–40 (1992) [Russian].

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **17** (1) (2023).

2. **V. E. Alekseev** and **S. V. Sorochan,** New cases of the polynomial solvability of the independent set problem for graphs with forbidden paths, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **25** (2), 5–18 (2018) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **12** (2), 213–219 (2018)].
3. **V. E. Alekseev,** The local restriction effect on the complexity of finding the graph independence number, in *Combinatorial and Algebraic Methods in Applied Mathematics* (Izd-vo Gorkov. Univ., Gorkiy, 1982), pp. 3–13.
4. **V. E. Alekseev,** The number of maximal independent sets in graphs from hereditary classes, in *Combinatorial and Algebraic Methods in Discrete Optimization* (Izd-vo NNGU, Nizhny Novgorod, 1991), pp. 5–8.
5. **V. E. Alekseev,** A polynomial algorithm for finding the largest independent sets in claw-free graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 1,* **6** (4), 3–19 (1999) [Russian].
6. **V. V. Lozin** and **R. Mosca,** Independent sets in extension of $2K_2$-free graphs, *Discrete Appl. Math.* **146**, 74–80 (2005).
7. **D. Lokshantov, M. Vatshelle,** and **Y. Villanger,** Independent set in P_5-free graphs in polynomial time, in *Proc. 25th Annual ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms, Portland, OR, USA, Jan. 5–7, 2014* (SIAM, Philadelphia, PA, 2014), pp. 570–581.
8. **A. Grzesik, T. Klimošová, Mar. Pilipczuk,** and **Mic. Pilipczuk,** Polynomial-time algorithm for maximum weight independent set on P_6-free graphs (Cornell Univ., Ithaca, NY, 2017) (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1707.05491).
9. **T. Karthick** and **F. Maffray,** Weighted independent sets in classes of P_6-free graphs, *Discrete Appl. Math.* **209**, 217–226 (2016).
10. **V. V. Lozin, J. Monnot,** and **B. Ries,** On the maximum independent set problem in subclasses of subcubic graphs, *J. Discrete Algorithms* **31**, 104–112 (2015).
11. **V. V. Lozin** and **D. Rautenbach,** Some results on graphs without long induced paths, *Inform. Process. Lett.* **88**, 167–171 (2003).
12. **D. S. Malyshev** and **D. V. Sirotkin,** Polynomial-time solvability of the independent set problem in a certain class of subcubic planar graphs, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **24** (3), 35–60 (2017) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **11** (3), 400–414 (2017)].
13. **T. Abrishami, M. Chudnovsky, C. Dibek,** and **P. Rzążewski,** Polynomial-time algorithm for maximum independent set in bounded-degree graphs with no long induced claws, in *Proc. 33rd Annual ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms, Alexandria, VA, USA, Jan. 9–12, 2022* (SIAM, Philadelphia, PA, 2022), pp. 1448–1470.
14. **V. E. Alekseev, V. V. Lozin, D. S. Malyshev,** and **M. Milanič,** The maximum independent set problem in planar graphs, in *Mathematical Foundations of Computer Science 2008* (Proc. 33rd Int. Symp., Toruń, Poland, Aug. 25–29, 2008) (Springer, Heidelberg, 2008), pp. 96–107. (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 5162).

15. D. S. Malyshev, Classes of subcubic planar graphs for which the independent set problem is polynomially solvable, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **20** (3), 26–44 (2013) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **7** (4), 537–548 (2013)].

16. L. Lovász and **M. D. Plummer,** *Matching Theory* (Norh-Holland, Amsterdam, 1986) (Ann. Discrete Math., Vol. 29).

17. G. Minty, On maximal independent sets of vertices in claw-free graphs, *J. Comb. Theory, Ser. B,* **28** (3), 284–304 (1980).

18. N. Sbihi, Algorithme de recherche d'un stable de cardinalite maximum dans un graphe sans etoile, *Discrete Math.* **29** (1), 53–76 (1980). [French].

19. V. A. Emelichev, O. I. Melnikov, V. I. Sarvanov, and **R. I. Tyshkevich,** *Lectures on Graph Theory* (Nauka, Moscow, 1990 [Russian]; B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994).

20. W. Hsu, Y. Ikura, and **G. L. Nemhauser,** A polynomial algorithm for maximum weighted vertex packing in graphs without long odd cycles, *Math. Program.* **20**, 225–232 (1981).

Sergey V. Sorochan

Received August 31, 2022
Revised November 3, 2022
Accepted November 3, 2022

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2023. Т. 30, № 1. С. 110–129

УДК 519.17 DOI 10.33048/daio.2023.30.745

О ЧИСЛЕ НАИМЕНЬШИХ ПОЛНЫХ ДОМИНИРУЮЩИХ МНОЖЕСТВ В ДЕРЕВЬЯХ

Д. С. Талецкий[1,2]

[1] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», ул. Большая Печёрская, 25/12, 603155 Нижний Новгород, Россия

[2] Нижегородский гос. университет им. Н. И. Лобачевского, пр. Гагарина, 23, 603950 Нижний Новгород, Россия

E-mail: dmitalmail@gmail.com

Аннотация. Наименьшим полным доминирующим множеством графа (НПДМ) называется подмножество его вершин D наименьшей мощности такое, что каждая вершина графа смежна хотя бы с одной вершиной из D. В работе получена точная верхняя оценка числа НПДМ в классе n-вершинных 2-гусениц. Кроме того, показано, что при всех $n \geqslant 1$ каждое n-вершинное дерево содержит менее чем $(\sqrt{2})^n$ НПДМ. Ил. 5, библиогр. 6.

Ключевые слова: экстремальная комбинаторика, дерево, 2-гусеница, наименьшее полное доминирующее множество.

Введение

Доминирующим множеством графа называется подмножество вершин D такое, что любая вершина не из D смежна хотя бы с одной вершиной из D. *Полным доминирующим множеством* графа называется подмножество вершин D' такое, что любая вершина графа смежна хотя бы с одной вершиной из D'. Доминирующее множество называется *наименьшим*, если оно наименьшее по мощности. В работе используются сокращения ДМ, НДМ, ПДМ и НПДМ для терминов доминирующее множество, наименьшее доминирующее множество, полное доминирующее множество и наименьшее полное доминирующее множество соответственно. *Числом полного доминирования* $\gamma_t(G)$ графа G называется мощность каждого его НПДМ. Через $\vartheta(G)$ будем обозначать число всех НПДМ графа G.

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект № 21–11–00194).

© Д. С. Талецкий, 2023

В 2006 г. в работе [1] описаны деревья, содержащие максимальное и минимальное число ДМ среди всех n-вершинных деревьев. Позднее в [2] описаны деревья и связные графы, содержащие минимальное число ПДМ. Вопрос о том, может ли дерево с числом доминирования γ содержать более чем 2^γ НДМ, оставался открытым до 2017 г., когда в [3] был приведён пример такого дерева. С другой стороны, в [4] показано, что каждое дерево с числом доминирования γ содержит не более чем $2{,}4606^\gamma$ НДМ. В статье [5] для всех $k \geqslant 2$ описаны деревья, содержащие максимальное и минимальное число k-ДМ (т. е. таких множеств D_k, что каждая вершина дерева не из D_k смежна хотя бы с k вершинами из D_k).

На сегодняшний день остаётся открытым вопрос о структуре деревьев, содержащих максимально возможное число НДМ и НПДМ. В работе [6] в 2019 г. показано, что каждое n-вершинное дерево содержит менее $95^{n/13}$ *минимальных* (т. е. минимальных по включению) ДМ. Кроме того, для любого $n \geqslant 1$ приведён пример n-вершинного дерева, содержащего более $0{,}649 \cdot 95^{n/13}$ минимальных ДМ. Методы, предложенные в [6], могут быть применены и для других классов графов, но использование их для перечисления множеств фиксированной мощности (в том числе НДМ и НПДМ) по мнению автора настоящей статьи не представляется возможным.

В 2019 г. в [7] получены три верхние оценки на число НПДМ в деревьях и лесах. А именно, для n-вершинного леса F с числом полного доминирования γ_t доказано неравенство

$$\vartheta(F) \leqslant \min\Big((8\sqrt{e})^{\gamma_t} \Big(\frac{n - \gamma_t/2}{\gamma_t/2} \Big)^{\gamma_t/2},\ (1+\sqrt{2})^{n-\gamma_t},\ 1{,}4865^n \Big).$$

В настоящей работе для всех n-вершинных деревьев доказано строгое неравенство $\vartheta(T) < (\sqrt{2})^n$. Кроме того, получена точная верхняя оценка на число НПДМ для класса n-вершинных 2-гусениц.

1. Некоторые определения и обозначения

Как обычно, множества вершин и рёбер простого неориентированного графа G обозначаются через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. *Открытой окрестностью* $N(v)$ вершины v называется множество, состоящее из всех смежных с ней вершин, а *замкнутой окрестностью* $N[v]$ называется множество $N(v) \cup \{v\}$.

Через $G \backslash V_0$ будем обозначать подграф графа G, порождённый вершинами множества $V(G) \setminus V_0$. В случае, если $V_0 = \{v\}$, будем использовать обозначение $G \setminus v$ вместо $G \setminus \{v\}$. Через $G - e$ будем обозначать граф, полученный в результате удаления ребра $e \in E(G)$ из графа G.

Вершина дерева называется *предлистовой* или *предлистом*, если она смежна хотя бы с одним листом. Назовём вершину дерева *предконечной*, если все её соседи, кроме одного, являются листьями. *Диаметром* $\operatorname{diam}(T)$ дерева T называется максимально возможное расстояние между его вершинами. Простой путь $P = v_1v_2\dots v_m$ дерева T называется *диаметральным*, если он состоит из $\operatorname{diam}(T)+1$ попарно различных вершин. Дерево называется *k-гусеницей*, если каждая его вершина отстоит от некоторого его простого пути, называемого *хребтом*, на расстояние не более чем k. Считаем, что хребет k-гусеницы является её диаметральным путём. *Графом-звездой* S_m называется $(m+1)$-вершинное дерево, содержащее вершину степени m (здесь $m \geqslant 0$).

Через $\overline{a,b}$ обозначается множество всех целых чисел из отрезка $[a;b]$. Пусть в дереве T выбран диаметральный путь $P = v_1v_2\dots v_m$. Для каждого $i \in \overline{2,m}$ обозначим через T_i максимальное по включению поддерево T, содержащее вершину v_i и не содержащее вершины v_{i-1}. Считаем, что поддерево T_1 совпадает с T. Положим $\widehat{T_i} = T_i \setminus T_{i+1}$. Через $\mathcal{D}_{T,P}(v_i)$ будем обозначать расстояние в дереве $\widehat{T_i}$ от вершины v_i до ближайшего листа, отличного от v_i. Если $\widehat{T_i}$ состоит из одной вершины, то положим $\mathcal{D}_{T,P}(v_i) = 0$. Заметим, что если вершина v лежит на хребте k-гусеницы, то $\mathcal{D}_{T,P}(v) \leqslant k$. В случае, когда выбор дерева T и пути P ясен из контекста, будем использовать обозначение $\mathcal{D}(v)$ вместо $\mathcal{D}_{T,P}(v)$.

Напомним, что через $\vartheta(G)$ обозначается число НПДМ графа G. Считаем, что $\vartheta(K_1) = 0$. Число НПДМ графа G, содержащих и не содержащих его вершину v, обозначим через $\vartheta_+(G,v)$ и $\vartheta_-(G,v)$ соответственно. Вершину v графа G будем называть *универсальной*, если $\vartheta_+(G,v) = \vartheta(G)$, и *пустой*, если $\vartheta_-(G,v) = \vartheta(G)$. Как обычно, через $G_1 \cup G_2$ обозначается граф с множеством вершин $V(G_1) \cup V(G_2)$ и множеством рёбер $E(G_1) \cup E(G_2)$. Легко видеть, что для непересекающихся графов G_1 и G_2 имеет место равенство $\vartheta(G_1 \cup G_2) = \vartheta(G_1)\vartheta(G_2)$.

Назовём дерево T *разделимым*, если из него можно удалить ребро таким образом, чтобы в полученном лесе число НПДМ осталось прежним, и *неразделимым* в противном случае. Назовём n-вершинное дерево (2-гусеницу) *максимальным*, если оно содержит максимально возможное число НПДМ среди всех n-вершинных деревьев (n-вершинных 2-гусениц соответственно).

Пусть в дереве T выбрана вершина $v \in V(T)$. Через $\widehat{\gamma}_t(T,v)$ обозначим мощность наименьшего подмножества вершин $D \subseteq V(T)$ такого, что каждая вершина $V(T)$, кроме, быть может, вершины v, смежна хотя бы с одной вершиной из D. Нетрудно видеть, что имеет место неравенство $\gamma_t(T) - 1 \leqslant \widehat{\gamma}_t(T,v) \leqslant \gamma_t(T)$. Обозначим через $\widehat{\vartheta}(T,v)$ число подмножеств $D \subseteq V(T)$ мощности $\widehat{\gamma}_t(T,v)$ таких, что каждая вершина $V(T)$, кроме,

быть может, вершины v, смежна хотя бы с одной вершиной из D. Заметим, что если $\widehat{\gamma}_t(T,v) = \gamma_t(T)$, то $\widehat{\vartheta}(T,v) \geqslant \vartheta(T)$, так как в этом случае каждое НПДМ T имеет мощность $\widehat{\gamma}_t(T,v)$. Определим величины $\widehat{\vartheta}_+(T,v)$ и $\widehat{\vartheta}_-(T,v)$ аналогично $\vartheta_+(T,v)$ и $\vartheta_-(T,v)$.

Пусть множество D является ПДМ дерева T и $\operatorname{diam}(T) \geqslant 3$. Обозначим через $L(T)$ множество листьев T, соседи которых являются предконечными вершинами. Рассмотрим отображение $\varphi\colon L(T) \to V(T)$, которое переводит лист $l \in L(T)$ в единственную нелистовую вершину, находящуюся на расстоянии 2 от него. Обозначим через $\varphi(D)$ множество, полученное заменой в D каждого листа $l \in L(T)$ вершиной $\varphi(l)$. Поскольку D содержит все предлистья T, $\varphi(D)$ является ПДМ, при этом $|\varphi(D)| \leqslant |D|$. Таким образом, для любого НПДМ D множество $\varphi(D)$ также является НПДМ.

Назовём вершину v дерева T *φ-универсальной*, если $v \in \varphi(D)$ для любого НПДМ $D \subseteq V(T)$. Заметим, что каждая универсальная вершина φ-универсальна и каждая нелистовая вершина, смежная хотя бы с одной предконечной вершиной, φ-универсальна.

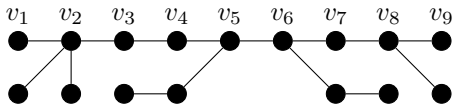


Рис. 1. Пример 2-гусеницы с хребтом $v_1v_2\dots v_9$

На рис. 1 изображено дерево, которое является 2-гусеницей, а его диаметральный путь $v_1v_2\dots v_9$ является хребтом гусеницы. Отметим, что $\mathcal{D}(v_4) = 0$, $\mathcal{D}(v_2) = 1$, $\mathcal{D}(v_5) = 2$. Кроме того, нелистовые вершины v_3, v_5, v_6 и v_7 (и только они) смежны с предконечными вершинами, поэтому они φ-универсальны.

2. Предварительные результаты

2.1. Класс элементарных лесов. Назовём лес F *элементарным*, если каждая его компонента связности является графом-звездой. Будем говорить, что элементарный n-вершинный лес *максимален*, если он содержит максимально возможное число НПДМ среди всех таких лесов. Ясно, что $\vartheta(S_k) = k$ при всех $k \geqslant 0$.

Лемма 1. *При $n = 4k + r \geqslant 12$, $r \in \{0,1,2,3\}$, n-вершинный максимальный элементарный лес единствен, изоморфен лесу $F_n = (k-r)S_3 \cup rS_4$ и содержит $f(n) = 4^r \cdot 3^{k-r}$ НПДМ.*

Доказательство. Пусть звезда S_k является наименьшей компонентой связности леса F. Если F содержит звезду S_m такую, что $k+1 < m$,

то подграф $S_k \cup S_m$ можно заменить подграфом $S_{k+1} \cup S_{m-1}$ и число НПДМ леса F увеличится, что противоречит его максимальности. Тогда для некоторых целых $a \geqslant 1$ и $b \geqslant 0$ имеет место равенство $F = aS_k \cup bS_{k+1}$. Покажем, что для любого n-вершинного леса F, не изоморфного F_n, существует замена некоторого его подграфа лесом с таким же числом вершин и большим числом НПДМ.

Случай $k = 0$. Заменим весь лес F деревом S_{n-1}.

Случай $k = 1$. Заменим весь лес F лесом $(b-1)S_{k+1} \cup S_{(a+1)(k+1)}$.

Случай $k = 2$. Если F содержит лес $2S_2$, то заменим его деревом S_5. Иначе F содержит лес $S_2 \cup 2S_3$, заменим его лесом $S_4 \cup S_5$.

Случай $k = 3$. Если $b \leqslant 4$, то условие леммы выполнено; иначе заменим лес $4S_4$ лесом $5S_3$.

Случай $k = 4$. Если $a \leqslant 3$ и $b = 0$, то условие леммы выполнено. Иначе F содержит один из лесов $4S_4$, $2S_4 \cup S_5$, $2S_5$, заменим их лесами $5S_3$, $4S_3, 3S_3$ соответственно.

Случай $k = 5$. Если F содержит лес $2S_5$, то заменим его лесом $3S_3$; иначе F содержит лес $S_5 \cup S_6$, заменим его лесом $2S_3 \cup S_4$.

Случай $k = 6$. Если F содержит лес $2S_6$, то заменим его лесом $S_3 \cup 2S_4$. Иначе F содержит дерево S_7, заменим его лесом $S_2 \cup S_4$.

Случай $k \geqslant 7$. Заменим дерево S_k лесом $S_2 \cup S_{k-3}$.

Таким образом, при любом $n \geqslant 12$ для любого n-вершинного леса F, отличного от F_n, найдётся хотя бы одна замена, увеличивающая число НПДМ в нём. Лемма 1 доказана.

Заметим, что при $n \in \{4, 5, 8, 9, 10\}$ максимальный лес единствен и изоморфен F_n, при $n = 11$ единственным максимальным лесом является $S_4 \cup S_5$, а при $n \in \{1, 2, 3, 6, 7\}$ максимальным лесом (возможно, не единственным) является дерево S_{n-1}. Таким образом, при всех натуральных n имеет место неравенство $\vartheta(F_n) \leqslant f(n)$, которое будет строгим при $n \in \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$.

2.2. Универсальные и пустые вершины.

Лемма 2. *Если в дереве T найдутся две смежные нелистовые вершины u и v такие, что u пуста, а v либо пуста, либо универсальна, то T разделимо.*

Доказательство. Если вершина v пуста, то удалим ребро uv и обозначим через F_1 полученный лес. Очевидно, что $\gamma_t(F_1) \geqslant \gamma_t(T)$. С другой стороны, каждое НПДМ дерева T не содержит вершин u и v, поэтому оно является ПДМ в лесе F_1, откуда $\gamma_t(F_1) \leqslant \gamma_t(T)$. Тогда $\gamma_t(F_1) = \gamma_t(T)$,

при этом каждое НПДМ дерева T является НПДМ леса F, и наоборот, откуда $\vartheta(F_1) = \vartheta(T)$.

Если же вершина v универсальна, то удалим все рёбра, инцидентные вершине u, кроме ребра uv, и обозначим через F_2 полученный лес. Аналогично предыдущему случаю легко проверить, что имеют место равенства $\gamma_t(F_2) = \gamma_t(T)$ и $\vartheta(F_2) = \vartheta(T)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если дерево T содержит универсальные вершины u и v такие, что* $\operatorname{dist}(u, v) = 3$, *то T разделимо.*

Доказательство. По условию в T найдутся вершины u' и v' такие, что существует путь $uu'v'v$. Обозначим через F лес, полученный удалением ребра $u'v'$ из T, и покажем, что $\vartheta(T) = \vartheta(F)$. Очевидно, что $\gamma_t(F) \geqslant \gamma_t(T)$. Докажем, что если D' является НПДМ T, то оно является НПДМ F. Поскольку вершины u и v входят в D', каждая из вершин u' и v' леса F имеет соседа, входящего в D'. Таким образом, D' является ПДМ в лесе F, откуда $\gamma_t(F) = \gamma_t(T)$ и $\vartheta(F) \geqslant \vartheta(T)$. С другой стороны, так как $\gamma_t(F) = \gamma_t(T)$, каждое НПДМ леса F является НПДМ и для дерева T, откуда $\vartheta(F) = \vartheta(T)$, что и требовалось доказать. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Для любого дерева T верны следующие утверждения.*

1. *Если T содержит вершину v, смежную с листом v', а также с некоторой предконечной вершиной u, то $\vartheta(T_1) \geqslant \vartheta(T)$, где T_1 — дерево, полученное удалением листа v' из T.*

2. *Если T содержит вершину v, смежную хотя бы с двумя предконечными вершинами u_1 и u_2, то $\vartheta(T_2) \geqslant \vartheta(T)$, где T_2 — дерево, полученное удалением вершины u_2 и всех смежных с ней листьев из T.*

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы. Поскольку вершина v' является листом в T, то $\gamma_t(T_1) \leqslant \gamma_t(T)$. С другой стороны, вершина v φ-универсальна в T_1. Тогда найдётся НПДМ $D \ni v$ дерева T_1. Очевидно, что D является ПДМ и для T, откуда $\gamma_t(T_1) = \gamma_t(T)$, при этом каждое НПДМ T является НПДМ и для T_1, откуда $\vartheta(T_1) \geqslant \vartheta(T)$, что и требовалось доказать.

Второе утверждение доказывается аналогично. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть дерево T содержит вершину u, которая не является предлистом. Если все соседи u смежны хотя бы с одной φ-универсальной вершиной, то вершина u пуста.*

Доказательство. Предположим, напротив, что найдётся НПДМ D, содержащее u. Рассмотрим множество $\varphi(D)$. По условию все вершины открытой окрестности $N(u)$ имеют хотя бы одного соседа из $\varphi(D)$, отличного от u, причём хотя бы одна из этих вершин сама входит в $\varphi(D)$.

Тогда множество $\varphi(D) \setminus \{u\}$ также является ПДМ, что противоречит минимальности D. Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Если дерево T содержит пустую нелистовую вершину u, не смежную с универсальными вершинами, причём $\gamma_t(T \setminus u) = \gamma_t(T)$, то $\vartheta(T \setminus u) > \vartheta(T)$.*

Доказательство. Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_k$ — соседи вершины u в T. Обозначим через T_i^* максимальное по включению поддерево T, содержащее вершину u_i и не содержащее u. Поскольку вершина u пуста и $\gamma_t(T \setminus u) = \gamma_t(T)$, для любого НПДМ D дерева T множество $D \cap V(T_i^*)$ является НПДМ дерева T_i^*. Так как для любого $i \in \overline{1,k}$ найдётся НПДМ D_i дерева T, не содержащее v_i, множество $D_i \cap V(T_i)$ является НПДМ дерева T_i и не содержит v_i, откуда $\vartheta_-(T_i, v_i) > 0$. Таким образом, имеет место неравенство

$$\vartheta(T) = \prod_{i=1}^{k} \vartheta(T_i^*) - \prod_{i=1}^{k} \vartheta_-(T_i^*, v_i) < \prod_{i=1}^{k} \vartheta(T_i^*) = \vartheta(T \setminus u).$$

Лемма 6 доказана.

Из лемм 2 и 6 вытекает

Следствие 1. *Для любых $n, k \geqslant 1$ если n-вершинное дерево T является k-гусеницей и содержит пустую нелистовую вершину u такую, что $\gamma_t(T \setminus u) = \gamma_t(T)$, то либо T разделимо, либо оно не является максимальным деревом и максимальной k-гусеницей.*

Данное утверждение будет применяться как для 2-гусениц, так и для произвольных деревьев.

3. Класс 2-гусениц

Лемма 7. *При $n \geqslant 3$ для любой n-вершинной 2-гусеницы T найдётся $(n+1)$-вершинная 2-гусеница T' такая, что $\vartheta(T) < \vartheta(T')$.*

Доказательство проведём индукцией по числу вершин n. Легко проверить, что при $n \in \overline{3,6}$ утверждение леммы верно. Пусть при $n \geqslant 7$ найдётся некоторая максимальная n-вершинная 2-гусеница T, для которой утверждение неверно, но при этом для любой 2-гусеницы T'' с меньшим числом вершин имеет место строгое неравенство $\vartheta(T'') < \vartheta(T)$.

Предположим, что $\operatorname{diam}(T) \leqslant 4$. Если $\operatorname{diam}(T) = 2$, то дерево T изоморфно S_{n-1}. Если $\operatorname{diam}(T) = 3$, то T содержит ровно две нелистовые вершины, тогда $\gamma_t(T) = 2$ и $\vartheta(T) = 1$. Если же $\operatorname{diam}(T) = 4$, то центральная вершина T универсальна, откуда $\vartheta(T) = 1$. Таким образом, имеет место неравенство $\vartheta(T) \leqslant \vartheta(S_{n-1}) < \vartheta(S_n)$, что невозможно по предположению.

Предположим, что $\operatorname{diam}(T) \geqslant 5$. Обозначим через $v_1v_2\dots v_k$ хребет T. Возможны следующие случаи.

Случай 1. В T найдётся хотя бы один непустой лист l, смежный с некоторой вершиной u. Присоединим новый лист l' к u и обозначим полученное дерево через T'. Тогда $\vartheta(T') = \vartheta_-(T,l) + 2\vartheta_+(T,l) > \vartheta(T)$; противоречие.

При рассмотрении случаев 2–4 будем предполагать, что все листья T пусты, а вершина v_3 универсальна (так как все соседи v_2, кроме v_3, являются пустыми листьями).

Случай 2. Имеет место неравенство $\deg(v_3) \geqslant 3$. По лемме 4 в дереве T найдётся поддерево T' такое, что $\vartheta(T') \geqslant \vartheta(T)$; противоречие.

При рассмотрении случаев 3 и 4 предполагаем, что $\deg(v_3) = 2$.

Случай 3. Вершина v_4 универсальна или пуста. Если v_4 универсальна, то для любого НПДМ D дерева T множество $D \setminus \{v_2\}$ является НПДМ дерева T_2, откуда $\vartheta(T) \leqslant \vartheta(T_2)$; противоречие. Если же v_4 пуста, то $\deg(v_4) = 2$, поскольку иначе v_4 была бы φ-универсальной. Тогда для любого НПДМ D дерева T множество $D \setminus \{v_2, v_3\}$ является НПДМ в T_5, откуда $\vartheta(T) \leqslant \vartheta(T_5)$; противоречие.

Случай 4. Вершина v_4 не универсальна и не пуста. Предположим, что $\deg(v_4) \geqslant 3$. Тогда v_4 не является предлистом и смежна хотя бы с одной предконечной вершиной, все остальные соседи которой являются пустыми листьями. Но тогда v_4 универсальна, что невозможно, поэтому $\deg(v_4) = 2$. Предположим, что вершина v_5 не пуста. Тогда для любого НПДМ $D \ni v_5$ множество $(D \setminus \{v_3\}) \cup \{v_1\}$ также является НПДМ, что противоречит универсальности v_3. Таким образом, вершина v_5 пуста и $\deg(v_5) = 2$. Покажем, что $\deg(v_6) = 2$. Пусть $\deg(v_6) > 2$. Тогда вершина v_6 φ-универсальна и по лемме 5 вершина v_4 пуста, что невозможно. Поскольку вершина v_5 пуста и $\deg(v_6) = 2$, вершина v_7 универсальна.

Заметим, что имеет место неравенство $\vartheta_+(T, v_4) \leqslant \vartheta_+(T, v_6)$, поскольку каждое НПДМ T содержит ровно одну из вершин v_4 и v_6, причём если НПДМ D содержит v_4, то множество $(D \setminus \{v_4\}) \cup \{v_6\}$ также является НПДМ. Рассмотрим n-вершинный лес $S_3 \cup T_5$ и обозначим через T' дерево, полученное присоединением листа дерева S_3 к вершине v_7 дерева T_5. Очевидно, что T' является разделимой 2-гусеницей. Тогда

$$\vartheta(T') = 3\vartheta(T_5) \geqslant 3\vartheta_+(T, v_6) > \vartheta_+(T, v_4) + \vartheta_+(T, v_6) = \vartheta(T).$$

Таким образом, T не является максимальной 2-гусеницей, что противоречит предположению. Лемма 7 доказана.

Теорема 1. *При $n \geqslant 12$ каждая максимальная n-вершинная 2-гусеница T содержит максимальный элементарный лес F_n в качестве остовного подграфа. Имеет место равенство $\vartheta(T) = f(n)$.*

Доказательство. Из рассуждений предыдущей леммы следует, что если $\operatorname{diam}(T) \leqslant 4$, то имеет место неравенство $\vartheta(T) \leqslant \vartheta(S_{n-1}) \leqslant f(n)$. Равенство $\vartheta(T) = f(n)$ возможно лишь в том случае, если T изоморфно S_3 или S_4. Таким образом, будем предполагать, что $n \geqslant 6$ и $\operatorname{diam}(T) \geqslant 5$.

Обозначим через $v_1, \ldots, v_k$ хребет T, а через p — индекс самой левой вершины хребта, которая отлична от v_2 и имеет степень выше 2 (если $T = P_n$, то положим $p = k + 1$). Обозначим через q номер второй слева вершины хребта с этим свойством (если такой вершины нет, то положим $q = k + 1$). Предполагаем, что если T отлично от P_n, то $p \leqslant \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$ (в противном случае переименуем вершины хребта в обратном порядке).

Предположим, что найдётся максимальная 2-гусеница T, которая либо содержит более $f(n)$ НПДМ, либо содержит ровно $f(n)$ НПДМ и не содержит лес F_n в качестве остовного подграфа. Можем считать, что T неразделима, так как не существует 2-гусениц с меньшим числом вершин, обладающих таким свойством. Обозначим через a число листьев, смежных с вершиной v_2 (т. е. $a = \deg(v_2) + 1$). Рассмотрим несколько случаев в зависимости от значения величины p.

Случай $p = 3$. По леммам 4 и 7 дерево T не является максимальной 2-гусеницей; противоречие.

Случай $p = 4$. Если $\mathcal{D}(v_4) = 2$, то вершина v_4 смежна с некоторым предлистом u_4, не лежащим на хребте T. Тогда $\operatorname{dist}(v_2, u_4) = 3$ и T разделима по лемме 3; противоречие. Пусть теперь $\mathcal{D}(v_4) = 1$. Покажем, что в этом случае все листья, смежные с v_4, пусты. Пусть это не так и найдётся некоторое НПДМ D, содержащее лист v'_4, смежный с v_4. Тогда множество $\varphi(D) \setminus \{v'_4\}$ также является ПДМ и меньше D по мощности; противоречие. Поскольку T максимальна, по лемме 7 вершина v_4 смежна с единственным пустым листом v'_4. Рассмотрим несколько вариантов в зависимости от значения величины q.

Вариант $p = 4$, $q = 5$. Если $\mathcal{D}(v_5) = 1$, то v_5 универсальна и T разделима, поскольку $\operatorname{dist}(v_2, v_5) = 3$. Если же $\mathcal{D}(v_5) = 2$, то удалим вершины v_4 и v'_4 из дерева, обозначим через F получившийся лес. Имеет место равенство $\gamma_t(F) + 1 = \gamma_t(T)$, при этом для любого НПДМ D дерева T множество $D \setminus \{v_4\}$ является НПДМ леса F. Кроме того, каждая компонента связности F является 2-гусеницей. Тогда

$$f(n) > f(a + 2)f(n - a - 4) \geqslant \vartheta(F) \geqslant \vartheta(T),$$

что противоречит предположению о максимальности T.

Вариант $p = 4$, $q = 6$. Если $\mathcal{D}(v_6) = 2$ и вершина v_6 смежна с некоторым предлистом u_6, то $\operatorname{dist}(v_4, u_6) = 3$ и T разделима. Если же $\mathcal{D}(v_6) = 1$, то действуем аналогично предыдущему варианту. Удалим вершины v_4 и v'_4 из дерева, обозначим через F получившийся лес. Тогда для любого

НПДМ D дерева T множество $D \setminus \{v_4\}$ является НПДМ леса F, откуда $f(n) > \vartheta(F) \geqslant \vartheta(T)$; противоречие.

Вариант $p = 4$, $q = 7$. Если $\mathcal{D}(v_7) = 1$, то v_7 универсальна и T разделима, так как $\operatorname{dist}(v_4, v_7) = 3$. Пусть $\mathcal{D}(v_7) = 2$ и v_7 смежна с некоторой предконечной вершиной u_7, не лежащей на хребте T. Вершины v_4 и u_7 универсальны, а вершины v_3 и v_7 φ-универсальны. Тогда по лемме 5 вершины v_5 и v_6 пусты и T разделима по лемме 2; противоречие.

Вариант $p = 4$, $q = 8$. Поскольку вершина v_8 либо универсальна, либо φ-универсальна, по лемме 5 вершина v_6 пуста. Легко проверить, что имеет место равенство $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_6) + 3$. Тогда каждое НПДМ T, содержащее вершину v_7, содержит v_3 и не содержит v_5, откуда $\vartheta(T) = \vartheta_+(T, v_5) + \vartheta_+(T, v_7)$ и $\vartheta_+(T, v_7) \leqslant \vartheta(T_6)$. Если вершина v_5 пуста, то T разделима по лемме 2; противоречие. Если же v_5 не пуста, то имеет место равенство $\vartheta_+(T, v_5) = (a+1)\vartheta_-(T_7, v_7)$, поскольку если некоторое НПДМ T содержит вершину v_5, то оно также содержит ровно одну вершину из открытой окрестности $N(v_2)$. Таким образом,

$$\vartheta(T) = \vartheta_+(T, v_7) + \vartheta_+(T, v_5) \leqslant \vartheta(T_6) + (a+1)\vartheta_-(T_7, v_7).$$

Поскольку $f(n-a-5) \geqslant \vartheta(T_6)$ и $f(n-a-6) \geqslant \vartheta_-(T_7, v_7) \geqslant \vartheta(T_7)$, то

$$f(n) > f(n-a-5) + (a+1)f(n-a-6) \geqslant \vartheta(T),$$

что противоречит предположению о максимальности T.

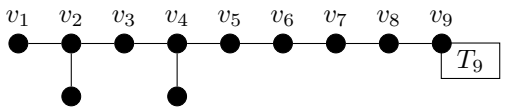


Рис. 2. Структура 2-гусеницы T при $p = 4$, $q \geqslant 9$ и $a = 2$

Вариант $p = 4$, $q \geqslant 9$. В этом варианте T имеет структуру, изображённую на рис. 2. Предположим, что $\gamma_t(T_9) > \widehat{\gamma}_t(T_9, v_9)$. Тогда вершина v_8 универсальна, а вершина v_6 пуста по лемме 5. Если НПДМ D содержит вершину v_5, то оно не содержит v_7, иначе множество $\varphi(D) \setminus \{v_5\}$ также являлось бы ПДМ, что невозможно. Если же D содержит v_7, то оно не содержит v_5 и, следовательно, содержит v_3. Тогда

$$\begin{aligned}\vartheta(T) &= \vartheta_+(T, v_5) + \vartheta_+(T, v_7) = (a+1)\vartheta_-(T_7, v_7) + \vartheta_+(T_6, v_8)\\ &\leqslant (a+1)\vartheta(T_7) + \vartheta(T_6) \leqslant (a+1)f(n-a-6) + f(n-a-5) < f(n).\end{aligned}$$

Предположим, что $\gamma_t(T_9) = \widehat{\gamma}_t(T_9, v_9)$. Введём обозначения

$$A_1 = \vartheta_+(T_9, v_9), \quad A_2 = \vartheta(T_9), \quad B_1 = \widehat{\vartheta}_+(T_9, v_9), \quad B_2 = \widehat{\vartheta}(T_9, v_9).$$

Заметим, что $A_1 \leqslant A_2$ и $B_1 \leqslant B_2$. Кроме того, из того, что $\gamma_t(T_9) = \widehat{\gamma}_t(T_9, v_9)$, следует, что $A_2 \leqslant B_2$. Предположим, что существует НПДМ D,

содержащее хотя бы три вершины из множества $\{v_5, v_6, v_7, v_8\}$. Тогда множество

$$(\varphi(D) \setminus \{v_5, v_6, v_7, v_8\}) \cup \{v_7, v_8\}$$

также является НПДМ и меньше D по мощности; противоречие. Таким образом, для любого НПДМ D пересечение $D \cap \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$ совпадает с одним из множеств $\{v_5, v_6\}$, $\{v_6, v_7\}$, $\{v_5, v_8\}$, $\{v_7, v_8\}$. Тогда

$$\vartheta(T) = (a+1)A_1 + A_2 + (a+1)B_1 + B_2.$$

Обозначим через T_6' дерево, полученное из T_6 присоединением листа v_7' к вершине v_7. Тогда для леса $F = S_{a+3} \cup T_6'$ имеет место соотношение

$$\begin{aligned} f(n) \geqslant \vartheta(F) &= (a+3)(\vartheta_+(T_6', v_6) + \vartheta_+(T_6', v_7') + \vartheta_+(T_6', v_8)) \\ &= (a+3)(2\vartheta_+(T_6', v_6) + \vartheta_+(T_6', v_8)) = (a+3)(2A_2 + B_2)) > \vartheta(T), \end{aligned}$$

что противоречит предположению о максимальности T.

Случай $p = 5$. Если $\mathcal{D}(v_5) = 1$, то вершина v_5 универсальна и T разделима, поскольку $\operatorname{dist}(v_2, v_5) = 3$. Если же $\mathcal{D}(v_5) = 2$, то v_5 смежна с некоторой предконечной вершиной u_5, не лежащей на хребте T. По лемме 5 вершина v_4 пуста в T и по следствию 1 T либо разделима, либо не максимальна; противоречие.

Случай $p = 6$. Вершина v_6 φ-универсальна. Тогда вершина v_4 пуста по лемме 5 и по следствию 1 T либо разделима, либо не максимальна; противоречие.

Случай $p = 7$. Ясно, что вершины v_3 и v_7 φ-универсальны. Тогда по лемме 5 вершина v_5 пуста. Следовательно, v_3 и v_7 универсальны. Каждое НПДМ T содержит ровно одну вершину из множества $\{v_4, v_6\}$ (так как если ПДМ D содержит обе вершины, множество $D \setminus \{v_4\}$ также является ПДМ). При этом $\vartheta_+(T, v_4) \leqslant \vartheta_+(T, v_6)$, поскольку для любого НПДМ D' множество $(D' \setminus \{v_4\}) \cup \{v_6\}$ также является НПДМ. Тогда

$$\vartheta(T) = \vartheta_+(T, v_4) + \vartheta_+(T, v_6) \leqslant 2\vartheta(T_5) \leqslant 2f(n-a-3) < f(n).$$

Случай $p \geqslant 8$. Рассуждаем аналогично варианту $p = 4$, $q \geqslant 9$. Если $\gamma_t(T_8) > \widehat{\gamma}_t(T_8, v_8)$, то вершина v_5 пуста, а v_3 и v_7 универсальны. Если НПДМ D содержит вершину v_4, то оно не содержит v_6, иначе множество $\varphi(D)\setminus\{v_4\}$ также являлось бы ПДМ, что невозможно. Если v_4 пуста, то T разделимо по лемме 2, иначе

$$\begin{aligned} \vartheta(T) = \vartheta_+(T, v_4) + \vartheta_+(T, v_6) &= \vartheta_-(T_6, v_6) + \vartheta_+(T_5, v_7) \\ &\leqslant \vartheta(T_6) + \vartheta(T_5) \leqslant f(n-a-4) + f(n-a-3) < f(n). \end{aligned}$$

Предположим, что $\gamma_t(T_8) = \widehat{\gamma}_t(T_8, v_8)$. Введём обозначения

$$A_1 = \vartheta_+(T_8, v_8), \quad A_2 = \vartheta(T_8), \quad B_1 = \widehat{\vartheta}_+(T_8, v_8), \quad B_2 = \widehat{\vartheta}(T_8).$$

Аналогично предыдущему варианту для любого НПДМ D пересечение $D \cap \{v_5, v_6, v_7, v_8\}$ совпадает с одним из множеств $\{v_5, v_6\}$, $\{v_6, v_7\}$, $\{v_5, v_8\}$, $\{v_7, v_8\}$. Напомним, что $\deg(v_2) = a + 1$. Тогда

$$\vartheta(T) = (a+1)(A_1 + A_2) + B_1 + B_2.$$

Удалим все листья, смежные с v_2, и добавим $a-1$ новых листьев к вершине v_3, после чего присоединим лист v_6' к вершине v_6. Для полученной n-вершинной 2-гусеницы T' верно $\vartheta(T') = (a+1)(2A_2 + B_2)$. Поскольку $\gamma_t(T_8) = \widehat{\gamma}_t(T_8, v_8)$, то $A_2 > 0$, откуда $\vartheta(T') > \vartheta(T)$, что противоречит максимальности T. Теорема 1 доказана.

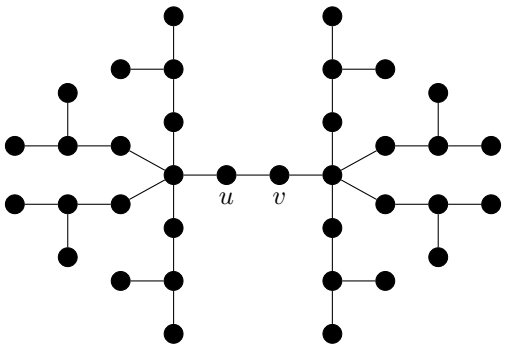


Рис. 3. Гусеница T_{36}^*

Заметим, что для класса 3-гусениц утверждение теоремы не имеет места. На рис. 3 изображена 36-вершинная 3-гусеница T_{36}^* с центральными вершинами u и v, полученная присоединением к каждому концу пути P_4 четырёх копий звезды S_3. Обозначим через M_k число НПДМ дерева T_{36}^*, содержащих k центральных вершин. Тогда

$$\vartheta(T_{36}^*) = M_2 + M_1 + M_0 = 3^8 + 2 \cdot 3^4 \cdot (3^4 - 2^4) + (3^4 - 2^4)^2 > 3^9 = f(36).$$

4. Класс произвольных деревьев

Известно, что существуют n-вершинные леса, содержащие хотя бы $(\sqrt{2})^n$ наименьших доминирующих множеств (например, для чётного n подойдёт лес $\frac{n}{2}P_2$). Однако, как будет показано в этом разделе, каждое n-вершинное дерево T содержит менее чем $(\sqrt{2})^n$ наименьших *полных* доминирующих множеств.

Лемма 8. *При $n, k \geqslant 1$ если n-вершинный элементарный лес F содержит хотя бы k компонент связности, то $(\sqrt{2})^n \geqslant (4/3)^k \vartheta(F)$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(m) = (\sqrt{2})^{m+1}/m$, определённую на множестве натуральных чисел. Поскольку $g(m)$ монотонно возрастает при $m \geqslant 3$, имеет место неравенство $g(m) \geqslant 4/3$.

Пусть $F = S_{m_1} \cup S_{m_2} \cdots \cup S_{m_k}$ (считаем, что $m_1, m_2, \ldots, m_k > 0$, иначе $\vartheta(F) = 0$ и доказывать нечего). Тогда

$$\frac{(\sqrt{2})^n}{\vartheta(F)} = \prod_{i=1}^{k} \frac{(\sqrt{2})^{m_i+1}}{m_i} = \prod_{i=1}^{k} g(m_i) \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^k.$$

Лемма 8 доказана.

Назовём максимальное n-вершинное дерево *критическим*, если оно содержит не менее $(\sqrt{2})^n$ НПДМ и для любого $n' < n$ каждое n'-вершинное дерево содержит менее $(\sqrt{2})^{n'}$ НПДМ. Из определения ясно, что каждое критическое дерево неразделимо. Поскольку все деревья диаметра не более 4 являются 2-гусеницами, по теореме 1 и лемме 8 они не критические. Таким образом, предполагаем, что каждое критическое дерево имеет диаметр не менее 5.

Лемма 9. *Для любого критического дерева T и любого его диаметрального пути $v_1 v_2 \ldots v_k$ верно $\mathcal{D}(v_4) = 3$.*

Доказательство. По лемме 4 имеем $\mathcal{D}(v_3) = 0$. Пусть $\mathcal{D}(v_4) \leqslant 2$. Тогда возможны три случая.

Случай $\mathcal{D}(v_4) = 0$. Напомним, что $\deg(v_2) = a + 1$. Тогда

$$\vartheta(T) = \vartheta_-(T, v_3) + \vartheta_+(T, v_3) \leqslant a\vartheta(T_4) + \widehat{\vartheta}(T_4, v_4).$$

Заметим, что равенство достигается, если $\vartheta_-(T, v_3) > 0$, в противном случае $\vartheta(T) = \widehat{\vartheta}(T_4, v_4)$. Покажем, что $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_5) + 2$. С одной стороны, каждое НПДМ T содержит хотя бы две вершины из множества $N[v_2]$, откуда $\gamma_t(T) \geqslant \gamma_t(T_5) + 2$. С другой стороны, для любого НПДМ D_5 дерева T_5 множество $D_5 \cup \{v_2, v_3\}$ является НПДМ дерева T, откуда $\gamma_t(T) \leqslant \gamma_t(T_5) + 2$. Далее возможны два варианта.

Вариант $\gamma_t(T_4) > \gamma_t(T_5)$. Имеем $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_4) + 1$. Тогда вершина v_3 универсальна в T (иначе нашлось бы НПДМ T мощности $\gamma_t(T_4) + 1$, содержащее вершины v_1 и v_2, что невозможно). Если найдётся НПДМ D дерева T, содержащее v_5, то множество $D \setminus \{v_2, v_3\}$ является НПДМ для дерева T_4, и $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_4) + 2$; противоречие. Значит, v_5 пуста в T. Заметим, что если НПДМ D дерева T содержит вершину v_4, то оно не содержит других вершин множества $N(v_5)$, иначе множество $D \setminus \{v_4\}$ тоже являлось бы ПДМ. Вершина v_6 не пуста в T (иначе оно разделимо по лемме 2), причём для каждого НПДМ $D \ni v_6$ множество $D \setminus \{v_2, v_3\}$ является НПДМ T_5. Тогда v_6 не пуста в T_5 и $\partial_+(T, v_6) \leqslant \partial_+(T_5, v_6)$. При

этом для любого НПДМ $D \ni v_4$ множество $(D\setminus\{v_4\})\cup\{v_6\}$ тоже является НПДМ, откуда $\vartheta_+(T,v_4) \leqslant \vartheta_+(T,v_6)$. Следовательно,

$$\vartheta(T) \leqslant \vartheta_+(T,v_4) + \vartheta_+(T,v_6) \leqslant 2\vartheta_+(T_5,v_6) \leqslant 2\vartheta(T_5) < 2(\sqrt{2})^{n-a-3} < (\sqrt{2})^n.$$

Вариант $\gamma_t(T_4) = \gamma_t(T_5)$. Нетрудно видеть, что

$$\vartheta(T_4) \leqslant \vartheta(T_5), \quad \widehat{\vartheta}_-(T_4,v_4) = \vartheta(T_5).$$

Покажем, что $\widehat{\vartheta}_+(T_4,v_4) \leqslant \vartheta(T_5)$. Поскольку вершина v_4 является листом в дереве T_4, то $\gamma_t(T_5) = \widehat{\gamma}_t(T_4,v_4)$. Рассмотрим множество $D \subseteq V(T_4)$ мощности $\gamma(T_5)$ такое, что $v_4 \in D$ и у каждой вершины множества $V(T_4)\setminus\{v_4\}$ есть сосед из D. По определению существует $\widehat{\vartheta}_+(T_4,v_4)$ таких множеств. При этом $v_6 \notin D$ (иначе $D\setminus\{v_4\}$ являлось бы НПДМ T_5, что невозможно). Тогда множество $(D\setminus\{v_4\})\cup\{v_6\}$ является НПДМ T_5, откуда $\widehat{\vartheta}_+(T_4,v_4) \leqslant \vartheta(T_5)$.

По предположению $\vartheta(T_5) < (\sqrt{2})^{n-a-3}$. Тогда

$$\vartheta(T) \leqslant a\vartheta(T_4) + \widehat{\vartheta}(T_4,v_4) \leqslant (a+2)\vartheta(T_5) < (a+2)(\sqrt{2})^{n-a-3} < (\sqrt{2})^n.$$

Случай $\mathcal{D}(v_4) = 2$. Вершина v_4 смежна с некоторым предлистом u_4. Тогда $\operatorname{dist}(v_2,u_4) = 3$ и по лемме 3 дерево T разделимо.

Случай $\mathcal{D}(v_4) = 1$. В этом случае v_4 смежна с некоторым листом v_4' и не смежна с предлистьями. Предполагаем, что вершина v_5 не пуста и не универсальна в T (иначе T было бы разделимо по леммам 2 и 3). Возможны два варианта.

Вариант $\deg(v_4) = 3$. Заметим, что если НПДМ дерева T содержит вершину v_5, то оно может содержать любую вершину окрестности $N(v_2)$. Если же НПДМ не содержит v_5, то оно содержит вершину v_3. Тогда

$$\vartheta(T) = \vartheta_+(T,v_5) + \vartheta_-(T,v_5) = (a+1)\vartheta_+(T_4,v_5) + \vartheta(F_5) \leqslant (a+1)\vartheta(T_4) + \vartheta(F_5).$$

Если $\vartheta(T_4) \geqslant 2\vartheta(F_5)$, то $\vartheta(T) \leqslant (a+3/2)\vartheta(T_4) < (a+3/2)(\sqrt{2})^{n-a-2}$. Если же $\vartheta(T_4) < 2\vartheta(F_5)$, то $\vartheta(T) < (2a+3)\vartheta(F_5) < (2a+3)(\sqrt{2})^{n-a-5}$. Легко проверить, что в обоих случаях при всех целых $a \geqslant 1$ выполнено неравенство $\vartheta(T) < (\sqrt{2})^n$.

Вариант $\deg(v_4) \geqslant 4$. Обозначим через F_0 лес $T\setminus(V(T_5)\cup\{v_4,v_4'\})$. Положим $Q = \vartheta(F_0)$ и $q = |V(F_0)|$. Заметим, что F_0 является элементарным лесом, состоящим хотя бы из $\deg(v_4) - 2 \geqslant 2$ компонент связности. Тогда по лемме 8 имеем $(\sqrt{2})^q/Q \geqslant 16/9$. Поскольку $\vartheta(T_4) \leqslant (\sqrt{2})^{n-q}$ и $\vartheta(F_5) \leqslant (\sqrt{2})^{n-q-3}$, то

$$\vartheta(T) = \vartheta_+(T, v_5) + \vartheta_-(T, v_5) \leqslant Q(\vartheta(T_4) + \vartheta(F_5))$$
$$\leqslant \frac{9}{16}(\sqrt{2})^q((\sqrt{2})^{n-q} + (\sqrt{2})^{n-q-3}) < (\sqrt{2})^n.$$

Лемма 9 доказана.

Лемма 10. *Для любого критического дерева T и любого его диаметрального пути $v_1v_2\dots v_k$ верно $\mathcal{D}(v_5) \in \{0, 4\}$.*

Доказательство. По леммам 4 и 9 $\mathcal{D}(v_3) = 0$ и $\mathcal{D}(v_4) = 3$. Предположим, что $\mathcal{D}(v_5) \notin \{0, 4\}$. Возможны три случая.

Случай $\mathcal{D}(v_5) = 1$. Вершина v_5 предлистовая. Тогда T разделимо, так как $\operatorname{dist}(v_2, v_5) = 3$; противоречие.

Случай $\mathcal{D}(v_5) = 2$. Вершина v_5 смежна с некоторой предлистовой вершиной u_5, отличной от v_4 и v_6. Поскольку $\mathcal{D}(v_4) = 3$, все соседи вершины v_4 смежны с предлистьями. Тогда по лемме 5 вершина v_4 пуста. По следствию 1 дерево T не критическое; противоречие.

Случай $\mathcal{D}(v_5) = 3$. Вершина v_5 смежна с некоторой вершиной u_4, сосед которой u_3 является предлистом. Заметим, что если u_3 не является предконечной вершиной, то она смежна с некоторой предконечной вершиной u_2, а также с листом u'_3. Тогда по лемме 4 дерево T не критическое; противоречие. Значит, вершина u_3 предконечная, а вершина u_4 φ-универсальная в T. Тогда вершина v_4 пуста по лемме 5 и по следствию 1 дерево T не критическое; противоречие. Лемма 10 доказана.

Теорема 2. *При $n \geqslant 1$ для любого n-вершинного дерева T имеет место неравенство $\vartheta(T) < (\sqrt{2})^n$.*

Доказательство. При $n \leqslant 9$ все n-вершинные деревья являются 2-гусеницами, поэтому условие теоремы для них выполнено. Предположим, что при $n \geqslant 10$ найдётся n-вершинное критическое дерево T. Обозначим через $P = v_1v_2\dots v_k$ некоторый диаметральный путь T. Тогда по леммам 4, 9 и 10 имеем $\mathcal{D}(v_3) = 0$, $\mathcal{D}(v_4) = 3$ и $\mathcal{D}(v_5) \in \{0, 4\}$. Считаем, что вершина v_5 смежна с вершиной v_6, а также с некоторыми вершинами $v_4^1, \dots, v_4^k$ (здесь $v_4 = v_4^1$). Возможны 6 случаев в зависимости от значения величины $\mathcal{D}(v_6)$.

Случай $\mathcal{D}(v_6) = 1$. Вершина v_6 предлистовая. Тогда по лемме 5 вершина v_4 пустая и по следствию 1 дерево T не критическое; противоречие.

Случай $\mathcal{D}(v_6) = 2$. Вершина v_6 смежна с некоторым предлистом u_5. Тогда по лемме 5 вершина v_5 пуста. Обозначим через F_0 элементарный лес $T \setminus (V(T_6) \cup N[v_5])$. Если вершина v_6 не пуста в T_6, то имеет место равенство $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_6) + \gamma_t(F_0)$. Тогда вершина v_4 пуста в T и T разделимо по лемме 2; противоречие. Если же вершина v_6 пуста в T_6, то $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_6) + \gamma_t(F_0) + 1$. Для каждого $i \in \overline{1, k}$ удалим в T все рёбра,

инцидентные вершине v_4^i, кроме ребра $v_4^i v_5$. Тогда для полученного леса F верно равенство $\gamma_t(F) = \gamma_t(T_6) + \gamma_t(F_0) + 2$ и для любого НПДМ D дерева T множество $D \cup \{v_5\}$ является НПДМ леса F. Таким образом, $(\sqrt{2})^n > \vartheta(F) \geqslant \vartheta(T)$; противоречие.

Случай $\mathcal{D}(v_6) = 3$. Вершина v_6 смежна с некоторой вершиной u_5, сосед которой u_4 является предлистом. Предположим, что u_4 не является предконечной вершиной. Если в T найдётся диаметральный путь $P' = u_1u_2u_3u_4u_5v_6\ldots v_k$, то $\mathcal{D}_{T,P'}(u_4) = 1$, что противоречит лемме 9. Иначе вершина u_4 смежна хотя бы с одним листом u_4' и хотя бы с одной предконечной вершиной. Тогда по лемме 4 дерево T не критическое; противоречие.

Итак, вершина u_4 предконечная в T. Тогда вершина u_5 φ-универсальна и по лемме 5 вершина v_5 пуста в T. Действуем аналогично предыдущему варианту. Если вершина v_6 не пуста в T_6, то вершина v_4 пуста в T и по лемме 2 дерево T разделимо; противоречие. Иначе для каждого $i \in \overline{1,k}$ удалим все рёбра, инцидентные вершине v_4^i, кроме ребра $v_4^i v_5$. Тогда для любого НПДМ D дерева T множество $D \cup \{v_5\}$ является НПДМ полученного леса F, откуда $(\sqrt{2})^n > \vartheta(F) \geqslant \vartheta(T)$; противоречие.

Случай $\mathcal{D}(v_6) = 5$. В этом случае найдётся некоторый диаметральный путь $P' = u_1u_2u_3u_4u_5v_6\ldots v_k$, где вершина u_5 отлична от v_5 и v_7. По леммам 9 и 10 $\mathcal{D}_{T,P'}(u_4) = 3$ и $\mathcal{D}_{T,P'}(u_5) \in \{0, 4\}$. Предположим, что найдётся НПДМ D, не содержащее v_6. Тогда множество

$$(\varphi(D) \setminus (N(v_5) \cup N(u_5))) \cup \{v_6\}$$

также является ПДМ и меньше D по мощности; противоречие. Таким образом, вершина v_6 универсальна в T. Тогда вершина v_4 пуста по лемме 5 и по следствию 1 дерево T не критическое; противоречие.

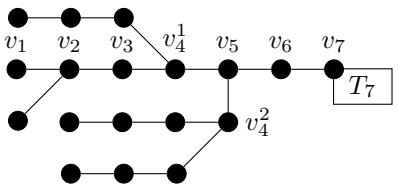


Рис. 4. Структура дерева T в случае $\mathcal{D}(v_6) = 0$

Случай $\mathcal{D}(v_6) = 0$. В этом случае T имеет структуру, изображённую на рис. 4. Введём обозначения

$$A_1 = \vartheta_-(T_7, v_7), \quad A_2 = \vartheta(F_7), \quad B_1 = \vartheta_+(T_7, v_7), \quad B_2 = \widehat{\vartheta}_+(T_7, v_7).$$

Обозначим через T_5' максимальное по включению поддерево T, содержащее вершину v_5, но не содержащее вершин $v_4^1, \ldots, v_4^k$. Обозначим через F_0

элементарный лес, полученный удалением из дерева T всех вершин поддерева T_6 и окрестности $N[v_5]$. Положим $Q = \vartheta(F_0)$ и $q = |V(F_0)|$. Очевидно, что $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_5') + \gamma_t(F_0)$. Тогда каждое НПДМ дерева T содержит ровно две вершины множества $N[v_5] \cup N[v_6]$, которые либо смежны, либо находятся на расстоянии 3 друг от друга. Заметим, что если $A_1 \geqslant A_2$, то пара $\{v_4^i, v_5\}$ не может входить в НПДМ. Аналогично, если $B_1 \geqslant B_2$, то пара $\{v_5, v_6\}$ не может входить в НПДМ. Тогда

$$\vartheta(T) \leqslant Q(k \cdot \min(A_1, A_2) + A_2 + k \cdot \min(B_1, B_2) + B_2).$$

Поскольку $\vartheta(T_5') = (A_2 + B_2) < (\sqrt{2})^{n-q-k}$, то $(A_2 + B_2)(\sqrt{2})^{q+k} < (\sqrt{2})^n$. Тогда достаточно доказать, что

$$(A_2 + B_2)(\sqrt{2})^{q+k} > Q(k+1)(A_2 + B_2).$$

Так как $\mathcal{D}(v_4) = 3$, лес F содержит хотя бы две компоненты связности и $(\sqrt{2})^q/Q \geqslant (4/3)^2$. С другой стороны, $(\sqrt{2})^k/(k+1) \geqslant 2/3$, откуда и следует требуемое неравенство.

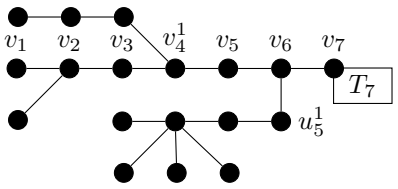


Рис. 5. Структура дерева T в случае $\mathcal{D}(v_6) = 4$

Случай $\mathcal{D}(v_6) = 4$. В этом случае T имеет структуру, изображённую на рис. 5. Если найдётся некоторый диаметральный путь $P' = u_1u_2u_3u_4u_5v_6v_7 \dots v_s$, где вершина u_5 отлична от v_5, то применим рассуждения из случая $\mathcal{D}(v_6) = 5$. Иначе вершина v_6 смежна с некоторыми вершинами $u_5^1, \dots, u_5^m$ (где $m \geqslant 1$), все соседи которых, кроме вершины v_6, имеют степень 2 и смежны с некоторыми предконечными вершинами. Введём обозначения A_1, A_2, B_1, B_2, Q, q аналогично предыдущему случаю. Обозначим через F_0' элементарный лес, полученный удалением из дерева T_6 всех вершин поддерева T_7 и окрестности $N[v_6]$. Положим $W = \vartheta(F_0')$ и $w = |V(F_0')|$. Каждое НПДМ дерева T содержит ровно две вершины множества $N[v_5] \cup N[v_6]$, которые либо смежны, либо находятся на расстоянии 3 друг от друга. Тогда

$$\vartheta(T) \leqslant QW(k(m+1)\min(A_1, A_2) + mA_2 + A_2 + k\min(B_1, B_2) + B_2).$$

Обозначим через T_5'' максимальное по включению поддерево дерева T_5, которое содержит вершины v_5 и v_6 и не содержит вершин $v_4^1, \dots, v_4^k$ и $u_5^1, \dots, u_5^m$. Тогда

$$\vartheta(T_5'') = \vartheta_+(T_5'', v_5) + \vartheta_+(T_5'', v_7) = A_2 + B_2 < (\sqrt{2})^{n-q-w-k-m}.$$

Покажем, что

$$(A_2 + B_2)(\sqrt{2})^{q+w+k+m} > QW((k+1)mA_2 + (m+1)A_2 + kB_2 + B_2).$$

Предполагаем, что $A_2 \leqslant B_2$. Тогда достаточно доказать неравенство $(\sqrt{2})^{q+w+k+m} > QW(k+1)(m+1)$. По лемме 9 лес $F \cup F'$ содержит хотя бы три компоненты связности. Тогда

$$\frac{(\sqrt{2})^{q+w+k+m}}{QW(k+1)(l+1)} = \frac{(\sqrt{2})^{q+w}}{QW}\frac{(\sqrt{2})^{k+m}}{(k+1)(m+1)} \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 > 1.$$

Таким образом, $\vartheta(T) < (\sqrt{2})^n$. Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Bród D., Skupień Z.** Trees with extremal numbers of dominating sets // Australas. J. Comb. 2006. Vol. 35. P. 273–290.
2. **Krzywkowski M., Wagner S.** Graphs with few total dominating sets // Discrete Math. 2018. Vol. 341, No. 4. P. 997–1009.
3. **Bień A.** Properties of gamma graphs of trees // Colourings, independence and domination. Abs. 17th Workshop Graph Theory (Piechowice, Poland, Sept. 17–22, 2017). Zielona Góra: Univ. Zielona Góra, 2017. 1 p. Available at `www.cid.uz.zgora.pl/php/pdf_file.php?vid=1046` (accessed Jan. 13, 2023).
4. **Alvarado J., Dantas S., Mohr E., Rautenbach D.** On the maximum number of minimum dominating sets in forests // Discrete Math. 2018. Vol. 342, No. 4. P. 934–942.
5. **Taletskii D. S.** Trees with extremal numbers of k-dominating sets // Discrete Math. 2022. Vol. 345, No. 1, ID 112656. 5 p.
6. **Rote G.** Minimal dominating sets in a tree: Counting, enumeration, and extremal results. Ithaca, NY: Cornell Univ., 2019. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv:1903.04517).
7. **Henning M. A., Mohr E., Rautenbach D.** On the maximum number of minimum total dominating sets in forests // Discrete Math. Theor. Comput. Sci. 2019. Vol. 21, No. 3, ID 3. 12 p.

Талецкий Дмитрий Сергеевич

Статья поступила
16 июня 2022 г.
После доработки —
4 октября 2022 г.
Принята к публикации
6 октября 2022 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2023. Vol. 30, No. 1. P. 110–129

UDC 519.17 DOI 10.33048/daio.2023.30.745

ON THE NUMBER OF MINIMUM TOTAL DOMINATING SETS IN TREES

D. S. Taletskii [1, 2]

[1] National Research University "Higher School of Economics",
25/12 Bolshaya Pechyorskaya Street, 603155 Nizhny Novgorod, Russia

[2] Lobachevsky Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin Street, 603950 Nizhny Novgorod, Russia

E-mail: dmitalmail@gmail.com

Abstract. The minimum total dominating set (MTDS) of a graph is a vertex subset D of minimum cardinality such that every vertex of the graph is adjacent to at least one vertex of D. In this paper we obtain the sharp upper bound for the number of MTDS in the class of n-vertex 2-caterpillars. We also show that for all $n \geqslant 1$ every n-vertex tree has less than $(\sqrt{2})^n$ MTDS. Illustr. 5, bibliogr. 6.

Keywords: extremal combinatorics, tree, 2-caterpillar, minimum total dominating set.

REFERENCES

1. **D. Bród** and **Z. Skupień,** Trees with extremal numbers of dominating sets, *Australas. J. Comb.* **35**, 273–290 (2006).
2. **M. Krzywkowski** and **S. Wagner,** Graphs with few total dominating sets, *Discrete Math.* **341** (4), 997–1009 (2018).
3. **A. Bień,** Properties of gamma graphs of trees, *Colourings, Independence and Domination* (Abs. 17th Workshop Graph Theory, Piechowice, Poland, Sept. 17–22, 2017) (Univ. Zielona Góra, Zielona Góra, 2017). Available at www.cid.uz.zgora.pl/php/pdf_file.php?vid=1046 (accessed Jan. 13, 2023).
4. **J. Alvarado, S. Dantas, E. Mohr,** and **D. Rautenbach,** On the maximum number of minimum dominating sets in forests, *Discrete Math.* **342** (4), 934–942 (2018).
5. **D. S. Taletskii,** Trees with extremal numbers of k-dominating sets, *Discrete Math.* **345** (1), ID 112656, 5 p. (2022).

This research is supported by the Russian Science Foundation (Project 21–11–00194).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **17** (1) (2023).

6. **G. Rote,** Minimal dominating sets in a tree: Counting, enumeration, and extremal results (Cornell Univ., Ithaca, NY, 2019) (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:1903.04517).
7. **M. A. Henning, E. Mohr,** and **D. Rautenbach,** On the maximum number of minimum total dominating sets in forests, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* **21** (3), ID 3, 12 p. (2019).

Dmitrii S. Taletskii

Received June 16, 2022
Revised October 4, 2022
Accepted October 6, 2022

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

2023. Том 30, № 1

Зав. редакцией Ю. В. Шамардин

Журнал подготовлен с использованием макропакета LaTeX 2_ε.
The present publication has been typeset using LaTeX 2_ε.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-85978 от 26.09.2023 г.
Размещение в сети Интернет: `math-sobolev.ru`.

Дата размещения в сети Интернет 15.10.2023 г.
Формат $70 \times 100\,1/16$. Усл. печ. л. 10,6. Объём 1,24 МБ.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия