

ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 30 № 2 2023

Новосибирск
Издательство Института математики

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	В. Л. Береснев
Заместители	А. А. Евдокимов
главного редактора	С. В. Севастьянов
Ответственный секретарь	Ю. В. Шамардин

С. В. Августинович	М. Я. Ковалёв	М. Свириденко
Г. П. Агибалов	А. В. Косточка	Б. Я. Рябко
В. Б. Алексеев	Ю. А. Кочетов	Н. Н. Токарева
О. В. Бородин	В. К. Леонтьев	Ю. А. Флеров
В. А. Васильев	Б. М.-Т. Лин	Ф. В. Фомин
Э. Х. Гимади	В. В. Лозин	М. Ю. Хачай
А. Ю. Григорьев	П. Пардалос	Я. М. Шафранский
С. Демпе	А. В. Пяткин	
А. И. Ерзин	А. А. Сапоженко	

Учредители Сибирское отделение РАН
журнала Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Журнал включён в базу данных Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science. Переводы статей на английский язык публикуются в *Journal of Applied and Industrial Mathematics* и доступны по ссылке www.springer.com/mathematics/journal/11754.

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Выпускается с 1994 г.	Научный журнал	4 номера в год
Том 30, № 2 (156)	Апрель–июнь 2023	

СОДЕРЖАНИЕ

Васильева А. Ю. О тестирующем множестве для кодов типа Препараты.....	5
Власов В. В., Дерябин А. М., Зацепин О. В., Каминский Г. Д., Карамов Э. В., Карманов А. Л., Лебедев С. Н., Рыкованов Г. Н., Соколов А. В., Теплых Н. А., Тургиев А. С., Хатунцев К. Е. Математическое моделирование заболеваемости COVID-19 в Москве с применением агентной модели	15
Еремеев А. В., Сахно М. А. О задаче составления расписания работы операторов центра обработки вызовов.....	48
Зюбина Д. А., Токарева Н. Н. S-блоки специального вида от малого числа переменных.....	67
Нурминский Е. А. Соотношения эквивалентности в выпуклой оптимизации.....	81
Шмырёв В. И. Связь двух подходов к модели Фишера.....	91

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

В журнале публикуются оригинальные научные статьи и обзоры теоретической и прикладной направленности по следующим разделам дискретного анализа, исследования операций и информатики:

- дискретная оптимизация
- комбинаторика
- контроль и надёжность дискретных устройств
- математические модели и методы принятия решений
- математическое программирование
- модели экономики
- моделирование процессов управления
- построение и анализ алгоритмов
- синтез и сложность управляющих систем
- теория автоматов
- теория графов
- теория игр и её приложения
- теория кодирования
- теория расписаний и размещений

Адрес редакции:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия
Телефон: +7 (383) 329–75–79
E-mail: discopr@math.nsc.ru

© Сибирское отделение РАН, 2023

© Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2023

SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS

DISKRETNYYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII

/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/

Published since 1994	Scientific journal	4 issues per year
Vol. 30, No. 2 (156)		April–June, 2023

CONTENTS

A. Yu. Vasil'eva. <i>A testing set for Preparata-like codes</i>	5
V. V. Vlasov, A. M. Deryabin, O. V. Zatsepin, G. D. Kaminsky, E. V. Karamov, A. L. Karmanov, S. N. Lebedev, G. N. Rykovanov, A. V. Sokolov, M. A. Teplykh, A. S. Turgiyev, and K. E. Khatuntsev. <i>Mathematical modelling of COVID-19 incidence in Moscow with an agent-based model</i>	15
A. V. Ereemeev and M. A. Sakhno. <i>The problem of scheduling for call-centre operators</i>	48
D. A. Zyubina and N. N. Tokareva. <i>S-blocks of a special type with a small number of variables</i>	67
E. A. Nurminski. <i>Equivalence relations in convex optimization</i>	81
V. I. Shmyrev. <i>A connection of two approaches to the Fisher model</i>	91

NOVOSIBIRSK
SOBOLEV INSTITUTE PRESS

In this journal we publish original research papers and survey papers of both theoretical and practical importance on the following topics of discrete analysis, operations research and informatics:

- discrete optimization
- combinatorics
- control and reliability of discrete devices
- decision making models and methods
- mathematical programming
- economic models
- management modeling
- design and analysis of algorithms
- synthesis and complexity of control systems
- automata theory
- graph theory
- game theory and its applications
- coding theory
- theory of scheduling and facility location

Editorial office address:

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptug Avenue,
630090 Novosibirsk, Russia
Phone: +7 (383) 329-75-79
E-mail: discopr@math.nsc.ru

© Siberian Branch of RAS, 2023

© Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 2023

О ТЕСТИРУЮЩЕМ МНОЖЕСТВЕ ДЛЯ КОДОВ ТИПА ПРЕПАРАТЫ

А. Ю. Васильева^{1,2}

¹ Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

² Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: vasilan@math.nsc.ru

Аннотация. Изучается вопрос о восстановлении объекта из заданного класса по его пересечению с так называемым тестирующим множеством. В качестве класса рассматриваются коды типа Препараты, т. е. нелинейные коды длины $n = 2^{2m} - 1$, $m = 2, 3, \dots$, с кодовым расстоянием 5 и мощности вдвое большей, чем у максимального линейного кода такой же длины с тем же кодовым расстоянием. Указаны условия, при которых объединение нескольких концентрических сфер является тестирующим множеством для кодов типа Препараты.

Ключевые слова: граф Хэмминга, код Препараты, совершенный код, тестирующее множество, многочлен Кравчука.

Введение

Множество всех двоичных векторов длины n называется n -мерным двоичным *гиперкубом*: $Q_n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \{0, 1\}, i = 1, \dots, n\}$. На нём вводятся операция покомпонентного сложения по модулю 2 и *расстояние Хэмминга*, равное числу различающихся позиций в векторах: $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$. *Весом Хэмминга* вектора $\mathbf{x} \in Q_n$ называется число его ненулевых позиций, т. е. расстояние от него до нулевого вектора: $\text{wt}(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{0})$. Здесь и далее $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in Q_n$, а через $\mathbf{e}^i \in Q_n$, $i = 1, \dots, n$, обозначаем вектор веса 1, имеющий единицу в i -й позиции. Множество всех векторов веса i , $i = 0, 1, \dots, n$, будем обозначать через W_i и называть i -м *уровнем* гиперкуба.

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF–2022–0017).

Графом Хэмминга называем граф с множеством вершин Q_n и множеством рёбер, состоящим из всех пар вершин на расстоянии 1 друг от друга. Пусть $V = \{f: Q_n \rightarrow \mathbb{C}\}$ — пространство всех комплекснозначных функций над гиперкубом. Собственные функции $f \in V$ (и собственные числа λ) матрицы смежности графа Хэмминга называем собственными функциями (и собственными числами) графа. Они удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\sum_{i=1}^n f(\mathbf{x} + \mathbf{e}^i) = \lambda f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q_n. \quad (1)$$

Хорошо известно, что собственные числа графа n -мерного гиперкуба равны $n - 2i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Собственные функции с собственным числом $\lambda = n - 2i$ образуют собственное подпространство $V_i \subseteq V$, $i = (n - \lambda)/2$. Обозначив $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in Q_n$, ортогональный базис V_i можем задать следующим образом:

$$\Phi_i = \{\varphi^{\mathbf{a}}: Q_n \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi^{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = (-1)^{\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle}, \mathbf{a} \in W_i\}.$$

В частности, базис подпространства V_0 состоит из единственной функции $\varphi^{\mathbf{0}} \equiv 1$.

Поскольку $\Phi_0 \cup \Phi_1 \cup \dots \cup \Phi_n$ — ортогональный базис всего пространства V , квадратная матрица $A = A_{(n)}$ порядка 2^n , строки и столбцы которой занумерованы векторами из Q_n , с элементами $a_{\mathbf{x}\mathbf{y}} = \varphi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y})$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q_n$, определяет ортогональное преобразование, называемое преобразованием Фурье. Обозначим через $A_{(n)}^{ij}$ подматрицу A со строками, соответствующими вершинам из W_i , и столбцами, соответствующими вершинам из W_j .

Для произвольной функции $f \in V$ обозначим через $f^{(i)}$ её ортогональную проекцию на собственное подпространство V_i , $i = 0, 1, \dots, n$. Таким образом, f может быть однозначно представлена в виде суммы $f = f^{(0)} + f^{(1)} + \dots + f^{(n)}$.

В [1] показано, что при некоторых условиях произвольная функция из i -го собственного подпространства однозначно определяется по её значениям на уровне гиперкуба, имеющем тот же номер i . Аналогично при некоторых условиях произвольная функция из прямой суммы подпространств $V_i \oplus V_j$ однозначно определяется по её значениям на $W_i \cup W_j$ [1]. Эти условия формулируются в терминах двоичных *многочленов Кравчука*, определяемых следующим образом:

$$K_i(t; N) = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{t}{j} \binom{N-t}{i-j}.$$

Используя этот факт, в разд. 2 мы укажем тестирующее множество для кодов типа Препараты. Множество вершин $T \subseteq Q_n$ называем *тестирующим* для некоторого класса объектов $\mathfrak{K} = \{K \subseteq Q_n\}$, если из условий $K_1, K_2 \in \mathfrak{K}$, $K_1 \cap T = K_2 \cap T$ следует, что $K_1 = K_2$.

Подмножество $C \subseteq Q_n$, состоящее из M слов с попарными расстояниями не менее d , называется *двоичным (n, M, d) -кодом*, т. е. кодом длины n , мощности M и кодовым расстоянием d ; через χ_C будем обозначать характеристическую функцию кода C . Код называется *совершенным* (с расстоянием 3), если шары радиуса 1 с центрами в кодовых словах не пересекаются и покрывают весь Q_n . Совершенные коды длины n существуют для любых $n = 2^t - 1$, $t = 2, 3, \dots$, и только таких [2, 3]. В половине случаев, когда $t = 2m$, $m = 2, 3, \dots$, существуют *коды типа Препараты* длины $n = 2^{2m} - 1$, определяемые как коды с минимальным расстоянием 5 и мощности $2^{n+1}/(n+1)^2$. Каждый код Препараты P является подмножеством некоторого, притом единственного, совершенного кода [4], который будем обозначать через $C(P)$.

Разбиение $(D_0, \dots, D_r)$ вершин графа называется *совершенной раскраской*, если для любых $i, j \in \{0, \dots, r\}$ существует целое число s_{ij} такое, что произвольная вершина из D_i имеет в точности s_{ij} соседей из множества D_j . Матрица $S = (s_{ij})$ называется *матрицей параметров раскраски*.

1. Проекции на собственные подпространства

Выясним, как связаны ортогональные проекции характеристических функций кода типа Препараты P и совершенного кода $C(P)$ на собственные подпространства V_i , $i = 0, 1, \dots, n$.

Известно, что каждый код типа Препараты P равномерно упакован [5], а значит, порождает совершенную раскраску $D = (D_0 = P, D_1, D_2, D_3 = C(P) \setminus P)$ вершин гиперкуба по расстоянию от кода P с матрицей параметров

$$S_P = \begin{bmatrix} 0 & n & 0 & 0 \\ 1 & 0 & n-1 & 0 \\ 0 & 2 & n-3 & 1 \\ 0 & 0 & n & 0 \end{bmatrix}.$$

Её собственные значения равны n , -1 , $-1 \pm \sqrt{n+1}$, поэтому характеристические функции каждого из множеств D_0, D_1, D_2, D_3 лежат в подпространстве

$$V_0 \oplus V_{(n+1)/2} \oplus V_k \oplus V_h,$$

$$k = \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2}, \quad h = \frac{n+1}{2} + \frac{\sqrt{n+1}}{2}.$$

Иначе говоря, характеристическая функция χ_{D_i} , $i = 0, 1, 2, 3$, представима в виде суммы четырёх собственных функций, являющихся ортогональными проекциями на подпространства $V_0, V_{(n+1)/2}, V_k, V_h$ соответственно:

$$\chi_{D_i} = \chi_{D_i}^{(0)} + \chi_{D_i}^{((n+1)/2)} + \chi_{D_i}^{(k)} + \chi_{D_i}^{(h)}.$$

Так как V_0 состоит из тождественно равных константе функций, легко показать, что

$$\chi_P^{(0)} = \frac{1}{2^n} \sum_{\mathbf{x} \in Q_n} \chi_P(\mathbf{x}) \cdot 1 = \frac{2}{(n+1)^2}. \quad (2)$$

Аналогично про произвольный совершенный код C известно следующее. Во-первых, его определение эквивалентно тому, что разбиение $(C, Q_n \setminus C)$ является совершенной раскраской с матрицей параметров

$$S_C = \begin{bmatrix} 0 & n \\ 1 & n-1 \end{bmatrix},$$

собственные значения которой равны n и -1 , а значит, характеристическая функция кода C (а также характеристическая функция дополнения $Q_n \setminus C$ к коду) лежит в подпространстве $V_0 \oplus V_{(n+1)/2}$, точнее говоря,

$$\chi_C = \chi_C^{(0)} + \chi_C^{((n+1)/2)}, \quad \text{причём } \chi_C^{(0)} = \frac{1}{n+1}. \quad (3)$$

Выясним связь проекций характеристических функций произвольного кода типа Препараты P и содержащего его совершенного кода $C(P)$ на подпространство $V_{(n+1)/2}$.

Лемма 1. Пусть P — код Препараты и $C(P)$ — содержащий его совершенный код. Тогда

$$\chi_P^{((n+1)/2)} = \frac{2}{n+1} \chi_{C(P)}^{((n+1)/2)}. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $D = (D_0 = P, D_1, D_2, D_3 = C(P) \setminus P)$ — совершенная раскраска по расстояниям от кода P . Множество D_2 является, с одной стороны, множеством всех вершин на расстоянии 2 от кода P , а с другой стороны, множеством вершин на расстоянии 1 от множества $D_3 = C(P) \setminus P$. Поэтому для всех $\mathbf{x} \in Q_n$, во-первых, имеем

$$\chi_{D_2}(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \chi_P(\mathbf{x} + \mathbf{e}^i + \mathbf{e}^j), \quad (5)$$

а во-вторых,

$$\chi_{D_2}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \chi_{D_3}(\mathbf{x} + \mathbf{e}^i). \quad (6)$$

Определение (1) собственной функции из подпространства $V_{(n+1)/2}$ принимает следующий вид: $f \in V_{(n+1)/2}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=1}^n f(\mathbf{x} + \mathbf{e}^i) = -f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q_n.$$

С учётом этого из (5) получим

$$\begin{aligned} \chi_{D_2}^{((n+1)/2)}(\mathbf{x}) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \chi_P^{((n+1)/2)}(\mathbf{x} + \mathbf{e}^i + \mathbf{e}^j) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \chi_P^{((n+1)/2)}(\mathbf{x} + \mathbf{e}^j + \mathbf{e}^i) - \sum_{i=1}^n \chi_P^{((n+1)/2)}(\mathbf{x} + \mathbf{e}^i + \mathbf{e}^i) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n (-\chi_P^{((n+1)/2)}(\mathbf{x} + \mathbf{e}^j)) - n \chi_P^{((n+1)/2)}(\mathbf{x}) \right) \\ &= \frac{1}{2} (\chi_P^{((n+1)/2)}(\mathbf{x}) - n \chi_P^{((n+1)/2)}(\mathbf{x})) = -\frac{n-1}{2} \chi_P^{((n+1)/2)}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Аналогично из (6) следует, что

$$\chi_{D_2}^{((n+1)/2)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \chi_{D_3}^{((n+1)/2)}(\mathbf{x} + \mathbf{e}^i) = -\chi_{D_3}^{((n+1)/2)}(\mathbf{x}).$$

Сравнивая два полученных выражения для ортогональной проекции характеристической функции множества D_2 на собственное подпространство $V_{(n+1)/2}$, имеем

$$\frac{n-1}{2} \chi_P^{((n+1)/2)} = \chi_{D_3}^{((n+1)/2)}. \quad (7)$$

Поскольку $C(P) = P \cup D_3$, для характеристических функций получим $\chi_{C(P)} = \chi_P + \chi_{D_3}$, поэтому

$$\chi_P^{((n+1)/2)} + \chi_{D_3}^{((n+1)/2)} = \chi_{C(P)}^{((n+1)/2)}.$$

Осталось применить (7) и прийти к равенству (4). Лемма 1 доказана.

2. Тестирующее множество

Для произвольного кода P типа Препараты положим

$$F_P = \chi_P - \frac{2}{n+1} \chi_{C(P)}.$$

Заметим, что функция F_P различает вершины кода P типа Препараты, вершины из $C(P) \setminus P$ и остальные вершины гиперкуба:

$$F_P(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{n-1}{n+1}, & \text{если } \mathbf{x} \in P, \\ -\frac{2}{n+1}, & \text{если } \mathbf{x} \in C(P) \setminus P, \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} \in Q_n \setminus C(P). \end{cases}$$

Лемма 2. Пусть P — произвольный код Препараты. Тогда

- (1) $F_P \in V_k \oplus V_h$, $k = \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2}$, $h = \frac{n+1}{2} + \frac{\sqrt{n+1}}{2}$;
- (2) функция F_P антиподальна, т. е. $F_P(\mathbf{x}) = F_P(\mathbf{1} + \mathbf{x})$ для любой вершины $\mathbf{x} \in Q_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Очевидно, что $F_P \in V_0 \oplus V_{(n+1)/2} \oplus V_k \oplus V_h$. В силу леммы 1 имеем

$$F_P^{(n+1)/2} = \chi_P^{(n+1)/2} - \frac{2}{n+1} \chi_{C(P)}^{(n+1)/2} = 0.$$

Кроме того, из (2) и (3) следует, что $F_P^{(0)} = 0$.

(2) В силу п. (1) функция F_P является линейной комбинацией функций $\varphi^{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = (-1)^{\langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle}$, где $\mathbf{a} \in W_k \cup W_h$. Поскольку числа k и h чётны, каждая такая функция принимает одинаковые значения на любой паре противоположных вершин $\mathbf{x}$ и $\mathbf{1} + \mathbf{x}$. Лемма 2 доказана.

На основе полученных фактов и [1] может быть доказана

Теорема 1. Пусть $n = 2^{2m} - 1$, $m = 2, 3, \dots$, и $k = \frac{n+1}{2} - \frac{\sqrt{n+1}}{2}$. Множество

$$T = W_{k-3} \cup W_{k-2} \cup W_{k-1} \cup W_k \cup W_{k+1} \cup W_{k+2} \quad (8)$$

является тестирующим для кодов типа Препараты длины n , если

$$K_i(i; 2i + \sqrt{n+1}) \neq 0, \quad i = 0, 1, \dots, k. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из доказанного в [1] следует, что если матрица

$$B = \begin{bmatrix} A_{(n)}^{kk} & A_{(n)}^{kh} \\ A_{(n)}^{hk} & A_{(n)}^{hh} \end{bmatrix}$$

невырожденная, то произвольная функция из подпространства $V_k \oplus V_h$ однозначно определяется своими значениями на множестве $W_k \cup W_h$.

Пусть P — произвольный код типа Препараты. В силу леммы 2, если матрица B невырожденная, то функция F_P однозначно определяется своими значениями на множестве вершин $W_k \cup W_h$, причём её значения на множестве W_h равны значениям в противоположных вершинах из множества $W_{n-h} = W_{k-1}$. Таким образом, для однозначной восстановимости кода P по некоторому его подмножеству P_0 достаточно, чтобы, во-первых, матрица B была невырожденной, и во-вторых, по P_0 однозначно вычислялись все значения $F_P(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in W_k \cup W_{k-1}$.

Покажем, что $B = A_{(n+1)}^{kk}$. Каждой вершине n -мерного куба, имеющей вес k или h , сопоставим вершину $(n+1)$ -мерного куба веса k :

$$r(\mathbf{a}) = \begin{cases} (\mathbf{a}, 0), & \text{если } \mathbf{a} \in W_k, \\ (\mathbf{1} + \mathbf{a}, 1), & \text{если } \mathbf{a} \in W_h. \end{cases}$$

Легко понять, что это взаимно однозначное соответствие. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in W_k \cup W_h$. Проверим, что элемент матрицы B на пересечении строки, соответствующей вершине $\mathbf{a}$, и столбца, соответствующего вершине $\mathbf{b}$, равен элементу $(-1)^{\langle r(\mathbf{a}), r(\mathbf{b}) \rangle}$ матрицы $A_{(n+1)}^{kk}$ на пересечении строки, соответствующей вершине $r(\mathbf{a})$, и столбца, соответствующего вершине $r(\mathbf{b})$:

$$(-1)^{\langle r(\mathbf{a}), r(\mathbf{b}) \rangle} = \begin{cases} (-1)^{\langle (\mathbf{a}, 0), (\mathbf{b}, 0) \rangle} = (-1)^{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle}, & \text{если } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in W_k; \\ (-1)^{\langle (\mathbf{a}, 0), (\mathbf{1} + \mathbf{b}, 1) \rangle} = (-1)^{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} (-1)^{\langle \mathbf{a}, \mathbf{1} \rangle}, & \text{если } \mathbf{a} \in W_k, \mathbf{b} \in W_h; \\ (-1)^{\langle (\mathbf{1} + \mathbf{a}, 1), (\mathbf{b}, 0) \rangle} = (-1)^{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} (-1)^{\langle \mathbf{b}, \mathbf{1} \rangle}, & \text{если } \mathbf{a} \in W_h, \mathbf{b} \in W_k; \\ (-1)^{\langle (\mathbf{1} + \mathbf{a}, 1), (\mathbf{1} + \mathbf{b}, 1) \rangle} = (-1)^{\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle} (-1)^{\langle \mathbf{a}, \mathbf{1} \rangle} (-1)^{\langle \mathbf{b}, \mathbf{1} \rangle} \\ \quad \times (-1)^{\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle} (-1)^{1 \cdot 1}, & \text{если } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in W_h. \end{cases}$$

Учитывая, что числа k и h чётны, во всех четырёх случаях получаем требуемое равенство. Как показано в [1], собственные значения матрицы $A_{(n+1)}^{kk}$ равны

$$(-2)^j K_{k-j}(k-j; n+1-2j), \quad j = 0, \dots, k.$$

После замены $i = k - j$ видим, что $A_{(n+1)}^{kk}$ обратима в том и только том случае, когда числа $K_i(i; 2i + \sqrt{n+1})$ не равны нулю для всех $i = 0, \dots, k$.

Осталось заметить, что поскольку радиус покрытия кода типа Препараты равен 3, по множеству $P_0 = P \cap T$ для каждой вершины $\mathbf{x} \in W_{k-1} \cup W_k$ можно однозначно установить, на каком расстоянии от кода P она находится, а следовательно, и значение функции $Fr(\mathbf{x})$ в ней. Теорема 1 доказана.

Подчеркнём, что результат этой теоремы носит условный характер, и ключевым становится вопрос о неравенстве нулю значений (9) многочленов Кравчука, когда значение переменной равно номеру многочлена. В общем виде вопрос о целых нулях этих многочленов далёк от своего решения, но есть предположение [6], что таковых существует немного. В таблице, приведённой в [6] для начальных значений параметров, нет целых корней, равных номеру многочлена. Из неё следует, что для кодовых длин $n \in \{15, 63, 255, 102, 4095\}$ требуемые в теореме 1 значения не равны нулю.

Следствие 1. Если $m \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, то для кодов типа Препараты длины $n = 2^{2m} - 1$ множество T , определённое формулой (8), будет тестирующим.

Замечание. Зная все вершины кода типа Препараты P в объединении T шести уровней гиперкуба, можно однозначно восстановить весь код P , а также содержащий его совершенный код $C(P)$. В [7] доказано,

что для класса совершенных кодов тестирующим множеством является средний слой $W_{(n+1)/2}$ гиперкуба. Таким образом, в случае выполнения указанных в теореме 1 условий совершенный код, содержащий код типа Препараты, может быть восстановлен по меньшей информации, чем произвольный совершенный код, что согласуется с результатом [8] о существовании совершенных кодов, не содержащих кодов типа Препараты.

Частично результаты данной статьи были анонсированы в [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Васильева А. Ю.** О реконструктивных множествах вершин в булевом кубе // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2012. Т. 19, № 1. С. 3–16.
2. **Зиновьев В. А., Леонтьев В. К.** Несуществование совершенных кодов над полями Галуа // Пробл. управления и теории информации. 1973. Т. 2, № 2. С. 123–132.
3. **Tietäväinen A.** On the nonexistence of perfect codes over finite fields // SIAM J. Appl. Math. 1973. V. 24, No. 1. P. 88–96.
4. **Zaitsev G. V., Zinoviev V. A., Semakov N. V.** Interrelation of Preparata and Hamming codes and extension of Hamming codes to new double-error-correcting codes // Proc. 2nd Int. Symp. Information Theory (Tsahkadsor, Armenia, USSR, Sept. 2–8, 1971). Budapest: Akadémiai Kiadó, 1973. P. 257–264.
5. **Семаков Н. В., Зиновьев В. А., Зайцев Г. В.** Равномерно упакованные коды // Пробл. передачи информации. 1971. Т. 7, № 1. С. 38–50.
6. **Krasikov I., Litsyn S.** On integral zeros of Krawtchouk polynomials // J. Comb. Theory. Ser. A. 1996. V. 74, No. 1. P. 71–99.
7. **Августинович С. В.** Об одном свойстве совершенных двоичных кодов // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1995. Т. 2, № 1. С. 4–6.
8. **Кротов Д. С., Васильева А. Ю.** О совершенных кодах, не включающих кодов Препараты // Пробл. передачи информации. 2016. Т. 52, № 3. С. 92–96.
9. **Vasil'eva A. Yu.** On the reconstruction of Preparata-like codes // Proc. 15th Int. Workshop Algebraic and Combinatorial Coding Theory (Albena, Bulgaria, June 18–24, 2016). Sofia: Inst. Math. Inform., 2016. P. 296–300.

Васильева Анастасия Юрьевна

Статья поступила

1 сентября 2022 г.

После доработки —

14 сентября 2022 г.

Принята к публикации

16 сентября 2022 г.

A TESTING SET FOR PREPARATA-LIKE CODES

A. Yu. Vasil'eva^{1,2}

¹ Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptuyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia

² Novosibirsk State University,
2 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: vasilan@math.nsc.ru

Abstract. The reconstruction of an object of a given class by its intersection with some (so-called testing) set is studied. For the class, we consider Preparata-like codes, i. e. nonlinear codes of length $n = 2^{2m} - 1$, $m = 2, 3, \dots$, with code distance 5 and twice the size of a linear code of the same length and distance. We determine conditions under which the union of a few concentric spheres forms the testing set for Preparata-like codes.

Keywords: Hamming graph, Preparata code, perfect code, testing set, Krawtchouk polynomial.

REFERENCES

1. A. Yu. Vasil'eva, On reconstructive sets of vertices in the Boolean cube, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **19** (1), 3–16 (2012) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **6** (3), 393–402 (2012)].
2. V. A. Zinoviev and V. K. Leontiev, On non-existence of perfect codes over Galois fields, *Probl. Uprav. Teor. Inf.* **2** (2), 123–132 (1973) [Russian].
3. A. Tietäväinen, On the nonexistence of perfect codes over finite fields, *SIAM J. Appl. Math.* **24** (1), 88–96 (1973).
4. G. V. Zaitsev, V. A. Zinoviev, and N. V. Semakov, Interrelation of Preparata and Hamming codes and extension of Hamming codes to new double-error-correcting codes, in *Proc. 2nd Int. Symp. Information Theory, Tsahkadzor, Armenia, USSR, Sept. 2–8, 1971* (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1973), pp. 257–264.

This research is carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (Project FWNF–2022–0017).

English version: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **17** (2) (2023).

5. **N. V. Semakov, V. A. Zinoviev, and G. V. Zaitsev**, Uniformly packed codes, *Probl. Peredachi Inf.* **7** (1), 38–50 (1971) [Russian] [*Probl. Inf. Transm.* **7** (1), 30–39 (1971)].
6. **I. Krasikov and S. Litsyn**, On integral zeros of Krawtchouk polynomials, *J. Comb. Theory, Ser. A*, **74** (1), 71–99 (1996).
7. **S. V. Avgustinovich**, On a property of perfect binary codes, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **2** (1), 4–6 (1995) [Russian] [*Operations Research and Discrete Analysis* (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1997), pp. 227–232 (Math. Its Appl., Vol. 391)].
8. **D. S. Krotov and A. Yu. Vasil'eva**, On perfect codes that do not contain Preparata-like codes, *Probl. Peredachi Inf.* **52** (3), 92–96 (2016) [Russian] [*Probl. Inf. Transm.* **52** (3), 284–288 (2016)].
9. **A. Yu. Vasil'eva**, On the reconstruction of Preparata-like codes, in *Proc. 15th Int. Workshop on Algebraic and Combinatorial Coding Theory, Albena, Bulgaria, June 18–24, 2016* (Inst. Math. Inform., Sofia, 2016), pp. 296–300.

Anastasia Yu. Vasil'eva

Received September 1, 2022

Revised September 14, 2022

Accepted September 16, 2022

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ЗАБОЛЕВАЕМОСТИ COVID-19 В МОСКВЕ
С ПРИМЕНЕНИЕМ АГЕНТНОЙ МОДЕЛИ

*В. В. Власов¹, А. М. Дерябин¹, О. В. Зацепин^{1, а},
Г. Д. Каминский³, Э. В. Карамов^{2,3}, А. Л. Карманов¹,
С. Н. Лебедев¹, Г. Н. Рыкованов¹, А. В. Соколов¹,
Н. А. Теплых¹, А. С. Тургиев^{2,3}, К. Е. Хатунцев¹*

¹ Российский федеральный ядерный центр —
ВНИИ технической физики им. акад. Е. И. Забабахина,
ул. Васильева, 13, 456770 Снежинск, Россия

² Национальный исследовательский центр
эпидемиологии и микробиологии им. Н. Ф. Гамалеи,
ул. Гамалеи, 18, 123098 Москва, Россия

³ Национальный медицинский исследовательский центр
фтизиопульмонологии и инфекционных заболеваний,
ул. Достоевского, 4, 127473 Москва, Россия

E-mail: ^аo.v.zatsepin@mail.ru

Аннотация. Возникновение пандемии COVID-19 создало чрезвычайную ситуацию в области здравоохранения в России и мире в целом, в связи с чем возникла необходимость в создании инструментов прогнозирования развития ситуации и оценки предполагаемых мер регулирования. В современных условиях для решения таких задач активно применяется математическое моделирование. В работе рассматривается агентная модель эпидемии COVID-19 в мегаполисе. Модель была разработана в 2020 г. и получила развитие в последующие годы. Возможности модели включают описание совместного распространения нескольких вариантов вируса и учёт данных о вакцинации и активности населения. Вычисление параметров модели осуществляется с использованием статистических данных о ежедневном приросте выявленных больных.

Исследование выполнено при поддержке Министерства науки и высшего образования России (соглашение № 075–11–2020–011 (13.1902.21.0040)).

© В. В. Власов, А. М. Дерябин, О. В. Зацепин, Г. Д. Каминский, Э. В. Карамов, А. Л. Карманов, С. Н. Лебедев, Г. Н. Рыкованов, А. В. Соколов, Н. А. Теплых, А. С. Тургиев, К. Е. Хатунцев, 2023

Продemonстрировано применение модели для описания эпидемиологической ситуации в г. Москве в 2021 г. и начале 2022 г. Показана возможность построения прогноза на 1–3 месяца с учётом появления новых вариантов SARS-CoV-2 — штаммов «дельта» и «омикрон». Табл. 3, ил. 10, библиогр. 64.

Ключевые слова: пандемия COVID-19, математическое моделирование, прогноз развития эпидемии COVID-19, варианты SARS-CoV-2, штамм «дельта», штамм «омикрон», вакцинация.

Введение

Вспыхнувшая в 2020 г. пандемия заболевания COVID-19, вызываемого коронавирусом нового типа SARS-CoV-2, поставила перед многими странами серьёзные задачи, которые требовали принятия мер для недопущения наиболее неблагоприятного сценария развития событий. В течение 2020 г. и первой половины 2021 г. в Российской Федерации такие меры также были выработаны и приняты: закрытие границ или введение специальных правил для лиц, въезжающих в страну, ограничение на посещение общественных мест и пользование транспортом, переход на удалённую работу и учёбу, обязательное соблюдение мер безопасности гражданами, введение QR-кодов и т. д. Медицинской системой приняты меры для повышения вероятности выявления и лечения больных, также в этот период была развёрнута система вакцинации населения.

Для оценки соответствия принимаемых мер возникающим условиям потребовалось прогнозировать развитие ситуации при различных сценариях регулирования. Значительную роль в прогнозировании играют математические модели, которые используют массив данных как о прошедших эпидемиях, так и о текущей для описания развития эпидемиологического процесса. В первой половине 2020 г. разработана стохастическая агентная модель, позволяющая описывать развитие эпидемии коронавируса в мегаполисе [1]. Эта модель предполагала наличие одного штамма вируса и не учитывала вакцинацию населения. В конце 2020 г. и начале 2021 г. стали появляться сообщения о новых вариантах SARS-CoV-2, которые распространились и в России. Это потребовало развития модели, в которой были бы учтены вакцинация населения и одновременное присутствие нескольких штаммов с различными характеристиками, влияющими на их распространение в обществе. В настоящей работе рассматривается модель, обладающая такими свойствами, и её применение для описания эпидемии COVID-19 в Москве в 2021–2022 гг.

1. Математические методы в эпидемиологии

Началом применения математики для описания эпидемиологических явлений можно, по-видимому, считать 1760 г., когда Даниил Бернулли

применил математический метод для оценки эффективности различных способов прививки против оспы [2]. Его модель содержала два дифференциальных уравнения. На их основе Бернулли смог вычислить соотношение выздоровевших и умерших к общему числу тех, кто болел оспой, а также число жизней, которые могли бы быть спасены, если бы вакцинации регулярно подвергали всё население. Далее, в 1840 г. Уильям Фарр успешно описал данные по смертности от оспы в Англии и Уэльсе за период с 1837 по 1839 гг. кривой нормального распределения [3]. Этот описательный метод был впоследствии развит Джоном Браунли, опубликовавшим в 1906 г. статью, в которой он сопоставлял ряды эпидемиологических данных на основе распределения Пирсона [4].

Эмпирический подход, применяемый в работах Фарра и Браунли, резко отличался от метода, используемого в работах двух других учёных того же периода — Хамера [5] и Росса [6]. Их вклад состоял в применении причинной теории болезней к решению двух конкретных проблем: выяснению зависимости течения эпидемии от частоты контактов между восприимчивыми и инфекционными индивидами, а также установлению взаимосвязи между количеством комаров и возникновением малярии.

В конце 19-го века вспышка чумы в Индии привела к одному из самых важных открытий в истории эпидемиологии. В 1920-х гг. шотландскими эпидемиологами Кермаком и Маккендриком [7] была создана одна из первых математических моделей распространения инфекционных болезней. Они разделили население на три основные категории в соответствии со статусом заболевания. Тех, кто ещё не заболел, называли «восприимчивыми» (susceptible). Предполагалось, что восприимчивыми и способными к заражению рождаются все. Те, кто заразился и был способен передать болезнь восприимчивым, были названы «инфицированными» (infected). В третью группу, названную «выбывшими» (removed), входили и те, кто переболел и приобрёл иммунитет, и те, кто не справился с инфекцией и умер. Это классическое математическое представление распространения инфекции называется моделью SIR.

Можно уверенно сказать, что труд всех этих людей послужил прочной теоретической основой для дальнейших исследований в этой области [8].

Базовая модель Кермака — Маккендрика использует компартментарный подход. При этом область применения данной модели весьма ограничена из-за отсутствия учёта ряда факторов. Во-первых, это фактор эндемичности заболеваний, характеризующихся индивидуальными природными и социально-экономическими условиями. Во-вторых, это фактор сезонности, выражающийся в регулярной повторяемости эпидемий. Также SIR-модель перестаёт работать, когда необходимо учитывать больше данных: например, различную плотность населения в разных районах или разные пути передачи инфекции.

Из-за очевидных недостатков модель SIR многократно дорабатывалась. Сегодня существует целое семейство моделей, разработанных на базе SIR:

- SIRS (модель для описания динамики заболеваний с временным иммунитетом),
- SEIR (модель для описания распространения заболеваний с инкубационным периодом),
- SIS (модель для описания распространения заболеваний, к которым не вырабатывается иммунитета),
- MSEIR (модель, учитывающая иммунитет детей, приобретённый внутриутробно),
- SEIR-HCD (к SEIR-модели добавляются группы H — госпитализированные, C — больные в критическом состоянии, D — умершие),
- SEIR-D (к SEIR-модели добавлена группа D — умершие).

Следует отметить, что на основе SIR-моделей появилось целое направление моделирования эпидемий, имеющее опыт удачных практических разработок.

Примером использования классического SIR-подхода для выявления пандемических характеристик новой коронавирусной инфекции в Европе служит работа [9]. Для каждой из девяти стран (на основании данных тестирования) проведена оценка достоверности данных о количестве заболевших и своевременности принятых правительством ограничительных мер. Рассчитан сценарий развития эпидемии и обнаружено некоторое влияние средней температуры в стране на вероятность заражения при ежедневных контактах населения.

Следует помнить, что использование дифференциальных уравнений подразумевает однородность населения с точки зрения его участия в процессах распространения эпидемии [10], поэтому, для того чтобы учесть существующую в действительности неоднородность, исследователи делят население на группы (например, по возрастным категориям) и подбирают коэффициенты, характеризующие, например, долю заразных людей среди инфицированных, добиваясь совпадения результатов расчётов с реальными данными.

Примером такого подхода служит работа COVID-19 Scenarios [11]. Модель, основанная на SEIR-структуре, позволяет варьировать характеристики инфекции, а также разделять группы населения по восприимчивости к инфекции и интенсивности социальных контактов в зависимости от возраста. Будучи открытым программным продуктом, модель используется повсеместно в мире для составления сценариев развития эпидемии COVID-19 и оценки пиковых нагрузок на систему здравоохранения.

Другой пример SEIR-подхода показан в работе [12]. В ней проанализированы две математические модели SEIR-HCD и SEIR-D. Для каждой

из них сформулированы постановки обратных задач (для уточнения параметров в г. Москве и Новосибирской области), а также алгоритмы их решения. В результате для разного количества тестируемых данных разработан прогностический сценарий развития эпидемии COVID-19 для г. Москвы и Новосибирской области. Предсказан пик заболеваемости в каждом конкретном случае и проведён анализ применимости разработанных моделей.

Помимо проведения различий между иммунными и инфицированными людьми, часто необходимо различать состояние инфекции и болезни. При этом важно помнить, что период проявления симптомов болезни не обязательно совпадает с периодом, когда инфицированный человек уже заразен для окружающих. Таким образом, в делении стадий болезни появляется дополнительный период, когда человек уже заразен, но ещё не проявляет симптомов. Такие лица являются «бессимптомными» вирусоносителями.

В дальнейшем у коронавируса проявилось такое свойство, в связи с которым некоторые люди остаются в бессимптомном состоянии до самого окончания болезни и полного выздоровления. Такие люди, равно как и больные с невыраженными симптомами, не обращаются к врачам и не проходят тестирование на наличие РНК-вируса. Всех этих людей объединяет то, что они продолжают вести нормальный образ жизни и взаимодействуют с окружающими обычным образом, но при этом заразны и не зарегистрированы как заражённые. В дальнейшем таких людей будем называть «скрытыми» вирусоносителями.

Для корректного учёта скрытых вирусоносителей в базовую модель SEIR-D вводят дополнительное состояние L, соответствующее заразным, но не выявленным лицам. Соответствующая модель получила название SELIRD. Примером такого подхода служит работа [1]. В ней проанализирована SEIR-D модель и её модификации. Определены основные переменные (проведено разбиение населения на классы), уравнения модели и набор параметров, определяемых характеристиками новой коронавирусной инфекции и взаимодействием между классами. В результате показан способ калибровки модели по данным о числе заболевших и приведены некоторые результаты моделирования развития эпидемии для Москвы. Также проведена оценка эффективности карантинных мероприятий и числа скрытых носителей инфекции.

Тем не менее для всех таких моделей характерно ещё одно ограничение: характеристики и поведение всех индивидов, отнесённых к одной подгруппе, считаются одинаковыми. Современные имитационные модели распространения заболеваний [13] позволяют обойти это допущение.

Первыми имитационными моделями были клеточные автоматы [14]. Они представляют собой совокупность квадратных ячеек, объединённых

в прямоугольную решётку. Узлы решётки моделируют индивидов, каждый из которых имеет фиксированное положение в пространстве. Время течёт дискретно. На каждом шаге инфекция (с определённой вероятностью) может перейти от заражённого индивида к его восприимчивому соседу. В рамках такого подхода можно представить и перемещения индивидов [15].

Основным ограничением для такого подхода является моделирование окружающего индивидов пространства как решётки. Для большинства заболеваний можно считать, что инфекция распространяется посредством контактов между людьми. При этом контакты между индивидами не ограничиваются между непосредственными соседями. Они носят нерегулярный характер как по времени, так и в пространстве. Учесть их позволяют сетевые модели [16], которые представляют схему возможных контактов в виде графа, динамического или статического. В этом случае вершины графа — объекты с набором индивидуальных свойств, детализированно описывающие состояние отдельных индивидов. Сетевые модели могут быть как детерминированными, так и стохастическими.

При этом сетевые модели предлагают общую технологию моделирования окружающего пространства, но не специфицируют способ организации графа контактов для населения. Отмечено, что формирование связей между индивидами и возможных путей распространения инфекции на основе их социальной принадлежности является наиболее естественным. Именно такой способ применяется в популяционных моделях [17]. В этом случае окружающее пространство разбито на различные локации — места, в которых контактируют индивиды. Время в популяционных моделях течёт дискретно с заданным шагом. На каждом шаге рассчитывается вероятность заражения индивидов с учётом числа инфицированных в локациях, посещаемых индивидом. Популяционные модели позволяют представить структуру общества любой сложности, но требуют детальной настройки параметров на основе эмпирических данных.

Наиболее гибким методом, реализующим моделирование на уровне отдельных людей, является особый вид имитационных моделей — агентные модели. Они сохраняют подход популяционных методов к моделированию окружающего пространства, но не используют централизованный расчёт вероятностей передачи инфекции, а описывают поведение каждого человека (агента) индивидуально.

Таким образом, агентное моделирование — это метод имитационного моделирования, исследующий поведение отдельных индивидуумов (агентов) и то, как такое поведение определяет поведение всей системы в целом [18, 19]. В случае моделирования эпидемии рассчитывается динамика поведения каждого агента, а вероятность инфицирования в каждом общественном месте вычисляется, исходя из числа присутствующих

в нём переносчиков инфекции. Такой подход позволяет накапливать в ходе моделирования детальную информацию о распространении инфекции в обществе и анализировать эффективность действий, направленных на управление эпидемией [20–25].

В последнее время появилось достаточно много исследований, посвящённых агент-ориентированному моделированию (АОМ). Их можно условно разделить на те, в которых изучаются характер и динамика распространения эпидемии с целью прогнозирования эпидемиологической ситуации, и те, которые разработаны для тестирования мероприятий по борьбе с эпидемиями.

Представим краткий обзор эпидемиологических АОМ:

- индивидуум-ориентированная модель распространения эпидемии в городских условиях [20], предназначенная для сравнительного анализа эффективности противоэпидемических мер до и во время эпидемии;
- модель распространения вспышки кори в Канаде [26], предназначенная для изучения пространственной диффузии инфекционных заболеваний в городской среде через сеть человеческих контактов;
- модель вспышки гриппа А (H1N1/09) в Мексике [27], разработанная для изучения воздействия ограничительных мер правительства;
- модель [28], разработанная индийскими и американскими учёными и предназначенная для оценки различных стратегий вакцинации населения против ротавирусной инфекции;
- модель новой коронавирусной инфекции [29], разработанная для построения сценариев развития COVID-19 в Бостоне с учётом широкого тестирования населения и отслеживания контактов заражённых.

Использование АОМ позволяет создать реалистичную эпидемиологическую модель, в которой учитываются особенности протекания конкретного инфекционного заболевания, неоднородность населения городов с точки зрения восприимчивости к инфекции (в зависимости от возраста и пола), интенсивность социальных контактов, возможность вакцинации, а также ограничительные меры правительства. Наибольший интерес представляют эпидемиологические АОМ, получившие широкое практическое применение.

Программный комплекс EpiSimS [30] применяется для моделирования распространения широкого класса инфекционных заболеваний в США. В модели учитываются индивидуальные особенности агентов (пол и возраст), их поведение, возможные ограничительные меры правительства и географические особенности регионов страны.

Программный комплекс OpenABM-Covid19 [31] создан в Великобритании для построения сценариев развития эпидемии COVID-19 с учётом полного набора ограничительных мер, отслеживания контактов населения, а также своевременной вакцинации. В модели рассчитывается

динамика поведения агентов, вычисляется вероятность инфицирования при пребывании в каждом конкретном общественном месте. Параметры модели подбирались для Великобритании, но могут быть адаптированы для других стран и регионов.

Программный комплекс Covasim [32] создан в США для построения сценариев развития эпидемии COVID-19 с учётом вакцинации, ограничительных мер правительства и индивидуальных особенностей агентов (в зависимости от пола, возраста и сопутствующих заболеваний). На основании всех этих данных накапливается информация о распространении инфекции в обществе. Широко применяется по всему миру.

Программный комплекс ABM REINA [33] создан в Финляндии. На основе случайной структуры контактов с учётом дифференциации населения по возрасту и ограничительных мер строятся сценарии развития COVID-19. Этот комплекс тестировался в масштабах страны и получил широкое применение для оценки пиковых нагрузок на систему здравоохранения.

Такие программные комплексы имеют гибкий интерфейс, позволяющий варьировать параметры инфекции и характер ограничительных мер. В них используется дифференциация населения по восприимчивости к инфекции (в зависимости от пола и/или возраста). Также существует возможность оценки влияния эпидемии на систему здравоохранения. Этими характеристиками обладают и разрабатываемые авторами модель и программный комплекс, предназначенные для моделирования распространения вирусных инфекций в России [1, 34, 35].

2. Материалы и методы

Разработанная модель относится к классу «индивидуум-ориентированных» моделей [20, 36] и позволяет учесть сложную демографическую структуру, особенности распространения и протекания заболеваний, медицинские статистические данные и систему контактов жителей городов. В модели представлены следующие социальные группы населения: дошкольники, школьники, студенты, работники предприятий и офисов, работники сферы жизнеобеспечения, пенсионеры. Каждый житель моделируется математическим агентом, который в течение дня последовательно пребывает в различных общественных местах, называемых в модели ячейками. Такое посещение определённого набора общественных мест в течение дня называется сценарием. Каждая ячейка описывает конкретное место взаимодействия между агентами: квартиру (дом), группу детского сада, класс в школе, группу вуза, рабочее пространство, единицу транспорта (вагон метро, автобус и т. п.), магазин.

Социальные группы отличаются сценариями жизни их представителей в течение дня. Например, день работников предприятий и офисов

описывается такой последовательностью: дом $\rightarrow$ транспорт $\rightarrow$ работа $\rightarrow$ транспорт $\rightarrow$ магазин $\rightarrow$ дом. Сценарию дня пенсионера соответствует последовательность: дом $\rightarrow$ транспорт $\rightarrow$ магазин $\rightarrow$ транспорт $\rightarrow$ дом. Дошкольники не пользуются ячейками «транспорт» и «магазин».

В сценарий каждого жителя включены ячейки «дом» (квартира). Это значит, что при моделировании создаётся набор ячеек типа «дом», каждая из которых включена в сценарий нескольких агентов — членов семьи. Аналогично в сценарий каждого дошкольника включена ячейка «группа детского сада», школьника — ячейка «класс», студента — ячейка «группа вуза», работающего — ячейка «работа». Все жители, кроме дошкольников и школьников, посещают ячейки «магазин». Часть населения, пользующаяся общественным транспортом, распределяется по соответствующим ячейкам случайным образом. В модели имеется три типа транспортных ячеек: вагон метро, автобус и микроавтобус, которые различаются площадью и числом одновременно находящихся в них агентов. Также рассматривается три типа торговых учреждений: гипермаркеты, супермаркеты и магазины шаговой доступности.

Модель Москвы, её социальной структуры и сети розничных торговых предприятий основывалась на оценках, сделанных по статистическим данным Федеральной службы государственной статистики, представленным на официальном сайте [37] и в ежегодном сборнике [38]. В табл. 1 приведено распределение, используемое в модели населения по социальным группам.

Таблица 1

**Распределение населения Москвы
по социальным группам в модели**

Группы населения	Количество, %
Школьники и дошкольники	13
Студенты	7
Работники предприятий и офисов	25
Работники сферы обслуживания	28
Работники сферы жизнеобеспечения	3
Пенсионеры	24

При построении распределения жителей по видам транспорта использовались данные сервиса «Яндекс Исследования» об активности движения транспорта в течение дня [39].

В каждой ячейке рассчитывается вероятность заражения, которая зависит от площади ячейки, количества инфицированных людей и времени пребывания. Таким образом, для каждого восприимчивого агента каждый день определяется его состояние: здоров или инфицирован. Такой

алгоритм позволяет описывать гетерогенную модель общества, в которой каждый человек длительное время взаимодействует в основном с небольшим числом окружающих (семья, группа в садике, класс в школе, группа в вузе, рабочий коллектив), но в относительно короткие промежутки времени случайным образом может взаимодействовать с любым другим человеком из рассматриваемой популяции (в транспорте, в магазине).

При моделировании эпидемии важно учитывать зависимость активности населения от развития ситуации. Реакцией на возрастающее число заболевших в популяции является организация государственными органами сдерживающих распространение инфекции карантинных мер, которые направлены на снижение активности населения: отменяются занятия в школе, студенты и работающие переводятся на «удалённый» режим и т. п. Имитация карантинных мер в модели организована следующим образом: для каждой социальной группы задаётся коэффициент активности K_{act} , который принимает значения в интервале $[0, 1]$ и обозначает вероятность агента из данной социальной группы за текущие сутки пройти свой обычный суточный сценарий или с вероятностью $1 - K_{\text{act}}$ остаться в ячейке «дом». Таким образом, в модели определяется, какая доля людей из каждой социальной группы будет находиться в течение суток в ячейке «дом», а какая будет взаимодействовать по стандартным (до введения ограничений) сценариям. Коэффициент активности задаётся как кусочно постоянная функция времени для каждой социальной группы и определяется по статистическим данным [40].

В случае инфицирования агента заболевание протекает в соответствии с фазами, перечисленными в табл. 2.

Таблица 2

Фазы заболевания при моделировании эпидемии COVID 19

Фаза заболевания	Описание	Период, сут
Латентный	Инфицирован, но не заразен	3
Субклинический	Заразен, но не проявляет симптомов болезни	2
Скрытый больной	Больной не выявлен, заразен	4
Больной дома	Больной изолирован дома, заразен для семьи	10
Больной в стационаре	Больной изолирован в больнице	12
Иммунный	Здоровый человек, не может заразиться	180

Периоды фаз заболевания взяты из результатов медицинских исследований для начального штамма [41, 42]. Для моделирования распространения других вариантов SARS-CoV-2 используются те же периоды фаз заболевания, за исключением данных о длительности иммунитета.

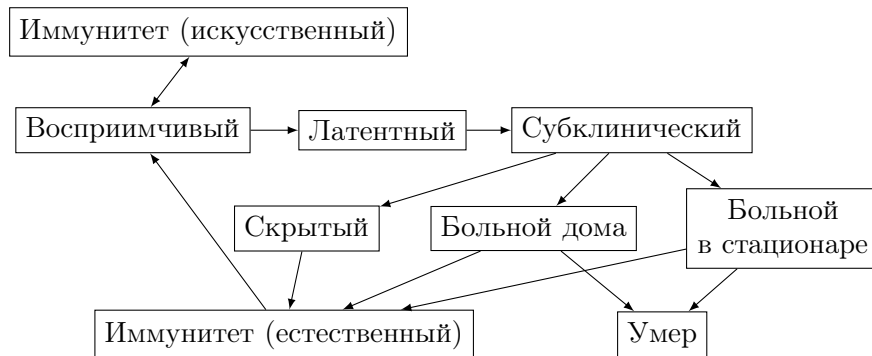


Рис. 1. Схема переходов агента в состояния, соответствующие фазам заболевания

Схема возможных переходов между состояниями представлена на рис. 1. Состояние «восприимчивый» соответствует здоровому человеку, который может заразиться.

Модель распространения инфекции в первом приближении включала в себя характеристики одного штамма рассматриваемого вируса. Однако развитие ситуации с COVID-19 в 2021 г. продемонстрировало необходимость учёта совместного распространения нескольких штаммов, что было реализовано в модели. В таком случае вычисление параметров модели, зависящих от характеристик штаммов, и расчёты прогнозных значений наблюдаемых величин выполняются в условиях, близких к реальной ситуации.

В начальный момент в модели активен первоначальный штамм SARS-CoV-2. Далее в заданные моменты появляются другие штаммы путём искусственного заражения некоторого числа агентов, и происходит распространение уже двух или более вариантов вируса. Каждый штамм характеризуется следующими параметрами: периоды фаз заболевания, вероятности фазовых переходов (например, из фазы «субклинический» в фазы «скрытый», «больной дома», «больной в стационаре»), длительность приобретаемого иммунитета по отношению к каждому из моделируемых штаммов, коэффициент увеличения или уменьшения вероятности заражения по отношению к первоначальному штамму, дата появления и начальное число агентов, инфицированных этим штаммом. В каждый момент времени агент может быть инфицирован только одним штаммом.

Для учёта вакцинации населения используются статистические данные [43, 44]. По этим данным для каждого дня из временного интервала, на котором моделируется развитие эпидемии, определяется количество жителей, у которых выработался иммунитет после вакцинации. Период,

в течение которого появляется иммунитет, может варьироваться. В расчётах, которые рассматриваются в настоящей работе, он равен трём неделям. При моделировании каждый день из числа восприимчивых равномерно выбирается соответствующее число агентов, которые переводятся в состояние «искусственный иммунитет». Длительность этого иммунитета, приобретаемого в результате вакцинации, может отличаться для разных штаммов. Например, если агент вакцинировался и приобрёл иммунитет к первоначальному штамму SARS-CoV-2 на 180 дней, то его иммунитет к штамму «дельта» может иметь меньшую продолжительность — 120 дней [45].

Динамика ансамбля агентов, отражающего городскую популяцию, моделируется с шагом по времени в одни сутки. В результате расчёта одного шага часть агентов переходит в новое состояние, другие агенты остаются в прежнем состоянии. Вероятность инфицирования агентов на шаге рассчитывается по следующему алгоритму.

Для каждого агента в зависимости от социальной группы определяется значение коэффициента K_{act} . С вероятностью $1 - K_{\text{act}}$ агент в течение суток остаётся в ячейке «дом». В противном случае в соответствии с дневным сценарием агента определяются ячейки, в которых он будет находиться.

Для каждой ячейки вычисляется число одновременно находящихся в ней заразных агентов. Для каждого агента вычисляется вероятность не заразиться в течение дня по формуле

$$p = e^{-\sum_{l=1}^M \tilde{p}(n_l, R, S_l) \frac{\Delta t_l}{T}},$$

где

l — индекс ячейки,

M — число ячеек, посещаемых агентом в течение дня,

$\tilde{p}(n_l, R, S_l)$ — эффективная вероятность заражения,

n_l — количество заразных агентов в ячейке,

R — эффективный радиус заражения,

S_l — площадь ячейки,

Δt_l — время пребывания в ячейке,

T — эффективный период заражения восприимчивого агента в общественном месте.

С вероятностью $1 - p$ агент становится инфицированным. Далее он проходит через состояния, соответствующие фазам заболевания, в соответствии со схемой на рис. 1. На каждом временном шаге фиксируется информация о числе агентов в каждом из состояний и о фактах инфицирования — в каких типах ячеек и каких социальных группах они происходили. В результате расчёта данные накапливаются, что позволяет

анализировать динамику состояния населения города и каналы распространения инфекции.

Эффективная вероятность заражения $\tilde{p}$ характеризует плотность инфицированных агентов в ячейке. При этом считается, что заражение происходит на расстоянии, не превышающем эффективный радиус R . Если $g = \pi R^2 \frac{n_l}{S_l}$, то в первом приближении $\tilde{p}$ можно записать так:

$$\tilde{p}(n_l, R, S_l) = \begin{cases} g, & \text{если } g < 1, \\ 1, & \text{если } g \geq 1. \end{cases} \quad (1)$$

Однако формула (1) довольно неточная, так как предполагает, что для каждого инфицированного агента его область заразности (круг радиусом R , в котором инфицированный агент может заражать восприимчивых) полностью помещается в ячейку и области заразности всех инфицированных агентов в ячейке не пересекаются. На практике это предположение не работает в случае плотного размещения инфицированных агентов в ячейке. Для уточнения формулы методом Монте-Карло рассчитаны значения $\tilde{p}$ с учётом возможности пересечения областей заразности инфицированных агентов и частичного выхода областей заразности за пределы ячейки. На рис. 2 приведён график полученной

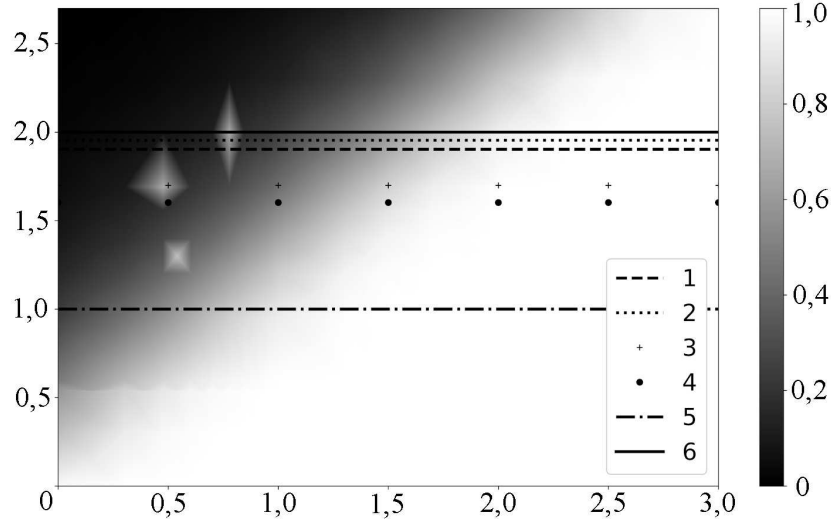


Рис. 2. График зависимости эффективной вероятности $\tilde{p}$ от $\lg(n_l)$ и $\lg(S)$ при $R = 1$ м; по оси абсцисс — $\lg(n_l)$, по оси ординат — $\lg(S)$. Маркерами отмечены используемые в модели значения площади некоторых типов ячеек: 1 — дом, 2 — рабочее место в сфере обслуживания, 3 — метро, 4 — автобус, 5 — микроавтобус, 6 — магазин шаговой доступности

зависимости эффективной вероятности от площади ячейки и количества заразных агентов в ячейке.

Эффективный период заражения T_i — это зависящий от времени варьируемый параметр модели. В настоящее время основной наблюдаемой величиной, используемой для вычисления T , является ежедневный прирост выявленных больных (количество новых случаев за день). Соответствующие статистические данные накапливаются с начала эпидемии COVID-19 по всем субъектам РФ. Расчёт значений $T(t)$ осуществляется последовательно от момента начала эпидемии на временных шагах из равномерного разбиения $t_0, \dots, t_N$. Стандартная длина временного шага равна семи дням. На каждом шаге $[t_i, t_{i+1})$ вычисляется значение T_i такое, что

$$\|f(t, T_i) - f_{\text{stat}}(t)\| \leq \varepsilon, \quad (2)$$

где

f — прирост выявленных больных в расчёте,

f_{stat} — прирост выявленных больных по статистическим данным,

ε — параметр, определяющий точность вычисления T_i .

Для расчёта T_i применяется итерационный алгоритм. На каждой итерации k выполняется моделирование развития эпидемии на шаге $[t_i, t_{i+1})$ с фиксированным значением эффективного периода заражения T_i^k . Поиск значения T_i^k , удовлетворяющего условию (2), осуществляется методом золотого сечения [43]. Далее в описании результатов расчётов подразумевается, что перед каждым прогнозным расчётом выполняется процедура вычисления функции $T(t)$ изложенным выше способом на некотором временном интервале, который называется интервалом калибровки. Прогноз рассчитывается на последующем временном интервале, на котором принимается, что параметр $T(t)$ равен константе:

$$T(t) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 T_{N-i}.$$

Также на прогнозном интервале принимается, что значения коэффициента активности социальных групп и темпа вакцинации населения постоянны и равны значениям, полученным усреднением статистических данных на последнем временном шаге $[t_{N-1}, t_N]$ интервала калибровки.

Помимо выявляемых больных в модели учитываются и скрытые вирусносители. Это инфицированные люди, которые либо не проявляют симптомов и не могут быть выявлены, либо переносят заболевание в лёгкой форме и не обращаются за медицинской помощью. Этот тип инфицированных не регистрируется медицинской системой и продолжает взаимодействовать по алгоритму обычной жизни. По истечении некоторого времени с момента заражения скрытый больной выздоравливает

и приобретает иммунитет. Поскольку скрытые больные не регистрируются, их доля, как правило, неизвестна и может быть определена только по косвенным признакам. Доля скрытых вирусоносителей является одним из ключевых параметров, который определяет характеристики конечного решения, такие как величина максимального значения ежедневного прироста выявленных больных и смертность.

3. Результаты и обсуждение

Как было отмечено выше, одним из ключевых параметров, влияющим на результаты моделирования, является доля скрытых больных. В 2020 г. при разработке первоначальной версии модели выполнялись расчёты эпидемий COVID-19 в городах Нью-Йорк и Москва [1]. Развитие эпидемии в Нью-Йорке, где вводились ограниченные карантинные меры, удалось описать только в предположении доли скрытых больных в интервале 70–90%. Это значение существенно превышало оценку Роспотребнадзора — 25–40% [47], что вызывало сомнения в корректности модели. В мае 2020 г. появились фактические данные по наличию антител у жителей Нью-Йорка на выборке в 15 тыс. человек [48], результаты которой показаны в табл. 3. Сопоставление с фактическим значением заболеваемости позволило оценить долю скрытых больных на уровне 90%.

Таблица 3

Количество скрытых вирусоносителей согласно проведённым тестам на антитела в г. Нью-Йорк (брифинг губернатора штата Нью-Йорк от 2.05.2020, выборка — 15 тыс. чел.)

Район	Положительных тестов на антитела	Инфицированных на 100 тыс. чел.
Бронкс	27,6%	27600
Статен-Айленд	19,2%	19200
Куинс	18,4%	18400
Бруклин	19,2%	19200
Манхэттен	17,3%	17300
Всего	20%	20000
Район	Зарегистрированных случаев на 100 тыс. чел.	Доля скрытых инфицированных
Бронкс	2624	90%
Статен-Айленд	2407	87%
Куинс	2093	89%
Бруклин	1654	91%
Манхэттен	1111	94%
Всего	1943	90%

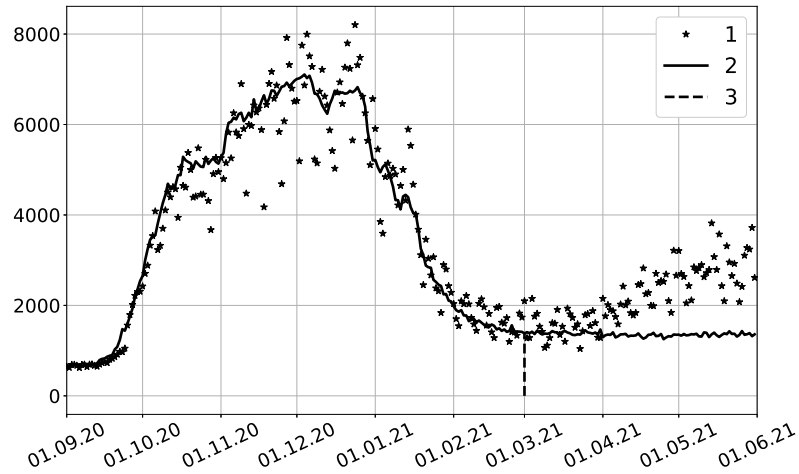


Рис. 3. Прогноз развития ситуации в Москве. Прирост больных за сутки, чел.: 1 — фактические данные, 2 — расчёт, 3 — дата завершения калибровки и начала прогноза

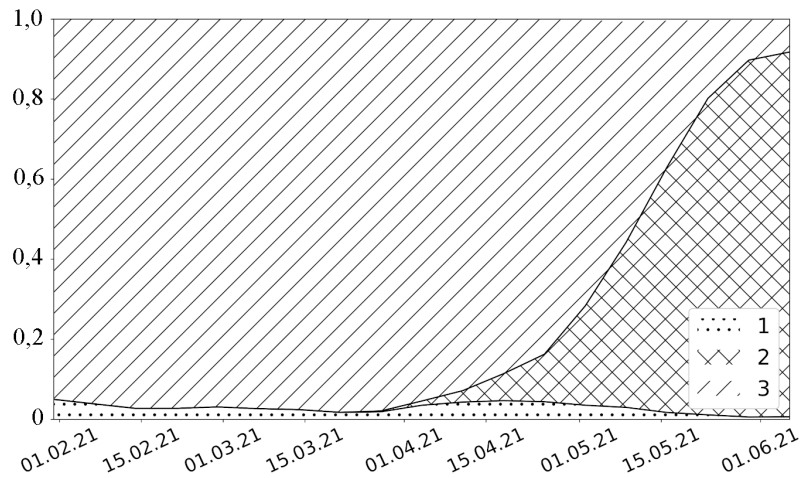


Рис. 4. Результаты секвенирования в Великобритании. Соотношение штаммов, доли: 1 — все другие, 2 — «дельта», 3 — «альфа»

Аналогичные результаты были получены и при сопоставлении данных для Москвы [49]. С учётом возможных погрешностей фактических данных для дальнейшего моделирования было выбрано значение доли скрытых больных в 80%.

Рассмотрим применение модели для описания развития ситуации с заболеваемостью COVID-19 в Москве в 2021 г. В конце 2020 г. — начале 2021 г. наблюдалась вторая волна эпидемии, преимущественно вызванная распространением первоначального штамма. По данным о ежедневной регистрации новых случаев была вычислена зависимость $T(t)$ на временном интервале до 1.03.2021 г. Отметим, что во всех расчётах использовались статистические данные о темпе вакцинации населения [43, 44]. Сравнение расчётного прогноза с фактическими данными представлено на рис. 3. Приблизительно с 1.04.2021 г. становятся заметны отличия результатов моделирования от фактических данных. Значительный рост заболеваемости COVID-19 в апреле — мае потребовал анализа его причин и нового прогноза развития событий.

К этому моменту имелась информация о том, что в Индии в октябре 2020 г. в Нагпуре, штат Махараштра, был выявлен штамм «дельта», линия B.1.617.2, подвид линии B.1.617. С момента идентификации линии B.1.617.2 было обнаружено 300 852 последовательности. Первый секвенс генома был опубликован в международной базе GISAID 7 октября 2020 г. В список VOC штамм «дельта» был включён 11 мая 2021 г. [50–52].

В России за период с 17 по 31 мая 2021 г. из 286 новых случаев COVID-19 штаммом «дельта» были вызваны 206, или 72% (с 31 мая по 14 июня 2021 г. — 89%, с 14 по 28 июня 2021 г. — 95%) [53].

Похожая ситуация была в Великобритании. На рис. 4 показаны взятые с сайта Public Health England (Technical briefing 16, 18 June 2021) результаты секвенирования, свидетельствующие о замене штамма «альфа» штаммом «дельта» приблизительно за 2 месяца. «Дельта»-штамм в июне 2021 г. преобладал в Великобритании, по результатам секвенирования его доля составляла 91%. Исходя из этих данных было рассмотрено предположение о том, что новый рост заболеваемости в Москве вызван появлением штамма «дельта».

Математическое моделирование при появлении нового штамма позволило попытаться получить ответ на некоторые вопросы.

(1) Сохраняется ли иммунитет, приобретённый от предыдущих штаммов к новому штамму?

(2) Если коллективный и индивидуальный иммунитет сохраняется, насколько изменилась контагиозность вируса?

Для ответа на первый вопрос выполнено моделирование развития эпидемии при предположении отсутствия иммунитета к «дельта»-штамму у населения. Появление этого штамма в России вводилось в модельном расчёте с 1.03.2021 г. Характеристики протекания заболевания и контагиозность вируса считались совпадающими с первоначальным штаммом. Выяснилось, что фактический рост заболеваемости существенно ниже, чем полученный в расчёте (рис. 5). Это обстоятельство может служить

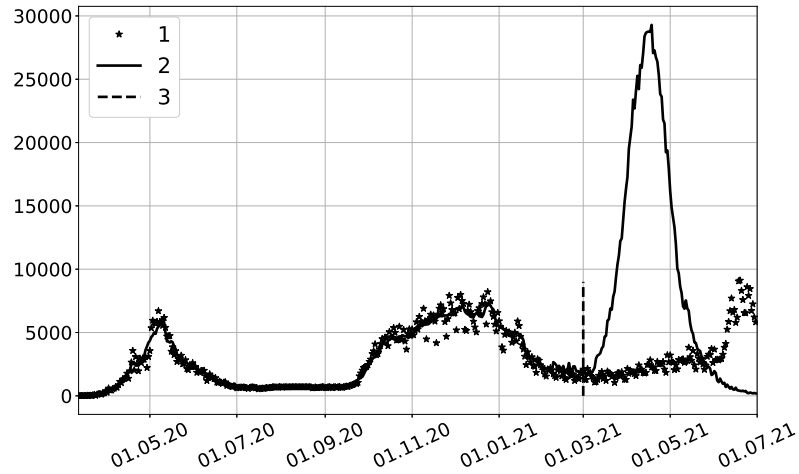


Рис. 5. Расчёт при гипотетическом отсутствии у населения иммунитета к штамму «дельта». Прирост больных за сутки, чел.: 1 — фактические данные, 2 — расчёт, 3 — введение в модель штамма «дельта»

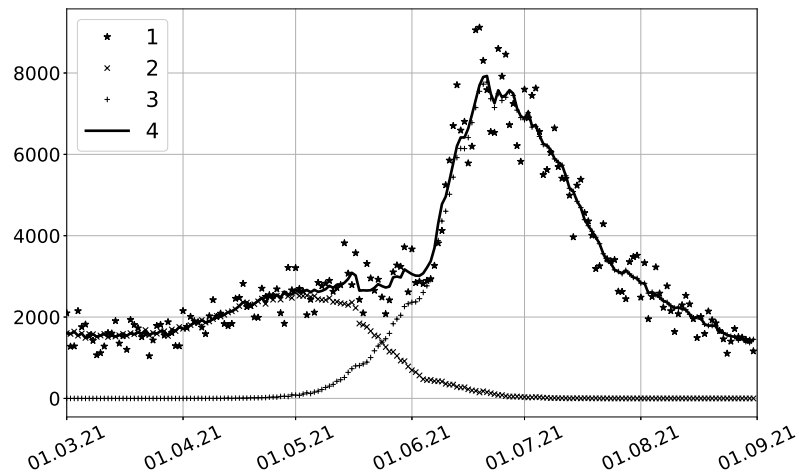


Рис. 6. Расчёт с замещением первоначального штамма штаммом «дельта».

Прирост больных за сутки, чел.: 1 — фактические данные, 2 — инфицированные начальным штаммом, 3 — инфицированные штаммом «дельта», 4 — все случаи

косвенным свидетельством в пользу сохранения иммунитета (возможно, частичного) к «дельта»-штамму у ранее переболевшего или привитого населения.

В то же время информация о длительности сохранения иммунитета встречалась в данных вирусологов [54–57]. Согласно этим данным человек, переболевший первоначальным штаммом, сохранял иммунитет по отношению к этому же штамму в среднем 180 дней, а по отношению к «дельта»-штамму — 120 дней. Длительность иммунитета к «дельта»-штамму как у переболевших им, так и у вакцинированных равен 120 дням. Для анализа развития ситуации с учётом нового штамма выполнены расчёты с этими параметрами. Принято, что вероятность заражения штаммом «дельта» в 2 раза выше, чем первоначальным штаммом [58–60]. На рис. 6 приведены результаты расчёта. Вытеснение одного штамма другим, как в Великобритании (см. рис. 4), происходит приблизительно за 2 месяца. Количество новых случаев в период с 1.03 по 1.09.2021 г., полученное в расчёте, составило 589 062, что отличается на 0,1% от статистических данных.

Таким образом, вопрос о расхождении прежних результатов моделирования с реальными темпами заболевания в Москве был объяснён. В дальнейшем на интервале 12.03.2020 — 1.10.2021 г. была вычислена зависимость $T(t)$ с учётом распространения двух штаммов, после чего рассчитан прогноз развития ситуации (рис. 7). Результаты моделирования согласуются с фактическими данными приблизительно до начала ноября. Далее прогноз значительно превышает данные, что объясняется отсутствием в рассматриваемой модели информации об ограничительных мерах в период с 28 октября до 7 ноября. В случае использования в модели предположения об ограничении активности 40% населения в указанный период времени результаты расчёта согласуются с фактическими данными (рис. 8). Количество новых случаев в период с 20.10 по 1.12.2021 г., полученное в расчёте без учёта ограничений, отличается от статистических данных на 75,3%, а в случае учёта ограничений — на 8,5%. Отметим, что расчёты выполнены 20.10.2021 г.

Появление штамма «омикрон» [61] в Москве в конце 2021 — начале 2022 гг. существенно изменило развитие эпидемиологической ситуации. Как и в случае с появлением штамма «дельта», появление нового варианта вируса вызвало непрогнозируемую ранее волну заболеваемости.

В январе 2022 г. наблюдался резкий рост числа ежедневно регистрируемых новых случаев заболевания COVID-19. Можно было предположить, что этот подъём вызван повышением активности населения, однако при моделировании эта гипотеза не подтвердилась. На рис. 9 приведён результат расчёта, в котором предполагалось, что активность населения, начиная с 8 ноября 2021 г., будет близка к максимальной — 95% жителей посещают общественные места согласно их типичным сценариям в модели. Даже при таких условиях не описывается январский подъём заболеваемости.

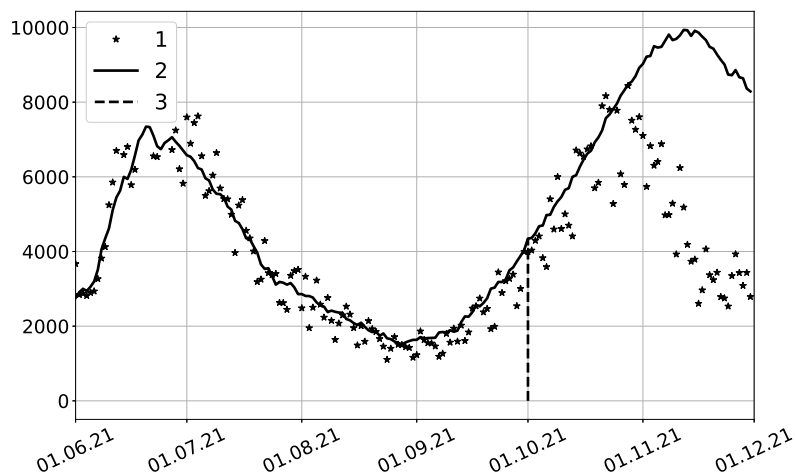


Рис. 7. Прогноз развития ситуации в Москве после введения в модель двух штаммов вируса. Прирост больных за сутки, чел.: 1 — фактические данные, 2 — расчёт, 3 — дата завершения калибровки

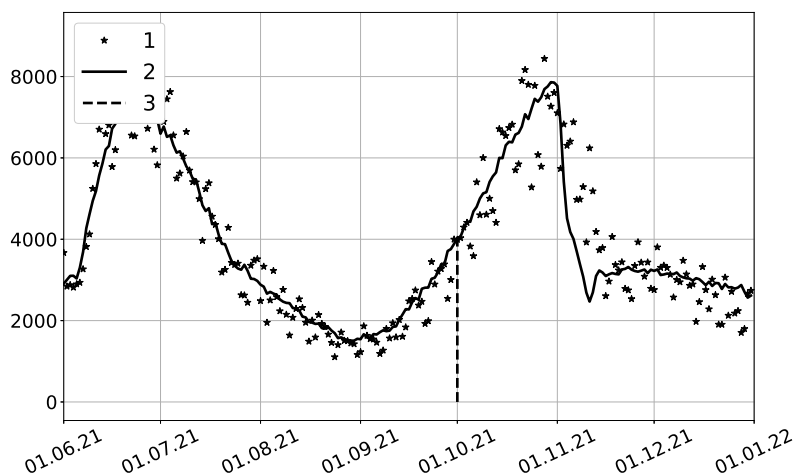


Рис. 8. Моделирование ситуации в Москве с учётом ограничений в период 28.10–7.11.2021 г. Прирост больных за сутки, чел.: 1 — фактические данные, 2 — расчёт, 3 — дата завершения калибровки

После получения первых данных о параметрах нового штамма появилась возможность проводить расчёты с учётом действия трёх штаммов — первоначального, «дельта» и «омикрон» [41, 50, 61, 62]. Было принято, что эффективность иммунитета у вакцинированного человека к штамму

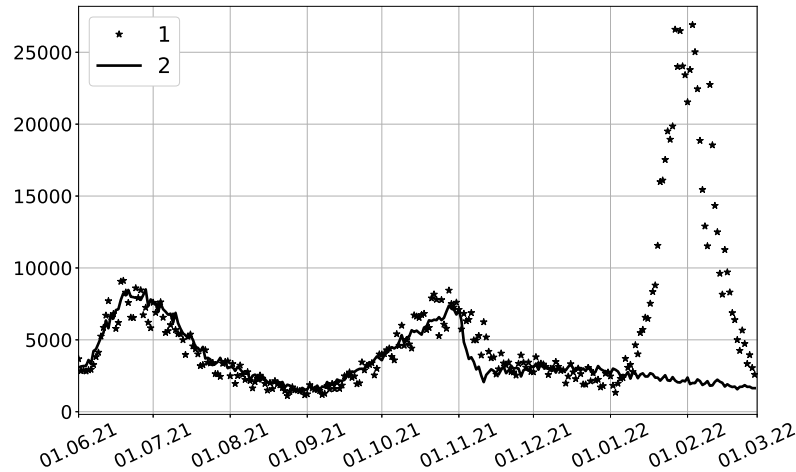


Рис. 9. Моделирование ситуации без учёта штамма «омикрон». Прирост больных за сутки, чел.: 1 — фактические данные, 2 — расчёт

«омикрон» составляет 75%, длительность иммунитета у вакцинированных и переболевших ранее в результате инфицирования штаммом «дельта» составляет 180 дней [63, 64]. На начальном этапе необходимо было оценить, как соотносится contagiозность штаммов «дельта» и «омикрон». Описать восходящую ветвь статистических данных о заболеваемости удалось при большей в 4,75 раза contagiозности штамма «омикрон» и значении доли скрытых больных 90%. Эти значения в дальнейшем использовались в прогнозных расчётах. Далее было учтено, что с 6 февраля 2022 г. в Москве введена новая массовая система тестирования с совместным применением экспресс и ПЦР тестов. В результате количество выявленных больных возросло. Например, количество заболевших 9 февраля составило 11 521, а 10 февраля выросло скачкообразно до 22 747. Новый способ учёта заболевших эффективно снизил долю скрытых больных, поэтому были выполнены расчёты с варьированием этой доли, в которых использовалась зависимость $T(t)$, полученная с использованием статистических данных до 26.01.2022 г. В результате выяснилось, что фактические данные находятся в промежутке между решениями с 90% и 80% скрытых больных (рис. 10). Количество новых случаев в период с 26.01 по 1.05.2022 г., полученное в расчёте с 80% скрытых больных, отличается от статистических данных на 94,2%, а в расчёте с 90% скрытых больных — на 17%. Расчётная временная зависимость количества новых случаев согласуется с данными на протяжении более трёх месяцев после даты завершения вычисления $T(t)$.

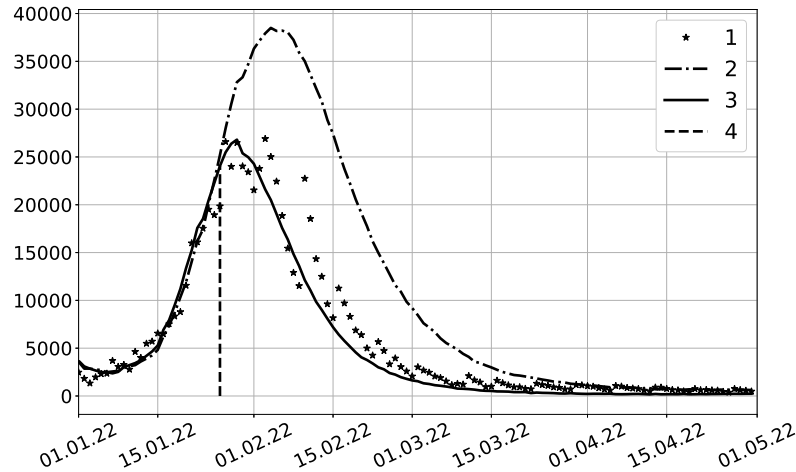


Рис. 10. Моделирование ситуации с учётом штамма «омикрон». Прирост больных за сутки, чел.: 1 — фактические данные, 2 — расчёт 80% скрытых, 3 — расчёт 90% скрытых, 4 — дата завершения калибровки

Заключение

Предполагаемая математическая модель для прогнозирования развития эпидемии SARS-CoV-2 включает в себя описание социальной структуры мегаполиса и его городской среды, алгоритмы инфицирования жителей при посещении общественных мест, учёт вакцинации населения и одновременного распространения нескольких вариантов вируса. При помощи этой модели описано развитие эпидемической ситуации в Москве в 2021–2022 гг., построены прогнозы на несколько месяцев вперёд.

В случае наличия информации о вводимых ограничениях, влияющих на активность посещения жителями общественных мест, результаты расчётов согласуются с фактическими данными в период действия ограничений и могут применяться для анализа вариантов дальнейшего развития ситуации.

В будущем планируется расширение модели для описания одновременного распространения нескольких вариантов вируса в более сложных системах, чем один мегаполис. Для этого необходимо рассмотреть взаимодействие мегаполиса и городов-спутников, системы мегаполисов и, наконец, модель страны с учётом перемещения жителей между регионами и городами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адарченко В. А., Бабань С. А., Брагин А. А. [и др.]. Моделирование развития эпидемии коронавируса по дифференциальным и статистическим моделям. Снежинск, 2020. 30 с. (Препр. / РФЯЦ — ВНИИТФ; № 264).
2. Bernoulli D. Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir // Histoire de l'Académie Royale des Sciences. 1760. Paris: L'Imprimerie Royale, 1766. P. 1–45. [French].
3. Farr W. Progress of epidemics — Epidemic of small pox // Second annual report of the Registrar-General of births, deaths, and marriages in England. London: W. Clowes and Sons, 1840. P. 91–98.
4. Brownlee J. Statistical studies in immunity: The theory of an epidemic // Proc. R. Soc. Edinb. 1906. V. 26, No. 1. P. 484–521.
5. Hamer W. H. The Milroy lectures on epidemic disease in England — The evidence of variability and of persistency of type // Lancet. 1906. V. 1, No. 4307. P. 733–739.
6. Ross R. Report on the prevention of malaria in Mauritius. London: Waterlow and Sons, 1908. 202 p.
7. Kermack W. O., McKendrick A. G. A contribution to the mathematical theory of epidemics // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. 1927. V. 115, No. 772. P. 700–721.
8. Андерсон Р., Мэй Р. Инфекционные болезни человека. Динамика и контроль. М.: Мир; Научный мир, 2004.
9. Bhanot G., DeLisi C. Predictions for Europe for the COVID-19 pandemic from a SIR model. Oyster Bay, NY: Cold Spring Harbor Lab., 2020. (Prepr. Server Health Sci. medRxiv). Available at medrxiv.org/content/10.1101/2020.05.26.20114058 (accessed Mar. 31, 2023).
10. Макаров В. Л., Бахтизин А. Р., Сушко Е. Д., Агеева А. Ф. Моделирование эпидемии COVID-19 — преимущества агент-ориентированного подхода // Экономические и социальные перемены: факты, тенденции, прогноз. 2020. Т. 13, № 4. С. 58–73.
11. Noll N. B., Aksamentov I., Druelle V. [et al.]. COVID-19 Scenarios: An interactive planning tool for COVID-19 outbreaks. Basel: Univ. Basel, 2020. Available at covid19-scenarios.org (accessed Mar. 31, 2023).
12. Криворотько О. И., Кабанихин С. И., Зятков Н. Ю., Приходько А. Ю., Прохошин Н. М., Шишленин М. А. Математическое моделирование и прогнозирование COVID-19 в Москве и Новосибирской области // Сиб. журн. вычисл. математики. 2020. Т. 23, № 4. С. 395–414.
13. Кондратьев М. А. Методы прогнозирования и модели распространения заболеваний // Компьют. исследования и моделирование. 2013. Т. 5, № 5. С. 863–882.
14. Бейли Н. Математика в биологии и медицине. М.: Мир, 1970. 327 с.
15. Sirakoulis G. C., Karafyllidis I., Thanailakis A. A cellular automaton model for the effects of population movement and vaccination on epidemic propagation // Ecol. Model. 2000. V. 133, No. 3. P. 209–223.

16. **Saramaki J., Kaski K.** Modelling development of epidemics with dynamic small-world networks // *J. Theor. Biology.* 2005. V. 234, No. 3. P. 413–421.
17. **Patel R., Longini I. M., Jr., Halloran M. E.** Finding optimal vaccination strategies for pandemic influenza using genetic algorithms // *J. Theor. Biology.* 2005. V. 234, No. 2. P. 201–212.
18. **Макаров В. Л., Бахтизин А. Р., Сушко Е. Д., Васенин В. А., Борисов В. А., Роганов В. А.** Агент-ориентированные модели: мировой опыт и технические возможности реализации на суперкомпьютерах // *Вестн. РАН.* 2016. Т. 86, № 3. С. 252–262.
19. **Агеева А. Ф.** Имитационное моделирование эпидемий: агентный подход // *Моделирование, оптимизация и информ. технологии.* 2020. Т. 8, № 3. 13 с.
20. **Перминов В. Д., Корнилина М. А.** Индивидуум-ориентированная модель распространения эпидемии в городских условиях // *Мат. моделирование.* 2007. Т. 19, № 5. С. 116–127.
21. **Li J., Giabbanelli P.** Returning to a normal life via COVID-19 vaccines in the United States: A large-scale agent-based simulation study // *JMIR Med. Inform.* 2021. V. 9, No. 4, ID e27419. 19 p.
22. **Nguyen L. K. N., Howick S., McLafferty D., Anderson G. H., Pravin Kumar S. J., van der Meer R., Megiddo I.** Evaluating intervention strategies in controlling coronavirus disease 2019 (COVID-19) spread in care homes: An agent-based model // *Infect. Control Hosp. Epidemiol.* 2021. V. 42, No. 9. P. 1060–1070.
23. **Lorig F., Johansson E., Davidsson P.** Agent-based social simulation of the COVID-19 pandemic: A systematic review // *J. Artif. Soc. Soc. Simul.* 2021. V. 24, No. 3, ID 5. 26 p.
24. **Криворотько О. И., Кабанихин С. И., Сосновская М. И., Андорная Д. В.** Анализ чувствительности и идентифицируемости математических моделей распространения эпидемии COVID-19 // *Вавилов. журн. генетики и селекции.* 2021. Т. 25, № 1. С. 82–91.
25. **Mellacher P.** Endogenous viral mutations, evolutionary selection, and containment policy design // *J. Econ. Interact. Coord.* 2022. V. 17. P. 801–825.
26. **Perez L., Dragicevic S.** An agent-based approach for modelling dynamics of contagious disease spread // *Int. J. Health Geogr.* 2009. V. 8, ID 50. 17 p.
27. **Frias-Martinez E., Williamson G., Frias-Martinez V.** An agent-based model of epidemic spread using human mobility and social network information // 2011 IEEE Int. Conf. Privacy, Security, Risk and Trust; IEEE Int. Conf. Social Computing (Boston, MA, USA, Oct. 9–11, 2011). Los Alamitos: IEEE Comput. Soc., 2011. P. 49–56.
28. **Megiddo I., Colson A. R., Nandi A., Chatterjee S., Prinja S., Kherra A., Laxminarayan R.** Analysis of the Universal Immunization Programme and introduction of a rotavirus vaccine in India with IndiaSim // *Vaccine.* 2014. V. 32, Suppl. 1. P. A151–A161.

-
29. Aleta A., Martín-Corral D., Pastore y Piontti A. [et al.]. Modelling the impact of testing, contact tracing and household quarantine on second waves of COVID-19 // *Nat. Hum. Behav.* 2020. V. 4, No. 9. P. 964–971.
 30. Eubank S., Guclu H., Anil Kumar V. C., Marathe M. V., Srinivasan A., Toroczkai Z., Wang N. Modelling disease outbreaks in realistic urban social networks // *Nature*. 2004. V. 429, No. 6988. P. 180–184.
 31. Hinch R., Probert W. J. M., Nurtay A. [et al.]. OpenABM-COVID-19 — An agent-based model for non-pharmaceutical interventions against COVID-19 including contact tracing // *PLOS Comput. Biol.* 2021. V. 17, No. 7, ID e1009146. 26 p.
 32. Kerr C. C., Stuart R. M., Mistry D. [et al.]. Covasim: An agent-based model of COVID-19 dynamics and interventions // *PLOS Comput. Biol.* 2021. V. 17, No. 7, ID e1009149. 32 p.
 33. Yrjölä J., Tuomisto J. T., Kolehmainen M., Bonsdorff J., Tikkanen T. REINA: Agent-based simulation model for COVID-19 spread in society and patient outcomes. Helsinki: Kausal, 2020. Available at github.com/kausaltech/reina-model (accessed Mar. 31, 2023).
 34. Рыкованов Г. Н., Лебедев С. Н., Зацепин О. В. [и др.]. Агентный подход к моделированию эпидемии COVID-19 в России // *Вестн. РАН.* 2022. Т. 92, № 8. С. 747–755.
 35. Зацепин О. В., Брагин А. А., Власов В. В. [и др.]. Агентная модель развития эпидемии COVID-19 // *Забабахинские научные чтения. Сб. мат. XV Междунар. конф. (Снежинск, Россия, 27 сент. — 1 окт. 2021 г.). Снежинск: Изд-во РФЯЦ — ВНИИТФ, 2021. С. 230–231.*
 36. Grimm V., Railsback S. F. Individual-based modeling and ecology. Princeton: Princeton Univ. Press, 2005. 448 p.
 37. Социально-экономическое положение Москвы. М.: Федеральная служба государственной статистики, 2021. Доступно на gks.ru/region/doc11145/Main.htm (дата обращения 31 марта 2023 г.).
 38. Труд и занятость в России. 2019. М.: Росстат, 2019. 136 с. Доступно на rosstat.gov.ru/storage/mediabank/Trud_2019.pdf (дата обращения 31 марта 2023 г.).
 39. Исследования Яндекса — Один день из жизни московского транспорта. М.: Яндекс, 2020. Доступно на yandex.ru/company/researches/2020/moscow/trolltrambus (дата обращения 31 марта 2023 г.).
 40. COVID-19: Community mobility reports. Mountain View, CA: Google, 2022. Available at google.com/covid19/mobility (accessed Mar. 31, 2023).
 41. Cevik M., Kuppalli K., Kindrachuk J., Peiris M. Virology, transmission, and pathogenesis of SARS-CoV-2 // *BMJ*. 2020. V. 371, No. 8267, ID m3862. 6 p.
 42. Aronna M. S., Guglielmi R., Moschen L. M. A model for COVID-19 with isolation, quarantine and testing as control measures // *Epidemics*. 2021. V. 34, ID 100437. 15 p.

-
43. Коронавирус COVID-19: Официальная информация о коронавирусе в России на портале стопкоронавирус.рф. М.: Национальные приоритеты, 2023. Доступно на stopcoronavirus.rf (дата обращения 31 марта 2023 г.).
 44. Орлова Н. В., Гололобова Т. В., Суранова Т. Г., Филатова М. Н., Орлова С. Ю. Анализ динамики вакцинации от коронавирусной инфекции в России // Мед. алфавит. 2021. Т. 23. С. 8–12.
 45. Sughayer M. A., Souan L., Abu Alhowr M. M. [et al.]. Comparison of the effectiveness and duration of anti-RBD SARS-CoV-2 IgG antibody response between different types of vaccines: Implications for vaccine strategies // Vaccine. 2022. V. 40, No. 20. P. 2841–2847.
 46. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.
 47. Доклад главы Роспотребнадзора Анны Поповой на совещании с Путиным // Известия. 2020, 28 апр. Доступно на iz.ru/1005598/video/doklad-glavy-rospotrebnadzora-anny-popovoi-na-soveshchanii-s-putinym (дата обращения 31 марта 2023 г.).
 48. Антитела к коронавирусу выявили у почти 20% жителей Нью-Йорка // Life. 2020, 3 мая. Доступно на life.ru/p/1321666 (дата обращения 31 марта 2023 г.).
 49. Исследование популяционного иммунитета к новой коронавирусной инфекции у москвичей // Мосгорздрав. 2020, 11 июня. Доступно на mosgorzdrav.ru/ru-RU/news/default/card/4133.html (дата обращения 31 марта 2023 г.).
 50. Tracking SARS-CoV-2 variants. Geneva: World Health Organ., 2023. Available at who.int/en/activities/tracking-SARS-CoV-2-variants (accessed Mar. 31, 2023).
 51. Tsueng G., Mullen J. L., Alkuzweny M. [et al.]. Outbreak.info Research Library: A standardized, searchable platform to discover and explore COVID-19 resources // Nat. Methods. 2023. V. 20. P. 536–540. Available at outbreak.info (accessed Mar. 31, 2023).
 52. Variants of the Virus. Atlanta, GA: Centers for Disease Control and Prevention, 2023. Available at cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/variants/index.html (accessed Mar. 31, 2023).
 53. Hodcroft E. CoVariants: Per country. Overview of variants in countries. Bern: Univ. Bern, 2023. Available at covariants.org/per-country (accessed Mar. 31, 2023).
 54. Gushchin V. A., Dolzhikova I. V., Shchetinin A. M. [et al.]. Neutralizing activity of sera from Sputnik V-vaccinated people against variants of concern (VOC: B.1.1.7, B.1.351, P.1, B.1.617.2, B.1.617.3) and Moscow endemic SARS-CoV-2 variants // Vaccines. 2021. V. 9, No. 7, ID 779. 12 p.
 55. Naaber P., Tserel L., Kangro K. [et al.]. Dynamics of antibody response to BNT162b2 vaccine after six months: A longitudinal prospective study // Lancet Reg. Health Eur. 2021. V. 10, ID 100208. 9 p.
 56. Jordan S. C., Shin B.-H., Gadsden T.-A. M. [et al.]. T cell immune responses to SARS-CoV-2 and variants of concern (Alpha and Delta) in infected and vaccinated individuals // Cell. Mol. Immunol. 2021. V. 18, No. 11. P. 2554–2556.

57. **Cherednik I.** Modeling the waves of Covid-19 // *Acta Biotheoretica*. 2021. V. 70, No. 1, ID 8. 36 p.
58. **Campbell F., Archer B., Laurenson-Schafer H.** [et al.] Increased transmissibility and global spread of SARS-CoV-2 variants of concern as at June 2021 // *Eurosurveillance*. 2021. V. 26, No. 24, ID 5. 6 p.
59. **Dagpunar J.** Interim estimates of increased transmissibility, growth rate, and reproduction number of the Covid-19 B.1.617.2 variant of concern in the United Kingdom. Oyster Bay, NY: Cold Spring Harbor Lab., 2021. (Prepr. Server Health Sci. medRxiv). Available at medrxiv.org/content/10.1101/2021.06.03.21258293 (accessed Mar. 31, 2023).
60. **Mallapaty S.** COVID vaccines cut the risk of transmitting Delta—but not for long // *Nature. News*. 2021, Oct. 5. Available at nature.com/articles/d41586-021-02689-y (accessed Mar. 31, 2023).
61. **Kim D., Jo J., Lim J.-S., Ryu S.** Serial interval and basic reproduction number of SARS-CoV-2 Omicron variant in South Korea. Oyster Bay, NY: Cold Spring Harbor Lab., 2021. (Prepr. Server Health Sci. medRxiv). Available at medrxiv.org/content/10.1101/2021.12.25.21268301 (accessed Mar. 31, 2023).
62. **Hansen P. R.** Relative contagiousness of emerging virus variants: An analysis of the Alpha, Delta, and Omicron SARS-CoV-2 variants // *Econom. J.* 2021. V. 25, No. 3. P. 739–761.
63. **Gonzalez Lopez Ledesma M. M., Sanchez L., Ojeda D. S.** [et al.]. Longitudinal study after Sputnik V vaccination shows durable SARS-CoV-2 neutralizing antibodies and reduced viral variant escape to neutralization over time // *mBio*. 2022. V. 31, No. 1, ID e03442-21. 9 p.
64. **Corrao G., Franchi M., Cereda D.** [et al.]. Persistence of protection against SARS-CoV-2 clinical outcomes up to 9 months since vaccine completion: A retrospective observational analysis in Lombardy, Italy // *Lancet Infect. Dis.* 2022. V. 22, No. 5. P. 649–656.

Власов Виталий Викторович
Дерябин Александр Михайлович
Зацепин Олег Владимирович
Каминский Григорий Дмитриевич
Карамов Эдуард В.
Карманов Андрей Леонидович
Лебедев Сергей Наркисович
Рыкованов Георгий Николаевич
Соколов Андрей Владимирович
Теплых Никита Александрович
Тургиев Али Саладинович
Хатунцев Кирилл Евгеньевич

Статья поступила
20 декабря 2022 г.
После доработки —
13 февраля 2023 г.
Принята к публикации
14 февраля 2023 г.

MATHEMATICAL MODELLING OF COVID-19 INCIDENCE IN MOSCOW WITH AN AGENT-BASED MODEL

V. V. Vlasov¹, A. M. Deryabin¹, O. V. Zatsepin^{1, a},
G. D. Kaminsky³, E. V. Karamov^{2,3}, A. L. Karmanov¹,
S. N. Lebedev¹, G. N. Rykovanov¹, A. V. Sokolov¹,
M. A. Teplykh¹, A. S. Turgiyev^{2,3}, and K. E. Khatuntsev¹

¹Russian Federal Nuclear Center —
Zababakhin All-Russian Research Institute of Technical Physics,
13 Vasilyev Street, 456770 Snezhinsk, Russia

²Gamaleya National Research Center for Epidemiology and Microbiology,
18 Gamaleya Street, 123098 Moscow, Russia

³National Medical Research Center
for Phthisiopulmonology and Infectious Diseases,
4 Dostoevskiy Street, 127473 Moscow, Russia

E-mail: ^ao.v.zatsepin@mail.ru

Abstract. The outbreak of the COVID-19 pandemic created an emergency situation in the public health system in Russia and in the world, which entailed the need to develop tools for predicting the progression of the pandemic and assessing the potential interventions. In the present day context, numerical simulation is actively used to solve such problems. The paper considers a COVID-19 agent-based megalopolis model. The model was developed in 2020 and was further refined in subsequent years. The capabilities of the model include the description of simultaneous spread of several virus strains and taking into account data on vaccination and population activity. The model parameters are calculated using statistical data on the daily number of newly diagnosed COVID-19 cases.

The application of the model to describe the epidemiological situation in Moscow in 2021 and early 2022 was demonstrated. The capability for building predictions for 1–3 months was shown, taking into

This research is supported by the Ministry of Science and Higher Education of Russia (Agreement 075–11–2020–011 (13.1902.21.0040)).

account the emergence of new SARS-CoV-2 variants, i. e. the Delta and Omicron strains. Tab. 3, illustr. 10, bibliogr. 64.

Keywords: COVID-19 pandemic, numerical simulation, agent-based model, COVID-19 epidemic development prediction, SARS-CoV-2 variants, Delta strain, Omicron strain, vaccination.

REFERENCES

1. **V. A. Adarchenko, S. A. Baban, A. A. Bragin**, [et al.]. Simulation of the coronavirus epidemic with differential and statistical models. Snezhinsk, 2020. 30 p. (Prepr., RFYaTs — VNIITF, No. 264) [Russian].
2. **D. Bernoulli**, Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir, in *Histoire de l'Académie Royale des Sciences. 1760* (L'Imprimerie Royale, Paris, 1766), pp. 1–45 [French].
3. **W. Farr**, Progress of epidemics — Epidemic of small pox, in *Second Annual Report of the Registrar-General of Births, Deaths, and Marriages in England*, (W. Clowes and Sons, London, 1840), pp. 91–98.
4. **J. Brownlee**, Statistical studies in immunity: The theory of an epidemic, *Proc. R. Soc. Edinb.* **26** (1), 484–521 (1906).
5. **W. H. Hamer**, The Milroy lectures on epidemic disease in England — The evidence of variability and of persistency of type, *Lancet* **1** (4307), 733–739 (1906).
6. **R. Ross**, *Report on the Prevention of Malaria in Mauritius* (Waterlow and Sons, London, 1908).
7. **W. O. Kermack** and **A. G. McKendrick**, A contribution to the mathematical theory of epidemics, *Proc. R. Soc. Lond., Ser. A*, **115** (772), 700–721 (1927).
8. **R. M. Anderson** and **R. M. May**, *Infectious Diseases of Humans. Dynamics and Control* (Oxford Univ. Press, Oxford, 1991; Mir; Nauchnyi Mir, Moscow, 2004 [Russian]).
9. **G. Bhanot** and **C. DeLisi**, Predictions for Europe for the COVID-19 pandemic from a SIR model (Cold Spring Harbor Lab., Oyster Bay, NY, 2020) (Prepr. Server Health Sci. medRxiv). Available at medrxiv.org/content/10.1101/2020.05.26.20114058 (accessed Mar. 31, 2023).
10. **V. L. Makarov, A. R. Bakhtizin, E. D. Sushko**, and **A. F. Ageeva**, Simulation the COVID-19 epidemic — advantages of an agent-based approach, *Ekonom. Sots. Peremeny, Fakty Tend. Progn.* **13** (4), 58–73 (2020) [Russian].
11. **N. B. Noll, I. Aksamentov, V. Druelle**, [et al.]. COVID-19 Scenarios: An interactive planning tool for COVID-19 outbreaks (Univ. Basel, Basel, 2020). Available at covid19-scenarios.org (accessed Mar. 31, 2023).
12. **O. I. Krivorotko, S. I. Kabanikhin, N. Yu. Zyatkov, A. Yu. Prikhodko, N. M. Prokhoshin**, and **M. A. Shishlenin**, Mathematical modeling and forecasting of COVID-19 in Moscow and Novosibirsk region, *Sib. Zh. Vychisl. Mat.* **23** (4), 395–414 (2020) [Russian] [*Num. Anal. Appl.* **13** (4), 332–348 (2020)].

13. **M. A. Kondratyev**, Forecasting methods and models of disease spread, *Kompyut. Issled. Model.* **5** (5), 863–882 (2013) [Russian].
14. **N. T. J. Bailey**, *The Mathematical Approach to Biology and Medicine* (John Wiley & Sons, London, 1967; Mir, Moscow, 1970 [Russian]).
15. **G. C. Sirakoulis, I. Karafyllidis, and A. Thanailakis**, A cellular automaton model for the effects of population movement and vaccination on epidemic propagation, *Ecol. Model.* **133** (3), 209–223 (2000).
16. **J. Saramaki and K. Kaski**, Modelling development of epidemics with dynamic small-world networks, *J. Theor. Biology* **234** (3), 413–421 (2005).
17. **R. Patel, I. M. Longini, Jr., and M. E. Halloran**, Finding optimal vaccination strategies for pandemic influenza using genetic algorithms, *J. Theor. Biology* **234** (2), 201–212 (2005).
18. **V. L. Makarov, A. R. Bakhtizin, E. D. Sushko, V. A. Vasenin, V. A. Borisov, and V. A. Roganov**, Supercomputer technologies in social sciences: Agent-oriented demographic models, *Vestn. RAN* **86** (3), 252–262 (2016) [Russian] [*Her. Rus. Acad. Sci.* **86** (3), 248–257 (2016)].
19. **A. F. Ageeva**, Simulation of epidemics: Agent-based approach, *Model. Optim. Inf. Tekhnol.* **8** (3), 13 p. (2020) [Russian].
20. **V. D. Perminov and M. A. Kornilina**, An individual-based model for simulation of an urban epidemic, *Mat. Model.* **19** (5), 116–127 (2007) [Russian].
21. **J. Li and P. Giabbanelli**, Returning to a normal life via COVID-19 vaccines in the United States: A large-scale agent-based simulation study, *JMIR Med. Inform.* **9** (4), ID e27419, 19 p. (2021).
22. **L. K. N. Nguyen, S. Howick, D. McLafferty, G. H. Anderson, S. J. Pravin Kumar, R. van der Meer, and I. Megiddo**, Evaluating intervention strategies in controlling coronavirus disease 2019 (COVID-19) spread in care homes: An agent-based model, *Infect. Control Hosp. Epidemiol.* **42** (9), 1060–1070 (2021).
23. **F. Lorig, E. Johansson, and P. Davidsson**, Agent-based social simulation of the COVID-19 pandemic: A systematic review, *J. Artif. Soc. Soc. Simul.* **24** (3), ID 5, 26 p. (2021).
24. **O. I. Krivorotko, S. I. Kabanikhin, M. I. Sosnovskaya, and D. V. Andornaya**, Sensitivity and identifiability analysis of COVID-19 pandemic models, *Vavilov. Zh. Genet. Sel.* **25** (1), 82–91 (2021) [Russian].
25. **P. Mellacher**, Endogenous viral mutations, evolutionary selection, and containment policy design, *J. Econ. Interact. Coord.* **17**, 801–825 (2022).
26. **L. Perez and S. Dragicevic**, An agent-based approach for modelling dynamics of contagious disease spread, *Int. J. Health Geogr.* **8**, ID 50, 17 p. (2009).
27. **E. Frias-Martinez, G. Williamson, and V. Frias-Martinez**, An agent-based model of epidemic spread using human mobility and social network information, in *2011 IEEE Int. Conf. Privacy, Security, Risk and Trust; IEEE Int. Conf. Social Computing, Boston, MA, USA, Oct. 9–11, 2011* (IEEE Comput. Soc., Los Alamitos, 2011), pp. 49–56.

28. **I. Megiddo, A. R. Colson, A. Nandi, S. Chatterjee, S. Prinja, A. Khe-
ra, and R. Laxminarayan**, Analysis of the Universal Immunization Pro-
gramme and introduction of a rotavirus vaccine in India with IndiaSim, *Vaccine*
32 (Suppl. 1) A151–A161 (2014).
29. **A. Aleta, D. Martín-Corral, A. Pastore y Piontti, [et al.]**. Modelling the
impact of testing, contact tracing and household quarantine on second waves
of COVID-19, *Nat. Hum. Behav.* **4** (9), 964–971 (2020).
30. **S. Eubank, H. Guclu, V. C. Anil Kumar, M. V. Marathe, A. Sriniva-
san, Z. Toroczkai, and N. Wang**, Modelling disease outbreaks in realistic
urban social networks, *Nature* **429** (6988), 180–184 (2004).
31. **R. Hinch, W. J. M. Probert, A. Nurtay, [et al.]**. OpenABM-COVID-19 —
An agent-based model for non-pharmaceutical interventions against COVID-19
including contact tracing, *PLOS Comput. Biol.* **17** (7), ID e1009146, 26 p.
(2021).
32. **C. C. Kerr, R. M. Stuart, D. Mistry, [et al.]**. Covasim: An agent-based
model of COVID-19 dynamics and interventions, *PLOS Comput. Biol.* **17** (7),
ID e1009149, 32 p. (2021).
33. **J. Yrjölä, J. T. Tuomisto, M. Kolehmainen, J. Bonsdorff, and T. Tik-
kanen**, REINA: Agent-based simulation model for COVID-19 spread in soci-
ety and patient outcomes (Kausal, Helsinki, 2020). Available at [github.com/
kausaltech/reina-model](https://github.com/kausaltech/reina-model) (accessed Mar. 31, 2023).
34. **G. N. Rykovanov, S. N. Lebedev, O. V. Zatsepin, [et al.]**. Agent-based
simulation of the COVID-19 epidemic in Russia, *Vestn. RAN* **92** (8), 747–755
(2022) [Russian] [*Her. Rus. Acad. Sci.* **92** (4), 479–487 (2022)].
35. **O. V. Zatsepin, A. A. Bragin, V. V. Vlasov, [et al.]**. An agent-based
model for the COVID-19 epidemic, in *Zababakhin Scientific Readings* (Proc.
XV Int. Conf., Snezhinsk, Russia, Sept. 27 — Oct. 1, 2021) (Izd. RFYaTs —
VNIITF, Snezhinsk, 2021), pp. 230–231.
36. **V. Grimm and S. F. Railsback**, *Individual-Based Modeling and Ecology*
(Princeton Univ. Press, Princeton, 2005).
37. Social and economic situation in Moscow (Federal State Statistics Service,
Moscow, 2021). Available at gks.ru/region/doc11145/Main.htm (accessed
Mar. 31, 2023) [Russian].
38. Work and employment in Russia. 2019 (Rosstat, Moscow, 2019). 136 p.
Available at rosstat.gov.ru/storage/mediabank/Trud_2019.pdf (accessed
Mar. 31, 2023) [Russian].
39. Yandex Research—One day in the life of Moscow transport (Yandex,
Moscow, 2020). Available at [yandex.ru/company/researches/2020/moscow/
trolltramibus](https://yandex.ru/company/researches/2020/moscow/trolltramibus) (accessed Mar. 31, 2023) [Russian].
40. COVID-19: Community mobility reports (Google, Mountain View, CA, 2022).
Available at google.com/covid19/mobility (accessed Mar. 31, 2023).
41. **M. Cevik, K. Kuppalli, J. Kindrachuk, and M. Peiris**, Virology, trans-
mission, and pathogenesis of SARS-CoV-2, *BMJ* **371** (8267), ID m3862, 6 p.
(2020).

42. M. S. Aronna, R. Guglielmi, and L. M. Moschen, A model for COVID-19 with isolation, quarantine and testing as control measures, *Epidemics* **34**, ID 100437, 15 p. (2021).
43. Coronavirus COVID-19: Official information on the coronavirus in Russia (Natsionalnye Prioritety, Moscow, 2023). Available at stopkoronavirus.rf (accessed Mar. 31, 2023) [Russian].
44. N. V. Orlova, T. V. Gololobova, T. G. Suranova, M. N. Filatova, and S. Yu. Orlova, Analysis of the dynamics of vaccination against coronavirus infection in Russia, *Med. Alf.* **23**, 8–12 (2021).
45. M. A. Sughayer, L. Souan, M. M. Abu Alhowr, [et al.]. Comparison of the effectiveness and duration of anti-RBD SARS-CoV-2 IgG antibody response between different types of vaccines: Implications for vaccine strategies, *Vaccine* **40** (20), 2841–2847 (2022).
46. N. N. Kalitkin, *Numerical Methods* (Nauka, Moscow, 1978) [Russian].
47. The report by Anna Popova, the head of the Rospotrebnadzor, at the meeting with Putin, *Izvestiya* (2020, Apr. 28). Available at iz.ru/1005598/video/doklad-glavy-rospotrebnadzora-anny-popovoi-na-soveshchanii-s-putiny (accessed Mar. 31, 2023) [Russian].
48. Coronavirus antibodies found in almost 20% of New Yorkers, *Life* (2020, May 3). Available at life.ru/p/1321666 (accessed Mar. 31, 2023) [Russian].
49. Research of population immunity to the new coronavirus infection in Muscovites, *Mosgorzdrav* (2020, June 11). Available at mosgorzdrav.ru/ru-RU/news/default/card/4133.html (accessed Mar. 31, 2023) [Russian].
50. Tracking SARS-CoV-2 variants (World Health Organ., Geneva, 2023). Available at who.int/en/activities/tracking-SARS-CoV-2-variants (accessed Mar. 31, 2023).
51. G. Tsueng, J. L. Mullen, M. Alkuzweny, [et al.]. Outbreak.info Research Library: A standardized, searchable platform to discover and explore COVID-19 resources, *Nat. Methods* **20**, 536–540 (2023). Available at outbreak.info (accessed Mar. 31, 2023).
52. Variants of the Virus (Centers for Disease Control and Prevention, Atlanta, GA, 2023). Available at cdc.gov/coronavirus/2019-ncov/variants/index.html (accessed Mar. 31, 2023).
53. E. Hodcroft, CoVariants: Per country. Overview of variants in countries (Univ. Bern, Bern, 2023). Available at covariants.org/per-country (accessed Mar. 31, 2023).
54. V. A. Gushchin, I. V. Dolzhikova, A. M. Shchetinin, [et al.]. Neutralizing activity of sera from Sputnik V-vaccinated people against variants of concern (VOC: B.1.1.7, B.1.351, P.1, B.1.617.2, B.1.617.3) and Moscow endemic SARS-CoV-2 variants, *Vaccines* **9** (7), ID 779, 12 p. (2021).
55. P. Naaber, L. Tserel, K. Kangro, [et al.]. Dynamics of antibody response to BNT162b2 vaccine after six months: A longitudinal prospective study, *Lancet Reg. Health Eur.* **10**, ID 100208, 9 p. (2021).
56. S. C. Jordan, B.-H. Shin, T.-A. M. Gadsden, [et al.]. T cell immune responses to SARS-CoV-2 and variants of concern (Alpha and Delta) in infected and vaccinated individuals, *Cell. Mol. Immunol.* **18** (11), 2554–2556 (2021).

57. **I. Cherednik**, Modeling the waves of Covid-19, *Acta Biotheoretica* **70** (1), ID 8, 36 p. (2021).
58. **F. Campbell, B. Archer, H. Laurenson-Schafer**, [et al.]. Increased transmissibility and global spread of SARS-CoV-2 variants of concern as at June 2021, *Eurosurveillance* **26** (24), ID 5, 6 p. (2021).
59. **J. Dagpunar**, Interim estimates of increased transmissibility, growth rate, and reproduction number of the Covid-19 B.1.617.2 variant of concern in the United Kingdom (Cold Spring Harbor Lab., Oyster Bay, NY, 2021) (Prepr. Server Health Sci. medRxiv). Available at medrxiv.org/content/10.1101/2021.06.03.21258293 (accessed Mar. 31, 2023).
60. **S. Mallapaty**, COVID vaccines cut the risk of transmitting Delta—but not for long, *Nature. News* (2021, Oct. 5). Available at nature.com/articles/d41586-021-02689-y (accessed Mar. 31, 2023).
61. **D. Kim, J. Jo, J.-S. Lim**, and **S. Ryu**, Serial interval and basic reproduction number of SARS-CoV-2 Omicron variant in South Korea (Cold Spring Harbor Lab., Oyster Bay, NY, 2021) (Prepr. Server Health Sci. medRxiv). Available at medrxiv.org/content/10.1101/2021.12.25.21268301 (accessed Mar. 31, 2023).
62. **P. R. Hansen**, Relative contagiousness of emerging virus variants: An analysis of the Alpha, Delta, and Omicron SARS-CoV-2 variants, *Econom. J.* **25** (3), 739–761 (2021).
63. **M. M. Gonzalez Lopez Ledesma, L. Sanchez, D. S. Ojeda**, [et al.]. Longitudinal study after Sputnik V vaccination shows durable SARS-CoV-2 neutralizing antibodies and reduced viral variant escape to neutralization over time, *mBio* **31** (1), ID e03442-21, 9 p. (2022).
64. **G. Corrao, M. Franchi, D. Cereda**, [et al.]. Persistence of protection against SARS-CoV-2 clinical outcomes up to 9 months since vaccine completion: A retrospective observational analysis in Lombardy, Italy, *Lancet Infect. Dis.* **22** (5), 649–656 (2022).

Vitaly V. Vlasov
 Alexander M. Deryabin
 Oleg V. Zatsepin
 Grigory D. Kaminsky
 Eduard V. Karamov
 Andrey L. Karmanov
 Sergey N. Lebedev
 Georgy N. Rykovanov
 Andrey V. Sokolov
 Nikita A. Teplykh
 Ali S. Turgiyev
 Kirill E. Khatuntsev

Received December 20, 2022
 Revised February 13, 2023
 Accepted February 14, 2023

О ЗАДАЧЕ СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЯ РАБОТЫ ОПЕРАТОРОВ ЦЕНТРА ОБРАБОТКИ ВЫЗОВОВ

А. В. Еремеев^а, М. А. Сахно^б

Институт математики им. С. Л. Соболева, Омский филиал,
ул. Певцова, 13, 644099 Омск, Россия

E-mail: ^аeremeev@ofim.oscsbras.ru, ^бmaxim.sakhno@gmail.com

Аннотация. Работа посвящена решению задачи составления расписаний работы персонала центра обработки вызовов. Сформулирована модель целочисленного линейного программирования, доказана труднорешаемость задачи, предложен генетический алгоритм, учитывающий специфику задачи, а также проведено экспериментальное сравнение оптимальных решений, полученных с помощью пакета CPLEX, с решениями, найденными генетическим алгоритмом. Вычислительный эксперимент показал практически приемлемую точность решений, полученных генетическим алгоритмом, и его применимость к задачам большой размерности. Табл. 1, библиогр. 18.

Ключевые слова: центр обработки вызовов, целочисленное линейное программирование, генетический алгоритм, вычислительная сложность.

Введение

Эффективное использование трудовых ресурсов имеет высокую значимость для компаний, желающих снизить расходы на оплату труда и в то же время повысить качество работы своих сотрудников. В связи с этим разработка и использование методов управления персоналом приобретают особую актуальность. Настоящая работа посвящена построению расписаний работы операторов центра обработки вызовов, где операторы осуществляют обработку входящих вызовов, например, для центра техподдержки или горячей линии.

Построению расписаний работы операторов центра обработки вызовов, специализирующегося на обработке входящих вызовов только одного типа, уделяется много внимания в литературе. Как правило, рабочая

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 21–41–09017).

нагрузка значительно варьируется в течение дня [1–3], поэтому принято делить день на несколько периодов, в течение которых назначение операторов остаётся постоянным, а изменениями частоты поступления вызовов можно пренебречь. В современных центрах обработки вызовов длительность периодов обычно составляет 15 минут и менее.

Задачи построения расписаний работы операторов центра обработки вызовов часто решаются в два этапа [4]: на первом этапе для каждого периода определяется необходимое число операторов для обработки входящих вызовов, а на втором — рассчитывается набор смен, который с минимальными затратами покрывает эту потребность в персонале.

Задача построения расписания является более сложной в случае, когда каждый оператор может обрабатывать вызовы нескольких типов, поскольку возникает большее число вариантов назначений. В работе [5] предложена методика оптимального укомплектования центра обработки вызовов операторами для одного интервала времени в случае нескольких типов вызовов. В [6] предложено решение той же проблемы с использованием методов локального поиска в сочетании с аналитической аппроксимацией уровня сервиса и локальным улучшением с помощью имитационного моделирования на финальном этапе. В [7] накладывается ограничение только на совокупный уровень сервиса (для всех типов вызовов). В [8] рассматривается вариант обобщённой задачи о назначениях, где также имеется несколько типов работ, но отсутствует фактор времени.

Для задачи построения расписания в случае многих типов вызовов в [9] предложен двухэтапный подход, в котором на первом этапе определяется необходимое число операторов для каждого периода, а на втором — рассчитывается расписание путём решения задачи целочисленного программирования. В [10] для решения этой задачи предложен алгоритм, основанный на имитационном моделировании. Этот алгоритм расширяет метод, предложенный в [5], который решает задачу укомплектования центра обработки вызовов операторами на один период.

В задачах, рассмотренных выше, для каждого оператора известно, способен ли он обрабатывать вызовы некоторого типа, в то время как в современных центрах обработки вызовов часто используется система навыков, в которой отражено, насколько качественно оператор справляется с обработкой вызовов некоторого типа. Как правило, значение навыка выражается целым числом, где большее значение означает более высокое качество обработки вызовов некоторого типа. Система навыков учитывается в задаче, рассматриваемой в данной статье. Также рассматриваемая задача, в отличие от перечисленных выше, имеет ограничение на фонд оплаты труда, так как многие организации имеют ограниченный бюджет на оплату работы операторов. Заметим также, что стоимость

работы оператора зависит от многих факторов, таких как, например, его навыки, время суток (стоимость работы в ночное время может быть выше, чем в дневное) и т. д. Данный параметр также учитывается в настоящей работе.

Для рассматриваемой задачи в данной работе сформулирована модель целочисленного линейного программирования (ЦЛП), доказана её NP-трудность, предложен генетический алгоритм и представлены результаты вычислительных экспериментов.

Работа состоит из трёх разделов: в первом описаны постановка задачи и её модель ЦЛП, во втором содержится описание генетического алгоритма, а в третьем представлены процесс генерации данных и результаты тестирования алгоритма.

1. Постановка задачи и её математическая модель

1.1. Постановка задачи. Имеется центр обработки вызовов, в котором операторы обрабатывают входящие вызовы разных типов. Для каждого оператора известно, какие типы вызовов и насколько качественно он может обрабатывать. Качество обработки вызова оператором определяется его навыком, выраженным целым числом (как правило, навык определяется на основе экспертных оценок и статистических данных). Время рабочего дня разделено на интервалы фиксированной длины. Для каждого оператора известно, в какие интервалы времени он может работать и в какие ему может быть назначен перерыв на обед, причём продолжительность перерыва для всех операторов одинаковая. В течение рабочего дня каждому оператору должен быть назначен ровно один перерыв, другие перерывы в работе не допускаются.

В те интервалы времени, в которые оператор находится на работе, он может быть назначен на обработку вызовов определённого типа. В разные интервалы времени тип обрабатываемых вызовов для одного оператора может меняться. Также для каждого оператора заданы минимальное и максимальное число интервалов времени, в которые он должен быть назначен на обработку вызовов. В каждый интервал времени для каждого типа вызова известно необходимое число операторов для обработки вызовов этого типа, представляющее собой прогнозное значение. Также заданы стоимости работы индивидуально для каждого оператора в различные интервалы времени, причём количество средств, которое можно потратить на оплату труда задействованных операторов, ограничено.

Под расписанием будем понимать назначение каждому оператору его рабочего времени и перерыва, а также типов обрабатываемых вызовов в различные интервалы времени. Необходимо составить расписание работы операторов центра обработки вызовов, максимизирующее *качество*

обслуживания, где под качеством обслуживания понимается среднее значение навыков задействованных операторов в обработке тех типов вызовов, на которые они назначены. При этом в каждый интервал времени для каждого типа вызова должно быть назначено требуемое число операторов.

У операторов в рабочее время имеется только один перерыв, а требуемое число операторов для каждого типа вызова меняется в течение дня, поэтому может возникнуть ситуация, в которой в некоторые интервалы времени какая-то часть операторов может находиться на работе, но не быть назначенными на обработку вызовов. Такие операторы составляют резерв и могут быть назначены в реальном времени, если в действительности для какого-либо типа вызова потребуется больше операторов, чем прогнозировалось.

Введём следующие обозначения:

n — число операторов,

m — число типов вызовов,

k — число интервалов времени,

$P = \{1, \dots, n\}$ — множество операторов,

$C = \{1, \dots, m\}$ — множество типов вызовов,

$T = \{1, \dots, k\}$ — множество интервалов времени,

H_p — минимальное число интервалов времени, в которые оператор $p \in P$ назначен на обработку вызовов,

G_p — максимальное число интервалов времени, в которые оператор $p \in P$ назначен на обработку вызовов,

D — число интервалов времени на перерыв,

S — максимальная оценка качества обработки вызова оператором,

F — объём фонда оплаты труда операторов,

$m_{pc} = 1$, если оператор $p \in P$ может обработать вызов типа $c \in C$, иначе $m_{pc} = 0$,

$w_{pt} = 1$, если оператор $p \in P$ может работать в интервал времени $t \in T$, иначе $w_{pt} = 0$,

$d_{pt} = 1$, если оператору $p \in P$ может быть назначен перерыв в интервал времени $t \in T$, иначе $d_{pt} = 0$,

$s_{pc} \in \{0, 1, \dots, S\}$ — навык оператора $p \in P$ в обработке вызова типа $c \in C$,

c_{pt} — стоимость работы оператора $p \in P$ в интервал времени $t \in T$,

n_{ct} — число операторов, достаточное для обслуживания вызовов типа $c \in C$ в интервал времени $t \in T$.

При этом интервалы, когда оператор может работать и когда ему может быть назначен перерыв, задаются таким образом, что перерыв не может быть назначен слишком близко к началу или окончанию работы.

1.2. Математическая модель. Для построения модели введём следующие булевы переменные:

$x_{pct} = 1$, если и только если оператор $p \in P$ назначен на обработку вызова типа $c \in C$ в интервал времени $t \in T$,

$y_{pt} = 1$, если и только если оператор $p \in P$ работает в интервал времени $t \in T$,

$z_{pt} = 1$, если и только если оператор $p \in P$ начал работать в интервал времени $t \in T$,

$q_{pt} = 1$, если и только если оператору $p \in P$ назначен перерыв в интервал времени $t \in T$,

$r_{pt} = 1$, если и только если оператор $p \in P$ в интервал времени $t \in T$ выходит на перерыв.

Модель целочисленного линейного программирования для рассматриваемой задачи может быть записана следующим образом:

$$\sum_{p \in P} \sum_{c \in C} \sum_{t \in T} s_{pc} x_{pct} \rightarrow \max \quad (1)$$

$$y_{pt} \leq w_{pt}, \quad p \in P, t \in T, \quad (2)$$

$$y_{pt} \leq 1 - q_{pt}, \quad p \in P, t \in T, \quad (3)$$

$$\sum_{t \in T} z_{pt} \leq 1, \quad p \in P, \quad (4)$$

$$(y_{pt} + q_{pt}) - (z_{p(t-1)} + l_{p(t-1)}) \leq z_{pt}, \quad p \in P, t \in T \setminus \{1\}, \quad (5)$$

$$q_{pt} \leq d_{pt}, \quad p \in P, t \in T, \quad (6)$$

$$\sum_{t \in T} r_{pt} = \sum_{t \in T} z_{pt}, \quad p \in P \quad (7)$$

$$q_{pt} - l_{p(t-1)} \leq r_{pt}, \quad p \in P, t \in T \setminus \{1\}, \quad (8)$$

$$\sum_{t \in T} q_{pt} = D, \quad p \in P, \quad (9)$$

$$x_{pct} \leq m_{pc}, \quad p \in P, c \in C, t \in T, \quad (10)$$

$$\sum_{c \in C} \sum_{t \in T} x_{pct} \geq H_p, \quad p \in P, \quad (11)$$

$$\sum_{c \in C} \sum_{t \in T} x_{pct} \leq G_p, \quad p \in P, \quad (12)$$

$$\sum_{p \in P} x_{pct} = n_{ct}, \quad c \in C, t \in T, \quad (13)$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{t \in T} c_{pt} y_{pt} \leq F, \quad (14)$$

$$x_{pct} \leq y_{pt}, \quad p \in P, c \in C, t \in T, \quad (15)$$

$$x_{pct}, y_{pt}, z_{pt}, q_{pt}, r_{pt} \in \{0, 1\}, \quad p \in P, c \in C, t \in T. \quad (16)$$

Целевая функция (1) задаёт критерий максимизации качества обслуживания. Неравенство (2) позволяет назначить оператора на работу только тогда, когда он может работать. Ограничение (3) не позволяет работать оператору во время перерыва, а (4) не позволяет оператору выйти на работу более одного раза. Ограничение (5) позволяет оператору иметь ровно один перерыв. Условие (6) позволяет назначить оператору перерыв только в допустимые интервалы времени, а (7) гарантирует, что оператору будет назначен перерыв только тогда, когда он вышел на работу. Ограничение (8) задаёт непрерывность перерыва, (9) гарантирует, что длительность перерыва будет составлять D интервалов времени, (10) позволяет назначать оператора на обработку только тех типов вызовов, которые он способен обработать. Условия (11) и (12) гарантируют соблюдение минимального и максимального числа интервалов времени, когда оператор назначен на обработку вызовов. Ограничение (13) гарантирует достаточное число операторов для обработки входящих вызовов, (14) не позволяет потратить большее количество средств на оплату труда операторов чем F , а (15) позволяет назначить оператора на обработку вызовов только тогда, когда он работает.

1.3. Труднорешаемость задачи.

Теорема 1. *Задача составления расписания работы операторов центра обработки вызовов NP-трудна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сформулируем указанную задачу в форме верификации свойств. В качестве входных данных будем рассматривать те же данные, что и в исходной задаче, но дополненные рациональным числом Q . Задача верификации свойств состоит в ответе на вопрос: существует ли расписание работы операторов центра обработки вызовов со значением целевой функции не менее Q ?

Ясно, что сформулированная в форме верификации свойств задача принадлежит классу NP. Сведём к ней следующую классическую NP-полную задачу РАЗБИЕНИЕ (см., например, [11]).

Задача РАЗБИЕНИЕ. Дано n' натуральных чисел α_j , $j = 1, \dots, n'$. Вопрос: существует ли подмножество $\mathcal{I} \subset \{1, \dots, n'\}$ такое, что

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n'} \alpha_i?$$

Пусть число интервалов времени k равно n' , число операторов n равно $2n'$, число типов входящих вызовов m равно n' . В интервал времени $i \in \{1, \dots, n'\}$ для типа входящего вызова i требуется ровно один оператор для его обработки, а в остальные интервалы времени — нуль.

Тип входящего вызова i могут обработать только операторы $2i - 1$ и $2i$, причём у оператора $2i$ величина навыка для вызова типа i , а также стоимость в момент времени i равны 0. Кроме того, положим число интервалов времени на перерыв D равным 0, а минимальное H_p и максимальное G_p число интервалов времени работы оператора $p \in P$ равными 0 и n' соответственно. Дополнительно положим $w_{pt} = 1$ и $d_{pt} = 1$ для всех $p \in P$ и $t \in T$.

Парам операторов $2i - 1$ и $2i$ сопоставим один элемент α_i входных данных задачи РАЗБИЕНИЕ так, что выбор оператора $2i - 1$ будет соответствовать включению числа α_i в подмножество $\mathcal{I}$, а выбор оператора $2i$ — пропуску числа α_i (по построению в каждый интервал i работает ровно один из двух операторов $2i - 1$ и $2i$). Величину навыка оператора $2i - 1$ и стоимость работы в интервал времени i положим равными α_i , а верхнюю границу F на фонд оплаты труда — равной $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n'} \alpha_i$.

Если в задаче РАЗБИЕНИЕ существует искомое множество $\mathcal{I}$, то легко убедиться, что существует допустимое решение, где средний навык при обслуживании вызовов составляет $Q := \frac{1}{2n'} \sum_{i=1}^{n'} \alpha_i$. С другой стороны, при наличии допустимого решения с качеством обслуживания не меньше этого Q соответствующее ему множество индексов $\mathcal{I}$ удовлетворяет условию задачи РАЗБИЕНИЕ. Отсюда следует NP-полнота задачи составления расписания работы операторов центра обработки вызовов в форме верификации свойств, а значит, и NP-трудность рассматриваемой максимизационной задачи. Теорема 1 доказана.

2. Генетический алгоритм

2.1. Общая схема алгоритма. Генетический алгоритм (ГА) представляет собой эвристический алгоритм оптимизации, в основу которого положены биологические принципы естественного отбора и изменчивости [12]. В процессе работы алгоритма происходит последовательная смена поколений, которые состоят из фиксированного числа особей — элементов пространства решений. Последовательность символов некоторого алфавита, кодирующая решение в популяции ГА, называется *генотипом*. В качестве меры приспособленности генотипа к условиям решаемой задачи рассматривается значение целевой функции для решения, соответствующего этому генотипу, с учётом «штрафа» в случае недопустимого решения. Более приспособленные особи в каждом следующем поколении в среднем получают больше потомков. Кроме того, в процессе формирования следующего поколения часть генотипов изменяется некоторым случайным образом в результате кроссинговера (скрещивания)

и мутации, а часть генотипов потомков полностью идентична родительским генотипам.

Обозначим множество всевозможных генотипов через B . Действие оператора селекции $\text{Sel}: B^N \rightarrow \{1, \dots, N\}$ состоит в выборе номера родительской особи для построения очередного потомка, где N — число особей в популяции.

Действие оператора кроссинговера $\text{Cross}: B \times B \rightarrow B \times B$ заключается в построении двух генотипов потомков на основе двух родительских генотипов. С вероятностью P_c каждый из потомков будет наследовать выбранные некоторым случайным образом гены родительских особей, а с вероятностью $1 - P_c$ потомки будут идентичны родителям.

Действие оператора мутации $\text{Mut}: B \rightarrow B$ состоит в изменении поданного на вход генотипа. С вероятностью P_m каждый ген исходного генотипа изменяется случайным образом, а с вероятностью $1 - P_m$ остаётся без изменений.

Общая схема генетического алгоритма представлена ниже.

```

1: for  $k = 1$  to  $N$  do
2:   Построить случайным образом генотип  $\xi^{k,0}$ .
3: for  $t = 0$  to  $t_{\max}$  do
4:   for  $k = 1$  to  $N/2$  do
5:     Селекция: выбрать генотипы с учётом приспособленности особей  $\xi \leftarrow \xi^{\text{Sel}(\Pi^t),t}$ ,  $\eta \leftarrow \xi^{\text{Sel}(\Pi^t),t}$ .
6:     Скрещивание: построить  $(\xi', \eta') \leftarrow \text{Cross}(\xi, \eta)$ .
7:     Мутация: положить  $\xi^{2k-1,t+1} \leftarrow \text{Mut}(\xi')$ ,  $\xi^{2k,t+1} \leftarrow \text{Mut}(\eta')$ .
8:     Вычислить значение функции приспособленности для генотипов  $\xi^{2k-1,t+1}$  и  $\xi^{2k,t+1}$ .
9: return лучшее из найденных решений по значению функции приспособленности за всё время работы алгоритма

```

2.2. Элитарная стратегия управления популяцией. В генетическом алгоритме при построении следующего поколения может сохраняться один или несколько элитных генотипов текущей популяции, имеющих высокую приспособленность. В реализации генетического алгоритма, описанном в п. 2.3, используется стратегия, в которой при построении следующего поколения сохраняются n' наиболее приспособленных генотипов.

2.3. Реализация генетического алгоритма. В этом пункте опишем предлагаемую реализацию генетического алгоритма, в котором для вычисления значения функции приспособленности используются следующие вспомогательные алгоритмы: алгоритм назначения операторов,

алгоритм сокращения дефицита операторов и алгоритм локальной корректировки решения. Далее будет приведено описание этих алгоритмов.

Генотип состоит из четырёх векторов: $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, где a_p — время начала работы оператора $p \in P$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$, где b_p — время завершения работы оператора $p \in P$, $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$, где c_p — время начала перерыва оператора $p \in P$, $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ — перестановка операторов для алгоритма назначения операторов (подробнее в п. 2.4).

В начальной популяции для каждой особи векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{e}$ генерируются случайным образом с равномерным распределением с учётом ограничений на время работы и перерыва операторов, вектор $\mathbf{e}$ имеет вид $(1, 2, \dots, n)$, где n — число операторов.

Пусть на каждой итерации все особи популяции упорядочиваются по возрастанию целевой функции. Номер особи в таком случае будем называть её *рангом*. В рассматриваемом генетическом алгоритме используется линейная ранговая селекция [13, 14], в которой вероятность выбора особи с рангом r равна $\frac{2r}{(N+1)N}$, $r = 1, \dots, N$.

При кроссинговере для векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ применяется односточный оператор кроссинговера с единой для всех координатой скрещивания, которая выбирается случайным образом, а для вектора $\mathbf{e}$ применяется порядковый кроссинговер для задач на перестановках [15].

При мутации случайным образом выбирается оператор $p \in P$, затем для него случайным образом генерируются новые значения a_p , b_p и c_p с учётом ограничений на них. Для вектора $\mathbf{e}$ случайным образом выбираются индексы $i \in \{1, \dots, n\}$ и $j \in \{1, \dots, n\}$, где n — число операторов, затем элементы e_i и e_j меняются местами.

Решение $X = \{x_{pct}\}$, где $x_{pct} = 1$ тогда и только тогда, когда оператор p в интервал времени t назначен на обработку вызовов типа c , вычисляется на основе генотипа с помощью применения алгоритма назначения операторов, описанного в п. 2.4. Затем полученное решение улучшается с помощью алгоритмов сокращения дефицита операторов и локальной корректировки решения, которые описаны в п. 2.5 и 2.6 соответственно.

Значение функции приспособленности вычисляется по формуле

$$f(X) = \sum_{p \in P} \sum_{c \in C} \sum_{t \in T} s_{pc} x_{pct} - nkS(m(X) + u(X) + \max\{0, c(X) - F\}), \quad (17)$$

где $m(X)$ — общее число операторов, которых не хватает для обработки входящих вызовов согласно матрице X , $u(X)$ — число операторов $p \in P$, у которых число назначений на обработку вызовов менее H_p , $c(X)$ — итоговая стоимость оплаты труда операторов на основе матрицы X , F — объём фонда оплаты труда операторов, n — число операторов, k — число интервалов времени, S — максимальное значение навыка в обработке вызовов оператором.

Таким образом, функция приспособленности представляет собой целевую функцию за вычетом штрафов за нехватку операторов и за превышение фонда оплаты труда. С учётом штрафов значение функции приспособленности любого недопустимого решения будет меньше значения функции приспособленности любого допустимого решения.

Результатом работы алгоритма является матрица X , относящаяся к генотипу с наибольшим значением функции приспособленности среди всех генотипов, вычисленных за время выполнения алгоритма.

При отсутствии улучшений рекордного значения приспособленности на протяжении большого числа итераций происходит остановка ГА в соответствии со следующей известной схемой (см., например, [16–18]). Под улучшением рекордного значения приспособленности далее понимается увеличение приспособленности лучшего найденного генотипа в текущем поколении не менее чем на $\varepsilon\%$, где ε — настраиваемый параметр. Пусть t — текущее время выполнения алгоритма в секундах, t_0 — момент времени, когда произошло последнее улучшение рекорда, k — номер текущего поколения. Алгоритм завершает свою работу, если $t > T_{\max}$ или $t > 2t_0$, $k > D$ и найдено допустимое решение. Если $t > 2t_0$, $k > D$ и допустимое решение не найдено, то процесс эволюции инициализируется заново. Условие $t > 2t_0$ показывает отсутствие улучшения рекордного значения целевой функции за то же время, что было затрачено на получение этого рекорда. Условие $k > D$ гарантирует, что на начальных итерациях генетического алгоритма не будет преждевременно принято решение о перезапуске. Использование перезапусков ГА уменьшает вероятность завершения работы до получения допустимого решения. Применение того же правила для остановки ГА после получения допустимого решения позволяет существенно сократить время работы при незначительном снижении качества решения по сравнению с остановкой при достижении $t > T_{\max}$. В вычислительном эксперименте в разд. 3 значение $T_{\max}$ выбрано равным 30 минутам, $\varepsilon = 1\%$, $D = 100$.

2.4. Алгоритм назначения операторов. С помощью этого алгоритма производится заполнение трёхмерной булевой матрицы X , которая ставит в соответствие операторам типы вызовов, на обработку которых они назначены в различные интервалы времени. Работа алгоритма состоит из двух этапов. На каждом этапе производится назначение операторам типов вызовов, которые они будут обрабатывать в различные интервалы времени.

Цель первого этапа работы алгоритма состоит в том, чтобы по возможности полностью выполнить ограничения на минимальное число интервалов времени, в которые операторы должны быть назначены на обработку вызовов. Это достигается за счёт того, что если у некоторого оператора это ограничение выполнено, то предпочтение при назначении

на обработку вызовов отдаётся другому оператору, у которого оно ещё не выполнено.

На втором этапе производятся дополнительные назначения операторов на обработку вызовов с учётом ограничения на максимальное число интервалов времени, в которые оператор должен быть назначен на обработку вызовов.

На каждом этапе при попытке назначения оператору типа вызовов, которые он будет обрабатывать в данный интервал времени, учитываются график работы оператора (задаётся с помощью вектров $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$), типы вызовов, которые оператор может обрабатывать, его навыки в обработке вызовов различных типов и требуемое число операторов для обработки вызовов каждого типа в каждый интервал времени.

Пошаговое описание алгоритма приведено в приложении (алгоритм 1).

2.5. Алгоритм сокращения дефицита операторов. Поскольку алгоритм назначения операторов «недальновиден», он не всегда может назначить достаточное число операторов для обработки вызовов, даже если это возможно. Алгоритм, рассматриваемый ниже, призван компенсировать данный недостаток. В ходе выполнения этого алгоритма дефицит операторов, назначенных на обработку вызовов некоторого типа, сокращается с помощью локальных корректировок матрицы X , если это возможно.

Для того типа вызова c , где есть дефицит операторов, производится поиск такого p' среди операторов, назначенных на обработку другого типа вызова, который может обработать данный тип вызова. Затем для него ищем замену p'' среди свободных операторов. Если такую пару (p', p'') удастся найти, то производится переназначение и дефицит операторов уменьшается. Алгоритм работает до тех пор, пока существует дефицит операторов для обработки вызовов и пока существует пара операторов, переназначив которых, можно уменьшить дефицит.

Пошаговое описание алгоритма приведено в приложении (алгоритм 2).

2.6. Алгоритм локальной корректировки решения. В некоторых случаях возможно увеличение значения функции приспособленности, если в матрице назначений пару операторов поменять местами. С целью отыскания таких пар просматриваются по порядку все интервалы времени t ; для каждого фиксированного t просматриваются по порядку все операторы p' ; для выбранного p' просматриваются по порядку все операторы p'' (начиная со следующего за p'). Если переназначение типов обрабатываемых вызовов между операторами p' и p'' в момент t возможно и приводит к увеличению приспособленности, то это переназначение производится и выполняется переход к следующему оператору p' .

Пошаговое описание алгоритма приведено в приложении (алгоритм 3).

3. Вычислительный эксперимент

Тестирование проводилось на ЭВМ с процессором Intel(R) Xeon(R) X5675 3,07 ГГц и оперативной памятью 32 ГБ. Генетический алгоритм был реализован на языке C++. Для одной задачи параллельно запускалось четыре потока операционной системы, в каждом из которых выполнялся процесс эволюции независимо от остальных потоков. Данная схема выполнения эквивалентна четырём последовательным запускам генетического алгоритма. В качестве итогового решения выбиралось наилучшее решение по значению целевой функции среди всех запусков генетического алгоритма. Вероятности кроссинговера и мутации равны 0,4 и 0,25 соответственно, число особей в популяции равно 100, среди которых 15 элитных. Максимальное время работы ограничено 30 минутами, значение параметра ε равно 1%, а значение параметра D равно 100. Данные значения параметров были выбраны на основе предварительных экспериментов.

Для исследования работоспособности генетического алгоритма проводилось сравнение найденных им значений целевой функции с оптимальными значениями, найденными с использованием пакета CPLEX версии 20.1.0.1.

Для получения достаточного по объёму и разнообразию набора тестовых задач был реализован генератор задач, описание которого приведено в п. 3.1. Результаты тестирования представлены в п. 3.2.

3.1. Генерация данных. Для создания набора задач был создан генератор, пошаговое описание которого приведено в приложении.

Параметрами генератора являются число операторов n , число типов входящих вызовов m , число интервалов времени k , число интервалов времени на перерыв l , вероятность q наличия у оператора способности обрабатывать больше одного типа входящего вызова, максимальное число u типов входящих вызовов, которые способен обработать один оператор, вероятность v уменьшения требуемого числа операторов для каждого типа вызова в каждый интервал времени, коэффициент уменьшения w .

Тестовые задачи¹⁾ генерировались по наборам параметров $(n, m, v) = (64; 2; 0,5), (64; 2; 0,25), (64; 2; 0,1), (128; 16; 0,5), (128; 16; 0,25), (128; 16; 0,1), (256; 64; 0,5), (256; 64; 0,25)$. Для остальных параметров были выбраны следующие значения: $t = 32, l = 4, q = 0,67, u = 5$. Для каждого фиксированного набора параметров генерировалось 30 задач, итого 240 задач.

¹⁾ Тестовые задачи и результаты доступны по ссылке github.com/maximsakhno/call-center-scheduling-test-problems

3.2. Результаты тестирования. Обозначим через r среднее отношение значения функции приспособленности, найденное генетическим алгоритмом, к значению целевой функции, найденному с помощью пакета CPLEX. В столбце r значения приведены только для тех серий, где пакетом CPLEX были найдены допустимые решения за отведённое время для всех примеров. Через R обозначим среднее отношение значения целевой функции, найденное генетическим алгоритмом, к оптимальному значению целевой функции или её верхней оценке, полученной пакетом CPLEX с использованием линейного программирования и отсечений. Усреднение проводится по серии задач, сгенерированных с фиксированным набором параметров. Отношение числа найденных допустимых решений за отведённое время к общему числу задач в серии для пакета CPLEX обозначим через D , а отношение числа оптимальных — через D^* . Отметим, что генетическим алгоритмом были найдены допустимые решения для всех тестовых задач. Среднее время работы генетического алгоритма в секундах обозначим через T_{GA} , а среднее время работы пакета CPLEX на тех задачах, для которых допустимое решение найдено за отведённое время, обозначим через T_{CPLEX} . Время работы пакета CPLEX было ограничено 1 часом.

Таблица 1

Результаты тестирования

n	m	v	D	D^*	r	R	T_{GA} , с	T_{CPLEX} , с
64	2	0,5	100%	80%	0,99	0,99	3,07	727,72
64	2	0,25	100%	80%	0,99	0,99	5,00	775,01
64	2	0,1	66%	33%	—	0,99	66,93	1867,39
128	16	0,5	100%	30%	0,93	0,93	123,20	2645,81
128	16	0,25	96%	16%	—	0,93	180,80	3200,98
128	16	0,1	43%	0%	—	0,93	333,93	3602,88
256	64	0,5	96%	0%	—	0,89	923,07	3616,34
256	64	0,25	0%	0%	—	0,89	914,80	—

Результаты вычислительного эксперимента представлены в табл. 1. Отметим, что пакетом CPLEX за отведённое время в трёх сериях найдены допустимые решения для всех примеров, в одной серии не найдено ни одного допустимого решения, а для остальных серий доля найденных допустимых решений варьируется от 43% до 96%. При этом нет ни одной серии примеров, для которой пакетом CPLEX за отведённое время найдены оптимальные решения для всех примеров. Для трёх из восьми серий пакетом CPLEX не найдено ни одного оптимального решения.

На тех сериях, для которых пакетом CPLEX найдены допустимые решения во всех примерах, значение r не меньше 0,93. На сериях примеров

с числом операторов, равным 64, среднее отклонение от оптимума для решений, полученных генетическим алгоритмом, не превосходит 1%, для 128 не превосходит 7%, а для 256 не превосходит 11%.

Также заметим, что для серий примеров с числом операторов n , равным 64, среднее время работы пакета CPLEX превосходило среднее время работы генетического алгоритма более чем в 25 раз, для $n = 128$ — более чем в 17 раз, а для $n = 256$ — более чем в 3 раза. Соотношение уменьшается с увеличением числа операторов в связи с тем, что среднее время работы пакета CPLEX рассчитывается на основе тех задач, где пакетом найдены допустимые решения за отведённое время.

Таким образом генетический алгоритм находит допустимые решения для всех примеров, при этом среднее время работы генетического алгоритма по каждой серии не превосходит 16 минут, а отклонение от оптимума не превышает 11%. В то же время пакет CPLEX не всегда находит допустимые решения даже за 1 час, при этом время работы генетического алгоритма в среднем значительно меньше, чем у пакета CPLEX.

Заключение

В работе проведён анализ задачи составления расписания операторов центра обработки вызовов и разработан эффективный алгоритм её решения. Доказана NP-трудность поставленной задачи, и построена её математическая модель. Также предложен и протестирован генетический алгоритм её решения. Среднее отклонение от оптимума для решений, полученных генетическим алгоритмом, составило от 1 до 11%, что является приемлемым для его практического использования, поскольку при определении навыков, как правило, используются приближённые экспертные оценки. Для всех серий время работы генетического алгоритма было значительно меньше чем у пакета CPLEX.

Приложение

Генератор задач. Работа генератора состоит из следующих этапов.

1. Назначение для каждого оператора типов входящих вызовов, которые он может обработать. Для этого с вероятностью q определяется, может ли оператор обрабатывать более одного типа вызова. Если может, то случайным образом определяется число типов вызовов, которые он может обрабатывать в диапазоне от 2 до u . Затем для каждого оператора случайным образом выбираются конкретные типы входящих вызовов.
2. Назначение каждому оператору конкретного времени работы и перерыва случайным образом.
3. Назначение типа входящего вызова случайным образом для обработки в каждый интервал времени для каждого оператора (среди тех

Алгоритм 1. Алгоритм назначения операторов

```

1: Обнулить  $X$ .
2: for  $J \in \{H, G\}$  do
3:   for  $t = 1$  to  $k$  do
4:     for  $i = 1$  to  $n$  do
5:        $p := e_i$ 
6:       bool condition1 := оператор  $p$  не работает в интервал вре-
         мени  $t$  согласно векторам a, b, c;
         condition2 := у оператора  $p$  число назначений не меньше
         чем  $J_p$ 
7:       if condition1 or condition2 then continue
8:       Найти тип вызова  $c$ , при котором достигается наибольшее
         положительное значение  $n_{ct} - \sum_{p' \in P} x_{p'ct}$  среди тех вызовов,
         которые оператор  $p$  может обработать.
9:       if такой тип не найден then continue
10:       $x_{pct} := 1$ 

```

Алгоритм 2. Алгоритм сокращения дефицита операторов

```

1: for  $t = 1$  to  $k$  do
2:   for  $c' = 1$  to  $m$  do
3:     if  $\sum_{p \in P} x_{pc't} > n_{c't}$  then continue
4:     for  $p' = 1$  to  $n$  do
5:       if  $\sum_{c \in C} x_{p'ct} = 0$  or  $x_{p'c't} = 1$  or  $m_{p'c'} = 0$  then continue
6:       Выбрать  $c''$  таким, что  $x_{p'c''t} = 1$ .
7:       for  $p'' = p' + 1$  to  $n$  do
8:         bool condition := оператор  $p''$  не работает в интервал
           времени  $t$  согласно векторам a, b, c
9:         if condition or  $\sum_{c \in C} x_{p''ct} = 1$  or  $m_{p''c''} = 0$  then continue
10:         $x_{p'c't} := 1$ ;  $x_{p'c''t} := 0$ ;  $x_{p''c''t} := 1$ 
11:        break
12:      break

```

типов вызовов, которые он может обработать), если он в данный момент работает согласно расписанию.

4. Вычисление значения фонда оплаты труда для работы операторов согласно сгенерированному расписанию.

Алгоритм 3. Алгоритм локальной корректировки решения

```

1: for  $t = 1$  to  $k$  do
2:   for  $p' = 1$  to  $n$  do
3:     if  $\sum_{c \in C} x_{p'ct} = 0$  then continue
4:     Выбрать  $c'$  таким, что  $x_{p'c't} = 1$ .
5:     for  $p'' = p' + 1$  to  $n$  do
6:       if  $\sum_{c \in C} x_{p''ct} = 0$  then continue
7:       Выбрать  $c''$  таким, что  $x_{p''c''t} = 1$ .
8:       if  $m_{p'c''} = 1$  and  $m_{p''c'} = 1$  and  $s_{p'c''} + s_{p''c'} > s_{p'c'} + s_{p''c''}$ 
         then  $x_{p'c't} := 0$ ;  $x_{p''c''t} := 0$ ;  $x_{p'c''t} := 1$ ;  $x_{p''c't} := 1$ 

```

5. Вычисление требуемого числа операторов для обработки входящих вызовов каждого типа на основе построенного расписания.

6. Для каждого типа вызовов и интервала времени требуемое число операторов для обработки входящих вызовов умножается на w с вероятностью v .

ЛИТЕРАТУРА

1. Gans N., Koole G., Mandelbaum A. Telephone call centers: Tutorial, review, and research prospects // Manuf. Serv. Oper. Manag. 2003. V. 5, No. 2. P. 79–141.
2. Avramidis A. N., Deslauriers A., L'Ecuyer P. Modeling daily arrivals to a telephone call center // Manag. Sci. 2004. V. 50. P. 896–908.
3. Brown L., Gans N., Mandelbaum A., Sakov A., Shen H., Zeltyn S., Zhao L. Statistical analysis of a telephone call center: A queueing-science perspective // J. Am. Stat. Assoc. 2010. V. 100. P. 36–50.
4. Mehrotra V. Ringing up big business // ORMS Today. 1997. V. 24. P. 18–24.
5. Cezik M., L'Ecuyer P. Staffing multi-skill call centers via linear programming and simulation // Manag. Sci. 2008. V. 54. P. 310–323.
6. Avramidis A. N., Chan W., L'Ecuyer P. Staffing multi-skill call centers via search methods and a performance approximation // IIE Trans. 2009. V. 41, No. 6. P. 483–497.
7. Pot A., Bhulai S., Koole G. A simple staffing method for multi-skill call centers // Manuf. Serv. Oper. Manag. 2008. V. 10, No. 3. P. 421–428.
8. Zaozerskaya L. A. A heuristic for a special case of the generalized assignment problem with additional conditions // J. Phys. Conf. Ser. 2021. V. 1791, No. 1, ID 012092. 6 p.
9. Bhulai S., Koole G., Pot A. Simple methods for shift scheduling in multi-skill call centers // Manuf. Serv. Oper. Manag. 2008. V. 10, No. 3. P. 411–420.

10. **Avramidis A. N., Chan W., Gendreau M., L'Ecuier P., Pisacane O.** Optimizing daily agent scheduling in a multi-skill call center // *Eur. J. Oper. Res.* 2010. V. 200. P. 822–832.
11. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. 416 с.
12. **Holland J.** *Adaptation in natural and artificial systems.* Ann Arbor: Univ. Michigan Press, 1975. 183 p.
13. **Baker J. E.** Adaptive selection methods for genetic algorithms // *Proc. Int. Conf. Genetic Algorithms and Their Applications* (Pittsburgh, PA, USA, July 24–26, 1985). Pittsburgh, PA: Carnegie-Mellon Univ., 1985. P. 101–111.
14. **Lehre P. K.** Fitness-levels for non-elitist populations // *Proc. 13th Annu. Conf. Genetic and Evolutionary Computation* (Dublin, Ireland, July 12–16, 2011). New York: ACM, 2011. P. 2075–2082.
15. **Borisovsky P., Dolgui A., Eremeev A.** Genetic algorithms for a supply management problem: MIP-recombination vs greedy decoder // *Eur. J. Oper. Res.* 2009. V. 195. P. 770–779.
16. **Hampson S., Kibler D.** Large plateaus and plateau search in Boolean Satisfiability problems: When to give up searching and start again // *Cliques, Coloring and Satisfiability. Proc. 2nd DIMACS Implementation Challenge, Workshop* (Piscataway, USA, Oct. 11–13, 1993). Providence: AMS, 1996. P. 437–456.
17. **Balas E., Niehaus W.** Optimized crossover-based genetic algorithms for the maximum cardinality and maximum weight clique problems // *J. Heuristics.* 1998. V. 4, No. 2. P. 107–122.
18. **Тюнин Н. Н., Еремеев А. В.** Алгоритм дифференциальной эволюции для оптимизации направленности фазированных антенных решёток // *Мат. структуры и моделирование.* 2022. № 3. С. 57–68.

Еремеев Антон Валентинович
Сахно Максим Алексеевич

Статья поступила
29 апреля 2022 г.
После доработки —
25 января 2023 г.
Принята к публикации
13 февраля 2023 г.

THE PROBLEM OF SCHEDULING
FOR CALL-CENTRE OPERATORSA. V. Ereemeev^a and M. A. Sakhno^bSobolev Institute of Mathematics, Omsk Department,
13 Pevtsov Street, 644099 Omsk, RussiaE-mail: ^aeremeev@ofim.oscsbras.ru, ^bmaxim.sakhno@gmail.com

Abstract. The paper is devoted to solving the problem of scheduling the work of the call center staff. A model of integer linear programming is formulated, the problem is shown to be NP-hard, and a genetic algorithm is proposed that takes into account the specifics of the problem. An experimental comparison of optimal solutions obtained using the CPLEX package with solutions found by the genetic algorithm is carried out. The computational experiment showed the practically acceptable accuracy of the solutions obtained by the genetic algorithm and its applicability to large-dimensional problems. Tab. 1, bibliogr. 18.

Keywords: call center, integer linear programming, genetic algorithm, computational complexity.

REFERENCES

1. N. Gans, G. Koole, and A. Mandelbaum, Telephone call centers: Tutorial, review, and research prospects, *Manuf. Serv. Oper. Manag.* **5** (2), 79–141 (2003).
2. A. N. Avramidis, A. Deslauriers, and P. L'Ecuyer, Modeling daily arrivals to a telephone call center, *Manag. Sci.* **50**, 896–908 (2004).
3. L. Brown, N. Gans, A. Mandelbaum, A. Sakov, H. Shen, S. Zeltyn, and L. Zhao, Statistical analysis of a telephone call center: A queueing-science perspective, *J. Am. Stat. Assoc.* **100**, 36–50 (2010).
4. V. Mehrotra, Ringing up big business, *ORMS Today* **24**, 18–24 (1997).
5. M. Cezik and P. L'Ecuyer, Staffing multi-skill call centers via linear programming and simulation, *Manag. Sci.* **54**, 310–323 (2008).

This research is supported by the Russian Science Foundation (Project 21–41–09017).English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **17** (2) (2023).

6. **A. N. Avramidis, W. Chan, and P. L'Ecuyer**, Staffing multi-skill call centers via search methods and a performance approximation, *IIE Trans.* **41** (6), 483–497 (2009).
7. **A. Pot, S. Bhulai, and G. Koole**, A simple staffing method for multi-skill call centers, *Manuf. Serv. Oper. Manag.* **10** (3), 421–428 (2008).
8. **L. A. Zaozerskaya**, A heuristic for a special case of the generalized assignment problem with additional conditions, *J. Phys. Conf. Ser.* **1791** (1), ID 012092, 6 p. (2021).
9. **S. Bhulai, G. Koole, and A. Pot**, Simple methods for shift scheduling in multi-skill call centers, *Manuf. Serv. Oper. Manag.* **10** (3), 411–420 (2008).
10. **A. N. Avramidis, W. Chan, M. Gendreau, P. L'Ecuyer, and O. Pisci- cane**, Optimizing daily agent scheduling in a multi-skill call center, *Eur. J. Oper. Res.* **200**, 822–832 (2010).
11. **M. R. Garey and D. S. Johnson**, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* (Freeman, San Francisco, 1979; Mir, Moscow, 1982 [Russian]).
12. **J. Holland**, *Adaptation in Natural and Artificial Systems* (Univ. Michigan Press, Ann Arbor, 1975).
13. **J. E. Baker**, Adaptive selection methods for genetic algorithms, in *Proc. Int. Conf. Genetic Algorithms and Their Applications, Pittsburgh, PA, USA, July 24–26, 1985* (Carnegie-Mellon Univ., Pittsburgh, PA, 1985), pp. 101–111.
14. **P. K. Lehre**, Fitness-levels for non-elitist populations, in *Proc. 13th Annu. Conf. Genetic and Evolutionary Computation, Dublin, Ireland, July 12–16, 2011* (ACM, New York, 2011), pp. 2075–2082.
15. **P. Borisovsky, A. Dolgui, and A. Ereemeev**, Genetic algorithms for a supply management problem: MIP-recombination vs greedy decoder, *Eur. J. Oper. Res.* **195**, 770–779 (2009).
16. **S. Hampson and D. Kibler**, Large plateaus and plateau search in Boolean Satisfiability problems: When to give up searching and start again, in *Cliques, Coloring and Satisfiability* (Proc. 2nd DIMACS Implementation Challenge, Workshop, Piscataway, USA, Oct. 11–13, 1993) (AMS, Providence, 1996), pp. 437–456.
17. **E. Balas and W. Niehaus**, Optimized crossover-based genetic algorithms for the maximum cardinality and maximum weight clique problems, *J. Heuristics* **4** (2), 107–122 (1998).
18. **N. N. Tyunin and A. V. Ereemeev**, Differential evolution for directivity optimization of short-wave phased antenna arrays, *Mat. Strukt. Model.*, No. 3, 57–68 (2022) [Russian].

Anton V. Ereemeev
Maxim A. Sakhno

Received April 29, 2022
Revised January 25, 2023
Accepted February 13, 2023

S-БЛОКИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ОТ МАЛОГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ

Д. А. Зюбина^{1, a}, Н. Н. Токарева^{2, b}

¹ Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия

² Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: ^azyubinadarya@gmail.com, ^bcrypto1127@mail.ru

Аннотация. При построении блочных шифров в качестве S-блоков необходимо использовать векторные булевы функции со специальными криптографическими свойствами для стойкости шифра к различным видам криптоанализа. В данной работе исследуется следующая конструкция S-блока. Пусть π — перестановка n элементов, π^i — i -кратное применение перестановки π , f — булева функция от n переменных. Рассматривается векторная булева функция $F_\pi: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ вида $F_\pi(x) = (f(x), f(\pi(x)), \dots, f(\pi^{n-1}(x)))$. В данной статье изучаются такие криптографические свойства F_π от малого числа переменных, как сбалансированность, высокая алгебраическая степень, низкая δ -дифференциальная равномерность, высокая нелинейность в зависимости от булевой функции f и перестановки π . Получены полные множества булевых функций f и векторных булевых функций F_π с максимальной алгебраической иммунностью от малого числа переменных. Библиогр. 16.

Ключевые слова: булевы функции, векторные булевы функции, нелинейность, алгебраическая степень, сбалансированность, дифференциальная δ -равномерность, алгебраическая иммунность.

Введение

Основной нелинейной частью симметричных шифрсистем являются S-блоки, которые обеспечивают стойкость шифров к различным видам криптоанализа. С математической точки зрения S-блок является векторной булевой (n, m) -функцией, осуществляющей отображение из множества двоичных векторов длины n в множество двоичных векторов

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF–2022–0018).

длины m . Чаще всего в качестве S-блоков используются взаимно однозначные векторные булевы функции, что обусловлено необходимостью однозначного расшифрования, в таком случае $n = m$.

S-блоки используются в таких шифрах, как «Кузнечик» (введён в качестве национального стандарта Российской Федерации 1 июня 2019 г.), AES (американский стандарт шифрования с 2002 г.), Serpent, IDEA, которые, в свою очередь, используются для связи в локальных сетях, защиты финансовой и коммерческой информации, шифровании аудио- и видеоданных, смарт-картах.

Известно, что некоторые криптографические характеристики векторной булевой функции, такие как высокая нелинейность, низкая дифференциальная равномерность, высокая алгебраическая иммунность, позволяют шифру противостоять линейному [1], дифференциальному [2] и алгебраическому [3] методам криптоанализа соответственно. Однако некоторые из этих свойств трудно или вовсе не совмещаются друг с другом [4, 5]. Например, бент-функции (булевы функции от чётного числа переменных, у которых нелинейность принимает максимально возможное значение) не могут быть сбалансированными, и их степень не превосходит $n/2$ (см. подробнее [4, 6]). Необходимо искать компромисс между свойствами — функцию, которая обладала бы достаточно хорошими показателями по каждому критерию. Подробнее о криптографических свойствах функций и связанных с ними методах криптоанализа можно ознакомиться в [7, 8].

На настоящий момент известно несколько конструкций S-блоков, обладающих теми или иными криптографическими свойствами. На олимпиаде NSUCRYPTO'16 [9] был предложен способ построения векторной булевой функции от большого числа переменных с высокой алгебраической иммунностью. Данная конструкция является основой шифра IDEA, использующей булеву функцию и циклический сдвиг влево. В работе [10] представлен класс бент-функций, в котором существуют функции с максимальной алгебраической иммунностью. В [11] изучаются дифференциально 4-равномерные $(n, n - 1)$ -функции, обладающие высокой нелинейностью и оптимальной алгебраической степенью (для чётного и нечётного n). Такие функции строятся на основе двух $(n - 1, n - 1)$ -функций с минимально возможным значением дифференциальной равномерности. В 2009 г. была представлена работа [12], в которой приведён первый, и пока единственный, пример APN-перестановки (взаимно однозначной дифференциально 2-равномерной функции) от 6 переменных.

Прямой перебор всех векторных булевых функций вида $F: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ сложно осуществить по времени и памяти даже для сравнительно небольшого числа переменных. Так, число различных (n, n) -функций равно $2^{n \cdot 2^n}$, т. е. уже для случая $n = 4$ имеется 2^{64} различных функций. Значит,

необходимо использовать теоретические подходы к поиску и построению векторных булевых функций, обладающих нужными криптографическими свойствами.

В настоящей работе рассматривается следующая конструкция векторной булевой функции:

$$F_\pi(x) = (f(x), f(\pi(x)), \dots, f(\pi^{n-1}(x))) \quad (1)$$

с использованием булевой функции f от n переменных и перестановки $\pi \in S_n$, где π^i обозначает i -кратное применение перестановки π .

Практическая ценность данной конструкции заключается в том, что она позволяет работать с векторными булевыми функциями специального вида через их параметризацию обычными булевыми функциями. Существенно сокращается область перебора, и появляется возможность нахождения векторной булевой функции (S-блока) от большого числа переменных с хорошими криптографическими свойствами. В данной работе исследуются криптографические характеристики данной конструкции в зависимости от булевой функции f и перестановки π .

1. Необходимые определения

1.1. Основные криптографические свойства. Введём необходимые определения и рассмотрим основные криптографические свойства булевых и векторных булевых функций.

Векторной булевой функцией ((n, m) -функцией) называется произвольное отображение $F: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^m$. В случае $m = 1$ говорят, что F — *булева функция* от n переменных. Будем рассматривать (n, n) -функцию $F_\pi(x)$ как набор из n координатных булевых функций от n переменных: $F_\pi(x) = (f(x), f(\pi(x)), \dots, f(\pi_{n-1}(x)))$.

Компонентной функцией векторной булевой функции F называется любая ненулевая линейная комбинация координатных функций, т. е. булева функция $\langle b, F \rangle$, где $b \in \mathbb{F}_2^n$, $b \neq 0$ и $\langle a, b \rangle = a_1 b_1 \oplus \dots \oplus a_n b_n$ — скалярное произведение векторов по модулю 2.

Известно, что булеву функцию можно единственным образом представить в *алгебраической нормальной форме* (АНФ, полином Жегалкина):

$$f(x_1, \dots, x_n) = \left(\bigoplus_{k=1}^n \bigoplus_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, \dots, i_k} x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_k} \right) \oplus a_0,$$

где при каждом k все индексы $i_1, \dots, i_k$ различны и $a_0, a_{i_1, \dots, i_k} \in \{0, 1\}$.

Алгебраической степенью булевой функции f называется число переменных в самом длинном слагаемом её алгебраической нормальной формы (АНФ). Степень функции обозначается через $\deg(f)$. Алгебраической степенью векторной булевой функции F (см. (1)) называется

максимальная из степеней её координатных функций. Параметр $\deg(f)$ булевой функции и $\deg(F)$ векторной булевой функции должны быть достаточно большими для устойчивости шифра, в котором она используется, к линейному криптоанализу [1]. Для блочных шифров это условие накладывается из-за того, что система уравнений на биты ключа, построенная путём анализа структуры шифра (в том числе функции f , использующейся в качестве его компоненты) имела высокую степень. Чем выше степень системы, тем сложнее её решить, т. е. определить ключ.

Сбалансированной (или уравновешенной) *булевой функцией* называется функция, которая принимает значения 0 и 1 одинаково часто [5]. *Сбалансированной* (или взаимно однозначной) *векторной (n, n) -функцией* называется функция, которая принимает каждое значение ровно один раз. Если булева и векторная булева функции уравновешены, то все свои возможные значения они принимают равномерно. Это позволяет ослабить статистические зависимости между входом и выходом функции.

Преобразование Уолша — Адамара булевой функции f от n переменных — это целочисленная функция

$$W_f(y) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{\langle x, y \rangle \oplus f(x)}, \quad y \in \mathbb{Z}_2^n.$$

Нелинейность N_f булевой функции f от n переменных определяется как расстояние Хэмминга от неё до множества всех аффинных функций от n переменных [13]. Высокая нелинейность функции обеспечивает стойкость шифра к линейному криптоанализу [1]. Нелинейность булевой функции выражается через коэффициенты Уолша — Адамара по следующей формуле:

$$N_f = 2^{n-1} - \frac{1}{2} \max_{x \in \mathbb{Z}_2^n} |W_{f(x)}|.$$

Нелинейность векторной булевой функции — минимальная нелинейность её компонентных функций.

В [14] введено понятие дифференциальной δ -равномерности. Для всех $a, b \in \mathbb{Z}_2^n$, $a \neq 0$ рассмотрим значение

$$\delta_F = \max_{a, b \in \mathbb{Z}_2^n, a \neq 0} |\{x \in \mathbb{Z}_2^n \mid F(x \oplus a) \oplus F(x) = b\}|.$$

Тогда векторная булева функция $F: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ называется *дифференциально δ_F -равномерной*. Заметим, что минимальное возможное значение δ_F равно двум. Использование функций с малым значением δ_F позволяет повысить стойкость шифра к дифференциальному криптоанализу.

Алгебраической иммунностью $AI(f)$ булевой функции f от n переменных называется минимальное число d такое, что существует булева функция $g \neq 0$ степени d , для которой $f \cdot g = 0$ или $(f \oplus 1) \cdot g = 0$. Известно, что для произвольной булевой функции f от n переменных

выполнено неравенство $AI(f) \leq \lceil n/2 \rceil$ [8]. Понятие алгебраической иммунности различными способами может быть обобщено на векторный случай. В настоящей работе используется *компонентная алгебраическая иммунность* $AI_{\text{comp}}(F)$ векторной булевой функции F , определяемая как минимальная алгебраическая иммунность её компонентных функций (см. [15]). Высокая алгебраическая иммунность обеспечивает стойкость к алгебраическому криптоанализу.

1.2. Перестановки. Обозначим через S_n множество всевозможных перестановок n элементов. Пусть $x \in \mathbb{Z}_2^n$. Тогда перестановка π действует на векторе $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ следующим образом: $\pi(x) = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)})$. Для анализа векторной булевой функции рассмотрим некоторые частные виды перестановок.

Беспорядком называется перестановка $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n) \in S_n$ такая, что $\pi_i \neq i$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Множество всех таких перестановок обозначим через K_n .

Цикл в перестановке — это подмножество элементов, которые переставляются циклическим образом. Чтобы различать перестановки и циклы, в записи последних не будем ставить запятые между элементами. Напомним, что каждая перестановка имеет циклическое представление и при этом единственное. Например, для перестановки $(1, 3, 4, 2)$ циклическое представление имеет вид $(1)(234)$ или просто (234) . Перестановка с циклом длины n называется *полноцикловой*. Например, при $n = 4$ существует всего 6 полноцикловых перестановок. Стоит отметить, что данное множество содержит три пары взаимно обратных перестановок, а именно: $\pi_1 = (2, 3, 4, 1)$ и $\pi_2 = (4, 1, 2, 3)$, $\pi'_1 = (2, 4, 1, 3)$ и $\pi'_2 = (3, 1, 4, 2)$, $\pi''_1 = (3, 4, 2, 1)$ и $\pi''_2 = (4, 3, 2, 1)$, которые понадобятся в дальнейшем.

Отдельно выделим одну полноцикловую перестановку специального вида. Перестановка $\pi = (2, \dots, n, 1)$ называется *циклическим сдвигом влево*. В циклическом представлении она имеет вид $(12 \dots n)$.

2. Анализ конструкции S-блока

Пусть перестановка π на n элементах произвольна и фиксирована. Рассмотрим криптографические свойства векторной булевой функции $F(x) = (f(x), f(\pi(x)), \dots, f(\pi^{n-1}(x)))$ в зависимости от фиксированной булевой функции f .

Заметим, что при фиксированной перестановке π для любых двух булевых функций f и f' верно, что если $f \neq f'$, то $F_\pi \neq F'_\pi$.

СЛУЧАЙ $n = 2$.

- **Нелинейность.** Заметим, что в нашей конструкции каждая векторная булева функция F_π аффинна, т. е. её степень не превышает 1. При этом максимально возможная нелинейность векторной булевой функции

от двух переменных равна 1. Тогда для всякой булевой функции f от двух переменных $N_{F_\pi} = 0$, т. е. нелинейность не достигает своего максимума.

- Дифференциальная δ -равномерность. Для функций вида $f(x) = x_1x_2 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus a_0$, где $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_2$, и только для них дифференциальная равномерность функции F_π минимальна, т. е. равна 2. Всего таких булевых функций 2^3 , что является половиной всего множества булевых функций от двух переменных. Дифференциальная равномерность оставшихся векторных булевых функций равна 4.

СЛУЧАЙ $n = 3$.

- Сбалансированность. Если $\pi \in K_3$, то существует сбалансированная булева функция f от трёх переменных такая, что векторная булева функция F_π сбалансирована.

- Нелинейность и дифференциальная δ -равномерность. Если $\pi \in K_3$, то нелинейности булевой и векторной булевой функций совпадают, т. е. $N_f = N_{F_\pi}$. Стоит отметить, что если нелинейность F_π принимает максимальное возможное значение $N_{F_\pi} = 2$, то дифференциальная δ -равномерность минимальна, т. е. $\delta_{F_\pi} = 2$. Количество таких булевых функций f равно 48, что составляет около пятой части от всего множества булевых функций от трёх переменных. Если $\pi \notin K_3$, то $\delta_{F_\pi} \geq 4$.

СЛУЧАЙ $n = 4$.

- Дифференциальная δ -равномерность. Если π — полноцикловая перестановка, то существует булева функция f от четырёх переменных такая, что дифференциальная равномерность функции F_π минимальна, т. е. $\delta_{F_\pi} = 2$. Если π не полноцикловая, то для произвольной булевой функции f от четырёх переменных $\delta_{F_\pi} \geq 4$.

- Дифференциальная равномерность, нелинейность и алгебраическая степень. Для любой полноцикловой перестановки π существует булева функция f от четырёх переменных такая, что если $\delta_{F_\pi} = 2$ и нелинейности f и F_π совпадают, то $\delta_{F_{\pi^{-1}}} = 2$. Более того, нелинейности и алгебраические степени f и $F_{\pi^{-1}}$ совпадают.

3. S-блоки, устойчивые к алгебраическим атакам

Приведём полные описания булевых функций f от малого числа переменных $n = 2, 3, 4, 5$ и векторных булевых функций F_π , построенных на основе f , с максимальной алгебраической иммунностью. При построении векторных булевых функций в качестве перестановки π будет рассматриваться циклический сдвиг влево.

3.1. Метод построения S-блока с максимальной алгебраической иммунностью. Для построения векторной функции (S-блока) с максимальной компонентной алгебраической иммунностью применим

следующий алгоритм нахождения линейного подпространства размерности n в множестве, содержащем векторы значений нулевой функции и всех булевых функций от n переменных с максимальной алгебраической иммунностью $\lceil n/2 \rceil$.

1) Путём полного перебора (в лексикографическом порядке) формируется множество всех булевых функций с максимальной алгебраической иммунностью от n переменных. К этому множеству добавляется нулевой вектор, т. е. вектор значений нулевой функции. Полученное множество обозначаем M .

2) Из этого множества выбирается произвольная ненулевая функция f , и на её основе строятся оставшиеся $n-1$ функций с помощью перестановки π , а именно $f(\pi(x)), f(\pi^2(x)), \dots, f(\pi^{n-1}(x))$. Все эти функции также лежат в этом множестве, так как при перестановке на переменных алгебраическая иммунность сохраняет своё значение.

3) Строим линейную оболочку

$$L = \langle f(\pi(x)), f(\pi^2(x)), \dots, f(\pi^{n-1}(x)) \rangle.$$

4) Проверяем, лежит ли L полностью в множестве M и равна ли размерность линейной оболочки L числу n . Если оба условия выполнены, то данное подпространство позволяет построить S-блок с максимальной компонентной иммунностью: для этого нужно выбрать в качестве координатных функций S-блока базис подпространства (например, всегда можно взять исходные функции).

Таким образом, сначала находится алгебраическая иммунность компонентных функций, и на основе этого определяется, возможно ли построение векторной булевой функции с данными компонентными функциями и максимальной компонентной иммунностью.

3.2. Алгебраическая иммунность S-блока от малого числа переменных. С помощью компьютерных вычислений и предложенного алгоритма мы получили полные описания булевых функций от малого числа переменных $n = 2, 3, 4, 5$ с максимальной алгебраической иммунностью.

СЛУЧАЙ $n = 2$. Всего существует 14 булевых функций с максимальной алгебраической иммунностью ($AI = 1$). Из них в точности для 8 булевых функций можно построить векторные булевы функции с максимально возможной компонентной алгебраической иммунностью. Все эти функции представлены как $x_1, x_2, x_1 \oplus x_1x_2, x_2 \oplus x_1x_2$ и их отрицания.

СЛУЧАЙ $n = 3$. Путём полного перебора всех булевых функций было получено, что существует 56 булевых функций с максимальной алгебраической иммунностью ($AI = 2$). Из них на основе ровно 12 функций (им отвечают 4 подпространства) можно построить векторную булеву

функцию с максимальным значением алгебраической иммунности. Все эти функции можно представить в общем виде АНФ.

Утверждение 1. Булевы функции от трёх переменных с максимальной алгебраической иммунностью 2 такие, что построенные на их основе векторные булевы функции вида $F_\pi(x) = (f(x), f(\pi(x)), f(\pi^2(x)))$, где π — циклический сдвиг влево, также имеют максимальную компонентную алгебраическую иммунность 2, можно описать конструкцией

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_i \oplus x_j \oplus x_i x_k \oplus a,$$

где $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j \neq k$, $a \in \mathbb{Z}_2$.

СЛУЧАЙ $n = 4$. Путём полного перебора всех булевых функций было получено, что существует всего 54952 булевых функций с максимальной алгебраической иммунностью ($AI = 2$). При рассмотрении всевозможных перестановок π было получено, что только при полноцикловых перестановках π существуют векторные булевы функции, которые сохраняют максимальную иммунность. Для каждой полноциклового перестановки существует 6144 булевых функций (или 1536 линейных подпространств) таких, что построенные на их основе векторные булевы функции также имеют максимально возможную компонентную алгебраическую иммунность.

СЛУЧАЙ $n = 5$. Путём полного перебора всех булевых функций было получено, что всего существует 197765122 булевых функций с максимальной алгебраической иммунностью ($AI = 3$). Из них на основе в точности 18842620 булевых функций возможно построение векторной булевой функции с максимальным значением алгебраической иммунности.

Опираясь на экспериментальные результаты, можем сформулировать следующие гипотезы.

Гипотеза 1. Для любого $n \geq 2$ в множестве, состоящем из булевых функций от n переменных с максимальной алгебраической иммунностью $\lceil n/2 \rceil$ и нулевой функции, существует линейное подпространство размерности n .

Данная гипотеза верна для $n = 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10$. Истинность гипотезы для размерностей 2, 3, 4 и 5 вычислительно проверена нами (всего существует 4, 4, 1536 и 3768524 подпространств размерности 2, 3, 4 и 5 соответственно). Для каждой размерности приведём примеры булевых функций, на основе которых можно построить векторные булевы функции с максимальной алгебраической иммунностью. Для упрощения записи булеву функцию $x_1 x_2 \oplus x_1 \oplus 1$ от двух переменных запишем как

$12 + 1 + 0$, где i обозначает переменную x_i , $i \geq 1$, а 0 обозначает константу 1. Аналогично представим булевы функции от большего числа переменных:

- для $n = 2$: $12 + 1 + 0$;
- для $n = 3$: $13 + 1 + 2$;
- для $n = 4$: $1234 + 123 + 134 + 234 + 13 + 14 + 23 + 24 + 34 + 2 + 3 + 4$;
- для $n = 5$: $1234 + 1245 + 124 + 135 + 145 + 234 + 235 + 345 + 12 + 14 + 23 + 25 + 1 + 0$.

Для размерностей 6, 8 и 10 гипотеза доказана А. Удовенко [9] (и вычислительно проверена нами). А именно, им были представлены функции

- для $n = 6$: $345 + 236 + 156 + 135 + 125 + 56 + 46 + 36 + 34 + 24 + 23 + 13 + 6 + 1$;
- для $n = 8$: $1235 + 1246 + 1247 + 1248 + 1256 + 1258 + 1278 + 1345 + 1347 + 1348 + 1357 + 1358 + 1368 + 1456 + 1457 + 1458 + 1478 + 1568 + 2345 + 2347 + 2368 + 2378 + 2456 + 2468 + 2567 + 2568 + 3456 + 3678 + 4678 + 128 + 134 + 136 + 137 + 145 + 146 + 168 + 178 + 234 + 237 + 238 + 248 + 256 + 268 + 345 + 346 + 347 + 368 + 458 + 467 + 578 + 678 + 12 + 14 + 15 + 16 + 25 + 26 + 45 + 47 + 57 + 68 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$;
- для $n = 10$: $12345 + 12347 + 12357 + 12359 + 12368 + 1236A + 12457 + 1246A + 12489 + 1248A + 12567 + 12569 + 1256A + 12579 + 1257A + 12589 + 1258A + 12678 + 12679 + 12689 + 1269A + 12789 + 1279A + 1289A + 13456 + 13457 + 13458 + 13459 + 13467 + 13468 + 13469 + 13478 + 13489 + 1348A + 13568 + 13569 + 1356A + 13579 + 1357A + 13589 + 1368A + 1369A + 1389A + 14567 + 14569 + 1456A + 1457A + 1458A + 14678 + 14679 + 1468A + 1469A + 14789 + 1478A + 1489A + 15689 + 1569A + 15789 + 1579A + 16789 + 1678A + 1679A + 1789A + 23456 + 23457 + 23459 + 23467 + 23468 + 23469 + 2346A + 23479 + 2348A + 23569 + 2356A + 23579 + 2357A + 23589 + 2359A + 23679 + 23689 + 23789 + 2378A + 24568 + 24569 + 2456A + 24579 + 2468A + 2469A + 24789 + 2489A + 25679 + 2567A + 2568A + 2589A + 26789 + 2678A + 2679A + 34567 + 3456A + 3458A + 34678 + 34689 + 3468A + 34789 + 3479A + 35679 + 35689 + 3569A + 3579A + 3689A + 3789A + 45678 + 4567A + 45679 + 4569A + 45789 + 4578A + 4579A + 46789 + 4678A + 4679A + 56789 + 5678A + 5789A + 6789A + 1235 + 1236 + 1237 + 123A + 1245 + 1248 + 124A + 1257 + 126A + 1279 + 127A + 1289 + 128A + 1347 + 1348 + 1356 + 1359 + 1367 + 1378 + 1379 + 137A + 138A + 139A + 1456 + 1457 + 1458 + 1459 + 145A + 1468 + 147A + 1489 + 148A + 1569 + 1579 + 167A + 1689 + 168A + 169A + 1789 + 178A + 189A + 2347 + 2348 + 2356 + 2357 + 235A + 2367 + 2368 + 2369 + 2378 + 237A + 2456 + 245A + 2467 + 2469 + 246A + 2479 + 247A + 2489 + 2578 + 256A + 257A + 2678 + 2679 + 2689 + 268A + 279A + 289A + 3457 + 3458 + 3467 + 3468 + 3478 + 3489 + 3569 + 356A + 3578 + 3579 + 3589 + 359A + 367A + 3689 + 3789 + 379A + 389A + 4568 + 4569 + 4578 + 4579 + 4589 + 458A + 467A + 468A + 469A + 4789 + 478A + 489A +$

$568A + 578A + 579A + 589A + 678A + 124 + 125 + 128 + 129 + 136 + 137 + 13A + 145 + 148 + 14A + 158 + 15A + 168 + 179 + 189 + 18A + 238 + 239 + 245 + 246 + 248 + 249 + 24A + 256 + 258 + 259 + 268 + 269 + 26A + 27A + 289 + 29A + 345 + 346 + 349 + 34A + 357 + 359 + 35A + 368 + 369 + 36A + 379 + 37A + 39A + 457 + 467 + 468 + 469 + 46A + 478 + 479 + 49A + 569 + 579 + 589 + 58A + 59A + 678 + 679 + 78A + 89A + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 19 + 24 + 25 + 26 + 28 + 29 + 37 + 38 + 39 + 45 + 46 + 47 + 48 + 49 + 56 + 58 + 59 + 67 + 68 + 6A + 7A + 4 + 5 + 6 + 8 + 9 + 0$, где A обозначает переменную x_{10} .

Для $n = 7, 9$ пока что не найдено таких подпространств, но и не опровергнуто их существование.

Отметим, что если справедлива гипотеза 1, то справедлива и гипотеза о том, что существует векторная булева функция с максимальной компонентной алгебраической иммунностью $\lceil n/2 \rceil$ для любого n . Вопрос о существовании таких векторных булевых функций широко известен и открыт; он рассматривался, например, в работе Д. Покрасенко [16].

Гипотеза 2. Пусть f – булева функция от n переменных с максимальной алгебраической иммунностью $\lceil n/2 \rceil$. Тогда в её АНФ присутствует по меньшей мере по одному моному каждой степени i , где $i = 1, 2, \dots, \lceil n/2 \rceil$.

Данная гипотеза верна для $n = 2, 3, 4, 5$. Истинность гипотезы вычислительно проверена нами: для 2, 3, 4 и 5 переменных существует соответственно 14, 56, 54 952 и 197 765 122 булевых функций с максимальной алгебраической иммунностью; все они были просмотрены нами. Другие известные булевы функции не противоречат данной гипотезе.

Авторы выражают благодарность рецензенту за замечания и внимание к нашей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Matsui M.** Linear cryptanalysis method for DES cipher // Advances in cryptology — EUROCRYPT'93. Proc. Workshop Theory and Application of Cryptographic Techniques (Lofthus, Norway, May 23–27, 1993). Heidelberg: Springer, 1994. P. 386–397 (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 765).
2. **Biham E., Shamir A.** Differential cryptanalysis of DES-like cryptosystems // J. Cryptology. 1991. V. 4. P. 3–72.
3. **Courtois N. T., Meier W.** Algebraic attacks on stream ciphers with linear feedback // Advances in cryptology — EUROCRYPT 2003. Proc. Int. Conf. Theory and Application of Cryptographic Techniques (Warsaw, Poland, May 4–8, 2003). Heidelberg: Springer, 2003. P. 345–359 (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 2656).
4. **Cusick T. W., Stanica P.** Cryptographic Boolean functions and applications. San Diego, CA: Elsevier, 2009. 288 p.

5. **Carlet C.** Vectorial Boolean functions for cryptography // Boolean models and methods in mathematics, computer science, and engineering. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2010. P. 398–470.
6. **Tokareva N. N.** Bent functions: Results and applications to cryptography. Amsterdam: Elsevier, 2015. 221 p.
7. **Городилова А. А.** От криптоанализа шифра к криптографическому свойству булевой функции // Прикл. дискрет. математика. 2016. № 3. С. 16–44.
8. **Панкратова И. А.** Булевы функции в криптографии. Томск: Изд. дом Томск. гос. ун-та, 2014. 88 с.
9. **Tokareva N. N., Gorodilova A. A., Agievich S. V.** [et al.]. Mathematical methods in solutions of the problems from the Third International Students' Olympiad in Cryptography // Прикл. дискрет. математика. 2018. № 40. С. 34–58.
10. **Dillon J. F.** Elementary Hadamard difference sets: PhD thesis. College Park: Univ. Maryland, 1974.
11. **Alsalamy Y.** Constructions with high algebraic degree of differentially 4-uniform $(n, n - 1)$ -functions and differentially 8-uniform $(n, n - 2)$ -functions // Cryptogr. Commun. 2018. V. 10, No. 4. P. 611–628.
12. **Browning K. A., Dillon J. F., McQuistan M. T., Wolfe A. J.** An APN permutation in dimension six // Finite fields: Theory and applications. Proc. 9th Int. Conf. Finite Fields and Applications (Dublin, Ireland, July 13–17, 2009). Providence: AMS, 2010. P. 33–42. (Contemp. Math.; V. 518).
13. **Carlet C.** Boolean functions for cryptography and error-correcting codes // Boolean models and methods in mathematics, computer science, and engineering. Cambridge: Camb. Univ. Press, 2010. P. 257–397.
14. **Nyberg K.** Differentially uniform mappings for cryptography // Advances in cryptology – EUROCRYPT'93. Proc. Workshop Theory and Application of Cryptographic Techniques (Lofthus, Norway, May 23–27, 1993). Heidelberg: Springer, 1994. P. 55–64 (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 765).
15. **Carlet C.** On the algebraic immunities and higher order nonlinearities of vectorial Boolean functions // Enhancing cryptographic primitives with techniques from error correcting codes. Proc. NATO Adv. Res. Workshop (Veliko Tarnovo, Bulgaria, Oct. 6–9, 2008). Amsterdam: IOS Press, 2009. P. 104–116. (NATO Sci. Peace Secur. Ser. D: Inf. Commun. Secur.; V. 23).
16. **Покрасенко Д. П.** О максимальной компонентной алгебраической иммунности векторных булевых функций // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2016. Т. 23, № 2. С. 88–99.

Зюбина Дарья Александровна
Токарева Наталья Николаевна

Статья поступила
29 декабря 2021 г.
После доработки —
8 ноября 2022 г.
Принята к публикации
10 ноября 2022 г.

S-BLOCKS OF A SPECIAL TYPE WITH A SMALL NUMBER OF VARIABLES

D. A. Zyubina^{1, a} and N. N. Tokareva^{2, b}

¹ Novosibirsk State University,

2 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia

² Sobolev Institute of Mathematics,

4 Koptug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia

E-mail: ^azyubinadarya@gmail.com, ^bcrypto1127@mail.ru

Abstract. When constructing block ciphers, it is necessary to use vector Boolean functions with special cryptographic properties as S-blocks for the cipher's resistance to various types of cryptanalysis. In this paper, we investigate the following S-block construction: let π be a permutation on n elements, π^i i -multiple application π , and f a Boolean function in n variables. Define a vectorial Boolean function $F_\pi: \mathbb{Z}_2^n \rightarrow \mathbb{Z}_2^n$ as $F_\pi(x) = (f(x), f(\pi(x)), \dots, f(\pi_{n-1}(x)))$. We study cryptographic properties of F_π such as high nonlinearity, balancedness, and low differential δ -uniformity in dependence on properties of f and π for small n . Complete sets of Boolean functions f and vector Boolean functions F_π in a small number of variables with maximum algebraic immunity are also obtained. Bibliogr. 16.

Keywords: Boolean functions, vectorial Boolean functions, high nonlinearity, high algebraic degree, balancedness, low differential δ -uniformity, high algebraic immunity.

REFERENCES

1. **M. Matsui**, Linear cryptanalysis method for DES cipher, in *Advances in cryptology — EUROCRYPT'93* (Proc. Workshop Theory and Application of Cryptographic Techniques, Lofthus, Norway, May 23–27, 1993) (Springer, Heidelberg, 1994), pp. 386–397 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 765).

This research is carried out within the framework of the state contract of the Sobolev Institute of Mathematics (Project FWNF-2022-0018).

English version: Journal of Applied and Industrial Mathematics **17** (2) (2023).

2. **E. Biham** and **A. Shamir**, Differential cryptanalysis of DES-like cryptosystems, *J. Cryptology* **4**, 3–72 (1991).
3. **N. Courtois** and **W. Meier**, Algebraic attacks on stream ciphers with linear feedback, in *Advances in cryptology — EUROCRYPT 2003* (Proc. Int. Conf. Theory and Application of Cryptographic Techniques, Warsaw, Poland, May 4–8, 2003) (Springer, Heidelberg, 2003), pp. 345–359 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 2656).
4. **T. W. Cusick** and **P. Stanica**, *Cryptographic Boolean Functions and Applications* (Elsevier, San Diego, CA, 2009).
5. **C. Carlet**, Vectorial Boolean functions for cryptography, in *Boolean Models and Methods in Mathematics, Computer Science, and Engineering*, (Camb. Univ. Press, Cambridge, 2010), pp. 398–470.
6. **N. N. Tokareva**, *Bent Functions: Results and Applications to Cryptography* (Elsevier, Amsterdam, 2015).
7. **A. A. Gorodilova**, From cryptanalysis to cryptographic property of a Boolean function, *Prikl. Diskretn. Mat.*, No. 3, 16–44 (2016) [Russian].
8. **I. A. Pankratova**, *Boolean Functions in Cryptography* (Izd. Dom Tomsk. Gos. Univ., Tomsk, 2014) [Russian].
9. **N. N. Tokareva**, **A. A. Gorodilova**, **S. V. Agievich**, [et al.]. Mathematical methods in solutions of the problems from the Third International Students' Olympiad in Cryptography, *Prikl. Diskretn. Mat.*, No. 40, 34–58 (2018).
10. **J. F. Dillon**, Elementary Hadamard difference sets, *PhD Thesis* (Univ. Maryland, College Park, 1974).
11. **Y. Alsalam**, Constructions with high algebraic degree of differentially 4-uniform $(n, n-1)$ -functions and differentially 8-uniform $(n, n-2)$ -functions, *Cryptogr. Commun.* **10** (4), 611–628 (2018).
12. **K. A. Browning**, **J. F. Dillon**, **M. T. McQuistan**, and **A. J. Wolfe**, An APN permutation in dimension six, in *Finite Fields: Theory and Applications* (Proc. 9th Int. Conf. Finite Fields and Applications, Dublin, Ireland, July 13–17, 2009) (AMS, Providence, 2010), pp. 33–42. (Contemp. Math., Vol. 518).
13. **C. Carlet**, Boolean functions for cryptography and error-correcting codes, in *Boolean Models and Methods in Mathematics, Computer Science, and Engineering*, (Camb. Univ. Press, Cambridge, 2010), pp. 257–397.
14. **K. Nyberg**, Differentially uniform mappings for cryptography, in *Advances in cryptology — EUROCRYPT 2003* (Proc. Int. Conf. Theory and Application of Cryptographic Techniques, Warsaw, Poland, May 4–8, 2003) (Springer, Heidelberg, 1994), pp. 55–64 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 765).
15. **C. Carlet**, On the algebraic immunities and higher order nonlinearities of vectorial Boolean functions, in *Enhancing cryptographic primitives with techniques from error correcting codes. Proc. NATO Adv. Res. Workshop, Veliko Tarnovo, Bulgaria, Oct. 6–9, 2008* (IOS Press, Amsterdam, 2009), pp. 104–116. (NATO Sci. Peace Secur. Ser. D: Inf. Commun. Secur., Vol. 23).

- 16. D. P. Pokrasenko**, On the maximal component algebraic immunity of vectorial Boolean functions, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **23** (2), 88–99 (2016) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **10** (2), 257–263 (2016)].

Darya A. Zyubina
Natalya N. Tokareva

Received December 29, 2021
Revised November 8, 2022
Accepted November 10, 2022

СООТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Е. А. Нурминский

Дальневосточный федеральный университет,
пос. Аякс, 10, 690922 Владивосток, Россия
E-mail: nurminskiy.ea@dvfu.ru

Аннотация. Сформулированы и доказаны общие соотношения эквивалентности между вычислениями опорных функций выпуклых множеств и операциями проекции на них: асимптотическая эквивалентность операции проекции и вычисления опорной функции произвольного выпуклого замкнутого ограниченного множества, эквивалентность задачи об элементе минимальной нормы и регуляризованной задачи суплинейной оптимизации. Приведённые результаты существенно упрощают и обобщают полученные ранее доказательства для аналогичных соотношений в задачах линейной оптимизации. Ил. 1, библиогр. 10.

Ключевые слова: выпуклая оптимизация, регуляризация, проекция, опорная функция.

Введение

Цель этой заметки — представить несколько полезных результатов, относящихся к взаимозависимости выпуклой оптимизации и операции проекции. Эти результаты обобщают и существенно упрощают полученные ранее соотношения для полиэдральных множеств и задач линейной оптимизации [1, 2]. Первый аппроксимационный результат показывает, что значение опорной функции выпуклого множества для заданного опорного вектора может быть вычислено с любой точностью при помощи операции проектирования удалённой точки, находящейся на луче, генерированном этим вектором. Поскольку решение любой выпуклой оптимизационной задачи эквивалентно вычислению опорной функции, этот результат может быть использован для разработки новых алгоритмических подходов в выпуклой оптимизации. В случае линейной

Исследование выполнено при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования (соглашение № 075–02–2023–946).

оптимизации возможно получить даже точное решение, для получения точного решения нелинейной выпуклой задачи достаточно выполнения некоторых дополнительных условий типа острого минимума [3, 4]. В общем случае можно получить приближённое решение, точность которого может быть оценена.

Следующий результат демонстрирует возможность решить задачу поиска вектора минимальной длины в выпуклом множестве, эквивалентную задаче проекции, при помощи безусловной минимизации суммы простейшей квадратичной функции и опорной функции заданного выпуклого множества. Этот результат впервые был сформулирован в [5] только для политопов, и доказательство в явном виде использовало конечность множества крайних точек. Однако конечный результат формулировался в независимой от этого форме, что наводило на мысль, что данное соотношение выполняется и в общем случае неполиэдральных выпуклых множеств. В настоящей заметке этот результат получен при помощи нового, чисто алгебраического доказательства. Таким образом, показано, что, действительно, данная эквивалентность имеет место и в общем случае замкнутых ограниченных выпуклых множеств.

Оба соотношения могут быть использованы для развития новых алгоритмических идей, что является предметом дальнейших исследований.

1. Обозначения и предварительные результаты

В основном в статье используются стандартные обозначения конечномерного выпуклого анализа, тем не менее приведём их здесь во избежание путаницы и неправильного понимания.

Через E обозначаем основное евклидово векторное пространство, в котором векторы, как правило, обозначаются строчными латинскими буквами $a, b, \dots, x, y, z$ при необходимости с нижними и верхними индексами, диакритическими маркерами и пр. Используем специальные обозначения для нулевого вектора $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ и вектора из единиц $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$.

Размерность пространства E при необходимости определяется как $\dim E$, и пространство размерности n обозначается через E^n , если в этом возникает необходимость. Неравенства между векторами и алгебраические суммы векторов, умножение векторов на вещественные числа определяются покомпонентно. Последние две операции естественным образом обобщаются на множества векторов:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}, \quad \alpha A = \{\alpha a \mid a \in A\}.$$

Линейное подпространство $L \subset E$ определяется как множество, инвариантное относительно сложения и умножения на вещественные числа: $L = L + L = \alpha L$ для любого вещественного $\alpha \neq 0$.

Неотрицательная часть E обозначается через $E_+ = \{x \geq \mathbf{0}\}$. Множество, состоящее из одного элемента, скажем a , будем при обозначении отождествлять с самим элементом.

Выпуклая оболочка множества X определяется и обозначается общепринятым образом:

$$\text{co}(X) = \left\{ z = \sum_{i=1}^{|X_f|} \alpha_i x^i \mid x^i \in X_f \subset X, |X_f| < \infty, \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^{|X_f|} \alpha_i = 1 \right\},$$

где $|X_f|$ — мощность конечного подмножества X_f множества X . Конечно, вследствие теоремы Каратеодори достаточно рассмотреть множества X_f с $|X_f| \leq \dim E + 1$. Коническая оболочка X определяется так: $\text{Co}(X) = \bigcup_{\alpha \geq 0} \alpha \text{co}(X)$.

Скалярное произведение векторов x и y из E обозначается через xy , а норма вектора x — это $\|x\|^2 = xx$. Норма множества $A \subset E$ определяется как $\|A\| = \sup_{a \in A} \|a\|$. С помощью скалярного произведения ортогональное дополнение $L^\perp$ линейного подпространства $L \subset E$ определяется следующим образом: $L^\perp = \{x \in E \mid xz = 0 \text{ для всех } z \in L\}$. Среди других специальных множеств отметим канонический симплекс: $\Delta = E_+ \cap \{x \in E \mid \mathbf{1}x = 1\}$.

Операция проекции точки $p \in E$ на выпуклое замкнутое подмножество $X \subset E$ определена и обозначается таким образом:

$$p \downarrow X = \underset{x \in X}{\operatorname{argmin}} \|p - x\|,$$

т. е. $p \downarrow X \in X$ и $\min_{x \in X} \|p - x\| = \|p - p \downarrow X\|$. Для замкнутого выпуклого X эта операция хорошо определена и липшицево непрерывна относительно p с константой Липшица, не превосходящей 1, т. е. $\|p \downarrow X - q \downarrow X\| \leq \|p - q\|$. Эта операция естественным образом обобщается на множества: $A \downarrow X = \{a \downarrow X \mid a \in A\} \subset X$.

Приведём краткий список алгебраических свойств проекции.

- Идемпотентность: $(p \downarrow X) \downarrow X = p \downarrow X$;
- линейность: для линейного подпространства $L \subset E$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$\alpha p \downarrow L = \alpha(p \downarrow L), \quad (p + q) \downarrow L = p \downarrow L + q \downarrow L;$$

- операции сдвига и масштабирования сочетаются с проекцией следующим образом ($\tau > 0$):

$$(a + b) \downarrow X = a \downarrow (X - b) + b, \quad (\tau a) \downarrow X = \tau(a \downarrow (\tau^{-1}X));$$

- ортогональная декомпозиция: $p = p \downarrow L + p \downarrow L^\perp$;
- взаимная ортогональность: для любого линейного подпространства $L \subset E$ имеем $L^\perp \downarrow L = L \downarrow L^\perp = \mathbf{0}$, в силу этого $X \downarrow L^\perp = (X + L) \cap L^\perp$.

Для замкнутого ограниченного множества $X \subset E$ и вектора c определим опорную функцию

$$(X)_c = \sup_{x \in X} cx = cx^c, \quad (1)$$

где $x^c \in X$. Это выпуклая суплинейная функция (иногда используется термин суперлинейная), надграфик которой представляет собой выпуклый конус с вершиной в начале координат. Образующие конуса порождаются элементами множества X , и функция линейна на каждом луче, выходящем из начала координат.

2. Асимптотическая эквивалентность выпуклой оптимизации и проекционных задач

В этом разделе докажем, что решение выпуклой оптимизационной задачи может быть аппроксимировано с произвольной точностью решением специально сконструированной проекционной задачи. Этот результат является непосредственным следствием следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть $X \subset E$ — замкнутое ограниченное подмножество и $c \in E$. Тогда для любого x^0

$$(X)_c = \lim_{\tau \rightarrow \infty} c((x^0 + \tau c) \downarrow X). \quad (2)$$

Доказательство. Из условий оптимальности для $(x^0 + \tau c) \downarrow X$ следует, что

$$(x^0 + \tau c - (x^0 + \tau c) \downarrow X)(x - (x^0 + \tau c) \downarrow X) \leq 0 \quad (3)$$

для любого $x \in X$. Разделив (3) на $\tau > 0$, получим

$$\begin{aligned} (c + \tau^{-1}(x^0 - (x^0 + \tau c) \downarrow X))(x - (x^0 + \tau c) \downarrow X) \\ = (c + z_{\tau,c}^0)(x - (x^0 + \tau c) \downarrow X) \leq 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где $z_{\tau,c}^0 = \tau^{-1}(x^0 - (x^0 + \tau c) \downarrow X)$ и

$$\|z_{\tau,c}^0\| \leq \tau^{-1}(\|x^0\| + \|(x^0 + \tau c) \downarrow X\|) \leq \tau^{-1}(\|x^0\| + \|X\|). \quad (5)$$

Переходя в (4) к пределу по $\tau \rightarrow \infty$, получим

$$cx \leq cx^c \quad \text{для любого } x \in X, \quad (6)$$

где $x^c \in X$ — произвольная предельная точка $(x^0 + \tau c) \downarrow X$, $\tau \rightarrow \infty$. Такая предельная точка x^c существует, поскольку X — замкнутое и ограниченное множество по предположению. Является ли такая точка единственной, вопрос открытый. Из (6) следует, что

$$(X)_c \geq cx^c \geq \max_{x \in X} cx = (X)_c,$$

что доказывает теорему. Теорема 1 доказана.

Чтобы увязать эту теорему с задачами выпуклой оптимизации, достаточно вспомнить, что для конечной выпуклой функции $f(\cdot)$ и ограниченного замкнутого выпуклого $X \subset E$

$$\min_{x \in X} f(x) = \min_{\substack{x \in X, \\ f(x) - \xi \leq 0}} \xi = - \max_{\substack{x \in X, \\ f(x) - \xi \leq 0}} (-\xi) = -(\bar{X})_{\bar{p}}, \quad (7)$$

где $\bar{X} = \{\bar{x} = (x, \xi) \mid x \in X, f(x) - \xi \leq 0\}$ и $\bar{p} = (\mathbf{0}, -1)$. Для математической корректности в применении теоремы 1 к множеству $\bar{X}$ необходимо гарантировать ограниченность $\bar{X}$. В данном случае это, в общем-то, формальное требование может быть легко удовлетворено добавлением произвольной верхней границы $\bar{f} \geq \inf_{x \in X} f(x)$ для ξ . Для этой цели подойдёт, например, любое $x^0 \in X$, которое тривиальным образом предоставит искомую верхнюю границу $\bar{f} = f(x^0)$.

В заключение остаётся заметить, что неравенство (5) предоставляет оценку точности для приближённого значения опорной функции $(X)_c$ для конечного $\tau > 0$ и, следовательно, даёт оценку точности решения оптимизационной проблемы (7).

3. Проективные задачи и регуляризованная оптимизация опорных функций

В этом разделе рассмотрим преобразование проекционной задачи

$$(x^0 + \tau c) \downarrow X = \operatorname{argmin}_{x \in X} \|x - x^0 - \tau c\|^2, \quad (8)$$

которая, как показано в разд. 2, аппроксимирует опорную функцию $(X)_c$. Проблема (8) представляет собой задачу квадратичного программирования с ограничениями, которые зависят от способа задания множества X и могут существенно усложнить её решение.

Так как

$$(x^0 + \tau c) \downarrow X = (\mathbf{0} + x^0 + \tau c) \downarrow X = \mathbf{0} \downarrow (X - x^0 - \tau c) + x^0 + \tau c, \quad (9)$$

задача (8), по сути дела, сводится к проблеме нахождения вектора наименьшей длины $\mathbf{0} \downarrow (X - x^0 - \tau c) = \mathbf{0} \downarrow Z$, где можно игнорировать в данный момент подробности определения множества Z .

По ряду причин полезно преобразовать её в другую задачу, напоминающую использование точных штрафных функций (см., например, работу [6] и ссылки в ней) для решения задач условной оптимизации, но на самом деле существенно от них отличающуюся.

Теорема 2. Пусть Z — замкнутое ограниченное выпуклое множество. Тогда

$$\min_{z \in Z} \frac{1}{2} \|z\|^2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{0} \downarrow Z\|^2 = - \min_z \left\{ \frac{1}{2} \|z\|^2 + (Z)_z \right\}. \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним определения индикаторной функции:

$$\text{Ind}_X(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \in X, \\ \infty & \text{иначе,} \end{cases} \quad (11)$$

а также оператора сопряжения, который преобразует выпуклую функцию f в сопряжённую функцию f^* :

$$f^*(g) = \sup_z \{gz - f(z)\}.$$

Применяя сопряжение к индикаторной функции и используя теорию двойственности, получаем известные соотношения

$$(\text{Ind}_Z(z))_g^* = (Z)_g, \quad ((Z)_g)_z^* = \text{Ind}_Z(z),$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \text{Ind}_Z(x) &= \sup_g \{xg - (Z)_g\} = \sup_g \{xg - \sup_{x' \in Z} x'g\} \\ &= \sup_g \inf_{x' \in Z} \{xg - x'g\} = \sup_g \inf_{x' \in Z} g(x - x'). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \min_{z \in Z} \frac{1}{2} \|z\|^2 &= \min_z \left\{ \frac{1}{2} \|z\|^2 + \text{Ind}_Z(z) \right\} \\ &= \min_z \left\{ \frac{1}{2} \|z\|^2 + \sup_g \inf_{z' \in Z} g(z - z') \right\} = \min_z \sup_g \inf_{z' \in Z} \left\{ \frac{1}{2} \|z\|^2 + g(z - z') \right\} \\ &= \sup_g \inf_z \min_{z' \in Z} \left\{ \frac{1}{2} \|z\|^2 + g(z - z') \right\} = \sup_g \min_{z' \in Z} \left\{ -gz' + \min_z \left\{ \frac{1}{2} \|z\|^2 + gz \right\} \right\} \\ &= \sup_g \min_{z' \in Z} \left\{ -gz' - \frac{1}{2} \|g\|^2 \right\} = \sup_g \left\{ -\sup_{z' \in Z} \{gz' - \frac{1}{2} \|g\|^2\} \right\} \\ &= -\min_g \left\{ \frac{1}{2} \|g\|^2 + \sup_{z' \in Z} (gz') \right\} = -\min_g \left\{ \frac{1}{2} \|g\|^2 + (Z)_g \right\}. \end{aligned}$$

что совпадает с (10) с точностью до обозначения переменных. Теорема 2 доказана.

Заключение

Диаграмма на рис. 1 наглядным образом демонстрирует соотношения между различными оптимизационными задачами, рассмотренными в этой заметке.

Стрелка, ведущая от задачи A к задаче B , означает, что решение B может быть точно получено решением A . Двусторонняя стрелка обозначает эквивалентность, т. е. решение одной из задач может быть также точно получено из решения другой. Односторонняя штриховая стрелка

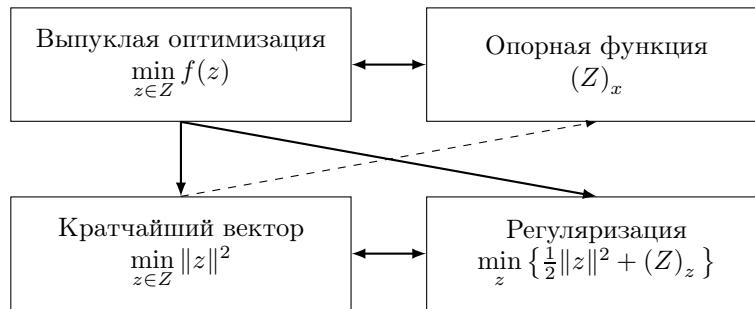


Рис. 1. Соотношения эквивалентности

означает, что задача вычисления опорной функции может быть аппроксимирована задачей вычисления вектора минимальной длины. Очевидно, что этот небольшой граф связный и решение любой из этих задач может быть сведено или, по крайней мере, аппроксимировано с любой точностью решением произвольной иной задачи, возможно, с использованием других промежуточных формулировок.

Особый интерес представляют новые алгоритмические возможности для использования операций проекции для решения оптимизационных задач. Проекционные операторы обладают рядом полезных свойств, таких как однозначность, непрерывность, нерасширяемость, что демонстрируется множеством работ по их использованию для решения многочисленных задач. Масштаб этих работ можно оценить по так и не превзойдённому обзору [7]. Вместе с тем всё ещё дискутируется их вычислительная эффективность [8–10], что представляет определённый вызов для энтузиастов проекционных подходов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nurminski E. A. Single-projection procedure for linear optimization // J. Glob. Optim. 2016. V. 66, No. 1. P. 95–110.
2. Нурминский Е. А. Проекция на внешне заданные полиэдры // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2008. Т. 48, № 3. С. 387–396.
3. Аблаев С. С., Макаренко Д. В., Стонякин Ф. С., Алкуса М. С., Баран И. В. Субградиентные методы для задач негладкой оптимизации с некоторой релаксацией условия острого минимума // Компьют. исследование и моделирование. 2022. Т. 14, № 2. С. 473–495.
4. Bui H. T., Burachik R. S., Nurminski E. A., Tam M. K. Single-projection procedure for infinite dimensional convex optimization problems. Ithaca, NY: Cornell Univ., 2022. (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive; arXiv:2210.11252).

5. **Нурминский Е. А.** Ускорение итеративных методов проекции на многогранник // Дальневосточный математический сборник. Вып. 1. Владивосток: Ин-т прикл. математики, 1995. С. 51-62.
6. **Dolgopolik M. V.** Exact penalty functions with multidimensional penalty parameter and adaptive penalty updates // Optim. Lett. 2022. V. 16, No. 4. P. 1281–1300.
7. **Bauschke H. H., Borwein J. M.** On projection algorithms for solving convex feasibility problems // SIAM Rev. 1996. V. 38. P. 367–426.
8. **Gould N. I. M.** How good are projection methods for convex feasibility problems? // Comput. Optim. Appl. 2008. V. 40, No. 1. P. 1–12.
9. **Censor Y., Chen W., Combettes P. L., Davidi R., Herman G. T.** On the effectiveness of projection methods for convex feasibility problems with linear inequality constraints // Comput. Optim. Appl. 2012. V. 51, No. 3. P. 1065–1088.
10. **Johnstone P. R., Eckstein J.** Convergence rates for projective splitting // SIAM J. Optim. 2019. V. 29, No. 3. P. 1931–1957.

Нурминский Евгений Алексеевич

Статья поступила

1 января 2023 г.

После доработки —

21 февраля 2023 г.

Принята к публикации

22 февраля 2023 г.

EQUIVALENCE RELATIONS IN CONVEX OPTIMIZATION

E. A. Nurminski

Far Eastern State University,
10 Ayaks Bay, 690922 Vladivostok, Russia
E-mail: nurminskiy.ea@dvfu.ru

Abstract. This article formulates and proves several useful correlations between support functions of convex sets and projection operations over them, such as asymptotic equivalence of projection operations and computation of support functions for general convex closed bounded sets, as well as equivalence between least-norm and regularized convex suplinear optimization problems. These results generalize previously known equivalences for linear optimization problems and provide new and greatly simplified proofs for them. Illustr. 1, bibliogr. 10.

Keywords: convex optimization, regularization, projection, support function.

REFERENCES

1. **E. A. Nurminski**, Single-projection procedure for linear optimization, *J. Glob. Optim.* **66** (1), 95–110 (2016).
2. **E. A. Nurminski**, Projection onto polyhedra in outer representation, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **48** (3), 387–396 (2008) [Russian] [*Comput. Math. Math. Phys.* **48** (3), 367–375 (2008)].
3. **S. S. Ablaev, D. V. Makarenko, F. S. Stonyakin, M. S. Alkousa, and I. V. Baran**, Subgradient methods for non-smooth optimization problems with some relaxation of sharp minimum, *Kompyut. Issled. Model.* **14** (2), 473–495 (2022) [Russian].
4. **H. T. Bui, R. S. Burachik, E. A. Nurminski, and M. K. Tam**, Single-projection procedure for infinite dimensional convex optimization problems (Cornell Univ., Ithaca, NY, 2022) (Cornell Univ. Libr. e-Print Archive, arXiv:2210.11252).

This research is supported by Ministry of Science and Higher Education (Agreement 075–02–2023–946).

English version: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **17** (2) (2023).

5. **E. A. Nurminski**, Accelerating iterative methods for projection on polyhedrons, in *Dalnevostochnyi Matematicheskii Sbornik*, No. 1 (Inst. Prikl. Mat., Vladivostok, 1995), pp. 51-62 [Russian].
6. **M. V. Dolgopolik**, Exact penalty functions with multidimensional penalty parameter and adaptive penalty updates, *Optim. Lett.* **16** (4), 1281–1300 (2022).
7. **H. H. Bauschke** and **J. M. Borwein**, On projection algorithms for solving convex feasibility problems, *SIAM Rev.* **38**, 367–426 (1996).
8. **N. I. M. Gould**, How good are projection methods for convex feasibility problems? *Comput. Optim. Appl.* **40** (1), 1–12 (2008).
9. **Y. Censor**, **W. Chen**, **P. L. Combettes**, **R. Davidi**, and **G. T. Herman**, On the effectiveness of projection methods for convex feasibility problems with linear inequality constraints, *Comput. Optim. Appl.* **51** (3), 1065–1088 (2012).
10. **P. R. Johnstone** and **J. Eckstein**, Convergence rates for projective splitting, *SIAM J. Optim.* **29** (3), 1931–1957 (2019).

Evgeni A. Nurminski

Received January 1, 2023

Revised February 21, 2023

Accepted February 22, 2023

СВЯЗЬ ДВУХ ПОДХОДОВ К МОДЕЛИ ФИШЕРА

В. И. Шмырёв^{1,2}

¹ Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

² Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: shvi@math.nsc.ru

Аннотация. Работа продолжает исследования автора по проблеме отыскания равновесия в экономических моделях обмена. Для модели Фишера ранее было известно предложенное Гейлом и Айзенбергом сведение проблемы равновесия к некоторой оптимизационной задаче. Однако конечных алгоритмов на этом пути получено не было. Автором был предложен оригинальный подход полиэдральной комплементарности, сводящий проблему равновесия к оптимизационной задаче иного типа, что дало возможность разработать простые конечные алгоритмы отыскания равновесных цен. Полученные две оптимизационные задачи принципиально отличны, и не известно сведения одной к другой. Однако сравнительно недавно с использованием специальной схемы двойственности была показана эквивалентность соответствующих двойственных задач. В данной работе излагается общая схема двойственности для выпуклых задач оптимизации, объясняющая природу двойственности, и на её основе установлена эквивалентность двух упомянутых оптимизационных задач для отыскания равновесия в модели Фишера. Ил. 1, библиогр. 17.

Ключевые слова: модель обмена, экономическое равновесие, оптимизационная задача, симплекс, комплементарность, двойственность.

Введение

Для общего случая линейной модели обмена [1] первый конечный алгоритм был предложен Ивесом [2], который свёл проблему к задаче линейной комплементарности. Предложенный автором настоящей работы

Исследование выполнено в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF–2022–0019).

© В. И. Шмырёв, 2023

подход полиэдральной комплементарности [3] базируется на принципиально отличной идее. Был предложен новый инструмент анализа проблемы, оформившийся впоследствии в виде задачи полиэдральной комплементарности. Подход не имеет аналогов и позволил получить легко реализуемые конечные алгоритмы не только для общей линейной модели обмена [4], но и для более сложных моделей [5]. Наиболее простые алгоритмы получаются для модели с фиксированными бюджетами, известной как модель Фишера [6]. Айзенберг и Гейл получили первое сведение проблемы равновесия в этой модели к некоторой оптимизационной задаче [7]. Этот результат был использован многими авторами для исследования алгоритмической стороны вопроса. Некоторый обзор по этой теме можно найти в [8]. Задача Гейла — Айзенберга имеет линейные ограничения, но несмотря на это конечных алгоритмов на этом пути получено не было.

Подход полиэдральной комплементарности даёт альтернативный вариант оптимизационной задачи для проблемы Фишера [3, 9]. Предложенное сведение также было использовано для получения итеративных алгоритмов как для простейшего варианта модели Фишера, так и в случае наличия дополнительных ограничений на закупки [10]. Однако главное преимущество этого подхода в том, что он даёт конечные алгоритмы, базирующиеся на простой конструкции транспортной задачи.

Кроме этого чисто практического результата, подход привёл к анализу вопросов качественного характера. Проблема равновесия в общей модели обмена была сведена к задаче о неподвижной точке кусочно постоянных точечно-множественных отображений симплекса цен в себя. Оказалось, что для общей модели обмена отображения локально обладают особым свойством монотонности, характерным для задач линейной комплементарности с положительными главными минорами матрицы ограничений (класс P). Это было использовано для разработки конечного алгоритма. Особый класс отображений характеризует модель Фишера — это регулярные отображения. Потенциальность таких отображений позволила свести проблему к оптимизационной задаче.

Подходы Гейла — Айзенберга и полиэдральной комплементарности внешне абсолютно не схожи, и долгое время считалось, что эти подходы никак не связаны между собой. До настоящего времени не установлена эквивалентность предложенных двух оптимизационных задач, но в [11, 12] была показана связь соответствующих двойственных задач.

В настоящей работе рассматривается схема двойственности, обобщающая классическую схему с функцией Лагранжа. По мнению автора этот взгляд на природу двойственности представляет самостоятельный интерес безотносительно к рассматриваемому вопросу о двух подходах к модели Фишера. Идейно схема примыкает к предложенной в [13]. Эта

схема позволяет для любой оптимизационной задачи предложить разные варианты двойственных задач. Показано, что в применении к модели Фишера из одной и той же задачи можно в качестве двойственных получить как задачу Гейла — Айзенберга, так и задачу из подхода полиэдральной комплементарности, вскрывая тем самым их внутреннюю связь. По-видимому, это первый случай, когда не удаётся получить эквивалентность двух задач непосредственно, но это оказалось возможным при помощи соответствующих двойственных задач.

1. Модель Фишера

Изложению основных результатов предпошлём краткое описание модели Фишера. Модель Фишера — это частный случай модели обмена, когда бюджеты участников фиксированы. Пусть в модели m участников. Каждый участник $i \in I = \{1, \dots, m\}$ располагает некоторой суммой денег (бюджетом) λ_i . На эти деньги участник закупает товары, имеющиеся на рынке в заданных количествах. Пусть на рынке имеется n товаров и каждого товара $j \in J = \{1, \dots, n\}$ ровно одна единица. Пусть свой вектор закупок $x^i \in R_+^n$ участник i выбирает, стараясь максимизировать свою функцию предпочтения (c^i, x^i) . При заданном векторе цен $p \in R_+^n$ задача участника i имеет вид

$$(c^i, x^i) \rightarrow \max \quad (1)$$

при условиях

$$(p, x^i) \leq \lambda_i, \quad (2)$$

$$x^i \geq 0. \quad (3)$$

Требуется найти такой *равновесный* вектор цен $\tilde{p}$, при котором среди оптимальных решений задач участников найдутся векторы $\tilde{x}^i(\tilde{p})$, удовлетворяющие условиям баланса товаров:

$$\sum_{i \in I} \tilde{x}_j^i(\tilde{p}) = 1, \quad j \in J,$$

где $\tilde{x}_j^i(\tilde{p})$ — компоненты вектора $\tilde{x}^i(\tilde{p})$. Ясно, что для векторов $\tilde{x}^i(\tilde{p})$ неравенства (2) должны выполняться как равенства.

Из приведённого условия баланса товаров следует, что

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = \sum_{j \in J} p_j. \quad (4)$$

Будем считать, что $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$, следовательно, вектор цен p принадлежит единичному симплексу

$$\sigma = \left\{ p \in \mathbb{R}_+^n \mid \sum_{j \in J} p_j = 1 \right\}.$$

Для этой модели было предложено два разных подхода. Исторически первым был подход Гейла — Айзенберга. Он состоял в том, что модели сопоставлялась оптимизационная задача следующего вида.

Задача Гейла — Айзенберга:

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \ln \sum_{j \in J} c_j^i x_j^i \rightarrow \max$$

при условиях

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} x_j^i &= 1, \quad j \in J, \\ x_j^i &\geq 0, \quad (i, j) \in I \times J, \end{aligned} \quad (5)$$

где c_j^i, x_j^i — компоненты векторов c^i, x^i .

Очень просто показывается, что равновесные цены модели задаются оптимальными значениями множителями Лагранжа для уравнений (5).

Второй подход к отысканию равновесия в модели Фишера был разработан В. И. Шмырёвым [6]. Предложенный алгоритм возник как реализация общего подхода [3] применительно к данному случаю. Порождающей задачей является параметрическая транспортная задача

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} z_{ij} \ln c_j^i \rightarrow \max \quad (6)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} z_{ij} &= \lambda_i, \quad i \in I, \\ \sum_{i \in I} z_{ij} &= p_j, \quad j \in J, \\ z_{ij} &\geq 0, \quad (i, j) \in I \times J. \end{aligned}$$

Параметрами задачи являются цены p_j . Уравнения этой задачи представляют собой финансовые балансы для участников и товаров. Переменные z_{ij} вводятся равенствами $z_{ij} = p_j x_j^i$.

Это классическая транспортная задача. В предположении (4) её множество допустимых решений непусто, и она разрешима при любом векторе цен $p \in \sigma$. Будем считать, что выполняется условие двойственной невырожденности и, следовательно, решение всегда единственно.

Пусть $f(p)$ — функция, задающая оптимальное значение целевой функции (6). С ней можно связать две функции, позволяющие свести проблему равновесия к двум оптимизационным задачам на симплексе цен.

Первая из функций имеет вид $\varphi(p) = h(p) - f(p)$, где $h(p) = (p, \ln p)$ для $p \in \sigma^\circ$ и $h(p) = 0$ на границе симплекса. Здесь $\ln p$ — это вектор с компонентами $\ln p_j$. Функция $\varphi(p) = h(p) - f(p)$ строго выпуклая и,

следовательно, имеет на σ единственную точку минимума, которая ввиду свойств функции h принадлежит σ° .

Задача в подходе полиэдральной комплементарности:

$$\varphi(p) = h(p) - f(p) \rightarrow \min_{p \in \sigma}.$$

Вторая из упомянутых функций связана с функцией f^* , сопряжённой к f [17], и задаётся формулой $\psi(q) = f^*(\ln q)$, $q \in \sigma^\circ$. Заметим, что рассматриваемая функция f вогнутая. Для произвольной вогнутой функции g сопряжённая функция g^* определяется равенством $g^*(y) = \inf_x \{y(x) - g(x)\}$. Функции $\varphi(p)$ и $\psi(q)$ связаны неравенством

$$\varphi(p) \geq \psi(q), \quad p, q \in \sigma^\circ.$$

Равенство в этом неравенстве достигается, только если $p = q$ [14].

Результатом рассмотрений автора [6] (см. также [14]) является

Теорема 1. *Равновесный вектор цен модели Фишера задаётся точкой максимума функции $\psi(q)$ и точкой минимума функции $\varphi(p)$.*

Таким образом, для функций $\varphi(p)$ и $\psi(q)$ имеет место картина двойственности, как в линейном программировании, и вместо минимизации функции $\varphi(p)$ можно максимизировать функцию $\psi(q)$. Для этой функции в работе автора [14] получено явное задание.

Целью рассмотрений этой работы является доказательство эквивалентности задачи Гейла — Айзенберга и задачи из подхода полиэдральной комплементарности, что достигается путём использования излагаемой ниже общей схемы двойственности.

2. Обобщённая двойственность

Под задачей выпуклой оптимизации будем понимать задачу вида

$$f(x) \rightarrow \max_{x \in X},$$

где f — некоторая вогнутая функция, а X — выпуклое замкнутое множество в R^n . Предполагается, что точка безусловного максимума функции f не принадлежит множеству X , а f дифференцируема.

В математическом программировании множество X задаётся системой неравенств типа $f_i(x) \leq 0$ с выпуклыми функциями f_i . Классическая схема получения двойственной задачи базируется на рассмотрении функции Лагранжа. С краткой предысторией развития идей двойственности можно познакомиться в [13]. Следовало бы лишь упомянуть об оригинальном использовании функции Лагранжа для получения двойственной задачи в квадратичном программировании [15].

В линейном программировании используется более простая схема: путём суммирования условий задачи, умноженных на подходящие множители, требуется получить самую хорошую оценку на целевую функцию — снизу в случае минимизации или сверху в случае максимизации (см. [16]).

Эти подходы являются частными случаями более общей схемы, которая состоит в следующем. Рассматривается параметризованное семейство выпуклых множеств X_α , $\alpha \in \mathfrak{A}$, являющихся расширениями множества X : $X_\alpha \supsetneq X$, $\alpha \in \mathfrak{A}$. Предполагается, что пересечение всех этих множеств совпадает с множеством X :

$$\bigcap_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha = X.$$

Для каждого $\alpha \in \mathfrak{A}$ рассматривается вспомогательная задача максимизации функции f на множестве X_α :

$$f(x) \rightarrow \max_{x \in X_\alpha}. \quad (7)$$

Вводится множество D тех α , для которых эта задача разрешима и

$$\max_{x \in X_\alpha} f(x) < \sup f(x).$$

Предполагается, что множество D непусто и выпукло.

Вводится функция $\varphi(\alpha)$, задающая значение функции f на оптимальном векторе x^α введённой вспомогательной задачи. Полагаем $\varphi(\alpha) = +\infty$ для $\alpha \notin D$. Функция $\varphi(\alpha)$ предполагается непрерывной и квазивыпуклой на D :

$$\varphi((1-t)\alpha_1 + t\alpha_2) \leq \max\{\varphi(\alpha_1), \varphi(\alpha_2)\}, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{A}, \quad t \in (0, 1), \quad (8)$$

и это неравенство строгое, если $\varphi(\alpha_1) \neq \varphi(\alpha_2)$. Квазивыпуклость функции $\varphi(\alpha)$ обеспечивает отсутствие локальных минимумов.

В качестве двойственной задачи вводится задача вида

$$\varphi(\alpha) \rightarrow \min_{\alpha \in D}. \quad (9)$$

Легко видеть, что ввиду того, что $X \subset X_\alpha$ при всех $\alpha \in D$, имеем *неравенство двойственности*

$$f(x) \leq \varphi(\alpha), \quad x \in X, \quad \alpha \in D. \quad (10)$$

Если это неравенство для некоторых $x^* \in X$, $\alpha^* \in D$ обращается в равенство, то очевидно, что x^* решает исходную задачу, а α^* решает двойственную, тем самым обе задачи разрешимы и оптимальные значения их целевых функций совпадают:

$$\max_{x \in X} f(x) = \min_{\alpha \in D} \varphi(\alpha).$$

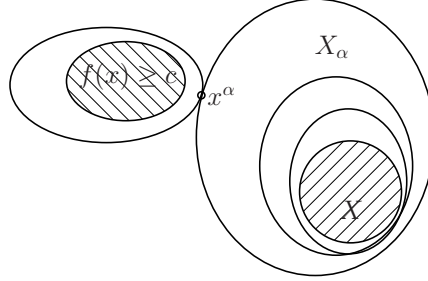


Рис. 1. Общая схема двойственности

В этом случае будем говорить, что имеет место *равенство двойственности*.

Несложно сформулировать достаточное условие для справедливости этого равенства.

Теорема 2. При сделанных предположениях о семействе $\mathcal{A}$ для справедливости равенства двойственности достаточно, чтобы любая гиперплоскость, опорная к множеству X , была опорной и к некоторому множеству из семейства $\mathcal{A}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x^* \in X$ решает исходную задачу и Q — множество более предпочтительных точек: $Q = \{x \mid f(x) > f(x^*)\}$. Это открытое выпуклое множество. В силу известных теорем выпуклого анализа существует гиперплоскость H с нормалью $\nabla f(x^*)$, разделяющая множества X и Q . Эта плоскость будет опорной к множеству X : $(\nabla f(x^*), x - x^*) \leq 0$ при всех $x \in X$. Если в семействе $\mathcal{A}$ найдётся множество X_{α^*} , для которого гиперплоскость H также будет опорной, то из того, что $x^* \in X \subset X_{\alpha^*}$, следует оптимальность x^* в соответствующей вспомогательной задаче и будет выполняться равенство двойственности: $\varphi(\alpha^*) = f(x^*)$.

Так же просто показывается, что разрешимость двойственной задачи влечёт разрешимость исходной и выполнение требуемого равенства. Для этого достаточно заметить, что если некоторая точка $\hat{x}$ не принадлежит множеству X , то найдётся гиперплоскость, опорная к X и строго отделяющая $\hat{x}$ от X . Кроме того, из условия теоремы вытекает, что найдётся множество X_α , обладающее тем же свойством делимости. Таким образом, если α^* решает двойственную задачу и x^* — соответствующее решение вспомогательной задачи на X_{α^*} , то $x^* \in X$ и x^* — решение исходной задачи. Теорема 2 доказана.

Изложенная схема введения двойственной задачи идейно повторяет схему, рассмотренную в [13]. Отличие состоит лишь в том, что каждое

множество X_α предполагается заданным посредством некоторой функции g через неравенство $g(x) \leq 0$. Семейство рассматриваемых множеств порождается некоторым семейством G таких функций. Рассмотрим этот случай более подробно.

Множество G естественно предполагается выпуклым конусом. Пусть, как и выше, $x^* \in X$ — оптимальное решение исходной задачи и $G(x^*) = \{g \in G \mid g(x^*) = 0\}$. Точка x^* будет граничной для каждого из множеств X_α , порождаемого функциями $g \in G(x^*)$. Пусть Z — конус нормалей гиперплоскостей, опорных к этим множествам в точке x^* . Ясно, что Z — выпуклый конус ввиду выпуклости множества G . Аналогично является выпуклым конусом и множество V нормалей гиперплоскостей, опорных в точке x^* к множеству X . Ввиду того, что $X \subset X_\alpha$, имеем $Z \subseteq V$, и равенство двойственности выполнено, если $Z = V$. Тогда из того, что $\nabla f(x^*) \in V$, следует $\nabla f(x^*) \in Z$. Это означает, что найдётся функция $g \in G(x^*)$, порождающая множество X_{α^*} , для которого точка x^* будет также оптимальной.

Стандартный подход к задаче выпуклого программирования.

Традиционная схема введения двойственных задач для задач выпуклого программирования базируется на рассмотрении функции Лагранжа. Легко видеть, что, применяя рассматриваемую схему, мы получим прежние конструкции.

Рассмотрим задачу выпуклого программирования с системой ограничений $f_i(x) \leq 0$, $i \in I = \{1, \dots, m\}$. Функции f_i предполагаются дифференцируемыми. Кроме того, пусть выполнено условие регулярности (условие Слейтера): существует точка $\bar{x}$, для которой все неравенства задачи выполняются как строгие. Вводя неотрицательные множители α_i , можно принять $\mathfrak{A} = \mathbb{R}_+^m$ и в качестве семейства G рассматривать функции $g = \sum \alpha_i f_i$. Имеем $X_\alpha = \{x \mid \sum_{i \in I} \alpha_i f_i(x) \leq 0\}$. Пусть x^* — оптимальное решение задачи. При условии регулярности конус V будет конической оболочкой градиентов $\nabla f_i(x^*)$ при $i \in I(x^*) = \{i \in I \mid f_i(x^*) = 0\}$. Для образования конуса Z нужно рассматривать нормали функций g таких, что $g(x^*) = 0$. Ввиду условия $\alpha_i \geq 0$ это приводит к рассмотрению в формуле для g лишь функций f_i при $i \in I(x^*)$. Таким образом, конус Z будет конической оболочкой тех же градиентов, что и конус V . Равенство двойственности будет выполняться.

Блочный подход к задаче выпуклого программирования.

Допустим, что множество ограничений задачи разбито на r групп (блоков). Это соответствует разбиению множества I на подмножества $I_1, \dots, I_r$. Для каждого подмножества I_k будем рассматривать всевозможные линейные комбинации с неотрицательными коэффициентами соответствующих функций, получая таким образом функции $\hat{f}_k$. Семейство этих

функций принимаем в качестве множества G , порождающего семейство множеств X_α , $\alpha \in \mathfrak{A}$. Теперь для образования конуса Z следует образовать коническую оболочку градиентов $\nabla \hat{f}_k(x^*)$ при $k \in \widehat{G}(x^*) = \{s \mid \hat{f}_s(x^*) = 0\}$. Поскольку функции $\hat{f}_k$ являются линейными комбинациями с неотрицательными коэффициентами функций f_i соответствующего блока и $\hat{f}_k(x^*) = 0$ лишь при $f_i(x^*) = 0$ для всех $i \in I_k$, конус Z представляет собой коническую оболочку градиентов $\nabla f_i(x^*)$ при $i \in I(x^*)$, т. е. совпадает с конусом V .

Таким образом, равенство двойственности при таком получении двойственной задачи остаётся в силе.

Основной результат данной работы состоит в применении изложенной схемы двойственности к модели Фишера. Показано, как из одной и той же задачи, меняя семейство $\mathfrak{A}$, можно получить как задачу из подхода полиэдральной комплементарности, так и оптимизационную задачу Гейла — Айзенберга. При этом в последнем случае используется изложенный блочный вариант.

3. Иллюстративный пример

Изложенная схема двойственности позволяет для любой конкретной оптимизационной задачи получать разные варианты двойственной задачи, меняя используемое семейство множеств X_α . Проиллюстрируем это на примере задачи линейного программирования. В качестве конкретного иллюстративного примера рассмотрим задачу

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\geq 1, \\ x_1 - x_2 &\geq 2, \\ x_1 &\geq 3. \end{aligned}$$

Эта задача на минимум, что вносит очевидные коррективы в предыдущие рассуждения. Оптимальным решением является $x^* = (3, -2)$.

Стандартный вариант двойственной задачи.

$$\begin{aligned} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 &\rightarrow \max, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 3, \\ \alpha_1 - \alpha_2 &= 2, \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Эта задача получается из общей схемы, если принять $\mathfrak{A} = \mathbb{R}_+^3$ и множества X_α описывать неравенствами, полученными суммированием неравенств задачи, умноженных на соответствующие коэффициенты α_i . Решением двойственной задачи является вектор $\alpha^* = (2, 0, 1)$ и $\varphi(\alpha^*) = 5$.

Блочный подход к получению двойственной задачи. Разделим ограничения задачи на два блока: первое неравенство отнесём в первый блок, а второе и третье — во второй. Имеем $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{2, 3\}$. Вводим неотрицательные множители: α_1 для первого блока и α_2, α_3 для второго блока. Получаем два ограничения во вспомогательной задаче:

$$\begin{aligned}\alpha_1 x_1 + \alpha_1 x_2 &\geq \alpha_1, \\ (\alpha_2 + \alpha_3)x_1 - \alpha_2 x_2 &\geq 2\alpha_2 + 3\alpha_3.\end{aligned}$$

На α_i в каждом блоке нужно наложить дополнительно некоторые условия нормировки. Примем $\alpha_1 = 1$, временно откладывая вопрос о нормировке во втором блоке. Вспомогательная задача принимает вид

$$\begin{aligned}3x_1 + 2x_2 &\rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 &\geq 1, \\ (\alpha_2 + \alpha_3)x_1 - \alpha_2 x_2 &\geq 2\alpha_2 + 3\alpha_3.\end{aligned}$$

Здесь α_2, α_3 являются параметрами задачи. Несложные выкладки позволяют получить её решение как функции этих параметров:

$$x_1^* = \frac{3\alpha_2 + 3\alpha_3}{2\alpha_2 + \alpha_3}, \quad x_2^* = \frac{-\alpha_2 - 2\alpha_3}{2\alpha_2 + \alpha_3}.$$

Примем в качестве условия нормировки во втором блоке равенство $3\alpha_2 + \alpha_3 = 1$. Получаем

$$x_1^* = 3\alpha_2 + 3\alpha_3, \quad x_2^* = -\alpha_2 - 2\alpha_3.$$

Для значения целевой функции $3x_1^* + 2x_2^*$ имеем $3x_1^* + 2(1 - x_1^*) = x_1^* + 2$. Таким образом, $\varphi(\alpha) = 2 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3$.

В итоге двойственная задача принимает вид

$$\begin{aligned}2 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 &\rightarrow \max, \\ 2\alpha_2 + \alpha_3 &= 1, \\ \alpha_2, \alpha_3 &\geq 0.\end{aligned}$$

Её решение: $\alpha_2^* = 0$, $\alpha_3^* = 1$ и $\varphi(\alpha^*) = 5$. Легко убедиться, что полученная двойственная задача эквивалентна классическому варианту.

4. Связь двух подходов к модели Фишера

Вернёмся к рассмотрению главного вопроса о связи подходов Гейла — Айзенберга и полиэдральной комплементарности.

Теорема 3. Задача Гейла — Айзенберга и задача минимизации функции $\varphi(p)$ в подходе полиэдральной комплементарности двойственны одной и той же задаче — задаче максимизации функции $\psi(q)$ и порождаются двумя разными семействами расширений допустимого множества X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $\psi(q)$ в [14] приводится явное задание в виде следующей формулы:

$$\psi(q) = - \sum_{i \in I} \lambda_i \max_{j \in J} \ln \frac{c_j^i}{q_j}. \quad (11)$$

I. Задача минимизации функции $\varphi(p)$. Покажем, что задача минимизации функции $\varphi(p)$ получается при применении стандартного подхода для получения двойственной задачи к задаче максимизации функции $\psi(q)$. Тем самым будет показано, что имеет место аналог известного факта из линейного программирования: задача, двойственная к двойственной, совпадает с исходной задачей.

Несложно убедиться, что задача максимизации $\psi(q)$ ввиду положительности λ_i эквивалентна задаче

$$\tilde{\psi}(q, u) = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i \rightarrow \min_{q, u} \quad (12)$$

при условиях

$$\begin{aligned} q &\in \sigma^\circ, \\ u_i &\geq \ln \frac{c_j^i}{q_j}, \quad (i, j) \in I \times J, \end{aligned} \quad (13)$$

т. е.

$$u_i \geq \ln c_j^i - \ln q_j, \quad (i, j) \in I \times J. \quad (14)$$

Применим к этой задаче стандартный подход к образованию двойственной задачи. Домножив неравенства (14) на неотрицательные множители z_{ij} и сложив их, получим неравенство

$$\sum_{i \in I} u_i \sum_{j \in J} z_{ij} \geq \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} z_{ij} \ln c_j^i - \sum_{j \in J} \ln q_j \sum_{i \in I} z_{ij}. \quad (15)$$

Это неравенство вместе с требованием $q \in \sigma^\circ$ задаёт множество X_α . Роль параметров α_i выполняют множители z_{ij} . На этом множестве нужно выполнить оптимизацию (12). Легко показать, что эта задача будет разрешимой лишь при условии, что все коэффициенты при неизвестных u_i в неравенстве (15) пропорциональны коэффициентам λ_i . В противном случае будет $\inf \sum_{i \in I} \lambda_i u_i = -\infty$. Таким образом, при некотором $t > 0$ должно выполняться условие

$$\sum_{j \in J} z_{ij} = t \lambda_i, \quad i \in I.$$

С другой стороны, множество X_α не изменится при пропорциональном изменении множителей z_{ij} , поэтому здесь можно считать $t = 1$. В итоге

получаем такую систему условий:

$$\sum_{j \in J} z_{ij} = \lambda_i, \quad i \in I. \quad (16)$$

Эти уравнения задают множество D , о котором говорилось ранее при описании общей схемы. В результате неравенство (15) принимает вид

$$\sum_{i \in I} \lambda_i u_i \geq \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} z_{ij} \ln c_j^i - \sum_{j \in J} \ln q_j \sum_{i \in I} z_{ij}.$$

Левая часть этого неравенства совпадает с минимизируемой функцией, а правая задаёт оценку снизу, которая зависит от $q \in \sigma^\circ$. Оптимальное значение функции будет совпадать с этой оценкой, когда оценка минимальна при вариации точки $q \in \sigma^\circ$. В результате приходим к задаче

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} z_{ij} \ln c_j^i - \sum_{j \in J} \ln q_j \sum_{i \in I} z_{ij} \rightarrow \min_{q \in \sigma^\circ}. \quad (17)$$

Введём вспомогательные переменные p_j формулой

$$p_j = \sum_{i \in I} z_{ij}.$$

Имеем

$$\sum_{j \in J} p_j = \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} z_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} z_{ij} = \sum_{i \in I} \lambda_i = 1.$$

Таким образом, $p \in \sigma$.

Минимизируемая функция в задаче (17) принимает вид

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} z_{ij} \ln c_j^i - (p, \ln q) \rightarrow \min_{q \in \sigma^\circ}. \quad (18)$$

Известно, что

$$(p, \ln p) \geq (p, \ln q), \quad p, q \in \sigma^\circ.$$

В результате оптимальное значение в задаче (17) таково:

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} z_{ij} \ln c_j^i - (p, \ln p).$$

Мы получили оптимальное значение во вспомогательной задаче оптимизации исходной функции на множестве X_α , т. е. значение функции $\varphi(\alpha)$. Отметим, что здесь вектор p зависит от переменных z_{ij} . Двойственная задача состоит в максимизации полученного значения при изменении параметров α , в данном случае — множителей z_{ij} . Введём функцию $f(p)$, которая задаёт оптимальное значение в задаче

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} z_{ij} \ln c_j^i \rightarrow \max,$$

$$\begin{aligned}\sum_{j \in J} z_{ij} &= \lambda_i, \quad i \in I, \\ \sum_{i \in I} z_{ij} &= p_j, \quad j \in J, \\ z_{ij} &\geq 0, \quad (i, j) \in I \times J.\end{aligned}$$

В итоге двойственная задача принимает вид

$$h(p) - f(p) \rightarrow \min_{p \in \sigma},$$

где $h(p) = (p, \ln p)$ для $p \in \sigma^\circ$ и $h(p) = 0$ на границе симплекса σ . Это задача, лежащая в основе подхода полиэдральной комплементарности к модели Фишера.

II. Задача Гейла — Айзенберга. Вернёмся к задаче максимизации функции $\psi(q)$ и покажем, как из неё при ином выборе семейства выпуклых множеств X_α , $\alpha \in \mathfrak{A}$, в качестве двойственной получается задача Гейла — Айзенберга.

Используя монотонность функции $\ln$, перейдём к эквивалентной формуле для $\psi(q)$:

$$\psi(q) = - \sum_{i \in I} \lambda_i \ln \max_{j \in J} \frac{c_j^i}{q_j}. \quad (19)$$

Задача максимизации этой функции эквивалентна следующей:

$$\tilde{\psi}(q, u) = \sum_{i \in I} \lambda_i \ln u_i \rightarrow \min_{q, u} \quad (20)$$

при условиях

$$\begin{aligned}q &\in \sigma^\circ, \\ u_i &\geq \lambda_i \frac{c_j^i}{q_j}, \quad (i, j) \in I \times J,\end{aligned} \quad (21)$$

т. е.

$$u_i q_j \geq \lambda_i c_j^i, \quad (i, j) \in I \times J. \quad (22)$$

Для получения двойственной задачи вводим множители $x_{ij} \geq 0$. Они выполняют роль параметров α_i в общей схеме, описанной ранее. Используем блочный вариант схемы. Домножим на эти множители неравенства (22) и просуммируем по j в каждой группе при фиксированном i . Получим систему неравенств

$$u_i(q, x^i) \geq \lambda_i(c^i, x^i), \quad i \in I, \quad (23)$$

где $x^i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$. Эти неравенства вместе с требованием

$$\sum_{j \in J} q_j = 1 \quad (24)$$

и $q > 0$ задают множество X_α , на котором следует рассматривать вспомогательную задачу минимизации функции $\tilde{\psi}(q, u)$. Получающееся оптимальное значение задаст оценку снизу в задаче (20). Двойственная задача будет заключаться в максимизации такой оценки путём изменения множителей x_{ij} .

Условие (23) не изменится, если домножить вектор x^I на положительный множитель. Можно наложить дополнительное условие, исключаящее такую возможность. В качестве таких условий принимаем равенства

$$(q, x^i) = \lambda_i, \quad i \in I. \quad (25)$$

Тогда из (23) следует, что

$$u_i \geq (c^I, x^i), \quad i \in I.$$

Функция $\ln$ возрастающая, и минимизация по u_i функции $\tilde{\psi}(q, u)$ во вспомогательной задаче даст оптимальное значение: $\sum_{i \in I} \lambda_i \ln(c^I, x^i)$. Его нуж-

но максимизировать в двойственной задаче, меняя x^i . На x^i имеем ограничение (25), зависящее от q . Покажем, как можно избавиться от переменных q . Добавим систему уравнений

$$\sum_{i \in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J. \quad (26)$$

Домножая обе части равенства на q_j и суммируя, получим (24). Таким образом, это условие на q можно отбросить, заменив его системой (26). Остаются условия (25) и $q > 0$. Если отбросить и их, в качестве двойственной задачи получаем в точности задачу Гейла — Айзенберга. Как известно, в результате её решения получаются оптимальные x^i и вектор равновесных цен $q > 0$, для которых условия (25) выполняются. Таким образом, искомая двойственная задача совпадает с задачей Гейла — Айзенберга. Теорема 3 доказана.

Заключение

Проведённые исследования позволяют прояснить связь двух разных подходов к отысканию равновесных цен в экономической модели обмена с фиксированными бюджетами (модель Фишера) — подхода Гейла — Айзенберга и предложенного автором подхода полиэдральной комплементарности. Изучается природа двойственности для выпуклых задач оптимизации. Для задач выпуклого программирования предлагаемый подход к получению двойственной задачи отличается от обычно рассматриваемых схем на основе функции Лагранжа.

Автор выражает искреннюю признательность анонимному рецензенту за содержательные замечания и полезные советы, способствовавшие улучшению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Gale D.** The linear exchange model // J. Math. Econ. 1976. V. 3, No. 2. P. 205–209.
2. **Eaves B. C.** A finite algorithm for linear exchange model // J. Math. Econ. 1976. V. 3, No. 2. P. 197–203.
3. **Шмырёв В. И.** Об одном подходе к отысканию равновесия в простейших моделях обмена // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 5. С. 1062–1066.
4. **Шмырёв В. И.** Алгоритм поиска равновесия в линейной модели обмена // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 2. С. 162–175.
5. **Шмырёв В. И.** Обобщённая линейная модель обмена // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. 2006. Т. 13, № 2. С. 74–102.
6. **Шмырёв В. И.** Об одном алгоритме отыскания равновесия в линейной модели обмена с фиксированными бюджетами // Сиб. журн. индустр. математики. 2008. Т. 11, № 2. С. 139–154.
7. **Eisenberg E., Gale D.** Consensus of subjective probabilities: The pari-mutuel method // Ann. Math. Stat. 1959. V. 30, No. 1. P. 165–168.
8. **Devanur N. R., Papadimitriou C. H., Saberi A., Vazirani V. V.** Market equilibrium via a primal-dual algorithm for a convex program // J. ACM. 2008. V. 55, No. 5, ID 22. 18 p.
9. **Shmyrev V. I.** An algorithmic approach for searching an equilibrium in fixed budget exchange models // Russian contributions to game theory and equilibrium theory. Heidelberg: Springer, 2006. P. 217–235. (Theory Decis. Libr., Ser. C; V. 39).
10. **Birbaum B., Devanur N. R., Xiao L.** Distributed algorithms via gradient descent for Fisher markets // Proc. 12th ACM Conf. Electronic Commerce (San Jose, CA, USA, June 5–9, 2011). New York: ACM, 2011. P. 127–136.
11. **Cole R., Devanur N., Gkatzelis V., Faira K. J., Mai T., Vazirani V. V., Yazdanbod S.** Convex program duality, Fisher markets, and Nash social welfare // Proc. 2017 ACM Conf. Economics and Computation (Cambridge, MA, USA, June 26–30, 2017). New York: ACM, 2017. P. 459–460.
12. **Шмырёв В. И.** Двойственность в линейных экономических моделях обмена // Тр. Ин-та математики и механики. 2020. Т. 26, № 3. С. 258–274.
13. **Svaiter B. F.** A new duality theory for mathematical programming // J. Math. Program. Oper. Res. 2011. V. 60, No. 8–9. P. 1209–1231.
14. **Shmyrev V. I.** Polyhedral complementarity approach to equilibrium problem in linear exchange models // Optimization algorithms — Examples. London: IntechOpen, 2018. P. 27–46.
15. **Деннис Дж. Б.** Математическое программирование и электрические цепи. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 215 с.

- 16. Шмырёв В. И.** Введение в математическое программирование. М.: Ин-т компьют. исслед., 2002. 192 с.
- 17. Рокафеллар Р.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 469 с.

Шмырёв Вадим Иванович

Статья поступила
15 декабря 2022 г.

После доработки —
15 февраля 2023 г.

Принята к публикации
16 февраля 2023 г.

CONNECTION OF TWO APPROACHES TO THE FISHER MODEL

V. I. Shmyrev^{1,2}

¹ Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia

² Novosibirsk State University,
2 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia

E-mail: shvi@math.nsc.ru

Abstract. The article continues the author's research on the problem of finding equilibrium in economic exchange models. For the Fisher model, it was previously known that the equilibrium problem can be reduced to some optimization problem. This result was obtained by Gale and Eisenberg, while the final algorithms on this way were not found. The author proposed the original polyhedral complementarity approach, which generated an optimization problem of a different type. This approach made possible the development of finite algorithms for finding the equilibrium. So far, the equivalence of these two optimization problems has not been shown. However, it turned out that the dual problems obtained in a special way are equivalent. In this paper, a general scheme of duality for convex optimization problems is proposed. This scheme allows us to clarify the nature of duality and the relationship between the Gale–Eisenberg and the polyhedral complementarity approaches. Illustr. 1, bibliogr. 17.

Keywords: exchange model, economic equilibrium, optimization problem, simplex, complementarity, duality.

REFERENCES

1. D. Gale, The linear exchange model, *J. Math. Econ.* **3** (2), 205–209 (1976).
2. B. C. Eaves, A finite algorithm for linear exchange model, *J. Math. Econ.* **3** (2), 197–203 (1976).
3. V. I. Shmyrev, On an approach to the determination of equilibrium in elementary exchange models, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **268** (5), 1062–1066 (1983) [Russian] [*Sov. Math. Dokl.* **27** (1), 230–233 (1983)].

4. **V. I. Shmyrev**, An algorithm for the search of equilibrium in the linear exchange model, *Sib. Mat. Zh.* **26** (2), 162–175 (1985) [Russian] [*Sib. Math. J.* **26** (2), 288–300 (1985)].
5. **V. I. Shmyrev**, A generalized linear exchange model, *Diskretn. Anal. Issled. Oper., Ser. 2*, **13** (2), 74–102 (2006) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **2** (1), 125–142 (2008)].
6. **V. I. Shmyrev**, An algorithm for finding equilibrium in the linear exchange model with fixed budgets, *Sib. Zh. Ind. Mat.* **11** (2), 139–154 (2008) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **3** (4), 505–518 (2009)].
7. **E. Eisenberg** and **D. Gale**, Consensus of subjective probabilities: The parimutuel method, *Ann. Math. Stat.* **30** (1), 165–168 (1959).
8. **N. R. Devanur**, **C. H. Papadimitriou**, **A. Saberi**, and **V. V. Vazirani**, Market equilibrium via a primal-dual algorithm for a convex program, *J. ACM* **55** (5), ID 22, 18 p. (2008).
9. **V. I. Shmyrev**, An algorithmic approach for searching an equilibrium in fixed budget exchange models, in *Russian Contributions to Game Theory and Equilibrium Theory* (Springer, Heidelberg, 2006), pp. 217–235 (Theory Decis. Libr., Ser. C, Vol. 39).
10. **B. Birnbaum**, **N. R. Devanur**, and **L. Xiao**, Distributed algorithms via gradient descent for Fisher markets, in *Proc. 12th ACM Conf. Electronic Commerce, San Jose, CA, USA, June 5–9, 2011* (ACM, New York, 2011), pp. 127–136.
11. **R. Cole**, **N. Devanur**, **V. Gkatzelis**, **K. J. Faira**, **T. Mai**, **V. V. Vazirani**, and **S. Yazdanbod**, Convex program duality, Fisher markets, and Nash social welfare, in *Proc. 2017 ACM Conf. Economics and Computation, Cambridge, MA, USA, June 26–30, 2017* (ACM, New York, 2017), pp. 459–460.
12. **V. I. Shmyrev**, Duality in linear economic models of exchange, *Tr. Inst. Mat. Mekh.* **26** (3), 258–274 (2020) [Russian].
13. **B. F. Svaiter**, A new duality theory for mathematical programming, *J. Math. Program. Oper. Res.* **60** (8–9), 1209–1231 (2011).
14. **V. I. Shmyrev**, Polyhedral complementarity approach to equilibrium problem in linear exchange models, in *Optimization Algorithms — Examples* (IntechOpen, London, 2018), pp. 27–46.
15. **J. B. Dennis**, *Mathematical Programming and Electrical Networks* (MIT Press, Cambridge, MA, 1959; Izd. Inostr. Lit., Moscow, 1961 [Russian]).
16. **V. I. Shmyrev**, *Introduction to Mathematical Programming* (Inst. Kompyut. Issled., Moscow, 2002) [Russian].
17. **R. Rockafellar**, *Convex Analysis* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1970; Mir, Moscow, 1973 [Russian]).

Vadim I. Shmyrev

Received December 15, 2022

Revised February 15, 2023

Accepted February 16, 2023

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

2023. Том 30, № 2

Зав. редакцией Ю. В. Шамардин

Журнал подготовлен с использованием макропакета $\text{\LaTeX 2}_{\epsilon}$.

The present publication has been typeset using $\text{\LaTeX 2}_{\epsilon}$.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-85978 от 26.09.2023 г.
Размещение в сети Интернет: math-sobolev.ru.

Дата размещения в сети Интернет 15.10.2023 г.
Формат 70×100 1/16. Усл. печ. л. 8,8. Объём 1,20 МБ.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия