

ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 32 № 2 2025

Новосибирск
Издательство Института математики

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор **В. Л. Береснев**
Зам. главного редактора **А. А. Евдокимов**
Ответственный секретарь **Ю. В. Шамардин**

С. В. Августинovich	М. Я. Ковалёв	А. В. Пяткин
Г. П. Агибалов	А. В. Кононов	А. А. Сапоженко
В. Б. Алексеев	А. В. Косточка	М. Свириденко
О. В. Бородин	В. В. Кочергин	Б. Я. Рябко
В. А. Васильев	Ю. А. Кочетов	Н. Н. Токарева
Э. Х. Гимади	В. К. Леонтьев	Ю. А. Флеров
А. Ю. Григорьев	Б. М.-Т. Лин	Ф. В. Фомин
С. Демпе	В. В. Лозин	М. Ю. Хачай
А. И. Ерзин	П. Пардалос	Я. М. Шафранский

Учредители Сибирское отделение РАН
журнала Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Журнал включён в базу данных Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science. Переводы статей на английский язык публикуются в *Journal of Applied and Industrial Mathematics* и доступны по ссылке www.springer.com/mathematics/journal/11754.

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Выпускается с 1994 г.	Научный журнал	4 номера в год
Том 32, № 2 (164)	Апрель–июнь 2025	

СОДЕРЖАНИЕ

Быкадоров И. А. Модель международной торговли с инвестициями в НИОКР при монополистической конкуренции: равновесие в ситуации автаркии.....	5
Евсеенко А. В., Скороходов В. А. Локальное управление входящими потоками в регулярных ресурсных сетях с малым ресурсом.....	30
Ерзин А. И., Шадрина А. В. Размещение дронов для оптимального покрытия барьера.....	54
Круподерова С. А., Курносов А. Д. О соотношении двух классов экстремальных деревьев с заданной степенной последовательностью.....	72
Монахов О. Г., Монахова Э. А. Масштабируемый подход к кодизайну топологий и алгоритмов маршрутизации для семейств оптимальных циркулянтных сетей степени четыре.....	88
Пяткин А. В. Об экстремальных по числу открытых треугольников графах с малым числом рёбер.....	107
Симанчёв Р. Ю., Уразова И. В. Целочисленная модель с условиями оптимальности для задачи минимизации суммарного взвешенного времени обслуживания требований одним прибором.....	122

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

В журнале публикуются оригинальные научные статьи и обзоры теоретической и прикладной направленности по следующим разделам дискретного анализа, исследования операций и информатики:

- дискретная оптимизация
- комбинаторика
- контроль и надёжность дискретных устройств
- математические модели и методы принятия решений
- математическое программирование
- модели экономики
- моделирование процессов управления
- построение и анализ алгоритмов
- синтез и сложность управляющих систем
- теория автоматов
- теория графов
- теория игр и её приложения
- теория кодирования
- теория расписаний и размещений

Адрес редакции:

Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия
Телефон: +7 (383) 329–75–79
E-mail: discopr@math.nsc.ru

© Сибирское отделение РАН, 2025

© Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2025

SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS

DISKRETNYYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII

/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/

Published since 1994	Scientific journal	4 issues per year
Vol. 32, No. 2 (164)		April–June, 2025

CONTENTS

I. A. Bykadorov. <i>International trade model with investment in R&D under monopolistic competition: Equilibrium in autarky situation</i>	5
A. V. Evseenko and V. A. Skorokhodov. <i>Local in-flows control in regular resource networks with a low resource</i>	30
A. I. Erzin and A. V. Shadrina. <i>Drone placement for optimal barrier coverage</i>	54
S. A. Krupoderova and A. D. Kurnosov. <i>On relation between two classes of extremal trees with prescribed degree sequence</i>	72
O. G. Monakhov and E. A. Monakhova. <i>A scalable approach to co-design of topologies and routing algorithms for families of optimal degree-four circulant networks</i>	88
A. V. Pyatkin. <i>On graphs with small number of edges having extremal number of open triangles</i>	107
R. Yu. Simanchev and I. V. Urazova. <i>An integer model with optimality conditions for the total weighted tardiness problem on a single machine</i>	122

NOVOSIBIRSK
SOBOLEV INSTITUTE PRESS

In this journal we publish original research papers and survey papers of both theoretical and practical importance on the following topics of discrete analysis, operations research and informatics:

- discrete optimization
- combinatorics
- control and reliability of discrete devices
- decision making models and methods
- mathematical programming
- economic models
- management modeling
- design and analysis of algorithms
- synthesis and complexity of control systems
- automata theory
- graph theory
- game theory and its applications
- coding theory
- theory of scheduling and facility location

Editorial office address:

Sobolev Institute of Mathematics,

4 Acad. Koptug Avenue,

630090 Novosibirsk, Russia

Phone: +7 (383) 329-75-79

E-mail: discopr@math.nsc.ru

© Siberian Branch of RAS, 2025

© Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 2025

МОДЕЛЬ МЕЖДУНАРОДНОЙ ТОРГОВЛИ
С ИНВЕСТИЦИЯМИ В НИОКР
ПРИ МОНОПОЛИСТИЧЕСКОЙ КОНКУРЕНЦИИ:
РАВНОВЕСИЕ В СИТУАЦИИ АВТАРКИИ

И. А. Быкадоров

Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: bykad@math.nsc.ru

Аннотация. Исследуется модель международной торговли с участием двух стран при монополистической конкуренции производителей. Функции полезности потребителей аддитивно сепарабельны, транспортные издержки приняты по типу айсберга (iceberg type), функция производственных издержек нелинейна: предельные издержки являются убывающей функцией от инвестиций в НИОКР (научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы). Рассматривается рыночное равновесие в ситуации автаркии (ситуация, когда транспортные издержки настолько велики, что международная торговля прекращается). Произведена сравнительная статика по транспортным издержкам равновесных переменных (индивидуального потребления, размера и массы фирм, цен), а также общественного благосостояния. Библиогр. 10.

Ключевые слова: монополистическая конкуренция, международная торговля, потребитель, производитель, инвестиции в НИОКР, транспортные издержки по типу айсберга, равновесие, автаркия.

Введение

Производительность труда является существенным фактором для любого предприятия. Эмпирические работы начала XXI в., в которых проводилось исследование отраслевых рынков, показали следующие результаты: фирмы на большом рынке имеют более низкие наценки [1]; размер (выпуск) фирмы зависит от размера рынка [2]; более крупные фирмы экспортируют продукцию в больших объёмах и более высокого качества [3].

Современное теоретическое изложение этих и других эмпирических закономерностей опирается на некоторые модификации модели монополистической конкуренции Диксита — Стиглица — Кругмана [4, 5], а также на её гетерогенный вариант, предложенный в работе Мелица [6]. Модель Диксита — Стиглица — Кругмана рассматривает влияние монополистической конкуренции на торговлю двух стран и отражает часто встречающийся тип рынка. Её изучение позволяет не только объяснить процессы, происходящие в экономике, но и прогнозировать её развитие.

В предлагаемой работе исследуется модель международной торговли двух стран при монополистической конкуренции производителей. Торговые издержки приняты по типу айсберга (iceberg type), т. е. для экспорта одной единицы товара требуется произвести τ единиц продукции. Стандартные вопросы при исследовании таких моделей следующие: сравнительная статика по торговым издержкам потребления, массы фирм, выпусков, цен, общественного благосостояния. Наибольший интерес вызывают два «предельных» случая: свободы торговли и автаркии.

В работе [7] получен следующий результат для случая линейных производственных издержек: либерализация торговли вблизи автаркии ухудшает общественное благосостояние. В предлагаемой работе изучен более адекватный с экономической точки зрения частный случай нелинейных производственных издержек, когда предельные издержки являются убывающей функцией от инвестиций в НИОКР (научно-исследовательские и опытно-конструкторские разработки).

Текст работы организован следующим образом. В разд. 1 даётся постановка задачи: описаны предварительные сведения о модели (п. 1.1), задачи репрезентативных потребителей (п. 1.2), задачи производителей (п. 1.3), определено понятие общественного благосостояния (п. 1.4), описан симметричный случай (п. 1.5), определено понятие симметричного равновесия (п. 1.6).

Разд. 2 описывает локальную сравнительную статику симметричного равновесия по транспортным издержкам, которая получается путём полного дифференцирования системы равновесных уравнений. Особое внимание уделяется ситуации автаркии (см. п. 2.1); получена локальная сравнительная статика индивидуальных потреблений и инвестиций в НИОКР (утверждение 1), размеров и масс фирм (утверждение 2), цен (утверждение 3).

Далее, получены компактные формулы для эластичностей функций общественного благосостояния (утверждение 4), позволяющие приступить к разработке необременительных достаточных условий, гарантирующих возрастание общественного благосостояния вблизи автаркии, что обобщает результат [7], полученный для случая линейных производственных издержек.

Доказательства утверждений вынесены в отдельный разд. 3. В заключении обсуждаются полученные результаты и нерешённые вопросы, намечается план дальнейших исследований.

1. Постановка задачи

1.1. Предварительные сведения о модели. Исследуется классическая модель международной торговли двух стран при монополистической конкуренции производителей. В отличие от классических постановок, предполагается, что производственные издержки нелинейны. Точнее, предполагается, что предельные издержки являются убывающими функциями от инвестиций в НИОКР, причём производители могут выбирать объём этих инвестиций.

Модель основывается на следующих классических предположениях монополистической конкуренции [4, 5, 8–10]:

- единственным производственным фактором является труд;
- каждый потребитель обладает одной единицей труда;
- количество (масса) фирм достаточно велико;
- фирмы производят аналогичные, но не полностью взаимозаменяемые товары — так называемое «товарное разнообразие»;
- каждый вид товарного разнообразия производит один производитель (фирма);
- каждый производитель выпускает только один вид товарного разнообразия;
- количество (масса) фирм определяется условием «свободы входа» (ноль-прибыльностью фирмы) — фирмы входят на рынок до тех пор, пока их прибыль положительна;
- в каждой стране выполняются балансы по труду и торговые балансы.

Итак, имеются одна отрасль и один производственный фактор — труд.

В торговле участвуют две страны: страна B («большая») и страна S («малая»). Введём следующие два экзогенных параметра:

- L — количество жителей (потребителей) в стране B ,
- l — количество жителей (потребителей) в стране S , $l \leq L$.

1.2. Потребитель. Предпочтения потребителей описываются аддитивно сепарабельной функцией полезности, которая максимизируется при бюджетном ограничении.

Элементарная функция полезности $u: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ («функция суб-полезности») удовлетворяет следующим условиям:

- $u(0) = 0$ (пока ничего не потребили, полезность равна нулю);
- $u'(\xi) > 0$ при $\xi \geq 0$ (парадигма о рациональном поведении потребителя: чем больше потребляет, тем больше полезность);

• $u''(\xi) < 0$ при $\xi \geq 0$ (эффект насыщаемости: от каждой новой потреблённой единицы товара удовольствие всё меньше и меньше).

Таким образом, элементарная функция полезности строго возрастающая и строго вогнутая. Более того, предполагается, что в нуле производные конечны, т. е. $u'(0) < +\infty$ и $u''(0) > -\infty$.

Далее, пусть

- N — масса¹⁾ фирм в стране B ,
- n — масса фирм в стране S .

Определим индивидуальное потребление. Внутреннее потребление:

- $X_i^r = X^r(i)$ — количество товара, произведённого в стране B фирмой $i \in [0, N]$ и потреблённого жителем $r \in \{1, \dots, L\}$ страны B ;
- $x_i^r = x^r(i)$ — количество товара, произведённого в стране S фирмой $i \in [0, n]$ и потреблённого жителем $r \in \{1, \dots, l\}$ страны S .

Импортное потребление:

- $Z_i^r = Z^r(i)$ — количество товара, произведённого в стране B фирмой $i \in [0, N]$ и потреблённого жителем $r \in \{1, \dots, l\}$ страны S ;
- $z_i^r = z^r(i)$ — количество товара, произведённого в стране S фирмой $i \in [0, n]$ и потреблённого жителем $r \in \{1, \dots, L\}$ страны B .

Далее, пусть

- $P_i^{X^r} = P^{X^r}(i)$ — цена единицы товара, произведённого в стране B фирмой $i \in [0, N]$ и потребляемого жителем $r \in \{1, \dots, L\}$ в стране B ;
- $p_i^{x^r} = p^{x^r}(i)$ — цена единицы товара, произведённого в стране S фирмой $i \in [0, n]$ и потребляемого жителем $r \in \{1, \dots, l\}$ в стране S ;
- $P_i^{Z^r} = P^{Z^r}(i)$ — цена единицы товара, произведённого в стране B фирмой $i \in [0, N]$ и потребляемого жителем $r \in \{1, \dots, l\}$ в стране S ;
- $p_i^{z^r} = p^{z^r}(i)$ — цена единицы товара, произведённого в стране S фирмой $i \in [0, n]$ и потребляемого жителем $r \in \{1, \dots, L\}$ в стране B .

Наконец, пусть

- ω — заработная плата в стране B ;
- заработная плата в стране S , как обычно (ср., например, [8]), нормируется к единице.

Предполагается, что в каждой стране каждый потребитель при потреблении единицы товара получает полезность $u(1)$.

Теперь можно сформулировать задачи репрезентативных потребителей в каждой стране. Каждый потребитель максимизирует свою функцию полезности при бюджетном ограничении, поэтому

¹⁾ Стандартная интерпретация понятия «массы фирм»: если на длинной дороге равномерно расставлены автозаправочные станции, то нас интересует не количество этих станций, а длина дороги. В этом случае говорят не о количестве фирм, а о массе фирм. Эта масса определяется эндогенно, причём, вообще говоря, она необязательно будет целой.

- задача потребителя $r \in \{1, \dots, L\}$ в стране B имеет вид

$$\begin{aligned} \int_0^N u(X_i^r) di + \int_0^n u(z_i^r) di &\rightarrow \max, \\ \int_0^N P_i^{X^r} X_i^r di + \int_0^n p_i^{z^r} z_i^r di &\leq \omega; \end{aligned}$$

- задача потребителя $r \in \{1, \dots, l\}$ в стране S имеет вид

$$\begin{aligned} \int_0^n u(x_i^r) di + \int_0^N u(Z_i^r) di &\rightarrow \max, \\ \int_0^n p_i^{x^r} x_i^r di + \int_0^N P_i^{Z^r} z_i^r di &\leq 1. \end{aligned}$$

Построим для каждой из этих задач функции Лагранжа. Тогда условия первого порядка (first order conditions, FOC) имеют вид

$$\begin{aligned} u'(X_i^r) &= \Lambda P_i^{X^r}, \quad i \in [0, N], r \in \{1, \dots, L\}, \\ u'(z_i^r) &= \Lambda p_i^{z^r}, \quad i \in [0, n], r \in \{1, \dots, l\}, \\ u'(x_i^r) &= \lambda p_i^{x^r}, \quad i \in [0, n], r \in \{1, \dots, l\}, \\ u'(Z_i^r) &= \lambda P_i^{Z^r}, \quad i \in [0, N], r \in \{1, \dots, L\}, \end{aligned}$$

где λ, Λ — множители Лагранжа.

Отсюда получаем следующие обратные функции спроса:

$$\begin{aligned} p(X_i^r, \Lambda) &= \frac{u'(X_i^r)}{\Lambda}, \quad i \in [0, N], r \in \{1, \dots, L\}, \\ p(z_i^r, \Lambda) &= \frac{u'(z_i^r)}{\Lambda}, \quad i \in [0, n], r \in \{1, \dots, l\}, \\ p(x_i^r, \lambda) &= \frac{u'(x_i^r)}{\lambda}, \quad i \in [0, n], r \in \{1, \dots, l\}, \\ p(Z_i^r, \lambda) &= \frac{u'(Z_i^r)}{\lambda}, \quad i \in [0, N], r \in \{1, \dots, L\}. \end{aligned}$$

1.3. Производитель. Для транспортных издержек в международной торговле примем модель айсберга: для продажи y единиц продукции

в другой стране фирма производит τy , $\tau \geq 1$, единиц продукции²⁾. Тогда выпуск фирмы $i \in [0, N]$ в стране B равен

$$Q_i = \sum_{r=1}^L X_i^r + \tau \sum_{r=1}^l Z_i^r, \quad i \in [0, N],$$

а выпуск фирмы $i \in [0, n]$ в стране S —

$$q_i = \sum_{r=1}^l x_i^r + \tau \sum_{r=1}^L z_i^r, \quad i \in [0, n].$$

В рассматриваемой модели торговли предполагается, что производитель осуществляет инвестиции в НИОКР, которые являются фиксированными издержками, а предельные издержки $c(\xi)$ являются убывающей функцией от фиксированных издержек³⁾. Таким образом, если фирма производит ξ единиц продукции (измеряемых в единицах труда) и инвестирует в НИОКР η единиц труда, то фирма несёт издержки

$$V(\xi, \eta) = c(\eta) \cdot \xi + \eta, \quad c'(\eta) < 0.$$

Тогда функция производственных издержек фирмы $i \in [0, N]$ в стране B имеет вид

$$V(Q_i, F_i) = c(F_i) \cdot Q_i + F_i, \quad i \in [0, N],$$

функция производственных издержек фирмы $i \in [0, n]$ в стране S —

$$V(q_i, f_i) = c(f_i) \cdot q_i + f_i, \quad i \in [0, n],$$

функция прибыли фирмы $i \in [0, N]$ в стране B —

$$\Pi_i = \sum_{r=1}^L p(X_i^r, \Lambda) \cdot X_i^r + \sum_{r=1}^l p(Z_i^r, \lambda) \cdot Z_i^r - \omega \cdot V(Q_i, F_i), \quad i \in [0, N],$$

а функция прибыли фирмы $i \in [0, n]$ в стране S —

$$\pi_i = \sum_{r=1}^l p(x_i^r, \lambda) \cdot x_i^r + \sum_{r=1}^L p(z_i^r, \Lambda) \cdot z_i^r - V(q_i, f_i), \quad i \in [0, n].$$

Для удобства обозначений введём понятие нормализованной выручки $R(\xi) = u'(\xi) \cdot \xi$. Тогда функция прибыли фирмы $i \in [0, N]$ в стране B

²⁾ Стандартная интерпретация понятия транспортных издержек по типу айсберга: стоимость транспортировки товара вычитается из его начальной стоимости, так что с увеличением длины пути товар «тает», как айсберг.

³⁾ Стандартная интерпретация этого феномена: чем больше инвестиции в НИОКР, тем меньше издержки на выпуск единицы продукции.

примет вид

$$\Pi_i = \sum_{r=1}^L \frac{R(X_i^r)}{\Lambda} + \sum_{r=1}^l \frac{R(Z_i^r)}{\lambda} - \omega \cdot V(Q_i, F_i), \quad i \in [0, N],$$

функция прибыли фирмы $i \in [0, n]$ в стране S —

$$\pi_i = \sum_{r=1}^l \frac{R(x_i^r)}{\lambda} + \sum_{r=1}^L \frac{R(z_i^r)}{\Lambda} - V(q_i, f_i), \quad i \in [0, n].$$

Поскольку общие издержки должны равняться полному количеству труда в стране, выполняются балансы по труду в стране B

$$\int_0^N V(Q_i, F_i) di = L$$

и стране S

$$\int_0^n V(q_i, f_i) di = l.$$

1.4. Общественное благосостояние. Под общественным благосостоянием в данном классе моделей понимается полная полезность, так что общественное благосостояние в стране B записываем в виде

$$W^B = L \int_0^N u(X_i^r) di + L \int_0^n u(z_i^r) di,$$

а общественное благосостояние в стране S — в виде

$$W^S = l \int_0^n u(x_i^r) di + l \int_0^N u(Z_i^r) di.$$

1.5. Симметричный случай. В симметричной модели предполагается, что

- все потребители одинаковы, поскольку формируют свои предпочтения, используя одну и ту же элементарную функцию полезности $u(\xi)$;
- все производители одинаковы, поскольку формируют свои издержки, используя одну и ту же функцию производственных издержек $V(\xi, \eta)$.

При таких условиях представляется целесообразным (ср. [7, 8]) рассматривать симметричный случай, опуская индексы i и r . Тогда

- $X = X_i^r$, $i \in [0, N]$, $r \in \{1, \dots, L\}$, — количество товара, произведённого одной фирмой в стране B и потреблённого одним жителем страны B ;

- $x = x_i^r, i \in [0, n], r \in \{1, \dots, l\}$, — количество товара, произведённого одной фирмой в стране S и потреблённого одним жителем страны S ;
- $Z = Z_i^r, i \in [0, N], r \in \{1, \dots, l\}$, — количество товара, произведённого одной фирмой в стране B и потреблённого одним жителем страны S ;
- $z = z_i^r, i \in [0, n], r \in \{1, \dots, L\}$, — количество товара, произведённого одной фирмой в стране S и потреблённого одним жителем страны B .

В этом случае выпуск одной фирмы в стране B составляет

$$Q = LX + \tau lZ, \quad (1)$$

а выпуск одной фирмы в стране S —

$$q = lx + \tau Lz. \quad (2)$$

Также имеем

- $F = F_i, i \in [0, N]$, — инвестиции в НИОКР фирмы в стране B ;
- $f = f_i, i \in [0, n]$, — инвестиции в НИОКР фирмы в стране S ;
- $V(Q, F) = c(F) \cdot Q + F$ — издержки одной фирмы в стране B ;
- $V(q, f) = c(f) \cdot q + f$ — издержки одной фирмы в стране S .

Обратные функции спроса определяются следующим образом:

- цена единицы товара, произведённого одной фирмой в стране B и потреблённого в количестве X одним жителем страны B , равна

$$p(X, \Lambda) = \frac{u'(X)}{\Lambda} = \frac{u'(X_i^r)}{\Lambda}, \quad i \in [0, N], r \in \{1, \dots, L\}; \quad (3)$$

- цена единицы товара, произведённого одной фирмой в стране S и потреблённого в количестве x одним жителем страны S , равна

$$p(x, \lambda) = \frac{u'(x)}{\lambda} = \frac{u'(x_i^r)}{\lambda}, \quad i \in [0, n], r \in \{1, \dots, l\}; \quad (4)$$

- цена единицы товара, произведённого одной фирмой в стране B и потреблённого в количестве Z одним жителем страны S , равна

$$p(Z, \lambda) = \frac{u'(Z)}{\lambda} = \frac{u'(Z_i^r)}{\lambda}, \quad i \in [0, N], r \in \{1, \dots, l\}; \quad (5)$$

- цена единицы товара, произведённого одной фирмой в стране S и потреблённого в количестве z одним жителем страны B , равна

$$p(z, \lambda) = \frac{u'(z)}{\Lambda} = \frac{u'(z_i^r)}{\Lambda}, \quad i \in [0, n], r \in \{1, \dots, L\}. \quad (6)$$

Далее, прибыль фирмы в стране B в симметричном случае оказывается равной

$$\Pi = L \cdot \frac{R(X)}{\Lambda} + l \cdot \frac{R(Z)}{\lambda} - \omega \cdot V(Q, F), \quad (7)$$

а прибыль фирмы в стране S —

$$\pi = l \cdot \frac{R(x)}{\lambda} + L \cdot \frac{R(z)}{\Lambda} - V(q, f). \quad (8)$$

Баланс по труду в стране B принимает вид

$$N \cdot V(Q, F) = L, \quad (9)$$

а в стране S —

$$n \cdot V(q, f) = l. \quad (10)$$

Торговый баланс — экспорт равен импорту — задаётся равенством

$$l \cdot N \cdot p(Z, \lambda) \cdot Z = L \cdot n \cdot p(z, \Lambda) \cdot z,$$

т. е. с учётом балансов по труду (9) и (10) имеем

$$TB = \frac{R(Z)}{\lambda \cdot V(Q, F)} - \frac{R(z)}{\Lambda \cdot V(q, f)} = 0. \quad (11)$$

Наконец, общественное благосостояние в странах B и S записываем в виде

$$W^B = L \cdot (N \cdot u(X) + n \cdot u(z)),$$

$$W^S = l \cdot (n \cdot u(x) + N \cdot u(Z)).$$

Учитывая при этом балансы по труду (9) и (10), получаем

$$W^B = \frac{L^2}{V(Q, F)} \cdot u(X) + \frac{Lt}{V(q, f)} \cdot u(z), \quad (12)$$

$$W^S = \frac{l^2}{V(q, f)} \cdot u(x) + \frac{Lt}{V(Q, F)} \cdot u(Z) \quad (13)$$

соответственно.

1.6. Симметричное равновесие. Фирмы максимизируют свои прибыли (7) и (8), поэтому требуется выполнение условий первого порядка

$$\Pi'_X \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial X} = 0, \quad \Pi'_Z \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial Z} = 0, \quad \Pi'_F \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial F} = 0, \quad (14)$$

$$\pi'_x \equiv \frac{\partial \pi}{\partial x} = 0, \quad \pi'_z \equiv \frac{\partial \pi}{\partial z} = 0, \quad \pi'_f \equiv \frac{\partial \pi}{\partial f} = 0, \quad (15)$$

а также условий второго порядка (second order conditions, SOC) — отрицательная определённость матриц вторых производных:

$$\Pi'' < 0, \quad \pi'' < 0, \quad (16)$$

где

$$\Pi'' = \begin{pmatrix} \Pi''_{XX} & \Pi''_{XZ} & \Pi''_{XF} \\ \Pi''_{XZ} & \Pi''_{ZZ} & \Pi''_{ZF} \\ \Pi''_{XF} & \Pi''_{ZF} & \Pi''_{FF} \end{pmatrix}, \quad \pi'' = \begin{pmatrix} \pi''_{xx} & \pi''_{xz} & \pi''_{xf} \\ \pi''_{xz} & \pi''_{zz} & \pi''_{zf} \\ \pi''_{xf} & \pi''_{zf} & \pi''_{ff} \end{pmatrix}.$$

Также выполняются условия свободы входа (ноль-прибыльность), поскольку фирма входит на рынок, если её прибыль положительна, и уходит с рынка, если её прибыль отрицательна:

$$\Pi = 0, \quad \pi = 0. \quad (17)$$

Будем называть *симметричным равновесием* набор

$$(X^*, Z^*, F^*, x^*, z^*, f^*, \Lambda^*, \lambda^*, \omega^*),$$

удовлетворяющий следующим условиям:

- оптимальность в производстве, т. е. FOC (14), (15) и SOC (16);
- свобода входа (17);
- торговый баланс (11).

При найденных равновесных переменных, можно вычислить

- равновесные цены — из (3)–(6);
- равновесные массы фирм — из (9) и (10);
- равновесные выпуски фирм — из (1) и (2).

2. Локальная сравнительная статика симметричного равновесия по транспортным издержкам

Запишем равновесную систему в виде

$$\Psi(\Phi) = \Theta, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \Psi &= (\Pi'_X \quad \Pi'_Z \quad \Pi'_F \quad \pi'_x \quad \pi'_z \quad \pi'_f \quad \Pi \quad \pi \quad \text{TB})^\top, \\ \Phi &= (X \quad Z \quad F \quad x \quad z \quad f \quad \Lambda \quad \lambda \quad \omega)^\top, \\ \Theta &= (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^\top. \end{aligned}$$

Поскольку конкретные виды функций не предполагаются известными, равновесную систему (18) невозможно решить в явном виде⁴⁾, поэтому будем изучать поведение решения этой системы при малом изменении какого-либо параметра. В качестве такого параметра возьмём транспортные издержки τ (ср. [7]).

Полное дифференцирование системы (18) по τ даёт

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \Phi} \cdot \frac{d\Phi}{d\tau} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \tau},$$

где

$$\frac{d\Phi}{d\tau} = \left(\frac{dX}{d\tau} \quad \frac{dZ}{d\tau} \quad \frac{dF}{d\tau} \quad \frac{dx}{d\tau} \quad \frac{dz}{d\tau} \quad \frac{df}{d\tau} \quad \frac{d\Lambda}{d\tau} \quad \frac{d\lambda}{d\tau} \quad \frac{d\omega}{d\tau} \right)^\top,$$

⁴⁾ В этой работе предполагается, что симметричное равновесие существует и единственно. Вопросы существования и единственности равновесия являются темами отдельных исследований.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} &= (\Pi''_{X\tau} \quad \Pi''_{Z\tau} \quad \Pi''_{F\tau} \quad \pi''_{x\tau} \quad \pi''_{z\tau} \quad \pi''_{f\tau} \quad \Pi'_\tau \quad \pi'_\tau \quad \text{TB}'_\tau)^\top = \\ &= (0 \quad \Pi''_{Z\tau} \quad \Pi''_{F\tau} \quad 0 \quad \pi''_{z\tau} \quad \pi''_{f\tau} \quad \Pi'_\tau \quad \pi'_\tau \quad \text{TB}'_\tau)^\top, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi} &= \begin{pmatrix} \Pi''_{XX} & \Pi''_{XZ} & \Pi''_{XF} & \Pi''_{Xx} & \Pi''_{Xz} & \Pi''_{Xf} & \Pi''_{X\Lambda} & \Pi''_{X\lambda} & \Pi''_{X\omega} \\ \Pi''_{XZ} & \Pi''_{ZZ} & \Pi''_{ZF} & \Pi''_{Zx} & \Pi''_{Zz} & \Pi''_{Zf} & \Pi''_{Z\Lambda} & \Pi''_{Z\lambda} & \Pi''_{Z\omega} \\ \Pi''_{XF} & \Pi''_{ZF} & \Pi''_{FF} & \Pi''_{Fx} & \Pi''_{Fz} & \Pi''_{Ff} & \Pi''_{F\Lambda} & \Pi''_{F\lambda} & \Pi''_{F\omega} \\ \pi''_{Xx} & \pi''_{Zx} & \pi''_{Fx} & \pi''_{xx} & \pi''_{xz} & \pi''_{xf} & \pi''_{x\Lambda} & \pi''_{x\lambda} & \pi''_{x\omega} \\ \pi''_{Xz} & \pi''_{Zz} & \pi''_{Fz} & \pi''_{zx} & \pi''_{zz} & \pi''_{zf} & \pi''_{z\Lambda} & \pi''_{z\lambda} & \pi''_{z\omega} \\ \pi''_{Xf} & \pi''_{Zf} & \pi''_{Ff} & \pi''_{fx} & \pi''_{fz} & \pi''_{ff} & \pi''_{f\Lambda} & \pi''_{f\lambda} & \pi''_{f\omega} \\ \Pi'_X & \Pi'_Z & \Pi'_F & \Pi'_x & \Pi'_z & \Pi'_f & \Pi'_\Lambda & \Pi'_\lambda & \Pi'_\omega \\ \pi'_X & \pi'_Z & \pi'_F & \pi'_x & \pi'_z & \pi'_f & \pi'_\Lambda & \pi'_\lambda & \pi'_\omega \\ \text{TB}'_X & \text{TB}'_Z & \text{TB}'_F & \text{TB}'_x & \text{TB}'_z & \text{TB}'_f & \text{TB}'_\Lambda & \text{TB}'_\lambda & \text{TB}'_\omega \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица $\frac{\partial \Psi}{\partial \Phi}$ разреженная. Действительно, поскольку

$$\begin{aligned} \Pi''_{XZ} &= \Pi''_{Xx} = \Pi''_{Xz} = \Pi''_{Xf} = \Pi''_{X\Lambda} = 0, \\ \Pi''_{XZ} &= \Pi''_{Zx} = \Pi''_{Zz} = \Pi''_{Zf} = \Pi''_{Z\Lambda} = 0, \\ \Pi''_{Fx} &= \Pi''_{Fz} = \Pi''_{Ff} = \Pi''_{F\Lambda} = \Pi''_{F\lambda} = 0, \\ \pi''_{Xx} &= \pi''_{Zx} = \pi''_{Fx} = \pi''_{xx} = \pi''_{xz} = \pi''_{x\Lambda} = \pi''_{x\omega} = 0, \\ \pi''_{Xz} &= \pi''_{Zz} = \pi''_{Fz} = \pi''_{zx} = \pi''_{zz} = \pi''_{z\Lambda} = \pi''_{z\omega} = 0, \\ \pi''_{Xf} &= \pi''_{Zf} = \pi''_{Ff} = \pi''_{fx} = \pi''_{fz} = \pi''_{f\Lambda} = \pi''_{f\lambda} = \pi''_{f\omega} = 0, \\ \Pi'_x &= \Pi'_z = \Pi'_f = \pi'_X = \pi'_Z = \pi'_F = \pi'_\omega = \text{TB}'_\omega = 0, \\ \Pi''_{F\omega} &= \Pi'_X = \Pi'_Z = \Pi'_F = \pi'_x = \pi'_z = \pi'_f = 0 \end{aligned}$$

в силу (14) и (15), матрица $\frac{\partial \Psi}{\partial \Phi}$ имеет вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \Phi} = \begin{pmatrix} \Pi''_{XX} & 0 & \Pi''_{XF} & 0 & 0 & 0 & \Pi''_{X\Lambda} & 0 & \Pi''_{X\omega} \\ 0 & \Pi''_{ZZ} & \Pi''_{ZF} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi''_{Z\lambda} & \Pi''_{Z\omega} \\ \Pi''_{XF} & \Pi''_{ZF} & \Pi''_{FF} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi''_{xx} & 0 & \pi''_{xf} & 0 & \pi''_{x\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi''_{zz} & \pi''_{zf} & \pi''_{z\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi''_{xf} & \pi''_{zf} & \pi''_{ff} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi'_\Lambda & \Pi'_\lambda & \Pi'_\omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi'_\Lambda & \pi'_\lambda & \pi'_\omega \\ \text{TB}'_X & \text{TB}'_Z & \text{TB}'_F & \text{TB}'_x & \text{TB}'_z & \text{TB}'_f & \text{TB}'_\Lambda & \text{TB}'_\lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Тем самым в силу SOC (16) производные

$$\frac{dX}{d\tau}, \frac{dZ}{d\tau}, \frac{dF}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \frac{dz}{d\tau}, \frac{df}{d\tau}$$

однозначно выражаются через производные

$$\frac{d\Lambda}{d\tau}, \frac{d\lambda}{d\tau}, \frac{d\omega}{d\tau}.$$

Более точно,

$$\begin{pmatrix} \Pi''_{XX} & 0 & \Pi''_{XF} \\ 0 & \Pi''_{ZZ} & \Pi''_{ZF} \\ \Pi''_{XF} & \Pi''_{ZF} & \Pi''_{FF} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dX}{d\tau} \\ \frac{dZ}{d\tau} \\ \frac{dF}{d\tau} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Pi''_{X\Lambda} \cdot \frac{d\Lambda}{d\tau} + \Pi''_{X\omega} \cdot \frac{d\omega}{d\tau} \\ \Pi''_{Z\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\tau} + \Pi''_{Z\omega} \cdot \frac{d\omega}{d\tau} + \Pi''_{Z\tau} \\ \Pi''_{F\tau} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \pi''_{xx} & 0 & \pi''_{xf} \\ 0 & \pi''_{zz} & \pi''_{zf} \\ \pi''_{xf} & \pi''_{zf} & \pi''_{ff} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx}{d\tau} \\ \frac{dz}{d\tau} \\ \frac{df}{d\tau} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \pi''_{x\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\tau} \\ \pi''_{z\Lambda} \cdot \frac{d\Lambda}{d\tau} + \pi''_{z\tau} \\ \pi''_{f\tau} \end{pmatrix}.$$

2.1. Ситуация автаркии. Предположим, что при некотором достаточно большом τ равновесие таково, что $Z^* = z^* = 0$. В этих условиях международная торговля прекращается, наступает «автаркия»⁵⁾. В случае автаркии имеем

$$\begin{aligned} \Pi'_{F\tau} = \Pi'_\tau = \Pi'_\lambda = \pi'_{f\tau} = \pi'_\tau = \pi'_\Lambda = 0, \\ \text{TB}'_X = \text{TB}'_F = \text{TB}'_x = \text{TB}'_f = \text{TB}'_\Lambda = \text{TB}'_\lambda = \text{TB}'_\tau = 0, \end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = (0 \quad \Pi''_{Z\tau} \quad 0 \quad 0 \quad \pi''_{z\tau} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^\top,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \Phi} = \begin{pmatrix} \Pi''_{XX} & 0 & \Pi''_{XF} & 0 & 0 & 0 & \Pi''_{X\Lambda} & 0 & \Pi''_{X\omega} \\ 0 & \Pi''_{ZZ} & \Pi''_{ZF} & 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi''_{Z\lambda} & \Pi''_{Z\omega} \\ \Pi''_{XF} & \Pi''_{ZF} & \Pi''_{FF} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi''_{xx} & 0 & \pi''_{xf} & 0 & \pi''_{x\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi''_{zz} & \pi''_{zf} & \pi''_{z\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi''_{xf} & \pi''_{zf} & \pi''_{ff} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi'_\Lambda & 0 & \Pi'_\omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi'_\lambda & 0 \\ 0 & \text{TB}'_Z & 0 & 0 & \text{TB}'_z & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

так что имеем

$$\begin{pmatrix} \Pi''_{XX} & 0 & \Pi''_{XF} \\ 0 & \Pi''_{ZZ} & \Pi''_{ZF} \\ \Pi''_{XF} & \Pi''_{ZF} & \Pi''_{FF} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dX}{d\tau} \\ \frac{dZ}{d\tau} \\ \frac{dF}{d\tau} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \Pi''_{X\Lambda} \cdot \frac{d\Lambda}{d\tau} + \Pi''_{X\omega} \cdot \frac{d\omega}{d\tau} \\ \Pi''_{Z\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\tau} + \Pi''_{Z\omega} \cdot \frac{d\omega}{d\tau} + \Pi''_{Z\tau} \\ 0 \end{pmatrix},$$

⁵⁾ Как и в вопросе существования и единственности симметричного равновесия, предполагаем, что при некотором достаточно большом τ международная торговля действительно прекращается и наступает автаркия. Отметим, что существование и единственность равновесия, а также автаркия — это наблюдаемые феномены. По крайней мере, на модельном уровне существуют соответствующие примеры.

$$\begin{pmatrix} \pi''_{xx} & 0 & \pi''_{xf} \\ 0 & \pi''_{zz} & \pi''_{zf} \\ \pi''_{xf} & \pi''_{zf} & \pi''_{ff} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{dx}{d\tau} \\ \frac{dz}{d\tau} \\ \frac{df}{d\tau} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \pi''_{x\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\tau} \\ \pi''_{z\lambda} \cdot \frac{d\lambda}{d\tau} + \pi''_{z\tau} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Pi'_\Lambda \cdot \frac{d\Lambda}{d\tau} + \Pi'_\omega \cdot \frac{d\omega}{d\tau} = 0,$$

$$\pi'_\lambda \cdot \frac{d\lambda}{d\tau} = 0,$$

$$\text{TB}'_Z \cdot \frac{dZ}{d\tau} + \text{TB}'_z \cdot \frac{dz}{d\tau} = 0.$$

Для дальнейшего изложения определим следующие понятия:

- $E_\xi = \frac{\tau}{\xi} \cdot \frac{d\xi}{d\tau}$ — эластичность переменной ξ по параметру τ ;
- $\mathcal{E}_g(\xi) = \frac{\xi}{g(\xi)} \cdot g'(\xi)$ — эластичность функции $g(\xi)$ по аргументу ξ ;
- $r_g(\xi) = -\frac{\xi}{g'(\xi)} \cdot g''(\xi)$ — мера Эрроу — Пратта функции $g(\xi)$ по аргументу ξ .

Утверждение 1. В случае автаркии имеют место следующие утверждения.

1. В стране B равновесные индивидуальные потребления X, Z и инвестиции в НИОКР F таковы, что

$$E_X = -\frac{\mathcal{E}_c(F)}{r_R(X)} \cdot E_F < 0,$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = A \cdot E_F < 0,$$

$$E_F = \frac{1}{B} \cdot (1 + E_\omega) < 0,$$

где

$$A = \frac{LX}{l} \cdot \frac{1}{\tau^2} \cdot \left(\frac{\mathcal{E}_c(F)}{r_R(X)} + r_c(F) \right) > 0, \quad (19)$$

$$B = \frac{R''(0)}{R'(0)} \cdot \tau \cdot A - \mathcal{E}_c(F) < 0. \quad (20)$$

2. В стране S равновесные индивидуальные потребления x, z и инвестиции в НИОКР f таковы, что

$$E_x = -\frac{\mathcal{E}_c(f)}{r_R(x)} \cdot E_f < 0,$$

$$\frac{dz}{d\tau} = a \cdot E_f < 0,$$

$$E_f = \frac{1}{b} \cdot (1 - E_\omega) < 0,$$

где

$$a = \frac{lx}{L} \cdot \frac{1}{\tau^2} \cdot \left(\frac{\mathcal{E}_c(f)}{r_R(x)} + r_c(f) \right) > 0, \quad (21)$$

$$b = \frac{R''(0)}{R'(0)} \cdot \tau \cdot a - \mathcal{E}_c(f) < 0. \quad (22)$$

3. Заработная плата ω в стране B такова, что

$$E_\omega = \frac{V(Q, F) \cdot \lambda a B - V(q, f) \cdot \Lambda A b}{V(q, f) \cdot \Lambda A b + V(Q, F) \cdot \lambda a B} \in (-1, 1). \quad (23)$$

В силу утверждения 1 вблизи автаркии при малом росте транспортных издержек наблюдается убывание в каждой стране как индивидуальных потреблений (домашних и импортных товаров) каждого потребителя, так и инвестиций в НИОКР каждой фирмы. Что касается заработной платы в стране B , то можно лишь гарантировать следующую оценку эластичности: $E_\omega \in (-1, 1)$.

Естественно возникают вопросы о поведении выпусков (1) и (2) каждой фирмы, масс фирм (N и n), а также общего выпуска продукции (NQ и nq) и общих инвестиций в НИОКР (NF и nf) в каждой стране при малом росте транспортных издержек. Ответы на эти вопросы даёт

Утверждение 2. В случае автаркии имеют место следующие утверждения.

1. В стране B равновесный выпуск Q каждой фирмы, масса фирм N , общий выпуск продукции NQ и общие инвестиции в НИОКР NF таковы, что

$$\begin{aligned} E_Q &= r_c(F) \cdot E_F < 0, \\ E_N &= -\mathcal{E}_R(X) \cdot E_Q = -\mathcal{E}_R(X) \cdot r_c(F) \cdot E_F > 0, \\ E_{NQ} &= (1 - \mathcal{E}_R(X)) \cdot r_c(F) \cdot E_F > 0, \\ E_{NF} &= \mathcal{E}_{\mathcal{E}_c}(F) \cdot \mathcal{E}_R(X) \cdot E_F = \frac{\mathcal{E}'_c(F) \cdot F}{\mathcal{E}_c(F)} \cdot \mathcal{E}_R(X) \cdot E_F. \end{aligned}$$

2. В стране S равновесный выпуск q каждой фирмы, масса фирм n , общий выпуск продукции nq и общие инвестиции в НИОКР nf таковы, что

$$\begin{aligned} E_q &= r_c(f) \cdot E_f < 0, \\ E_n &= -\mathcal{E}_R(x) \cdot E_q = -\mathcal{E}_R(x) \cdot r_c(f) \cdot E_f > 0, \\ E_{nq} &= (1 - \mathcal{E}_R(x)) \cdot r_c(f) \cdot E_f > 0, \\ E_{nf} &= \mathcal{E}_{\mathcal{E}_c}(f) \cdot \mathcal{E}_R(x) \cdot E_f = \frac{\mathcal{E}'_c(f) \cdot f}{\mathcal{E}_c(f)} \cdot \mathcal{E}_R(x) \cdot E_f. \end{aligned}$$

В силу утверждения 2 вблизи автаркии при малом росте транспортных издержек наблюдается убывание выпусков (1) и (2) каждой фирмы, рост масс фирм N и n , а также общего выпуска продукции (NQ и nq). Что касается общих инвестиций в НИОКР (NF и nf) в каждой стране, то их поведение при этом определяется «эластичностью эластичности» предельных издержек $c(\xi)$ как функции от инвестиций в НИОКР.

Важно отметить, что (см. утверждения 1 и 2) поведение многих равновесных переменных (индивидуальных потреблений, выпусков и масс фирм, общих выпусков и общих инвестиций в НИОКР) в каждой из стран аналогично. Что касается цен (точнее, обратных функций спроса), то ситуация оказывается не столь однозначной. Точнее, имеет место

Утверждение 3. В случае автаркии равновесные обратные функции спроса таковы, что

$$\begin{aligned} E_{p(X,\Lambda)} &= -r_u(X) \cdot E_X + E_\omega > E_\omega, \\ E_{p(z,\Lambda)} &= \tau \cdot \frac{u''(0)}{u'(0)} \cdot \frac{dz}{d\tau} + E_\omega > E_\omega, \\ E_{p(x,\lambda)} &= -r_u(x) \cdot E_x > 0, \\ E_{p(Z,\lambda)} &= \tau \cdot \frac{u''(0)}{u'(0)} \cdot \frac{dZ}{d\tau} > 0. \end{aligned}$$

В силу утверждения 3 при малом росте транспортных издержек цены (обратные функции спроса $p(x, \lambda)$ и $p(Z, \lambda)$) для потребителей в стране S растут. При этом определить точное поведение цен (обратных функций спроса $p(X, \Lambda)$ и $p(z, \Lambda)$) для потребителей в стране B не удаётся. Известно лишь, что их эластичности больше эластичности E_ω , которая принадлежит интервалу $(-1, 1)$ в виду (23). По-видимому, причина этого в том, что в стране S зарплата нормирована к единице, а в стране B зарплата является переменной (эндогенным параметром).

Теперь можно приступить к анализу поведения функций общественного благосостояния W^B и W^S (см. (12) и (13)). Исчерпывающую локальную сравнительную статику этих функций провести не удаётся. Компактное представление эластичностей функций W^B и W^S по τ даёт

Утверждение 4. В случае автаркии имеют место следующие утверждения.

1. В стране B равновесная функция общественного благосостояния такова, что

$$\begin{aligned} E_{W^B} &= -\frac{1}{r_R(X)} \cdot ((1 - \mathcal{E}_R(X)) \cdot \mathcal{E}_u(X) \cdot \mathcal{E}_c(F) + \\ &\quad + (1 - \mathcal{E}_u(X)) \cdot \mathcal{E}_R(X) \cdot r_R(X) \cdot r_c(F)) \cdot E_F. \end{aligned}$$

2. В стране S равновесная функция общественного благосостояния такова, что

$$E_{WS} = -\frac{1}{r_R(x)} \cdot ((1 - \mathcal{E}_R(x)) \cdot \mathcal{E}_u(x) \cdot \mathcal{E}_c(f) + (1 - \mathcal{E}_u(x)) \cdot \mathcal{E}_R(x) \cdot r_R(x) \cdot r_c(x)) \cdot E_f.$$

В силу утверждения 4 имеем $E_{WB} > 0$ тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{E}_c(F) + \frac{(1 - \mathcal{E}_u(X)) \cdot \mathcal{E}_R(X)}{(1 - \mathcal{E}_R(X)) \cdot \mathcal{E}_u(X)} \cdot r_R(X) \cdot r_c(F) > 0,$$

равно как $E_{WS} > 0$ тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{E}_c(f) + \frac{(1 - \mathcal{E}_u(x)) \cdot \mathcal{E}_R(x)}{(1 - \mathcal{E}_R(x)) \cdot \mathcal{E}_u(x)} \cdot r_R(x) \cdot r_c(x) > 0.$$

Отметим, что в силу SOC (16) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c(F) + r_R(X) \cdot r_c(F) &> 0, \\ \mathcal{E}_c(f) + r_R(x) \cdot r_c(x) &> 0, \end{aligned}$$

что даёт надежду на получение необременительных достаточных условий возрастания функций общественного благосостояния вблизи автаркии.

3. Доказательства

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 1. В силу FOC (14) и (15)

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \Pi''_{XX} \cdot \frac{X}{\tau} = \Pi''_{X\Lambda} \cdot \frac{\Lambda}{\tau} \cdot r_R(X), \\ \Pi''_{XF} \cdot \frac{F}{\tau} = \Pi''_{X\Lambda} \cdot \frac{\Lambda}{\tau} \cdot \mathcal{E}_c(F), \\ \Pi''_{X\Lambda} \cdot \frac{\Lambda}{\tau} = \Pi''_{X\omega} \cdot \frac{\omega}{\tau} = -L \cdot \frac{R'(X)}{\tau \cdot \Lambda}, \end{cases} \\ &\begin{cases} \Pi''_{ZZ} = -\Pi''_{Z\tau} \cdot \frac{R''(0)}{R'(0)} \cdot \tau, \\ \Pi''_{ZF} \cdot \frac{F}{\tau} = \Pi''_{Z\tau} \cdot \mathcal{E}_c(F), \\ \Pi''_{Z\Lambda} \cdot \frac{\Lambda}{\tau} = \Pi''_{Z\omega} \cdot \frac{\omega}{\tau} = \Pi''_{Z\tau} = -l \cdot \frac{R'(0)}{\tau \cdot \Lambda}, \end{cases} \\ &\begin{cases} \Pi''_{XF} \cdot \frac{X}{\tau} = \frac{\omega}{\tau}, \\ \Pi''_{ZF} = \frac{\omega}{\tau} \cdot \frac{l}{L \cdot X} \cdot \tau^2, \\ \Pi''_{FF} \cdot \frac{F}{\tau} = -\frac{\omega}{\tau} \cdot r_c(F), \end{cases} \quad \begin{cases} \pi''_{xx} \cdot \frac{x}{\tau} = \pi''_{x\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\tau} \cdot r_R(x), \\ \pi''_{xf} \cdot \frac{f}{\tau} = \pi''_{x\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\tau} \cdot \mathcal{E}_c(f), \\ \pi''_{x\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\tau} = -l \cdot \frac{R'(x)}{\tau \cdot \lambda}, \end{cases} \\ &\begin{cases} \pi''_{zz} = -\pi''_{z\tau} \cdot \frac{R''(0)}{R'(0)} \cdot \tau, \\ \pi''_{zf} \cdot \frac{f}{\tau} = \pi''_{z\tau} \cdot \mathcal{E}_c(f), \\ \pi''_{z\Lambda} \cdot \frac{\Lambda}{\tau} = \pi''_{z\tau} = -L \cdot \frac{R'(0)}{\tau \cdot \Lambda}, \end{cases} \quad \begin{cases} \pi''_{xf} \cdot \frac{x}{\tau} = \frac{1}{\tau}, \\ \pi''_{zf} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{L}{l \cdot x} \cdot \tau^2, \\ \pi''_{ff} \cdot \frac{f}{\tau} = -\frac{1}{\tau} \cdot r_c(f). \end{cases} \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{cases} \Pi'_\Lambda \cdot \frac{\Lambda}{\tau} = \Pi'_\omega \cdot \frac{\omega}{\tau} = -L \cdot \frac{R(X)}{\Lambda} \cdot \frac{1}{\tau} < 0, \\ \pi'_\lambda \cdot \frac{\lambda}{\tau} = -L \cdot \frac{R(x)}{\lambda} \cdot \frac{1}{\tau} < 0. \\ \text{TB}'_Z = \frac{R'(0)}{V(Q,F)\lambda}, \\ \text{TB}'_z = -\frac{R'(0)}{V(q,f)\Lambda}, \end{cases}$$

поэтому

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} -r_R(X) & 0 & -\mathcal{E}_c(F) \\ 0 & \frac{R''(0)}{R'(0)} \cdot \tau & -\mathcal{E}_c(F) \\ 1 & \frac{l}{L \cdot X} \cdot \tau^2 & -r_c(F) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_X \\ \frac{dZ}{d\tau} \\ E_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_\Lambda + E_\omega \\ E_\lambda + E_\omega + 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} -r_R(x) & 0 & -\mathcal{E}_c(f) \\ 0 & \frac{R''(0)}{R'(0)} \cdot \tau & -\mathcal{E}_c(f) \\ 1 & \frac{l}{L \cdot x} \cdot \tau^2 & -r_c(f) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ \frac{dz}{d\tau} \\ E_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_\lambda \\ E_\Lambda + 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ & \begin{cases} E_\Lambda = -E_\omega, \\ E_\lambda = 0, \end{cases} \\ & \frac{dZ}{d\tau} = \frac{V(Q,F)}{V(q,f)} \cdot \frac{\lambda}{\Lambda} \cdot \frac{dz}{d\tau}. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом,

$$\begin{cases} E_X = -\frac{\mathcal{E}_c(F)}{r_R(X)} \cdot E_F, \\ \frac{dZ}{d\tau} = A \cdot E_F, \\ E_F = \frac{1}{B} \cdot (1 + E_\omega), \end{cases} \quad \begin{cases} E_x = -\frac{\mathcal{E}_c(f)}{r_R(x)} \cdot E_f, \\ \frac{dz}{d\tau} = a \cdot E_f, \\ E_f = \frac{1}{b} \cdot (1 - E_\omega) \end{cases}$$

(определение выражений A , B , a и b см. в (19)–(22)).

Вместе с тем, из (24) получаем

$$E_\omega = \frac{V(Q,F) \cdot \lambda a B - V(q,f) \cdot \Lambda A b}{V(q,f) \cdot \Lambda A b + V(Q,F) \cdot \lambda a B}.$$

В силу SOC (16) $B < 0$, $b < 0$, поэтому $A > 0$, $a > 0$, так что в итоге имеем

$$\begin{aligned} 1 + E_\omega &= \frac{2 \cdot V(Q,F) \cdot \lambda a B}{V(q,f) \cdot \Lambda A b + V(Q,F) \cdot \lambda a B} > 0, \\ 1 - E_\omega &= \frac{2 \cdot V(q,f) \cdot \Lambda A b}{V(q,f) \cdot \Lambda A b + V(Q,F) \cdot \lambda a B} > 0. \end{aligned}$$

Утверждение 1 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 2. Сначала рассмотрим ситуацию в стране B . По определению в случае автаркии справедливы равенства

$$\begin{aligned} E_Q &= \frac{\tau}{Q} \cdot \frac{dQ}{d\tau} = \frac{\tau}{Q} \cdot \left(L \cdot \frac{dX}{d\tau} + l \cdot \left(\tau \cdot \frac{dZ}{d\tau} + Z \right) \right) = \\ &= \frac{\tau}{L \cdot X} \cdot \left(L \cdot \frac{dX}{d\tau} + l \cdot \tau \cdot \frac{dZ}{d\tau} \right) = E_X + \frac{l}{L} \cdot \frac{\tau}{X} \cdot \frac{dZ}{d\tau} = \\ &= -\frac{\mathcal{E}_c(F)}{r_R(X)} \cdot E_F + \frac{r_R(X) \cdot r_c(F) + \mathcal{E}_c(F)}{r_R(X)} \cdot E_F = r_c(F) \cdot E_F. \end{aligned}$$

Далее, в силу FOC (14)

$$\begin{aligned} E_N &= -E_{V(Q,F)} = -\frac{\tau}{V(Q,F)} \cdot \frac{d}{d\tau}(V(Q,F)) = \\ &= -\frac{\tau}{V(Q,F)} \cdot \left(c(F) \cdot L \cdot \frac{dX}{d\tau} + c(F) \cdot l \cdot \tau \cdot \frac{dZ}{d\tau} \right) - \\ &\quad - \frac{\tau}{V(Q,F)} \cdot \left((c'(F) \cdot Q + 1) \cdot \frac{dF}{d\tau} + c(F) \cdot l \cdot Z \right) = \\ &= -\frac{c(F) \cdot \tau}{V(Q,F)} \cdot \left(L \cdot \frac{dX}{d\tau} + l \cdot \tau \cdot \frac{dZ}{d\tau} \right) = \\ &= -\frac{R'(X) \cdot \tau}{L \cdot R(X)} \cdot \left(L \cdot \frac{dX}{d\tau} + l \cdot \tau \cdot \frac{dZ}{d\tau} \right) = -\frac{R'(X) \cdot \tau}{L \cdot R(X)} \cdot \frac{dQ}{d\tau} = \\ &= -\frac{R'(X) \cdot X}{R(X)} \cdot \frac{\tau}{L \cdot X} \cdot \frac{dQ}{d\tau} = -\mathcal{E}_R(X) \cdot E_Q, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} E_{NQ} &= (1 - \mathcal{E}_R(X)) \cdot r_c(F) \cdot E_F, \\ E_{NF} &= E_N + E_F = (1 - \mathcal{E}_R(X) \cdot r_c(F)) \cdot E_F = \\ &= (\mathcal{E}_R(X) \cdot (1 - \mathcal{E}_c(F)) - \mathcal{E}_R(X) \cdot r_c(F)) \cdot E_F = \\ &= (1 - \mathcal{E}_c(F) - r_c(F)) \cdot \mathcal{E}_R(X) \cdot E_F = \\ &= \frac{c(F) \cdot c'(F) - (c'(F))^2 \cdot F + c(F) \cdot c''(F) \cdot F}{c(F) \cdot c'(F)} \cdot \mathcal{E}_R(X) \cdot E_F = \\ &= \frac{1}{\mathcal{E}_c(F)} \cdot \frac{(c'(F) + c''(F) \cdot F) \cdot c(F) - (c'(F))^2 \cdot F}{(c(F))^2} \cdot F \cdot \mathcal{E}_R(X) \cdot E_F = \\ &= \frac{\mathcal{E}'_c(F) \cdot F}{\mathcal{E}_c(F)} \cdot \mathcal{E}_R(X) \cdot E_F = \mathcal{E}_{\mathcal{E}_c}(F) \cdot \mathcal{E}_R(X) \cdot E_F. \end{aligned}$$

Ситуация в стране S рассматривается аналогично. Утверждение 2 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 3. Имеем

$$E_{p(X,\Lambda)} = E_{u'(X)} - E_\Lambda = \mathcal{E}_{u'}(X) \cdot E_X - E_\Lambda = -r_u(X) \cdot E_X + E_\omega > E_\omega,$$

$$\begin{aligned} E_{p(z,\Lambda)} &= E_{u'(z)} - E_\Lambda = \frac{\tau}{u'(z)} \cdot \frac{d}{d\tau}(u'(z)) + E_\omega = \\ &= \tau \cdot \frac{u''(0)}{u'(0)} \cdot \frac{dz}{d\tau} + E_\omega > E_\omega, \end{aligned}$$

$$E_{p(x,\Lambda)} = E_{u'(x)} - E_\Lambda = \mathcal{E}_{u'}(x) \cdot E_x - 0 = -r_u(x) \cdot E_x > 0,$$

$$E_{p(Z,\Lambda)} = E_{u'(Z)} - E_\Lambda = \frac{\tau}{u'(Z)} \cdot \frac{d}{d\tau}(u'(Z)) = \tau \cdot \frac{u''(0)}{u'(0)} \cdot \frac{dZ}{d\tau} > 0.$$

Утверждение 3 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УТВЕРЖДЕНИЯ 4. В стране B

$$\begin{aligned} \frac{dW^B}{d\tau} &= \frac{\partial W^B}{\partial X} \cdot \frac{dX}{d\tau} + \frac{\partial W^B}{\partial Z} \cdot \frac{dZ}{d\tau} + \frac{\partial W^B}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\tau} + \\ &+ \frac{\partial W^B}{\partial z} \cdot \frac{dz}{d\tau} + \frac{\partial W^B}{\partial F} \cdot \frac{dF}{d\tau} + \frac{\partial W^B}{\partial f} \cdot \frac{df}{d\tau} + \frac{\partial W^B}{\partial \tau}, \end{aligned}$$

при этом

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^B}{\partial x} &= -\frac{L \cdot l^2}{(V(q, f))^2} \cdot u(0) \cdot c(f) = 0, \\ \frac{\partial W^B}{\partial F} &= -\frac{L^2}{(V(Q, F))^2} \cdot u(X) \cdot (c'(F) \cdot Q + 1) = 0, \\ \frac{\partial W^B}{\partial f} &= -\frac{L \cdot l}{(V(q, f))} \cdot u(z) \cdot (c'(f) \cdot q + 1) = 0, \\ \frac{\partial W^B}{\partial \tau} &= -\frac{L^2 \cdot u(X)}{(V(Q, F))^2} \cdot c(F) \cdot l \cdot Z - \frac{L \cdot l \cdot u(z)}{(V(q, f))^2} \cdot c(f) \cdot L \cdot z = \\ &= -\frac{L^2 \cdot u(X)}{(V(Q, F))^2} \cdot c(F) \cdot l \cdot 0 - \frac{L \cdot l \cdot u(0)}{(V(q, f))^2} \cdot c(f) \cdot L \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{dW^B}{d\tau} = \frac{\partial W^B}{\partial X} \cdot \frac{dX}{d\tau} + \frac{\partial W^B}{\partial Z} \cdot \frac{dZ}{d\tau} + \frac{\partial W^B}{\partial z} \cdot \frac{dz}{d\tau}.$$

Далее, в силу FOC (14), (15) и условий свободы входа (17)

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^B}{\partial X} &= L^2 \cdot \frac{u'(X) \cdot V(Q, F) - u(X) \cdot c(F) \cdot L}{(V(Q, F))^2} = \\ &= \frac{L^2 \cdot u(X)}{X \cdot V(Q, F)} \cdot \mathcal{E}_u(X) - \frac{L^2 \cdot u(X)}{X \cdot V(Q, F)} \cdot \frac{c(F) \cdot L \cdot X}{V(Q, F)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{W^B}{X} \cdot (\mathcal{E}_u(X) - \mathcal{E}_R(X)), \\
\frac{\partial W^B}{\partial Z} &= -L^2 \cdot u(X) \cdot \frac{c(F) \cdot l \cdot \tau}{(V(Q, F))^2} = -\frac{L^2 \cdot u(X)}{X \cdot V(Q, F)} \cdot \frac{c(F) \cdot l \cdot \tau \cdot X}{V(Q, F)} = \\
&= -L \cdot l \cdot \frac{u(X)}{X \cdot V(Q, F)} \cdot \tau \cdot \mathcal{E}_R(X) = -\frac{l}{L} \cdot \frac{W^B}{X} \cdot \tau \cdot \mathcal{E}_R(X), \\
\frac{\partial W^B}{\partial z} &= L \cdot l \cdot \frac{u'(0) \cdot V(q, f) - u(0) \cdot c(f) \cdot L \cdot \tau}{(V(q, f))^2} = \\
&= L \cdot l \cdot \frac{u'(0)}{V(q, f)} = L \cdot l \cdot \frac{R'(0)}{V(q, f)},
\end{aligned}$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial W^B}{\partial X} \cdot \frac{dX}{d\tau} + \frac{\partial W^B}{\partial Z} \cdot \frac{dZ}{d\tau} = \\
&= -\frac{W^B}{X} \cdot (\mathcal{E}_u(X) - \mathcal{E}_R(X)) \cdot \frac{X}{\tau} \cdot \frac{\mathcal{E}_c(F)}{r_R(X)} \cdot E_F - \\
&- \frac{l}{L} \cdot \frac{W^B}{X} \cdot \tau \cdot \mathcal{E}_R(X) \cdot \frac{L}{l} \cdot \frac{X}{r_R(X)} \cdot \frac{1}{\tau^2} \cdot (r_R(X) \cdot r_c(F) + \mathcal{E}_c(F)) \cdot E_F = \\
&= -\frac{W^B}{\tau} \cdot \frac{1}{r_R(X)} \cdot (\mathcal{E}_u(X) \cdot \mathcal{E}_c(F) + \mathcal{E}_R(X) \cdot r_R(X) \cdot r_c(F)) \cdot E_F, \\
\frac{\partial W^B}{\partial z} \cdot \frac{dz}{d\tau} &= \frac{\partial W^B}{\partial z} \cdot \frac{\Lambda}{\lambda} \cdot \frac{V(q, f)}{V(Q, F)} \cdot \frac{dZ}{d\tau} = \\
&= L \cdot l \cdot \frac{R'(0)}{V(q, f)} \cdot \frac{\Lambda}{\lambda} \cdot \frac{V(q, f)}{V(Q, F)} \cdot \frac{dZ}{d\tau} = \\
&= L \cdot l \cdot \frac{R'(0)}{V(Q, F)} \cdot \frac{\Lambda}{\lambda} \cdot \frac{L}{l} \cdot \frac{X}{r_R(X)} \cdot \frac{1}{\tau^2} \cdot (r_R(X) \cdot r_c(F) + \mathcal{E}_c(F)) \cdot E_F = \\
&= \frac{L^2}{\tau} \cdot \frac{R'(0)}{V(Q, F)} \cdot \frac{\Lambda}{\lambda} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \frac{X}{r_R(X)} \cdot (r_R(X) \cdot r_c(F) + \mathcal{E}_c(F)) \cdot E_F = \\
&= \frac{L^2}{\tau} \cdot \frac{R'(X)}{V(Q, F)} \cdot \frac{X}{r_R(X)} \cdot (r_R(X) \cdot r_c(F) + \mathcal{E}_c(F)) \cdot E_F = \\
&= \frac{L^2}{\tau} \cdot \frac{u'(X) \cdot \mathcal{E}_R(X)}{V(Q, F)} \cdot \frac{X}{r_R(X)} \cdot (r_R(X) \cdot r_c(F) + \mathcal{E}_c(F)) \cdot E_F = \\
&= \frac{L^2}{\tau} \cdot \frac{u(X)}{V(Q, F)} \cdot \frac{\mathcal{E}_u(X) \cdot \mathcal{E}_R(X)}{r_R(X)} \cdot (r_R(X) \cdot r_c(F) + \mathcal{E}_c(F)) \cdot E_F = \\
&= \frac{W^B}{\tau} \cdot \frac{\mathcal{E}_u(X) \cdot \mathcal{E}_R(X)}{r_R(X)} \cdot (r_R(X) \cdot r_c(F) + \mathcal{E}_c(F)) \cdot E_F.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^B}{\partial X} \cdot \frac{dX}{d\tau} + \frac{\partial W^B}{\partial Z} \cdot \frac{dZ}{d\tau} &= \\ &= -\frac{W^B}{\tau} \cdot \frac{\mathcal{E}_u(X) \cdot \mathcal{E}_c(F) + \mathcal{E}_R(X) \cdot r_R(X) \cdot r_c(F)}{r_R(X)} \cdot E_F, \\ \frac{\partial W^B}{\partial z} \cdot \frac{dz}{d\tau} &= \frac{W^B}{\tau} \cdot \frac{\mathcal{E}_u(X) \cdot \mathcal{E}_R(X) \cdot (r_R(X) \cdot r_c(F) + \mathcal{E}_c(F))}{r_R(X)} \cdot E_F, \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} \frac{dW^B}{d\tau} &= \frac{\partial W^B}{\partial X} \cdot \frac{dX}{d\tau} + \frac{\partial W^B}{\partial Z} \cdot \frac{dZ}{d\tau} + \frac{\partial W^B}{\partial z} \cdot \frac{dz}{d\tau} = \\ &= -\frac{W^B}{\tau} \cdot \frac{r_u(X)\mathcal{E}_u(X)\mathcal{E}_c(F) + (1 - \mathcal{E}_u(X))\mathcal{E}_R(X)r_R(X)r_c(F)}{r_R(X)} \cdot E_F, \end{aligned}$$

т. е.

$$E_{W^B} = -\frac{(1 - \mathcal{E}_R(X))\mathcal{E}_u(X)\mathcal{E}_c(F) + (1 - \mathcal{E}_u(X))\mathcal{E}_R(X)r_R(X)r_c(F)}{r_R(X)} \cdot E_F.$$

Ситуация в стране S рассматривается аналогично. Утверждение 4 доказано.

Заключение

В работе исследуется однородная модель международной торговли двух стран («большой» B и «малой» S) при монополистической конкуренции производителей. Предполагается, что доставка товаров в другую страну требует транспортных издержек по типу айсберга (iceberg type). Функция издержек такова, что предельные издержки являются убывающими функциями от фиксированных издержек (инвестиций в НИОКР).

Поскольку явное вычисление равновесия не представляется возможным, проведена локальная сравнительная статика равновесия по транспортным издержкам τ .

Оказывается, что в ситуации автаркии при малом росте τ

- индивидуальные потребления (как «домашних», так и импортных товаров) в каждой стране убывают;
- выпуск каждой фирмы в каждой стране убывает;
- масса фирм в каждой стране растёт;
- затраты на инвестиции в НИОКР каждой фирмы в каждой стране убывают;
- поведение общих затрат на инвестиции в НИОКР в каждой стране зависят от монотонности «эластичности эластичности» предельных издержек $s(\cdot)$ как функции от инвестиций в НИОКР;
- цены в стране S растут.

Вопрос о локальной сравнительной статике общественного благосостояния («полной полезности») требует дальнейшего рассмотрения. Получены компактные представления эластичностей по τ для общественного благосостояния. Это позволяет надеяться на получение необременительных достаточных условий для подтверждения гипотезы: либерализация торговли вблизи автаркии ухудшает общественное благосостояние. Ранее эта гипотеза была подтверждена в [7] для случая линейных производственных издержек.

Наконец, интересно распространить полученные результаты на случай большего числа стран. Однако здесь возникает вопрос о характере так называемой «предавтаркии» — ситуации, когда некоторые страны останавливают торговлю с некоторыми другими странами, а дальнейший рост транспортных издержек приводит к полной автаркии. Для случая двух стран такой проблемы нет: если страна 1 не поставляет товары в страну 2, то — в силу торгового баланса — страна 2 прекращает поставлять товары в страну 1.

Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева (проект № FWNF-2022-0019). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. **Syverson C.** Prices, spatial competition, and heterogeneous producers: An empirical test // J. Ind. Econ. 2007. V. 55, No. 2. P. 197–222.
2. **Campbell J. R., Hopenhayn H. A.** Market size matters // J. Ind. Econ. 2005. V. 53, No. 1. P. 1–25.
3. **Hummels D., Klenow P. T.** The variety and quality of a nation's exports // Am. Econ. Rev. 2005. V. 95, No. 3. P. 704–723.
4. **Dixit A., Stiglitz J.** Monopolistic competition and optimum product diversity // Am. Econ. Rev. 1977. V. 67, No. 3. P. 297–308.
5. **Krugman P. R.** Increasing returns, monopolistic competition, and international trade // J. Int. Econ. 1979. V. 9, No. 4. P. 469–479.
6. **Melitz M. J.** The impact of trade on intra-industry reallocations and aggregate industry productivity // Econometrica. 2003. V. 71, No. 6. P. 1695–1725.
7. **Kokovin S., Molchanov P., Bykadorov I.** Increasing returns, monopolistic competition, and international trade: Revisiting gains from trade // J. Int. Econ. 2022. V. 137. Article ID 103595. 22 p.

8. **Zhelobodko E., Kokovin S., Parenti M., Thisse J.-F.** Monopolistic competition in general equilibrium: Beyond the constant elasticity of substitution // *Econometrica*. 2012. V. 80, No. 6. P. 2765–2784.
9. **Behrens K., Murata Y.** General equilibrium models of monopolistic competition: A new approach // *J. Econ. Theory*. 2007. V. 136, No. 1. P. 776–787.
10. **Ottaviano G. I. P., Tabuchi T., Thisse J.-F.** Agglomeration and trade revisited // *Int. Econ. Rev.* 2002. V. 43, No. 2. P. 409–436.

Быкадоров Игорь Александрович

Статья поступила

25 ноября 2024 г.

После доработки —

20 января 2025 г.

Принята к публикации

22 марта 2025 г.

INTERNATIONAL TRADE MODEL
WITH INVESTMENT IN R&D UNDER MONOPOLISTIC
COMPETITION: EQUILIBRIUM IN AUTARKY SITUATION

I. A. Bykadorov

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptuyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: bykad@math.nsc.ru

Abstract. A model of international trade between two countries under monopolistic competition of producers is investigated. The consumer utility functions are additively separable, transport costs are taken as an iceberg type, the production cost function is nonlinear: Marginal costs are a decreasing function of R&D investments. Market equilibrium is considered in the autarky situation, when transport costs are so high that international trade ceases. Comparative statics is carried out on transport costs of equilibrium variables (individual consumption, size and mass of firms, and prices), as well as social welfare. Bibliogr. 10.

Keywords: monopolistic competition, international trade, consumer, producer, investments in R&D, iceberg transport costs, equilibrium, autarky.

References

1. C. Syverson, Prices, spatial competition, and heterogeneous producers: An empirical test, *J. Ind. Econ.* **55** (2), 197–222 (2007).
2. J. R. Campbell and H. A. Hopenhayn, Market size matters, *J. Ind. Econ.* **53** (1), 1–25 (2005).
3. D. Hummels and P. T. Klenow, The variety and quality of a nation's exports, *Am. Econ. Rev.* **95** (3), 704–723 (2005).
4. A. Dixit and J. Stiglitz, Monopolistic competition and optimum product diversity, *Am. Econ. Rev.* **67** (3), 297–308 (1977).
5. P. R. Krugman, Increasing returns, monopolistic competition, and international trade, *J. Int. Econ.* **9** (4), 469–479 (1979).
6. M. J. Melitz, The impact of trade on intra-industry reallocations and aggregate industry productivity, *Econometrica* **71** (6), 1695–1725 (2003).

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **19** (2) (2025).

-
7. **S. Kokovin, P. Molchanov, and I. Bykadorov**, Increasing returns, monopolistic competition, and international trade: Revisiting gains from trade, *J. Int. Econ.* **137**, ID 103595 (2022).
 8. **E. Zhelobodko, S. Kokovin, M. Parenti, and J.-F. Thisse**, Monopolistic competition in general equilibrium: Beyond the constant elasticity of substitution, *Econometrica* **80** (6), 2765–2784 (2012).
 9. **K. Behrens and Y. Murata**, General equilibrium models of monopolistic competition: A new approach, *J. Econ. Theory* **136** (1), 776–787 (2007).
 10. **G. I. P. Ottaviano, T. Tabuchi, and J.-F. Thisse**, Agglomeration and trade revisited, *Int. Econ. Rev.* **43** (2), 409–436 (2002).

Igor A. Bykadorov

Received November 25, 2024

Revised January 20, 2025

Accepted March 22, 2025

ЛОКАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВХОДЯЩИМИ ПОТОКАМИ
В РЕГУЛЯРНЫХ РЕСУРСНЫХ СЕТЯХ
С МАЛЫМ РЕСУРСОМ

А. В. Евсеенко^а, В. А. Скороходов^б

Институт математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича
Южного федерального университета,
ул. Мильчакова, 8а, 344090 Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: ^а aevseenko@sfedu.ru, ^б vaskorohodov@sfedu.ru

Аннотация. Работа посвящена решению задачи локального управления входящими потоками в регулярных ресурсных сетях с малым ресурсом. Для таких сетей указано множество управляемых вершин. Задача локального управления состоит в определении таких пропускных способностей дуг, входящих в управляемые вершины, что единственное предельное состояние регулярной ресурсной сети Q^* наиболее близко к заранее заданному состоянию Q' . Получены условия недостижимости предельного состояния, совпадающего с заданным состоянием Q' . Рассмотрены различные конфигурации ресурсных сетей относительно распределения управляемых вершин в них. Показано, что если условия недостижимости предельного состояния не выполняются, то всегда найдётся такой набор пропускных способностей дуг, входящих в управляемые вершины, для которого предельное состояние Q^* равно заданному состоянию Q' . Ил. 2, библиогр. 21.

Ключевые слова: потоки в сетях, ресурсная сеть, предельное состояние, предельный поток, управление потоками.

Введение

Исследование поточных сетей началось в середине прошлого века в работах Форда и Фалкерсона с задачи определения величины максимально возможного потока по модели сети железнодорожного транспорта. Алгоритм её решения с обоснованием описан в работе [1], а формулировка теоремы о максимальном потоке нашла своё отражение в [2]. Дальнейшее развитие методов решения потоковых задач описано, например, в [3], где рассмотрены графы с выигрышами.

Другие исследования были посвящены вопросам перераспределения и доставки товаров от поставщиков до потребителей. Подробный обзор истории развития методов их решения приведён в статье [4]. В частности, методы решения статических потоковых задач с использованием развёртки были применены для решения динамических потоковых задач. Например, в [5] приводится алгоритм, реализующий данный подход.

С другой стороны, ряд авторов отмечает сходство динамических потоковых задач с задачами на графах с нестандартной достижимостью. Так, например, в [6] описываются модифицированные алгоритмы прорыва для поиска максимального динамического потока, а также различные варианты решения с помощью вспомогательного графа.

О. П. Кузнецов и Л. Ю. Жилиякова в [7–10] предложили новую потоковую модель — ресурсную сеть. Ресурсная сеть — это ориентированная сильно связная сеть без источника и стока. Для каждой дуги ресурсной сети задана пропускная способность. Для каждой вершины ресурсной сети в каждый момент времени определяется количество ресурса, находящегося в этой вершине в каждый момент времени. Ресурсная сеть работает в дискретном времени путём перераспределения ресурса между смежными вершинами согласно определённым правилам. При этом так же, как и в классическом случае, величина потока, проходящего по дуге в каждый момент времени, не может превышать величины её пропускной способности.

Авторы [11] решают задачу поиска начального состояния ресурсной сети по известному текущему состоянию с учётом нелинейности перераспределения ресурса. Помимо этого, в [12, 13] исследуются ресурсные сети с «жадными» вершинами, а в [14] — ресурсные сети, в которых каждая пара смежных вершин соединена двумя противоположно направленными дугами. Кроме того, в статье [15] исследуются неоднородные цепи Маркова, порождённые ресурсными сетями. Авторы [16] рассматривают возможность реализуемости предельных потоков в ресурсных сетях в виде потоков в классических сетях.

Одним из актуальных вопросов рассматриваемых для ресурсных сетей является задача локального управления потоком. Она состоит в нахождении таких значений пропускных способностей для выделенного подмножества дуг, при которых её предельное состояние окажется наиболее близким к заданному.

Определяют два вида управления ресурсным потоком: управление «вперёд» и управление «назад». В первом случае управляемыми дугами являются все исходящие из вершин выделенного подмножества вершин, называемого множеством управляемых вершин ресурсной сети, а во втором — все входящие в вершины множества управляемых вершин.

Ряд работ посвящён решению задачи локального управления вперёд ресурсным потоком. Так, в [17] проведено исследование этой задачи для регулярных ресурсных сетей с малым ресурсом, получен критерий достижимости в ресурсной сети предельного состояния, равного заданному.

Цель настоящей работы состоит в получении аналогичного критерия для регулярных ресурсных сетей с малым ресурсом в случае управления назад.

1. Основные понятия и определения

Определение 1. *Ресурсной сетью* называют ориентированную сеть $G(X, U)$ без источников и стоков, в которой для каждой дуги $(x, y) \in X^2$ указана пропускная способность $r_{xy} \geq 0$, а для каждой вершины $x \in X$ в произвольный момент времени $t \in \mathbb{N}_0$ — количество ресурса $q_x(t) \geq 0$.

Ресурсная сеть работает по шагам (тактам). В начале каждого такта весь ресурс находится только в вершинах. В промежутках между началами тактов он или некоторая его часть переходит от одних вершин по исходящим из них дугам смежным вершинам. При этом переход осуществляется по определённым правилам, которые удовлетворяют двум перечисленным ниже условиям работы ресурсной сети.

1. **ЗАМКНУТОСТЬ.** Ресурс ни в какой вершине сети не добавляется извне и не исчезает.

2. **НЕРАЗРЫВНОСТЬ.** Ресурс, входящий в вершину, добавляется, а выходящий из вершины — вычитается из ресурса данной вершины.

Определение 2. Пусть $G(X, U)$ — некоторая ресурсная сеть, $X = \{x_i\}_{i=1}^n$. Выберем произвольный шаг $t \in \mathbb{N}_0$. Тогда вектор-функция

$$Q(t) = (q_{x_1}(t), q_{x_2}(t), \dots, q_{x_n}(t))$$

называется *состоянием* ресурсной сети на шаге t .

Здесь каждая координата $q_{x_i}(t)$, $i \in \overline{1, n}$, означает количество ресурса, находящегося в вершине $x_i \in X$ в момент $t \in \mathbb{N}_0$. В частности, $Q(0)$ означает состояние $G(X, U)$ в начальный момент времени.

Пусть $q_x(t)$ — количество ресурса в некоторой вершине $x \in X$ в произвольный момент времени $t \in \mathbb{N}_0$. Воспользуемся условием неразрывности. В рамках одного шага из данной вершины убудет некоторое количество ресурса по исходящим и поступит определённое количество ресурса по входящим дугам. Тогда $q_x(t+1)$ определяется соотношением

$$q_x(t+1) = q_x(t) - \sum_{y \in \Gamma(x)} F_{xy}(t) + \sum_{z \in \Gamma^-(x)} F_{zx}(t), \quad (1)$$

где $\Gamma(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in U\}$ и $\Gamma^-(x) = \{y \in X \mid (y, x) \in U\}$ (см. [18]).

В уравнении (1) функция $F_{xy}(t)$ представляет собой величину потока ресурса, проходящего по дуге $(x, y) \in U$ на шаге t , и определяется равенством

$$F_{xy}(t) = \begin{cases} r_{xy}, & \text{если } q_x(t) > \sum_{z \in \Gamma(x)} r_{xz}, \\ \frac{r_{xy}}{\sum_{z \in \Gamma(x)} r_{xz}} \cdot q_x(t), & \text{если } q_x(t) \leq \sum_{z \in \Gamma(x)} r_{xz}. \end{cases} \quad (2)$$

В первой строке правила (2) рассматривается случай с избытком ресурса в исходящей вершине x , а во второй — с его недостатком относительно суммарной пропускной способности исходящих дуг.

Замечание 1. Как следует из определения 1, а также из условий и правил работы ресурсной сети, для $F_{xy}(t)$ в общем случае справедлива оценка

$$0 \leq F_{xy}(t) \leq r_{xy}.$$

В [19] правила (1) и (2) записаны в операторной форме, позволяющей по состоянию на шаге с номером $t \in \mathbb{N}_0$ получить состояние на шаге $t+1$. При этом авторами [19] рассматриваются динамические ресурсные сети, пропускные способности дуг которых могут изменяться на каждом новом шаге. В рамках настоящей работы исследуются ресурсные сети с постоянными пропускными способностями, для изучения которых достаточно использовать краткую форму записи, имеющую вид

$$Q(t+1) = \mathcal{A}(Q(t)).$$

Обозначим через W общее количество ресурса, находящегося в ресурсной сети $G(X, U)$ на шаге $t = 0$. Тогда в силу условия замкнутости справедливы равенства

$$W = \sum_{x \in X} q_x(t), \quad t \in \mathbb{N}_0.$$

Приведём ряд определений, которые будут использованы нами далее.

Определение 3. Состояние ресурсной сети Q^* называется *устойчивым*, если $Q^* = \mathcal{A}(Q^*)$.

Определение 4. Состояние Q^* ресурсной сети $G(X, U)$ *асимптотически достижимо* из состояния $Q(0)$, если для любых $x \in X$, $\varepsilon > 0$ найдётся момент $t_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$ такой, что $|q_x^* - q_x(t)| < \varepsilon$ для любого $t > t_\varepsilon$.

Определение 5. Состояние Q^* называется *предельным*, если оно либо устойчиво и существует такой момент времени t , что $Q^* = Q(t)$, либо асимптотически достижимо из состояния $Q(0)$.

Определение 6. Расстоянием между состояниями Q_1 и Q_2 ресурсной сети $G(X, U)$ называется величина

$$\rho(Q_1, Q_2) = \sum_{x \in X} |q_x^1 - q_x^2|. \quad (3)$$

Далее будем рассматривать только ресурсные сети, представляющие собой сильно связанные графы. В таком случае каждой ресурсной сети с указанной топологией будет соответствовать эргодическая цепь Маркова, поэтому ресурсные сети указанного вида также называют эргодическими [20].

Определение 7. Эргодическая ресурсная сеть называется *регулярной*, если НОД длин всех её циклов равен единице.

В монографии [20] введены в рассмотрение множества вершин

$$Z^+(t) = \left\{ x \in X \mid q_x(t) > \sum_{y \in \Gamma(x)} r_{xy} \right\},$$

$$Z^-(t) = \left\{ x \in X \mid q_x(t) \leq \sum_{y \in \Gamma(x)} r_{xy} \right\}.$$

Другими словами, каждая вершина множества $Z^+(t)$ в момент времени t работает по правилу 1 в (2), т. е. отдаёт часть своего текущего ресурса по инцидентным ей дугам. Каждая вершина множества $Z^-(t)$ в момент времени t работает по правилу 2 из (2), т. е. отдаёт весь свой текущий ресурс.

Определение 8. Говорят, что вершина x переходит в зону Z^- , если существует момент времени t' такой, что $x \in Z^-(t)$ для всех $t \geq t'$.

Определение 9. Пороговым значением для ресурсной сети G называется такая величина T , для которой если $W \leq T$, то все вершины ресурсной сети G перейдут в зону Z^- . В противном случае $Z^+(t) \neq \emptyset$ для каждого момента времени t .

В работе [7] доказано существование порогового значения для произвольной регулярной сети, а в статье [21] описан метод его нахождения.

Определение 10. Пусть $G(X, U)$ — ресурсная сеть. Ресурс суммарной величины W в сети G называется *малым*, если $W \leq T$.

Для регулярных ресурсных сетей с малым ресурсом имеет место

Теорема 1 [20, теорема 3.1]. Пусть G — регулярная сеть с произвольным малым ресурсом W . Тогда для любого начального ресурса $Q(0)$ вектор предельного состояния Q^* существует и единствен.

2. Задача локального управления входящим потоком малого ресурса

Пусть $G(X, U)$ — регулярная ресурсная сеть, в которой выделено подмножество вершин $S \subset X$, называемых *управляемыми*. Через $N = X \setminus S$ обозначим множество *неуправляемых* вершин ресурсной сети G . Аналогично дуги, входящие в вершины множества S , будем называть управляемыми, а входящие в вершины множества N — неуправляемыми. Множество управляемых дуг обозначим через S^- , а неуправляемых — через N^- .

Рассмотрим задачу локального управления потоком (см. [17]) в ресурсной сети. Эта задача состоит в нахождении таких пропускных способностей управляемых дуг (в рассматриваемом здесь случае дуг множества S^-), чтобы предельное состояние Q^* было наиболее близким к заранее заданному состоянию ресурсной сети Q' , т. е. значение функции $\rho(Q', Q^*)$ оказалось минимальным.

В первую очередь исследуем вопрос достижимости предельного состояния, т. е. нахождение такого набора пропускных способностей дуг множества S^- , для которого $\rho(Q', Q^*) = 0$. Последнее возможно только при $Q' = Q^*$, следовательно, состояние Q' должно быть предельным, а значит — устойчивым в ресурсной сети $G(X, U)$. Таким образом, для Q' необходимо выполнения равенства $Q' = A(Q')$.

Поскольку пропускные способности дуг множества N^- (в отличие от S^-) известны, можно сформулировать первое условие недостижимости предельного состояния, равного заданному.

Теорема 2. Если в регулярной ресурсной сети $G(X, U)$ с малым ресурсом существует вершина $x \in X \setminus \Gamma(\Gamma^-(S))$ такая, что при некотором наборе пропускных способностей дуг множества S^- имеет место неравенство $q'_x \neq (A(Q'))_x$, то для любых пропускных способностей дуг из S^- состояние Q' не будет предельным.

Доказательство. Пусть вершина $x \in X \setminus \Gamma(\Gamma^-(S))$ такова, что $q'_x \neq (A(Q'))_x$. Выберем произвольную вершину $y \in \Gamma^-(x)$. Тогда изменение пропускных способностей дуг из S^- не влияет на значение F_{yx} для любой величины r_{yx} , поэтому из того, что для некоторого набора пропускных способностей дуг множества S^- выполняется неравенство $q'_x \neq (A(Q'))_x$, следует его выполнение для любых пропускных способностей дуг из S^- . Последнее означает, что состояние Q' при любых значениях пропускных способностей дуг множества S^- не будет устойчивым, а значит, и предельным. Теорема 2 доказана.

Отметим, что невыполнение первого условия недостижимости не охватывает все случаи, для которых Q' не является предельным, поэтому сформулируем второе условие недостижимости.

Теорема 3. Пусть в регулярной ресурсной сети $G(X, U)$ с малым ресурсом при некотором наборе пропускных способностей дуг из S^- имеют место равенства

$$q'_x = (\mathcal{A}(Q'))_x, \quad x \in X \setminus \Gamma(\Gamma^-(S)), \quad (4)$$

и нарушается хотя бы одно из следующих условий.

1. Для любого $x \in S$

$$q'_x \leq \sum_{y \in \Gamma^-(x)} q'_y. \quad (5)$$

2. Для любого $x \in \Gamma(\Gamma^-(S)) \setminus S$

$$\sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx} \leq q'_x \leq \sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx} + \sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} \min\{q'_y, r_{yx}\}. \quad (6)$$

3. Для любого $x \in X$

$$q'_x \leq \sum_{y \in \Gamma(x) \cap S} q'_y + \sum_{y \in \Gamma(x) \setminus S} \min\{q'_y, r_{xy}\}.$$

Тогда для любых пропускных способностей дуг из S^- состояние Q' не будет предельным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что если при условии (4) состояние Q' предельное, то выполняются условия 1–3. Пусть состояние Q' предельное. Отметим, что для малого ресурса в этом случае справедливы равенства

$$q'_x = \sum_{y \in \Gamma^-(x)} F_{yx}, \quad x \in X. \quad (7)$$

1. Пусть $x \in S$. Покажем, что в силу предельности Q' имеет место (5). Отметим, что согласно (2) для любой пропускной способности дуг из S^- имеем

$$0 \leq F_{yx} \leq q'_y, \quad y \in \Gamma^-(x).$$

Суммируя эти неравенства для всех вершин из $\Gamma^-(x)$, получим

$$0 \leq \sum_{y \in \Gamma^-(x)} F_{yx} \leq \sum_{y \in \Gamma^-(x)} q'_y. \quad (8)$$

Подставляя (7) в (8), приходим к неравенствам

$$0 \leq q'_x \leq \sum_{y \in \Gamma^-(x)} q'_y,$$

второе из которых совпадает с (5); тем самым условие 1 выполняется.

2. Пусть $x \in \Gamma(\Gamma^-(S)) \setminus S$. Отметим, что $\Gamma^-(x)$ может быть представлено в виде

$$\Gamma^-(x) = (\Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)) \cup (\Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)), \quad (9)$$

а так как $x \in N$, в равенстве (9) каждое из множеств, стоящих в скобках, непусто. Тогда (7) можно представить в виде

$$q'_x = \sum_{y \in \Gamma^-(x)} F_{yx} = \sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx} + \sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} F_{yx}. \quad (10)$$

Тем самым для величины ресурса в вершине x имеет место неравенство

$$\sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx} \leq q'_x,$$

которое совпадает с первым неравенством в (6).

Докажем справедливость второго неравенства в (6). Отметим, что в правой части (10) величины потоков F_{yx} в первом слагаемом не зависят от выбора пропускных способностей дуг множества S^- , в то время как во втором слагаемом разные пропускные способности дуг могут давать различные значения потоков. Оценим сверху второе слагаемое.

Поскольку величина потока по дуге не может превышать количества ресурса, находящегося в начальной вершине этой дуги, для второго слагаемого в правой части (10) имеет место оценка

$$\sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} F_{yx} \leq \sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} q'_y. \quad (11)$$

С другой стороны, согласно (2) пропускная способность каждой дуги не меньше величины потока, проходящего по этой дуге. Так как $x \in N$ и значения пропускных способностей всех дуг множества N^- известны, имеет место неравенство

$$\sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} F_{yx} \leq \sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} r_{yx}. \quad (12)$$

Объединяя (11) и (12), получаем неравенство

$$\sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} F_{yx} \leq \sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} \min\{q'_y, r_{yx}\},$$

подставляя которое в (10), приходим ко второму неравенству в (6):

$$q'_x \leq \sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx} + \sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} \min\{q'_y, r_{yx}\}.$$

Тем самым условие 2 доказано.

3. Рассмотрим произвольную вершину $x \in X$ и оценим величину q'_x через величины q'_y , где $y \in \Gamma(x)$. Поскольку состояние Q' устойчиво, для любой дуги $(x, y) \in U$ ресурсной сети G имеет место неравенство

$$F_{xy} \leq q'_y.$$

С другой стороны, поток по дуге не может превышать её пропускной способности, поэтому

$$F_{xy} \leq r_{xy}, \quad y \in N.$$

Объединяя два записанных выше утверждения, получим

$$F_{xy} \leq \begin{cases} q'_y, & y \in S, \\ \min\{q'_y, r_{xy}\}, & y \in N. \end{cases}$$

В силу произвольности вершины y последнее неравенство приводит к следующей оценке для правой части (7):

$$q'_x = \sum_{y \in \Gamma(x)} F_{xy} \leq \sum_{y \in \Gamma(x) \cap S} q'_y + \sum_{y \in \Gamma(x) \setminus S} \min\{q'_y, r_{xy}\}.$$

Таким образом, условие 3 выполняется. Теорема 3 доказана.

Замечание 2. В условиях 1 и 2 теоремы 3 рассматриваются вершины множества $\Gamma(\Gamma^-(S))$. Заметим, что для $x \in X \setminus \Gamma(\Gamma^-(S))$ справедливо

$$q'_x = \sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx},$$

что соответствует (4). В силу этого теорему 3 можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 4. В регулярной ресурсной сети $G(X, U)$ с малым ресурсом для любых пропускных способностей дуг из S^- состояние Q' не будет предельным, если для некоторых пропускных способностей дуг нарушаются хотя бы одно из следующих условий.

1. Для любого $x \in S$

$$q'_x \leq \sum_{y \in \Gamma^-(x)} q'_y.$$

2. Для любого $x \in \Gamma(\Gamma^-(S)) \setminus S$

$$\sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx} \leq q'_x \leq \sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx} + \sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} \min\{q'_y, r_{yx}\}.$$

3. Для любого $x \in X \setminus \Gamma(\Gamma^-(S))$

$$q'_x = \sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx}.$$

4. Для любого $x \in X$

$$q'_x \leq \sum_{y \in \Gamma(x) \cap S} q'_y + \sum_{y \in \Gamma(x) \setminus S} \min\{q'_y, r_{xy}\}.$$

Заметим, что для дуг из N^- пропускные способности заданы изначально. Тем не менее, на потоки по таким дугам не распространяются условия теоремы 4.

Найдём условия, при которых обеспечивается переход нужной доли ресурса в вершины из N . Пусть $|N| = k$. Пронумеруем вершины множества N от 1 до k . Для произвольной вершины $a \in \Gamma^-(N)$ рассмотрим вектор $\bar{p}_a = (p_a^{x_1}, p_a^{x_2}, \dots, p_a^{x_k})$, где для любого $i \in \overline{1, k}$

$$p_a^{x_i} = \begin{cases} r_{ax_i}, & \text{если существует дуга } (a, x_i) \in N^-, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Положим $Q'_N = (q'_{x_1}, q'_{x_2}, \dots, q'_{x_k})$. Возьмём также некоторую нумерацию вершин множества $\Gamma^-(N)$. Пусть $|\Gamma^-(N)| = m$. Тогда имеет место

Теорема 5. Если в регулярной ресурсной сети $G(X, U)$ с малым ресурсом для вершин $a_i \in \Gamma^-(N)$, $i \in \overline{1, m}$, не существует коэффициентов $\lambda_{a_1}, \lambda_{a_2}, \dots, \lambda_{a_m} \in (0, 1]$ таких, что

$$\sum_{i=1}^m \lambda_{a_i} \bar{p}_{a_i} = Q'_N, \quad (13)$$

то для любых пропускных способностей дуг из S^- состояние Q' не будет предельным.

Справедливость утверждения теоремы следует из того, что для любой вершины $a \in \Gamma^-(N)$ вектор $\bar{p}_a$ определяет пропорциональность распределения ресурса по дугам, выходящим из вершины a в вершины множества N .

Таким образом, если решения векторного уравнения (13) не существует, то невозможно подобрать такие пропускные способности дуг из S^- , чтобы Q' было устойчивым.

3. Задача о нахождении пропускных способностей дуг в управляемые вершины

Рассмотрим регулярную ресурсную сеть $G(X, U)$ с малым ресурсом, для которой указаны множества вершин S и N , а также множества дуг S^- и N^- . Будем считать, что в $G(X, U)$ для некоторого состояния $Q' = (q'_1, q'_2, \dots, q'_n)$ выполняются все условия теорем 4 и 5. Покажем, что в этом случае всегда можно определить пропускные способности дуг из множества S^- таким образом, чтобы состояние Q' было устойчивым.

Отметим, что любая вершина из X может быть началом дуг либо только из S^- , либо только из N^- , либо из S^- и N^- одновременно. В последнем случае с изменением пропускной способности любой дуги из S^- меняется поток как по ней самой, так и по всем дугам, имеющим с ней общее начало, в том числе и по дугам из N^- . Если же вершина является началом только дуг из N^- , то такого изменения в принципе произойти не может, поэтому разделим множество дуг N^- на множество частично управляемых дуг и на множество полностью неуправляемых дуг.

Определение 11. Дуги множества N^- , у которых начальные вершины принадлежат $\Gamma^-(S)$, будем называть *частично управляемыми*. Множество всех частично управляемых дуг обозначим через N_S^- .

Определение 12. Дуги множества N^- , у которых начальные вершины принадлежат $X \setminus \Gamma^-(S)$, будем называть *полностью неуправляемыми*. Множество всех полностью неуправляемых дуг обозначим через N_N^- .

Имеет место равенство $N^- = N_S^- \cup N_N^-$.

Отметим, что в произвольную вершину $x \in X \setminus \Gamma(\Gamma^-(S))$ ведут только дуги из N_N^- . Также заметим, что для каждой дуги $(x, y) \in N_N^-$ значение потока F_{xy} определяется однозначно по формуле во второй строке (2) и, как указано в доказательстве теоремы 2, не зависит от выбора пропускных способностей дуг множества S^- . В силу этого при решении задачи о нахождении пропускных способностей дуг S^- можно исключить из ресурсной сети G все дуги множества N_N^- .

Рассмотрим частичный подграф $\tilde{G}(\tilde{X}, \tilde{U})$ ресурсной сети $G(X, U)$, полученный в результате удаления из $G(X, U)$ дуг множества N_N^- , а также вершин, которые в результате такого удаления оказались изолированными. Отметим, что множество дуг $\tilde{U}$ определяется в виде

$$\tilde{U} = S^- \cup N_S^-.$$

Поскольку изолированными в результате удаления дуг могут быть только вершины, являющиеся началом и концом дуг только из N_N^- , множество всех вершин $\tilde{X}$ можно найти следующим образом:

$$\tilde{X} = \Gamma^-(S) \cup \Gamma(\Gamma^-(S)).$$

Найдём количества ресурса, которые должны суммарно поступить в каждую вершину $\tilde{X}$ по дугам из $\tilde{U}$ так, чтобы Q' было устойчивым для $G(X, U)$.

Если $x \in S$, то поскольку в данную вершину ведут только дуги множества S^- , пересчёта не требуется.

В случае $x \in N$ справедливо $\tilde{N} \subset N$ и $\tilde{N}^- = N_S^-$.

Таким образом, количество ресурса, которое должно поступить в произвольную вершину $x \in \tilde{X}$, можно найти по формуле

$$\tilde{q}_x = q'_x - \sum_{(y,x) \in N_N^-} F_{yx}.$$

При этом стоит отметить, что количество ресурса, которое должно выйти из вершины $x \in \Gamma^-(S)$, не изменится и будет равно q'_x . Для удобства положим $\tilde{q}_x = q'_x$ для всех вершин $x \in \Gamma^-(S)$.

Таким образом, задача нахождения пропускных способностей дуг множества S^- сводится к следующей подзадаче: показать, что при выполнении на $\tilde{G}(\tilde{X}, \tilde{U})$ всех условий теорем 4 и 5 всегда существуют такие значения пропускных способностей дуг из S^- , при которых Q' в исходной ресурсной сети $G(X, U)$ будет предельным.

Для этого докажем ряд лемм, описывающих возможные конфигурации $\tilde{G}(\tilde{X}, \tilde{U})$. Не нарушая общности, будем считать, что $\tilde{G}(\tilde{X}, \tilde{U})$ связное, поскольку, если $\tilde{G}(\tilde{X}, \tilde{U})$ состоит из нескольких компонент связности, то все рассуждения могут быть применены к каждой из них.

Лемма 1. Пусть на частичном подграфе $\tilde{G}(\tilde{X}, \tilde{U})$ нет циклов, а для исходной ресурсной сети $G(X, U)$ с малым ресурсом выполняются все условия теорем 4 и 5. Тогда существуют такие пропускные способности дуг множества S^- , при которых состояние Q' предельное для $G(X, U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим два соседних слоя временной развёртки $G'(X', U')$ (см. [1, 17, 19]), описывающих работу одной итерации ресурсной сети, по следующему правилу:

- каждой вершине $x \in X$ исходной ресурсной сети G ставятся в соответствие две вершины $\{x^{(0)}, x^{(1)}\}$ на развёртке G' ;
- каждой дуге $u = (x, y) \in U$ исходной сети G ставится в соответствие дуга $u' = (x^{(0)}, y^{(1)})$ на развёртке G' . При этом если $u \in N^-$, то её пропускная способность переносится на соответствующую ей дугу u' .

Пример построения такой развёртки показан на рис. 1. Вершины развёртки разбиты на два слоя: нижний $X'_b = \{x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\}$, и верхний $X'_t = \{x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\}$.

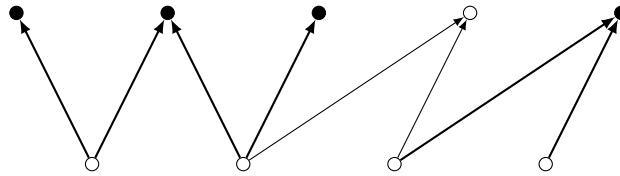


Рис. 1. Пример развёртки G' . Управляемые вершины и дуги выделены

Так как слои развёртки соответствуют двум последовательным моментам времени и рассматривается вопрос об устойчивости состояния Q' , с каждой вершиной $x^{(i)} \in X'$ ($i = 0, 1$) развёртки G' свяжем величину $\tilde{q}_{x^{(i)}} = q'_x$. Таким образом задача локального управления потоками на исходной ресурсной сети сводится к задаче нахождения сбалансированного потока на развёртке: вначале на развёртке $G'(X', U')$ будут найдены величины потоков по дугам, соответствующим управляемым на исходной ресурсной сети, на основе которых можно определить пропускные способности дуг множества S^- , при которых состояние Q' предельное на $G(X, U)$.

Поскольку на частичном подграфе $\tilde{G}(\tilde{X}, \tilde{U})$ отсутствуют циклы, они будут отсутствовать и на его развёртке, так как после склейки пар вершин, соответствующих одним и тем же вершинам множества $\tilde{X}$, получится граф, изоморфный $\tilde{G}(\tilde{X}, \tilde{U})$. Таким образом, развёртка является деревом или лесом. Как известно, на каждом дереве существует как минимум две висячие вершины. Обозначим через X'_o множество висячих вершин $G'(X', U')$.

С целью нахождения потоков далее будем использовать (1), учитывая то, что ресурс малый.

Заметим, что величина потока по дуге, инцидентной произвольной вершине $x \in X'_o$, равна количеству находящегося в ней ресурса. Кроме того, указанная величина потока не может превышать пропускной способности указанной дуги. Зная данные факты, находим все потоки по дугам, инцидентным висячим вершинам. Удалим из $G'(X', U')$ все вершины множества X'_o , а также инцидентные им дуги.

Для оставшихся вершин необходимо учесть изменение величины ресурса, произошедшее вследствие удаления. С этой целью для каждой вершины $y \in X' \setminus X'_o$ выполним пересчёт её ресурса следующим образом: положим

$$\tilde{q}_y = \tilde{q}_y - \sum_{x \in \Gamma^-(y) \cap X'_o} \tilde{q}_x - \sum_{x \in \Gamma(y) \cap X'_o} \tilde{q}_x.$$

Согласно условию для исходной ресурсной сети $G(X, U)$ с малым ресурсом выполняются все условия теоремы 4. Кроме того, для любой ресурсной сети суммарное количество ресурса на каждом шаге её работы постоянно, поэтому значения, полученные по указанной формуле, неотрицательны.

Полученная в результате новая развёртка $G'_1(X'_1, U'_1)$ будет деревом или лесом, т. е. в ней существует минимум две висячие вершины. Повторяя действия, совершённые на первом шаге, получим величины потоков по дугам, инцидентным висячим вершинам. Используя найденные потоки, найдём количества ресурса, которые должны переместиться из или

в вершины, смежные висячим. При этом все найденные на этом шаге значения в силу выполнения условий теорем 4 и 5 будут неотрицательными.

Повторяя описанный выше процесс, найдём все величины потоков для $\widetilde{G}(\widetilde{X}, \widetilde{U})$, а значит, и в $G(X, U)$.

Докажем, что существуют пропускные способности дуг из S^- , при которых состояние Q' предельное.

Отметим, что поскольку рассматриваемый ресурс малый, для произвольных дуг $(a, x), (a, y) \in S^-$ согласно формуле во второй строке (2) справедливо соотношение пропорциональности

$$r_{ax} \cdot F_{ay} = r_{ay} \cdot F_{ax}. \quad (14)$$

Равенство (14) описывает также ряд частных случаев. Так, например, если величина потока по дуге из S^- равна нулю, то пропускная способность этой дуги из S^- должна быть равной нулю.

Предположим, что $(a, x) \in S^-$, а $(a, y) \in N_S^-$. Поскольку r_{ay} известно, из (14) можно однозначно найти величину r_{ax} . В случае, если помимо указанных выше дуг из a выходят другие дуги из S^- , их пропускные способности находятся аналогично.

Пусть a является началом только дуг множества S^- . Пропускные способности дуг (a, x) можно положить равными $r_{ax} = \lambda F_{ax}$, где $\lambda \geq 1$. При этом из (14) следует, что пропорциональность потоков по этим дугам сохраняется при любом таком значении λ . Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть на частичном подграфе $\widetilde{G}(\widetilde{X}, \widetilde{U})$ в каждый его цикл входит хотя бы одна дуга из N_S^- с началом в некоторой вершине $b \in \widetilde{X}$ такой, что из b выходит хотя бы одна дуга множества N_S^- , конец которой является висячей вершиной. Пусть также для исходной ресурсной сети $G(X, U)$ выполняются все условия теорем 4 и 5. Тогда существуют такие пропускные способности дуг множества S^- , при которых состояние Q' предельное для $G(X, U)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя метод, изложенный в доказательстве леммы 1, построим развёртку для частичного подграфа $\widetilde{G}(\widetilde{X}, \widetilde{U})$.

Аналогично доказательству леммы 1 найдём сначала величины потоков. Пусть (b, z) — дуга из вершины b нижнего слоя развёртки с концом в висячей вершине z . Обозначим через $N_S^-(b) \subset N_S^-$ множество дуг, каждая из которых входит хотя бы в один существующий цикл.

Как и в доказательстве леммы 1, полагаем величину потока по дуге (b, z) равной $F_{bz} = \widetilde{q}_z$. Далее, используя найденную величину F_{bz} , для каждой дуги $(b, y) \in N_S^-(b)$ составим уравнение, аналогичное (14). В результате найдём все F_{by} .

Пусть $N_S(b) = \Gamma(b)$ — множество концов дуг из $N_S^-(b)$. В таком случае количество ресурса, которое должно поступить в некоторую вершину $y \in N_S(b)$ по дугам, отличным от (b, y) , можно определить, полагая

$$\tilde{q}_y := \tilde{q}_y - F_{by}.$$

Аналогично количество ресурса, которое должно выйти из вершины b по дугам, отличным от дуги (b, z) и дуг множества $N_S^-(b)$, находится следующим образом:

$$\tilde{q}_b := \tilde{q}_b - \sum_{v \in N_S(b)} F_{bv}.$$

Удалим дуги множества $N_S^-(b)$ и вершину z из развёртки. Так как каждый цикл развёртки содержит хотя бы одну дугу множества $N_S^-(b)$, после их удаления развёртка превратится в дерево или лес, стало быть, применяя далее метод, описанный в лемме 1, можно найти все неизвестные потоки, а значит, пропускные способности дуг множества S^- . Лемма 2 доказана.

Далее рассмотрим общий случай для нахождения пропускных способностей дуг множества S^- . Пусть для ресурсной сети $G(X, U)$ с малым ресурсом выполняются все условия теорем 4 и 5. Рассмотрим частичный подграф $\tilde{G}(\tilde{X}, \tilde{U})$ ресурсной сети $G(X, U)$ и построим для него развёртку $G'(X', U')$. Применим к ней методы, описанные в леммах 1 и 2, и найдём искомые пропускные способности дуг S^- (все или их часть).

Далее удалим из рассмотрения дуги с найденными характеристиками, выполняя пересчёт величин ресурсов в вершинах развёртки. В оставшейся части развёртки вершины нижнего слоя обозначим через $X_b = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, а верхнего — через $X_t = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $m, n \in \mathbb{N}$ — число вершин нижнего и верхнего слоёв соответственно. Общий вид получившейся развёртки представлен на рис. 2, на котором вершины и дуги изображены в одном стиле, поскольку для дальнейшего рассмотрения не важен тип множеств, к которым они относятся.

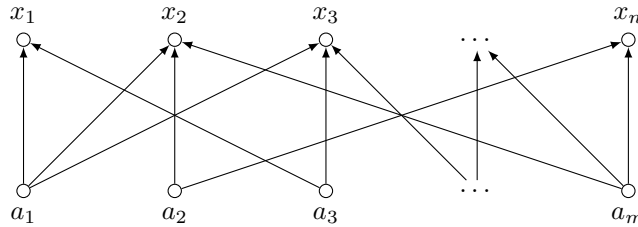


Рис. 2. Общий вид развёртки после применения к $\tilde{G}(\tilde{X}, \tilde{U})$ методов, описанных в леммах 1 и 2

Запишем уравнения, описывающие работу каждой вершины развёртки, используя (1) для случая малого ресурса. Для произвольной вершины a_i нижнего слоя с номером $i \in \overline{1, m}$ уравнение работы имеет вид

$$\sum_{x \in \Gamma(a_i)} F_{a_i x} = \tilde{q}_{a_i}. \quad (15)$$

В свою очередь, для вершины x_j верхнего слоя с номером $j \in \overline{1, n}$ имеем

$$\sum_{a \in \Gamma^-(x_j)} F_{ax_j} = \tilde{q}_{x_j}. \quad (16)$$

Из полученных уравнений вида (15) и (16) составим систему (17). При этом полагаем, что уравнения каждой части будут записаны в порядке возрастания номеров вершин, для которых они составлены:

$$\begin{cases} \sum_{x \in \Gamma(a_i)} F_{a_i x} = \tilde{q}_{a_i}, & i \in \overline{1, m}, \\ \sum_{a \in \Gamma^-(x_j)} F_{ax_j} = \tilde{q}_{x_j}, & j \in \overline{1, n}. \end{cases} \quad (17)$$

Теорема 6. Для любой связной временной развёртки G' система (17) совместна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим систему уравнений (18), полученную из (17) умножением на минус единицу всех уравнений, описанных в первой строке:

$$\begin{cases} \sum_{x \in \Gamma(a_i)} (-F_{a_i x}) = -\tilde{q}_{a_i}, & i \in \overline{1, m}, \\ \sum_{a \in \Gamma^-(x_j)} F_{ax_j} = \tilde{q}_{x_j}, & j \in \overline{1, n}. \end{cases} \quad (18)$$

Система (18) эквивалентна (17), при этом матрицей системы (18) будет матрица инцидентности графа G' . Поскольку развёртка G' является связным графом, ранг её матрицы инцидентности равен $\text{rang } B(G') = n + m - 1$, что на единицу меньше числа строк матрицы $B(G')$. Таким образом, для доказательства совместности нужно показать, что ранг расширенной матрицы $(B(G') \mid C(q))$ системы (18) равен $n + m - 1$, т. е. система всех её вектор-строк линейно зависима.

Рассмотрим сумму всех вектор-строк расширенной матрицы системы (18):

$$\sum_{i=1}^{n+m} (B(G') \mid C(q))_i = \left(0 \quad \dots \quad 0 \mid \sum_{i=1}^n \tilde{q}_{x_i} - \sum_{i=1}^m \tilde{q}_{a_i} \right).$$

Поскольку суммарная величина ресурса в ресурсной сети постоянна, разность в последней компоненте результата последней суммы равна нулю. Следовательно, система (18) совместна. Теорема 6 доказана.

Таким образом, имеет место

Теорема 7. Пусть в регулярной ресурсной сети $G(X, U)$ с малым ресурсом для вершин множества $\Gamma^-(S) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ существуют коэффициенты

$$\lambda_{a_1}, \lambda_{a_2}, \dots, \lambda_{a_m} \in (0, 1] \quad (19)$$

такие, что

$$\sum_{i=1}^m \lambda_{a_i} \bar{p}_{a_i} = Q'_N, \quad (20)$$

а также выполняются следующие условия.

1. Для любого $x \in S$

$$q'_x \leq \sum_{y \in \Gamma^-(x)} q'_y.$$

2. Для любого $x \in \Gamma(\Gamma^-(S)) \setminus S$

$$\sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx} \leq q'_x \leq \sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx} + \sum_{y \in \Gamma^-(x) \cap \Gamma^-(S)} \min\{q'_y, r_{yx}\}.$$

3. Для любого $x \in X \setminus \Gamma(\Gamma^-(S))$

$$q'_x = \sum_{y \in \Gamma^-(x) \setminus \Gamma^-(S)} F_{yx}.$$

4. Для любого $x \in X$

$$q'_x \leq \sum_{y \in \Gamma(x) \cap S} q'_y + \sum_{y \in \Gamma(x) \setminus S} \min\{q'_y, r_{xy}\}.$$

Тогда найдётся набор пропускных способностей дуг множества S^- , для которого существует единственное предельное состояние $Q^* = Q'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим частичный подграф $\widetilde{G}(\widetilde{X}, \widetilde{U})$ ресурсной сети $G(X, U)$, построенный по описанным выше правилам. Максимально упростим его структуру, применяя методы, описанные в леммах 1 и 2. Не нарушая общности, предположим, что в результате упрощения получен связный частичный подграф $\widetilde{G}_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{U}_1)$, в котором содержится хотя бы один цикл. В случае, если $\widetilde{G}_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{U}_1)$ будет содержать несколько компонент связности, для каждой из них рассуждения будут аналогичны.

Построим развёртку $G'(X', U')$ для $\widetilde{G}_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{U}_1)$ так, как было описано ранее, и составим по ней систему уравнений вида (17). Такая система совместна и имеет бесконечно много решений.

Для доказательства осталось показать, что существует хотя бы одно решение системы вида (17) такое, что для любой величины F_{ax} выполняется одно из следующих условий:

(1°) если $x \in S$, то $0 \leq F_{ax} \leq \min\{\tilde{q}_a, \tilde{q}_x\}$;

(2°) если $x \in N$, то $0 < F_{ax} \leq \min\{\tilde{q}_a, \tilde{q}_x, r_{ax}\}$.

С указанной целью каждой вершине $a \in \Gamma^-(N)$ нижнего слоя развёртки G' поставим в соответствие некоторую смежную с ней вершину $x_a \in N$ верхнего слоя G' . Согласно (14) справедливы равенства

$$F_{ay} = \frac{r_{ay}}{r_{ax_a}} \cdot F_{ax_a}, \quad y \in \Gamma(a) \cap N, \quad (21)$$

где в силу того, что $(a, y), (a, x_a) \in N^-$, имеем $r_{ay} \neq 0$ и $r_{ax_a} \neq 0$.

Рассмотрим произвольное уравнение верхней части системы (17):

$$\sum_{y \in \Gamma(a)} F_{ay} = \tilde{q}_a.$$

Перепишем его в виде

$$\sum_{y \in \Gamma(a) \cap S} F_{ay} + \sum_{y \in \Gamma(a) \cap N} F_{ay} = \tilde{q}_a.$$

Подставляя здесь во вторую сумму величины потоков, определённые с помощью соотношений (21), получим

$$\sum_{y \in \Gamma(a) \cap S} F_{ay} + F_{ax_a} \sum_{y \in \Gamma(a) \cap N} \frac{r_{ay}}{r_{ax_a}} = \tilde{q}_a. \quad (22)$$

Положим

$$F_a^{N^-} = F_{ax_a} \sum_{y \in \Gamma(a) \cap N} \frac{r_{ay}}{r_{ax_a}}.$$

Тогда уравнение (22) примет вид

$$\sum_{y \in \Gamma(a) \cap S} F_{ay} + F_a^{N^-} = \tilde{q}_a.$$

Аналогичным образом преобразуем все уравнения системы (17), соответствующие вершинам нижнего слоя $G'(X', U')$. Кроме того, сложим все уравнения указанной системы, описывающие работу вершин верхнего слоя $G'(X', U')$, содержащихся в множестве N . В результате получим

$$\sum_{y \in N} \sum_{a \in \Gamma^-(y)} F_{ay} = \sum_{y \in N} \tilde{q}_y.$$

Так как

$$\sum_{y \in N} \sum_{a \in \Gamma^-(y)} F_{ay} = \sum_{a \in \Gamma^-(N)} \sum_{y \in \Gamma(a) \cap N} F_{ay} = \sum_{a \in \Gamma^-(N)} F_a^{N^-},$$

после перегруппировки слагаемых и замены получим

$$\sum_{a \in \Gamma^-(N)} F_a^{N^-} = \sum_{x \in N} \tilde{q}_x.$$

Объединяя полученные выше уравнения, получим систему

$$\begin{cases} \sum_{x \in \Gamma(a) \cap S} F_{ax} = \tilde{q}_a - F_a^{N^-}, & a \in \Gamma^-(S), \\ \sum_{a \in \Gamma^-(x)} F_{ax} = \tilde{q}_x, & x \in S, \\ \sum_{a \in \Gamma^-(N)} F_a^{N^-} = \sum_{x \in N} \tilde{q}_x. \end{cases} \quad (23)$$

В силу условия теоремы о существовании коэффициентов вида (19), при которых выполняется (20), для каждой вершины $a \in \Gamma^-(N)$ выберем значение $F_a^{N^-}$ так, чтобы выполнялось нижнее равенство в системе (23), для каждой вершины $a \in \Gamma^-(S)$ имело место соотношение

$$0 < F_a^{N^-} \leq \min \left\{ \tilde{q}_a, \sum_{x \in \Gamma(a) \cap N} \min \{ \tilde{q}_x, r_{ax} \} \right\},$$

а для каждой вершины $a \in \Gamma^-(N) \setminus \Gamma^-(S)$ было бы справедливо равенство $F_a^{N^-} = \tilde{q}_a$. Тогда для любой вершины $a \in \Gamma^-(S)$ выполняется неравенство $\tilde{q}_a - F_a^{N^-} \geq 0$.

Таким образом, выбраны значения потоков по всем частично управляемым дугам. Оставшиеся нерассмотренными неизвестные системы (23) соответствуют потокам по управляемым дугам. Заметим, что левые части каждого уравнения представляют собой суммы, поэтому с учётом того, что полученная после подстановки выбранных значений система (23) остаётся совместной (она эквивалентна системе вида (17) для подграфа исходной ресурсной сети, порождённого множеством управляемых вершин S), всегда можно выбрать неотрицательные значения свободных членов из диапазона, указанного в условии (1°), при которых главные члены будут также неотрицательными.

Вместе с тем, для потоков по дугам множества N^- выполняется условие (2°), следовательно, они могут быть определены с помощью соотношений (21) с известными величинами $F_a^{N^-}$.

Таким образом, по известным потокам пропускные способности всех дуг множества S^- могут быть найдены так, как описано в доказательстве леммы 1 с учётом неравенства

$$r_{ax} \geq F_{ax}.$$

Отметим, что для найденных пропускных способностей состояние Q' будет устойчивым, а значит, и предельным в ресурсной сети $G(X, U)$, а поскольку сеть регулярна, согласно теореме 1 предельное состояние Q^* в ней единственно. Следовательно, $Q' = Q^*$. Теорема 7 доказана.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт бюджета Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича ЮФУ. Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Литература

1. Ford L. R., Fulkerson D. R. Constructing maximal dynamic flows from static flows // Oper. Res. 1958. V. 6, No. 3. P. 419–433. DOI: 10.1287/opre.6.3.419.
2. Форд Л. Р., Фалкерсон Д. Р. Потоки в сетях. М.: Мир, 1966. 276 с.
3. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М.: Мир, 1978. 432 с.
4. Aronson J. E. A survey of dynamic network flows // Ann. Oper. Res. 1989. V. 20. P. 1–66. DOI: 10.1007/BF02216922.
5. Fonoberova M. A., Lozovanu D. D. The maximum flow in dynamic networks // Comput. Sci. J. Moldova. 2004. No. 12. P. 387–396.
6. Кузьминова М. В. Периодические динамические графы. Задача о максимальном потоке // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2008. № 5. С. 16–20.
7. Жилиякова Л. Ю. Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах // Автоматика и телемеханика. 2011. № 4. P. 133–143.
8. Жилиякова Л. Ю. Управление предельными состояниями в поглощающих ресурсных сетях // Пробл. упр. 2013. № 3. P. 51–59.
9. Кузнецов О. П., Жилиякова Л. Ю. Двусторонние ресурсные сети — новая потоковая модель // Докл. Акад. наук. 2010. Т. 433, № 5. С. 609–612.
10. Kuznetsov O. P. Nonsymmetric resource networks. The study of limit states // Manage. Prod. Eng. Rev. 2011. V. 2, No. 3. P. 33–39.
11. Скороходов В. А., Ерусалимский Я. М., Муртузалиева С. Ч. Задача нахождения начального состояния ресурсной сети // Итоги науки и техники. Современ. математика и её прил. Тем. обзоры. Т. 209. М.: ВИНТИ РАН, 2022. С. 42–52. DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-42-52.
12. Жилиякова Л. Ю., Чаплинская Н. В. Исследование полных однородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами // Упр. большими системами. Вып. 89. М.: ИПУ РАН, 2021. С. 5–44. DOI: 10.25728/ubs.2021.89.1.
13. Чаплинская Н. В. Исследование эргодических неоднородных ресурсных сетей с «жадными» вершинами // Упр. большими системами. Вып. 93. М.: ИПУ РАН, 2021. С. 5–50. DOI: 10.25728/ubs.2021.93.1.
14. Kuznetsov O. P., Zhilyakova L. Yu. Flows and limit states in bidirectional resource networks // IFAC Proc. Vol. 2011. V. 44, No. 1. P. 14031–14035. DOI: 10.3182/20110828-6-IT-1002.00766.

15. Zhilyakova L. Yu., Koreshkov V. R., Chaplinskaya N. V. Some properties of stochastic matrices and non-homogeneous Markov chains generated by nonlinearities in the resource network model // Mathematics. 2022. V. 10. Article ID 4095. 18 p. DOI: 10.3390/math10214095.
16. Abdulrahman H. N., Erusalimskiy Ya. M. On the realizability of stationary flows in resource networks by flows in classical networks // J. Math. Sci. 2024. V. 280. P. 733–740. DOI: 10.1007/s10958-024-07093-1.
17. Skorokhodov V. A., Erusalimskiy Ya. M. Flows local control in resource networks with a low resource // Math. Stat. 2023. V. 11, No. 2. P. 300–307. DOI: 10.13189/ms.2023.110208.
18. Берж К. Теория графов и её применения. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 320 с.
19. Скороходов В. А., Свиридкин Д. О. Потoki в сильно регулярных периодических динамических ресурсных сетях // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. Математика. Механика. Компьют. науки. 2021. Т. 31, вып. 3. С. 458–470. DOI: 10.35634/vm210308.
20. Жилиякова Л. Ю., Кузнецов О. П. Теория ресурсных сетей. М.: ИЦ РИОР, 2023. 283 с.
21. Скороходов В. А. Задача нахождения порогового значения в эргодической ресурсной сети // Упр. большими системами. Вып. 63. М.: ИПУ РАН, 2016. С. 6–23.

Евсеенко Александр Викторович
Скороходов Владимир Александрович

Статья поступила
11 декабря 2024 г.
После доработки —
15 января 2025 г.
Принята к публикации
22 марта 2025 г.

LOCAL IN-FLOWS CONTROL IN REGULAR RESOURCE NETWORKS WITH A LOW RESOURCE

A. V. Evseenko^a and V. A. Skorokhodov^b

Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science
of the Southern Federal University,
8a Milchakov Street, 344090 Rostov-on-Don, Russia
E-mail: ^aaevseenko@sfedu.ru, ^bvaskorohodov@sfedu.ru

Abstract. The paper is devoted to solving the problem of local in-flows control in regular resource networks with a low resource. For such networks, a set of controlled vertices is specified. The local control problem is to determine such capacities of arcs entering the controlled vertices that the unique limit state of regular resource network Q^* is the closest to the given state Q' . Conditions for the unreachability of the limit state that coincides with the state Q' are obtained. Various configurations of resource networks with respect to the distribution of controlled vertices in them are considered. It is shown that if the conditions for the unreachability of the limit state are not satisfied, then there is such a set of capacities of arcs entering the controlled vertices for which the limit state Q^* is equal to the given state Q' . Illustr. 2, bibliogr. 21.

Keywords: flows in networks, resource network, limit state, limit flow, flow control.

References

1. **L. R. Ford** and **D. R. Fulkerson**, Constructing maximal dynamic flows from static flows, *Oper. Res.* **6** (3), 419–433 (1958), DOI: 10.1287/opre.6.3.419.
2. **L. R. Ford** and **D. R. Fulkerson**, *Flows in Networks* (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1962; Mir, Moscow, 1966 [Russian]).
3. **N. Christofides**, *Graph Theory: An Algorithmic Approach* (Acad. Press, London, 1975; Mir, Moscow, 1978 [Russian]).
4. **J. E. Aronson**, A survey of dynamic network flows, *Ann. Oper. Res.* **20**, 1–66 (1989), DOI: 10.1007/BF02216922.
5. **M. A. Fonoberova** and **D. D. Lozovanu**, The maximum flow in dynamic networks, *Comput. Sci. J. Moldova.*, No. 12, 387–396 (2004).

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **19** (2) (2025).

6. **M. V. Kuzminova**, Periodic dynamic graphs. Maximum flow problem, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Sev.-Kavk. Reg., Estestv. Nauki*, No. 1, 14–19 (2008) [Russian].
7. **L. Yu. Zhilyakova**, Asymmetrical resource networks. I. Stabilization processes for low resources, *Avtom. Telemekh.*, No. 4, 133–143 (2011) [Russian] [*Autom. Remote Control* **72** (4), 798–807 (2011), DOI: 10.1134/S0005117911040102].
8. **L. Yu. Zhilyakova**, The limit states control in absorbing resource networks, *Probl. Upr.*, No. 3, 51–59 (2013) [Russian] [*Autom. Remote Control*. **75** (2), 360–372 (2014), DOI: 10.1134/S0005117914020143].
9. **O. P. Kuznetsov** and **L. Yu. Zhilyakova**, Bidirectional resource networks: A new flow model, *Dokl. Akad. Nauk* **433** (5), 609–612 (2010) [Russian] [*Dokl. Math.* **82**, 643–646 (2010), DOI: 10.1134/S1064562410040368].
10. **O. P. Kuznetsov**, Nonsymmetric resource networks. The study of limit states, *Manage. Prod. Eng. Rev.* **2** (3), 33–39 (2011).
11. **V. A. Skorokhodov**, **Ya. M. Erusalimskiy**, and **S. Ch. Murtuzalieva**, The problem of finding the initial state of a resource network, in *Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Mat. Prilozh., Temat. Obz.*, Vol. 209 (VINITI RAN, Moscow, 2022), pp. 42–52, DOI: 10.36535/0233-6723-2022-209-42-52 [Russian].
12. **L. Yu. Zhilyakova** and **N. V. Chaplinskaya**, Research of complete homogeneous “greedy-vertices” resource networks, in *Upr. Bolsh. Sist.*, Vol. 89 (IPU RAN, Moscow, 2021), pp. 5–44, DOI: 10.25728/ubs.2021.89.1 [Russian].
13. **N. V. Chaplinskaya**, Research of ergodic heterogeneous “greedy-vertices” resource networks, in *Upr. Bolsh. Sist.*, Vol. 93 (IPU RAN, Moscow, 2021), pp. 5–50, DOI: 10.25728/ubs.2021.93.1 [Russian].
14. **O. P. Kuznetsov** and **L. Yu. Zhilyakova**, Flows and limit states in bidirectional resource networks, *IFAC Proc. Vol.* **44** (1), 14031–14035 (2011), DOI: 10.3182/20110828-6-IT-1002.00766.
15. **L. Yu. Zhilyakova**, **V. R. Koreshev**, and **N. V. Chaplinskaya**, Some properties of stochastic matrices and non-homogeneous Markov chains generated by nonlinearities in the resource network model, *Mathematics* **10**, ID 4095 (2022), DOI: 10.3390/math10214095.
16. **H. N. Abdulrahman** and **Ya. M. Erusalimskiy**, On the realizability of stationary flows in resource networks by flows in classical networks, *J. Math. Sci.* **280**, 733–740 (2024), DOI: 10.1007/s10958-024-07093-1.
17. **V. A. Skorokhodov** and **Ya. M. Erusalimskiy**, Flows local control in resource networks with a low resource, *Math. Stat.* **11** (2), 300–307 (2023), DOI: 10.13189/ms.2023.110208.
18. **C. Berge**, *Théorie des graphes et ses applications*, (Dunod, Paris, 1958 [French]; Izd. Inostr. Lit., Moscow, 1962 [Russian]).
19. **V. A. Skorokhodov** and **D. O. Sviridkin**, Flows in strongly regular periodic dynamic resource networks, *Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Kompyut. Nauki* **31** (3), 458–470 (2021), DOI: 10.35634/vm210308 [Russian].

- 20. **L. Yu. Zhilyakova** and **O. P. Kuznetsov**, *Theory of Resource Networks* (ITs RIOR, Moscow, 2023) [Russian].
- 21. **V. A. Skorokhodov**, The problem of finding the threshold value in ergodic resource network, in *Upr. Bolsh. Sist.*, Vol. 63 (IPU RAN, Moscow, 2016), pp. 6–23 (2016) [Russian].

Aleksandr V. Evseenko
Vladimir A. Skorokhodov

Received December 11, 2024

Revised January 15, 2025

Accepted March 22, 2025

РАЗМЕЩЕНИЕ ДРОНОВ ДЛЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОКРЫТИЯ БАРЬЕРА

А. И. Ерзин^{1, a}, А. В. Шадрина^{2, b}

¹ Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

² Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: ^aadilerzin@math.nsc.ru, ^bshadrinanzhela@gmail.com

Аннотация. На плоскости задан отрезок прямой линии (*барьер*), а также координаты депо, в которых нужно разместить мобильные устройства (сенсоры или дроны). Каждый дрон стартует из своего депо к некоторой точке барьера, движется вдоль барьера и возвращается в своё депо, пройдя путь ограниченной длины. Часть барьера, вдоль которой двигался дрон, считается *покрытой* этим дроном. Барьер покрыт, если каждая его точка покрыта хотя бы одним дроном. Требуется разместить ограниченное число дронов в заданном множестве депо и определить траектории дронов таким образом, чтобы покрыть весь барьер и при этом число дронов было минимальным (MinNum), или общая длина путей дронов была минимальной (MinSum), или длина самого протяжённого пути среди всех дронов была минимальной (MinMax).

Ранее авторы исследовали аналогичную задачу с неограниченным числом дронов и предложили псевдополиномиальный алгоритм для её решения, зависящий от длины барьера L . В этой статье рассматривается обобщённая задача, в которой число дронов ограничено, и для построения её оптимального решения предложен алгоритм такой же трудоёмкости. Вместе с тем, в случае неограниченного числа дронов новый алгоритм имеет трудоёмкость в L раз меньше трудоёмкости ранее разработанного алгоритма. Ил. 2, библиогр. 20.

Ключевые слова: покрытие барьера, линейная маршрутизация, мобильное устройство (дрон), ограниченная энергия, трудоёмкость.

Введение

Многие протяжённые объекты (дороги, трубопроводы, ЛЭП и др.) можно представить в виде отрезка прямой на плоскости («барьера»).

Для эффективного функционирования этих объектов необходимо регулярно осуществлять осмотр (мониторинг) их состояния. Для этого не всегда возможно/целесообразно привлекать человека («обходчика»). Часто для этой цели, особенно в удалённых и труднодоступных местах, используются автономные беспилотные мобильные устройства, которые для краткости назовём *дронами*. Для выполнения мониторинга дрон оснащён необходимым оборудованием (видеокамерой, сенсорами, системой позиционирования и т. п.). В подавляющем большинстве публикаций, относящихся к теме, дрон или сенсор собирает информацию в пределах некоторой области, часто круга [1–8]. При этом предполагается, что дрон покрывает эту область. Если требуется осуществить мониторинг протяжённого объекта, то это называют *покрытием барьера*, понимая под ним отрезок прямой линии. Дрон, как правило, имеет ограниченный запас энергии, что влечёт ограничение на длину пути, который он может пройти без восстановления энергии (подзарядки или заправки). В научной литературе рассматриваются задачи оптимального покрытия барьера с использованием трёх критериев: минимизация числа дронов (задача MinNum), минимизация максимальной длины пройденного дроном пути (задача MinMax) и минимизация общей длины путей дронов (задача MinSum).

В настоящей работе рассматривается задача MinSum, в то время как задачи MinNum и MinMax решены нами ранее в [9]. Во многих статьях [2, 4–6, 8, 10–12] рассматривалась задача MinSum в «традиционной» постановке, когда каждый дрон находится в некоторой начальной точке на плоскости (депо) и покрывает круг некоторого радиуса с центром в точке расположения дрона. Для каждого дрона требуется найти такое конечное положение, что барьер покрыт (каждая его точка принадлежит хотя бы одному кругу покрытия) и общая длина путей, пройденных дронами, минимальна [1–3, 5, 7, 8]. Известно, что такая задача NP-трудна, когда круги покрытия дронов разные [2, 3]. Если же круги одинаковые, то сложностной статус задачи не известен. Для последнего случая в [5] предложен алгоритм, который строит $\sqrt{2}$ -приближённое решение задачи с трудоёмкостью $O(m^4)$, где m — число дронов. Позже в [8] трудоёмкость уменьшена до $O(m^2)$.

Ниже рассмотрим «нетрадиционную» постановку задачи MinSum, когда дрон покрывает только точку, в которой он находится. Следовательно, для покрытия части барьера дрон должен стартовать из своего депо, пройти вдоль этой части, после чего вернуться в своё депо. В результате, в евклидовой метрике траектория дрона — это треугольник, одна сторона которого находится на барьере и одна вершина — в депо. Более того, длина траектории ограничена сверху некоторой величиной, зависящей от запаса энергии.

В последнее время дроны находят применение во многих областях, при этом задача маршрутизации дронов ещё недостаточно исследована. В [13] для дронов определена задача маршрутизации и оптимизации траектории (routing and trajectory optimization problem, RTOP). Авторы ввели таксономию и осуществили обзор результатов оптимизации траекторий и статей, посвящённых маршрутизации дронов. В [14] поставлена задача маршрутизации дрона на графе (drone arc routing problem, DARP) и изучена её связь с известной задачей маршрутизации почтальона на графе (postman arc routing problems, PARP). В статье [15] предложены две задачи маршрутизации с ограничением на длину пути и изучены потенциальные преимущества от гибкого назначения начального и конечного депо для каждого дрона.

Настоящая работа продолжает исследование, начатое в [16], где доказаны некоторые свойства решения в случае, когда в каждом депо находится один дрон. Авторы на основе динамического программирования предложили эффективную реализацию для построения допустимого решения в прямоугольной метрике с трудоёмкостью $O(m^2)$, а также указали частные случаи, в которых построенное покрытие оптимально.

Новизна полученных результатов. В отличие от [16], в этой статье число дронов в каждом депо — искомая величина. В [9] число дронов в каждом депо также подлежит определению, вместе с тем общее их число неограниченно, при этом предложены алгоритмы для решения задач MinNum, MinMax и MinSum. Если предположить, что каждый дрон покрывает отрезок барьера с целочисленными границами длины не менее 1, то для задачи MinSum в [9] предложен алгоритм трудоёмкости $O(mL^3)$, где m — число депо, а L — длина барьера. В этом случае наиболее трудоёмкой процедурой оказывается препроцессинг, в ходе которого вычисляется минимальная суммарная длина траекторий для дронов каждого депо, покрывающих произвольный отрезок $[a, b] \subseteq [0, L]$.

В постановке ниже рассматриваем более общую задачу, когда число дронов ограничено сверху некоторым натуральным n . Для решения этой задачи разработаны два подхода на основе динамического программирования. Без учёта препроцессинга первый алгоритм ищет наилучшее покрытие *оптимальным* числом дронов n^* с трудоёмкостью $O(L^2)$ — это линейная трудоёмкость от длины входной информации. Если $n^* \leq n$, то построенное покрытие оптимально и для случая ограниченного числа дронов. Иначе второй алгоритм с трудоёмкостью $O(mnL^2)$ строит оптимальное покрытие. Более быстрый алгоритм удалось получить благодаря более эффективному препроцессингу трудоёмкости $O(mnL)$. Если каждый дрон покрывает отрезок барьера длины не менее 1, то $n \leq L$. В результате при неограниченном числе дронов трудоёмкость решения

задачи уменьшена в L раз, тем самым для более общего случая получен алгоритм той же трудоёмкости, что и для постановки из [9], в которой имеется ограничение на число используемых дронов.

1. Постановка задачи

Пусть барьер — это отрезок $[0, L]$ на оси OX . На плоскости заданы координаты депо $d_i = (x_i, y_i)$, $y_i \geq 0$, $i \in D$, $|D| = m$, в которых нужно разместить не более n дронов. Пронумеруем депо слева направо согласно их абсциссам, т. е. $i < j$ тогда и только тогда, когда $x_i < x_j$. Очевидно, что при равенстве абсцисс депо с большей ординатой можно исключить. Пусть длина пути каждого дрона ограничена величиной $q > 0$. Для покрытия барьера траектория каждого дрона начинается в своём депо, проходит по отрезку барьера и заканчивается в своём депо. Часть барьера, вдоль которой прошёл дрон, считается *покрытой* этим дроном. Будем говорить, что дроны из депо i *покрывают* отрезок $[a_i, b_i] \subseteq [0, L]$, если каждый из них стартует из депо i , перемещается вдоль барьера и возвращается в своё депо, проходя путь не длиннее q , а совокупно дроны покрывают отрезок $[a_i, b_i]$.

Определение 1. *Покрывание S барьера $[0, L]$ — это множество таких отрезков $[a_i, b_i] \subseteq [0, L]$, что каждый из них покрывается дронами одного депо $i \in D$, выполняется условие $\bigcup_{i \in D} [a_i, b_i] \supseteq [0, L]$ и траектория каждого дрона не длиннее q .*

Для задания покрытия S необходимо определить число дронов в каждом депо, отрезок барьера $[a_i, b_i]$, покрываемый дронами каждого депо $i \in D$, а также траектории всех дронов.

Задача MinSum. *Требуется разместить не более n дронов в m депо так, чтобы покрыть весь барьер $[0, L]$ и общая длина траекторий дронов была минимальной.*

Очевидно, что в евклидовой метрике оптимальная траектория каждого дрона — это треугольник с одной вершиной в депо, с одной стороной на барьере и с периметром не более q . Более того, в оптимальном покрытии, естественно, отрезки, покрываемые разными дронами, не пересекаются.

2. Алгоритмы

В этом разделе представим алгоритмы для решения задачи MinSum. Для проверки существования решения достаточно запустить алгоритм A_{MinNum} из [9], который определяет минимальное число дронов $n_{\min}$, покрывающих барьер. Решение задачи MinSum существует, если $n_{\min} \leq n$.

Далее нам понадобятся следующие определения и утверждения.

Определение 2. Покрытие, в котором для всех $i, j \in D$ неравенство $b_i \leq a_j$ выполняется тогда и только тогда, когда $i < j$, называется *покрытием, сохраняющим порядок*.

Лемма 1 [9]. Существует оптимальное покрытие, в котором дроны из одного депо покрывают один отрезок барьера.

Лемма 2 [9]. Для задачи MinSum существует оптимальное покрытие, сохраняющее порядок.

Пусть $g(k, a, b)$ — минимальная суммарная длина траекторий k дронов из одного депо, покрывающих отрезок $[a, b]$.

Лемма 3 [9]. Для любого фиксированного отрезка $[a, b] \subseteq [0, L]$ функция $g(k, a, b)$ монотонно возрастает с ростом k .

Из приведённых выше утверждений следует, что в оптимальном покрытии любой отрезок барьера покрывается *минимальным* количеством дронов *одного* депо. Для определения минимального числа дронов $n_i(a, b)$ из депо i , покрывающих отрезок $[a, b]$, достаточно учесть, что все дроны, кроме, возможно, одного, проходят путь максимальной длины q .

В [9] для $i \in D$ введена функция $f_i(a, b) \geq 0$, равная минимальной суммарной длине траекторий $n_i(a, b)$ дронов из депо i , покрывающих отрезок $[a, b]$ (при этом по определению $f_i(a, a) = 0$). Предположим, что нам известны значения функций $f_i(a, b)$ и $n_i(a, b)$ для всех $i = 1, \dots, t$ и целых $a = 0, 1, \dots, L-1$ и $b = a+1, \dots, L$. Введём новую функцию

$$f(a, b) = \min_{i \in D} f_i(a, b) = f_{k(a,b)}(a, b).$$

Существует депо с номером $k(a, b) \in D$ такое, что $n_{k(a,b)}(a, b)$ дронов из этого депо покрывают отрезок $[a, b]$, проходя совместно минимальное расстояние. Таким образом, любое разбиение барьера на отрезки однозначно определяет покрытие. Следовательно, необходимо решить следующую задачу оптимального разбиения отрезка на подотрезки:

$$\sum_{i=1}^p f(z_{i-1}, z_i) \rightarrow \min_{z, p}, \quad (1)$$

$$0 = z_0 < z_1 < \dots < z_p = L, \quad (2)$$

где неизвестное p — это число подотрезков, т. е. требуется оптимально разбить барьер на оптимальное число подотрезков.

Задача (1), (2) хорошо исследована. Метод динамического программирования для её решения стал известен не позже 1970-х гг. (см., например, монографию [17]). Позже алгоритм был несколько раз переоткрыт [18–20]. Для описания алгоритма — назовём его A_1 — предположим,

что L и параметр $l \in [0, L]$ целые. Обозначим через $S(l)$ минимальную длину траекторий дронов, покрывающих отрезок $[0, l]$, $l = 0, 1, \dots, L$.

2.1. Алгоритм A_1 . Приведём схему алгоритма динамического программирования с одним прямым и одним обратным ходом. Во время выполнения прямого хода для каждого значения параметра $l = 0, 1, \dots, L$ найдём такую самую правую точку разбиения $z(l) < l$, что общая длина траекторий дронов, покрывающих отрезок $[0, l]$, минимальна.

Прямой ход. Воспользуемся рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} S(0) &= 0, \\ S(l) &= \min_{0 \leq z < l} \{f(z, l) + S(z)\} = f(z(l), l) + S(z(l)), \quad l = 1, \dots, L, \end{aligned} \quad (3)$$

запоминая условно оптимальную точку разбиения $z(l) < l$ для каждого $l = 1, \dots, L$.

ОБРАТНЫЙ ХОД. На этом этапе определим число точек разбиения p^* в оптимальном решении, а также само оптимальное разбиение. Положим сначала оптимальное число дронов, участвующих в покрытии, равным $n^* = 0$, а число точек разбиения равным $p^* = 0$. После завершения работы прямого хода при $l = L$ были найдены оптимальное значение целевой функции $S^* = S(L)$ (1), а также последняя (правая) точка разбиения $z(L)$. Значит, отрезок $[z(L), L]$ покрывается $n_{k(z(L), L)}(z(L), L)$ дронами из депо $k(z(L), L)$, и мы полагаем $p^* = p^* + 1$ и $n^* = n^* + n_{k(z(L), L)}(z(L), L)$. Теперь правый конец барьера равен $l = z(L)$. Так как во время выполнения прямого хода запомнили $z(l)$ для всех $l = 1, \dots, L$, мы знаем последнюю (правую) точку разбиения отрезка $[0, l]$, которая является предпоследней точкой разбиения барьера $[0, L]$. Если $z(l) > 0$, то полагаем $p^* = p^* + 1$, $n^* = n^* + n_{k(z(l), l)}(z(l), l)$, $l = z(l)$ и продолжаем построение оптимального разбиения, пока не получим $z(l) = 0$. В результате будет найдено оптимальное разбиение барьера z^* на p^* частей, а также оптимальное число дронов n^* , участвующих в покрытии.

Лемма 4. Трудоемкость алгоритма A_1 равна $O(L^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что соотношения (3) справедливы также и для действительных значений переменных. Однако в этом случае получим континуум значений функций. Если же параметры и переменные целые, то при выполнении прямого хода для каждого значения l находится последняя точка разбиения $z(l) < l$ отрезка $[0, l]$. Так как $l = 0, 1, \dots, L$, трудоемкость прямого хода равна $O(L^2)$. Обратный ход менее трудоёмкий. Поскольку условно оптимальные точки разбиения $z(l) < l$ хранятся для всех $l = 1, \dots, L$, для восстановления оптимального разбиения достаточно проделать $O(L)$ операций. Лемма 4 доказана.

Замечание 1. Трудоёмкость алгоритма A_1 линейно зависит от длины входной информации $O(L^2)$, которая определяется числом значений функции $f(a, b)$. Однако в терминах входа исходной задачи алгоритм псевдополиномиальный. В любом случае трудоёмкость алгоритма A_1 в m раз меньше трудоёмкости алгоритма A_{MinSum} , предложенного в [9] для решения такой же задачи.

Пока ничего не сказано о трудоёмкости вычисления значений функций $f_i(a, b)$. Менее трудоёмкий способ по сравнению с процедурой, описанной в [9], будет предложен ниже в соответствующем разделе.

Если $n^* \leq n$, то задача MinSum решена. Иначе необходимо применить следующий алгоритм A_2 .

2.2. Алгоритм A_2 . Описываемый ниже алгоритм применяется в случае, когда оптимальное число дронов n^* , полученное в результате работы алгоритма A_1 , окажется больше n . Для построения решения в этом случае предлагается следующий алгоритм двухпараметрического динамического программирования A_2 . Пусть функция $S_i(l, N)$ равна минимальной длине траекторий N дронов из депо $1, \dots, i$, которые покрывают отрезок $[0, l]$. Из леммы 3 следует, что если отрезок может быть покрыт дронами из одного депо, то он покрывается минимальным числом дронов. Следовательно, если разбиение барьера известно, то число дронов, участвующих в покрытии, определяется однозначно. Заметим, что число дронов, покрывающих барьер, может оказаться меньше n . Обозначим через $N_i(l, N) \leq N$ количество дронов в первых i депо, где параметр $N = 0, 1, \dots, n$ — это максимальное число дронов, которые можно разместить в депо $1, \dots, i$.

В решении, построенном алгоритмом A_2 , барьер разбивается на m частей. При этом некоторые точки разбиения $0 = z_0 \leq z_1 \leq \dots \leq z_m = L$ могут совпадать, т. е. в некоторых депо может не быть ни одного дрона. Это значит, что дроны такого депо покрывают пустой отрезок.

ПРЯМОЙ ХОД. Для всех $i = 1, \dots, m$, $l = 0, 1, \dots, L$ и $N = 0, 1, \dots, n$ вычислим

$$S_1(l, N) = \begin{cases} f_1(0, l), & \text{если } N_1(l, N) = n_1(0, l) \leq N, \\ +\infty & \text{иначе,} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} S_i(l, N) &= \min_{z=0, \dots, l} \{f_i(z, l) + S_{i-1}(z, N - n_i(z, l))\} = \\ &= f_i(z_i(l, N), l) + S_{i-1}(z_i(l, N), N - n_i(z_i(l, N), l)), \end{aligned} \quad (5)$$

если $N_i(l, N) = n_i(z_i(l, N), l) + N_{i-1}(z_i(l, N), N - n_i(z_i(l, N), l)) \leq N$, и положим $S_i(l, N) = +\infty$ в противном случае.

Запомним $z_i(l, N)$, $i = 1, \dots, m$, $l = 0, 1, \dots, L$, $N = 1, \dots, n$.

ОБРАТНЫЙ ХОД. По завершении прямого хода оказывается найденным оптимальное значение функционала $S^* = S_m(L, n)$, количество дронов $N^* = N_m(L, n)$ и последняя (правая) точка разбиения $z_{m-1}^* = z(l)$. В результате найдём отрезок $[z_{m-1}^*, L]$ (который может быть пустым), покрытый $n_m(z_{m-1}^*, L)$ дронами депо m . Это значит, что отрезок $[0, z_{m-1}^*]$ покрывается дронами депо $1, \dots, m-1$. Положим $l = z_{m-1}^*$. При выполнении прямого хода найдены условно оптимальные точки разбиения $z_i(l, N)$ для всех целочисленных значений параметров. Следовательно, следующую справа точку оптимального разбиения можем определить равенством $z_{m-2}^* = z(l, N^* - n_m(z_{m-1}^*, L))$. Продолжая процесс, найдём оптимальное разбиение всего барьера на m частей.

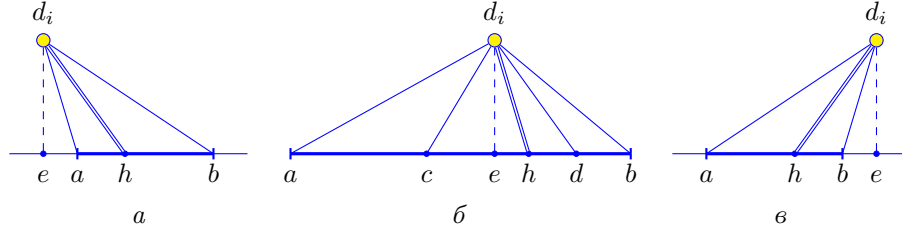
Лемма 5. Трудоемкость алгоритма A_2 равна $O(mnL^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рекуррентные соотношения (4), (5) справедливы для произвольных значений параметров. Однако для реализуемости алгоритма полагаем их целыми. Тогда при выполнении прямого хода для любых $i = 1, \dots, m$, $l = 0, 1, \dots, L$ и $N \leq n$ значение $S_i(l, N)$ находится путём перебора целых l и N . Следовательно, трудоемкость прямого хода равна $O(mnL^2)$. Для восстановления оптимального решения на обратном ходе выполняется m шагов. На каждом шаге определяется одна точка разбиения. В результате трудоемкость обратного хода равна $O(m)$, а следовательно, трудоемкость алгоритма A_2 равна $O(mnL^2)$. Лемма 5 доказана.

Замечание 2. На вход алгоритма A_2 подаются значения функций $f_i(a, b)$, которых $O(mL^2)$. Трудоемкость алгоритма в n раз больше длины входа, а n — это число. Следовательно, даже без учёта трудоемкости вычисления значений функций $f_i(a, b)$, алгоритм псевдополиномиальный, но с учётом неравенства $n \leq L$ трудоемкость алгоритма A_2 не превосходит трудоемкости алгоритма из [9] для решения более общей задачи.

3. Вычисление функций $n_i(a, b)$ и $f_i(a, b)$

Для реализации описанных выше алгоритмов необходимо знать значения функций $f_i(a, b)$ и $n_i(a, b)$ для всех $i = 1, \dots, m$, $a = 0, 1, \dots, L-1$ и $b = a+1, \dots, L$, т. е. в общей сложности $O(mL^2)$ значений. Нахождение этих значений — препроцессинг, который необходимо выполнить до запуска алгоритмов A_1 и A_2 и который во многом определяет трудоемкость решения задачи. В [9] предложен алгоритм для нахождения значений $f_i(a, b)$ с трудоемкостью $O(mnL^2)$. Покажем, что вычисление значений функций $f_i(a, b)$ и $n_i(a, b)$ для каждого депо $i \in D$ можно осуществить с трудоемкостью $O(nL)$.

Рис. 1. Иллюстрация вычисления $f_i(a, b)$

Сначала вычислим $n_i(a, b)$. Так как $O(n)$ дронов могут участвовать в покрытии отрезка, для каждой пары значений a и b нужно найти $n_i(a, b)$, для чего потребуется $O(nL^2)$ операций. Для уменьшения трудоёмкости мы предлагаем вычислять $n_i(a, b)$ по-другому. Для каждого значения $a \in \{0, 1, \dots, L-1\}$ будем искать отрезок максимальной длины $[a, b(n_i)]$, который покрывается $n_i \in \{1, \dots, n\}$ дронами. Поскольку в оптимальном решении для покрытия отрезка $[a, b]$ используется минимальное число дронов из одного депо, можно определить $n_i(a, b)$ для всех $b > a$. Для этого положим $n_i(a, b) = n_i$, $b \in (b(n_i - 1), b(n_i)]$.

Первым найдём отрезок $[a, b(1)]$, который покрывает один дрон с максимальной длиной траектории q . Покрытый отрезок содержит некоторое число целых $b \in (a, b(1)]$. Зная $b(1)$, найдём максимальный отрезок $[b(1), b(2)]$, который покрывает второй дрон. Добавляя дроны, определим минимальное число дронов, покрывающих отрезок $[a, b]$ для всех целых $b = a + 1, \dots, L$. Следовательно, для вычисления $n_i(a, b)$ для всех $i = 1, \dots, m$, $a = 0, \dots, L-1$ и $b = 1, \dots, L$ потребуется $O(Lnm)$ операций.

Зная $n_i(a, b)$, можно вычислить значения $f_i(a, b)$. Для каждого депо $d_i = (x, y)$ существует три варианта расположения относительно отрезка $[a, b]$: (а) $x < a$, (б) $x \in [a, b]$ и (в) $x > b$ (рис. 1). В случаях (а) и (в) каждый из $n_i(a, b) - 1$ дронов проходит путь максимальной длины q , покрывая вместе отрезок $[h, b]$ в случае (а) и отрезок $[a, h]$ в случае (в), а один дрон покрывает отрезок $[a, h]$, двигаясь по ребру треугольника ad_ih в случае (а) (рис. 1а), и отрезок $[h, b]$, двигаясь по ребру треугольника hd_ib , в случае (в) (рис. 1в).

В случае (б) (рис. 1б) отрезки $[a, c]$ и $[d, b]$ покрываются $n_i(a, c) + n_i(d, b)$ дронами, каждый из которых проходит путь длины q . Если отрезок $[c, d]$ может покрыть один дрон, то он его покрывает. Иначе отрезок $[c, d]$ будет покрыт двумя дронами так, что линия hd_i имеет минимальный наклон (т. е. она находится максимально близко к перпендикуляру d_ie). Точку h легко найти. Если один дрон может покрыть отрезок $[c, e]$, а другой — отрезок $[e, d]$, то d_ih — это перпендикуляр к барьеру, т. е. $h = e$. Иначе один из этих отрезков не может быть покрыт одним дроном.

Пусть это отрезок $[e, d]$. Тогда один дрон покрывает отрезок максимальной длины $[h, d]$, а другой — оставшийся отрезок $[c, h]$.

В результате получаем, что трудоёмкость вычисления значений функций $n_i(a, b)$ и $f_i(a, b)$ для всех $i \in D$, a и b равна $O(Lnm)$. Если число дронов неограниченно, то при естественном предположении, что каждый дрон покрывает отрезок длины не менее 1, трудоёмкость предложенного алгоритма равна $O(mL^2)$.

3.1. Пример. Рассмотрим пример на рис. 2, в котором число депо равно $m = 3$, число дронов не превосходит $n = 3$, барьер имеет длину $L = 156$, длина траектории каждого дрона не превосходит $q = 140$ и местоположение депо $d_1 = (18, 10)$, $d_2 = (78, 10\sqrt{35})$ ($|dd_2| = |d_2h| = 60$), $d_3 = (138, 10)$.

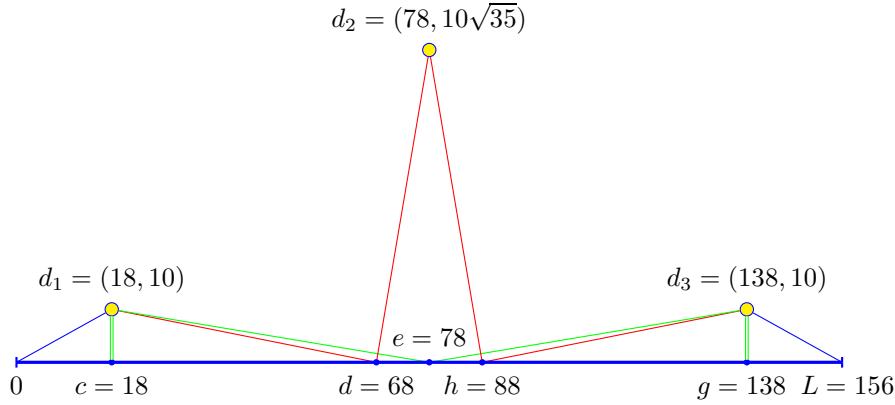


Рис. 2. Иллюстрация к примеру

Так как всего три депо, барьер будет разбит на 3 или менее частей, и каждая часть будет покрыта дронами из одного депо. Поскольку мы ищем покрытие, сохраняющее порядок, дроны из депо 1 должны покрыть левый отрезок $[0, x]$, а дроны из депо 3 должны покрыть правый отрезок $[y, L]$. При этом, конечно, может получиться, что в каких-то депо не будет размещено ни одного дрона.

Сначала найдём минимальное число дронов $n_i(a, b) \leq n = 3$ в каждом депо $i = 1, 2, 3$, покрывающих отрезок $[a, b]$, $a = 0, 1, \dots, 155$, $b = a + 1, \dots, 156$. Напомним, что один дрон покрывает отрезок длины не менее 1. Дроны из депо 1 максимально могут покрыть отрезок $[0, e]$ при $e = 78$. В то же время один дрон из депо 1 покрывает отрезок $[0, b]$, если $b \leq d = 68$, а для покрытия отрезка $[0, b]$ при $b \in [d + 1, e]$ необходимо два дрона в депо 1. Значит, $n_1(0, d) = 1$, $n_1(0, b) = 2$, $b = d + 1, \dots, e$, и $n_1(0, b) = +\infty$, когда $b > e$. Далее определим $n_2(a, b)$ для $a \in [41, 114]$

и всех допустимых целых $b > a$. В частности, имеем $n_2(d, h) = 1$. Так как в покрытии, сохраняющем порядок, дроны из депо 3 должны покрывать отрезок с правой границей L , нам требуются значения $n_3(a, L)$. Депо 3 расположено симметрично относительно депо 1, поэтому $n_3(a, L) = +\infty$ для $a < e$, $n_3(a, L) = 2$ для $a \in [e + 1, h - 1]$ и $n_3(a, L) = 1$ для $a \geq h$.

Затем найдём минимальную длину траекторий $f_i(a, b)$ дронов из каждого депо $i = 1, 2, 3$, покрывающих отрезок $[a, b]$. Из депо 1 будет покрыт некоторый отрезок $[0, b]$. Пока $n_1(0, b) = 1$, длина пути одного дрона $f_1(0, b)$ равна периметру треугольника $0d_1b$. Если $n_1(0, b) = 2$, то для минимизации суммарной длины путей двух дронов нужно, чтобы траекториями обоих дронов были прямоугольные треугольники с общей стороной d_1c — перпендикуляром к $[0, L]$. Тогда длина путей двух дронов равна

$$f_1(0, b) = |0d_1| + 2|d_1c| + |d_1b| + |0b|.$$

Так как отрезок с правым концом $b > d$ дроны из депо 1 покрыть не могут, положим $f_1(0, b) = +\infty$, $b > d$. Далее вычислим $f_2(a, b)$ для всех допустимых $a \in [41, 114]$ и $b > a$. В частности, получим $f_2(d, h) = q = 140$. Вместе с тем для $a \in [e, h - 1]$ находим

$$f_3(a, L) = |ad_3| + 2|d_3g| + |d_3L| + |aL|,$$

а для $a \in [h, L - 1]$ —

$$f_3(a, L) = |hd_3| + 2|d_3g| + |d_3L| + |aL|.$$

Наконец, найдём значения функции $f(a, b) = \min_{i=1,2,3} f_i(a, b)$ для всех целых $a \in [0, L - 1]$ и $b \in [a + 1, L]$. Получим $f(a, b) = f_1(a, b)$ для $b \leq e$ и $f(a, b) = f_3(a, b)$ для $a \geq e$.

Применим алгоритм A_1 . Получим решение, в котором в депо 1 и 3 размещено по 2 дрона. Дроны из депо 1 покрывают отрезок $[0, e]$, а дроны депо 2 — отрезок $[e, L]$, а общая длина траекторий дронов равна 340. Однако количество использованных дронов больше максимального их числа $n = 3$. Следовательно, построенное алгоритмом A_1 покрытие недопустимо, и нужно применить алгоритм A_2 .

Алгоритм A_2 учитывает ограничение на общее число дронов. В нашем примере ни одно депо не может иметь более 1 дрона. В противном случае барьер не будет покрыт тремя дронами. Из-за симметрии крайних депо один дрон из депо 1 покроет отрезок $[0, d]$, один дрон из депо 3 покроет отрезок $[h, L]$, а дрон из депо 2 покроет отрезок $[d, h]$. При этом общая длина траекторий дронов равна 420.

Заключение

В статье рассмотрена задача покрытия барьера, представляющего собой отрезок $[0, L]$ на плоскости. Покрытие осуществляется одинаковыми мобильными устройствами (дронами) с ограниченным запасом энергии, который определяет максимальную длину q траектории дрона. Каждый дрон стартует из своего депо, движется вдоль отрезка барьера длины не менее 1 и возвращается в своё депо, проделав путь длины не более q . Отрезок барьера, вдоль которого двигался дрон, считается покрытым этим дроном. В задаче MinSum требуется разместить не более n дронов в m депо и определить траекторию каждого дрона так, чтобы покрыть весь барьер, а общая длина траекторий дронов была минимальна.

Ранее в [16] рассматривалась задача MinSum, в которой в каждом депо находился один дрон и оставалось определить траекторию каждого дрона. Для такой постановки задачи не всегда существует оптимальное покрытие, сохраняющее порядок, поэтому динамическое программирование не всегда строит оптимальное решение. Если число дронов в каждом депо — это искомая величина (переменная), то всегда существует оптимальное покрытие, сохраняющее порядок [9]. В [9] предложен алгоритм динамического программирования, который решает задачу с трудоёмкостью $O(mL^3)$, если общее число дронов неограниченно.

В настоящей статье предложены два новых алгоритма A_1 и A_2 . Алгоритм A_1 находит оптимальное покрытие оптимальным числом дронов n^* с трудоёмкостью $O(L^2)$. Если $n^* \leq n$, то это также решение для рассматриваемой задачи MinSum. Если $n^* > n$, то с трудоёмкостью $O(nmL^2)$ алгоритм A_2 строит оптимальное решение. Так как каждый дрон покрывает отрезок длины не менее 1, то $n \leq L$. Следовательно, трудоёмкость алгоритма A_2 не превосходит трудоёмкости алгоритма, предложенного в [9], при этом алгоритм A_2 решает более общую задачу.

Для описанных алгоритмов входом являются функции $n_i(a, b)$ — минимальное число дронов и $f_i(a, b)$ — минимальная суммарная длина траекторий дронов из депо i , покрывающих отрезок $[a, b]$. Также для алгоритма A_1 вычисляется функция $f(a, b) = \min_{i=1, \dots, m} f_i(a, b)$. В результате

длина входа алгоритма A_1 равна $O(L^2)$, следовательно, алгоритм имеет линейную трудоёмкость от длины входа. Однако вычисление значений функций $n_i(a, b)$ и $f_i(a, b)$, т. е. препроцессинг достаточно трудоёмкий. В [9] не рассматривались функции $n_i(a, b)$ и все $O(mL^2)$ значений функций $f_i(a, b)$ были найдены с трудоёмкостью $O(mL^3)$. В этой статье нам удалось уменьшить трудоёмкость вычисления значений функций $n_i(a, b)$ и $f_i(a, b)$ до $O(nmL) \leq O(mL^2)$.

В этой статье, как и в [9], для определения трудоёмкости рассмотрен случай, когда дроны покрывают отрезок $[a, b]$ при целых a и b , а один

дрон покрывает отрезок длины не менее 1. Конечно, длина отрезка, покрываемого одним дроном, может быть произвольным числом $\delta > 0$. Если δ рациональное, то умножение на знаменатель приведёт к нужным свойствам. Однако в оптимальном решении дроны одного депо могут покрыть отрезок с нецелыми концевыми точками, и тогда алгоритмы A_1 и A_2 построят приближённое решение. В дальнейшем планируется оценить точность решения, построенного с использованием шага δ , и разработать FPTAS.

Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева (проект № FWNF-2022-0019). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Литература

1. **Bhattacharya B., Burmester M., Hu Y., Kranakis E.** Optimal movement of mobile sensors for barrier coverage of a planar region // *Theor. Comput. Sci.* 2009. V. 410, No. 52. P. 5515–5528. DOI: 10.1007/978-3-540-85097-7_10.
2. **Czyzowicz J., Kranakis E., Krizanc D.** [et al.]. On minimizing the sum of sensor movements for barrier coverage of a line segment // *Ad-hoc, mobile and wireless networks. Proc. 9th Int. Conf. (Edmonton, Canada, Aug. 20–22, 2010)*. Heidelberg: Springer, 2010. P. 29–42. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 6288). DOI: 10.1007/978-3-642-14785-2_3.
3. **Dobrev S., Durocher S., Eftekhari M.** [et al.]. Complexity of barrier coverage with relocatable sensors in the plane // *Theor. Comput. Sci.* 2015. V. 579. P. 64–73. DOI: 10.1016/j.tcs.2015.02.006.
4. **Wang H., Zhang X.** Minimizing the maximum moving cost of interval coverage // *Algorithms and computation. Proc. 26th Int. Symp. (Nagoya, Japan, Dec. 9–11, 2015)*. Heidelberg: Springer, 2015. P. 188–198. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 9472). DOI: 10.1007/978-3-662-48971-0_17.
5. **Cherry A., Gudmundsson J., Mestre J.** Barrier coverage with uniform radii in 2D // *Algorithms for sensor systems. Rev. Sel. Pap. 13th Int. Symp. Algorithms and Experiments for Wireless Sensor Networks (Vienna, Austria, Sept. 4–8, 2017)*. Cham: Springer, 2017. P. 57–69. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 10718). DOI: 10.1007/978-3-319-72751-6_5.
6. **Erzin A. I., Lagutkina N. A.** FPTAS for barrier covering problem with equal circles in 2D // *Optim. Lett.* 2021. V. 15, No. 4. P. 1397–1406. DOI: 10.1007/s11590-020-01650-8.

7. **Erzin A. I., Lagutkina N. A., Ioramishvili N.** Barrier covering in 2D using mobile sensors with circular coverage areas // Learning and intelligent optimization. Rev. Sel. Pap. 13th Int. Conf. (Chania, Greece, May 27–31, 2019). Cham: Springer, 2020. P. 342–354. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 11968). DOI: 10.1007/978-3-030-38629-0_28.
8. **Erzin A. I., Lagutkina N. A.** Barrier coverage problem in 2D // Algorithms for sensor systems. Rev. Sel. Pap. 14th Int. Symp. Algorithms and Experiments for Wireless Sensor Networks (Helsinki, Finland, Aug. 23–24, 2018). Cham: Springer, 2019. P. 118–130. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 11410). DOI: 10.1007/978-3-030-14094-6_8.
9. **Erzin A. I., Shadrina A. V.** Optimal placement of mobile sensors for the distance-constrained line routing problem // Mathematical optimization theory and operations research: Recent trends. Rev. Sel. Pap. 23th Int. Conf. (Omsk, Russia, June 30–July 6, 2024). Cham: Springer, 2024. P. 172–184. (Commun. Comput. Inf. Sci.; V. 2239). DOI: 10.1007/978-3-031-73365-9_12.
10. **Bar-Noy A., Rawitz D., Terlecky P.** «Green» barrier coverage with mobile sensors // Algorithms and complexity. Proc. 9th Int. Conf. (Paris, France, May 20–22, 2015). Cham: Springer, 2015. P. 33–46. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 9079). DOI: 10.1007/978-3-319-18173-8_2.
11. **Benkoczi R., Friggstad Z., Gaur D., Thom M.** Minimizing total sensor movement for barrier coverage by non-uniform sensors on a line // Algorithms for sensor systems. Rev. Sel. Pap. 11th Int. Symp. Algorithms and Experiments for Wireless Sensor Networks (Patras, Greece, Sept. 17–18, 2015). Cham: Springer, 2015. P. 98–111. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 9536). DOI: 10.1007/978-3-319-28472-9_8.
12. **Andrews A. M., Wang H.** Minimizing the aggregate movements for interval coverage // Algorithmica. 2017. V. 78, No. 1. P. 47–85. DOI: 10.1007/s00453-016-0153-8.
13. **Coutinho W. P., Battarra M., Fliege J.** The unmanned aerial vehicle routing and trajectory optimisation problem, a taxonomic review // Comput. Ind. Eng. 2018. V. 120. P. 116–128. DOI: 10.1016/j.cie.2018.04.037.
14. **Campbell J. F., Corberan A., Plana I., Sanchis J. M.** Drone arc routing problems // Networks. 2018. V. 72, No. 4. P. 543–559. DOI: 10.1002/net.21858.
15. **Kek A. G. H., Cheu R. L., Meng Q.** Distance-constrained capacitated vehicle routing problems with flexible assignment of start and end depots // Math. Comput. Model. 2008. V. 47. P. 140–152. DOI: 10.1016/j.mcm.2007.02.007.
16. **Erzin A. I., Plotnikov R. V.** Distance-constrained line routing problem // Optimization and applications. Rev. Sel. Pap. 10th Int. Conf. (Petrovac, Montenegro, Sep. 30–Oct. 4, 2019). Cham: Springer, 2020. P. 43–55. (Commun. Comput. Inf. Sci.; V. 1145). DOI: 10.1007/978-3-030-38603-0_4.
17. **Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т.** Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978. 334 с.

18. **Vidal R. V. V.** Optimal partition of an interval—The discrete version // Applied simulated annealing. Heidelberg: Springer, 1993. P. 291–312. (Lect. Notes Econ. Math. Syst.; V. 396). DOI: 10.1007/978-3-642-46787-5_15.
19. **Jackson B., Scargle J. D., Barnes D.** [et al.]. An algorithm for optimal partitioning of data on an interval // IEEE Signal Proces. Lett. 2005. V. 12, No. 2. P. 105–108. DOI: 10.1109/LSP.2001.838216.
20. **Tilli P., Zucco D.** Optimal partitioning of an interval and applications to Sturm–Liouville eigenvalues // J. Differ. Equ. 2019. V. 268, No. 8. P. 4900–4919. DOI: 10.1016/j.jde.2019.12.026.

Ерзин Адиль Ильясович
Шадрина Анжела Викторовна

Статья поступила
10 февраля 2025 г.
После доработки —
11 марта 2025 г.
Принята к публикации
22 апреля 2025 г.

DRONE PLACEMENT FOR OPTIMAL BARRIER COVERAGE

A. I. Erzin^{1, a} and *A. V. Shadrina*^{2, b}¹ Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia² Novosibirsk State University,
2 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, RussiaE-mail: ^aadilerzin@math.nsc.ru, ^bshadrinanzhela@gmail.com

Abstract. On the plane, a straight line segment (*barrier*) is specified, as well as the location of depots in which mobile devices (sensors or drones) are to be placed. Each drone starts from and returns to its depot and is able to travel along the barrier passing through a limited-length path. The part of the barrier along which a drone moved is *covered* by this drone. The barrier is covered if each point of it is covered by at least one drone. It is necessary to place some number of drones in each depot in order to cover the entire barrier and minimize the number of drones used (MinNum), or to minimize the total length of paths travelled by drones (MinSum), or to minimize the maximum distance traveled by a drone (MinMax).

Previously, the authors investigated a similar problem with an unlimited number of drones and, for its solution, proposed a pseudo-polynomial algorithm depending on the length of the barrier L . In this paper, a generalized problem with a limited number of drones is considered and, to construct an optimal solution, we propose an algorithm with the same complexity. However, in the case of an unlimited number of drones, the new algorithm has complexity L times less than the previous one. Illustr. 2, bibliogr. 20.

Keywords: barrier covering, linear routing, mobile device (drone), limited energy, optimization.

References

1. **B. Bhattacharya, M. Burmester, Y. Hu, and E. Kranakis**, Optimal movement of mobile sensors for barrier coverage of a planar region, *Theor. Comput. Sci.* **410** (52), 5515–5528 (2009), DOI: 10.1007/978-3-540-85097-7_10.

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **19** (2) (2025).

2. **J. Czyzowicz, E. Kranakis, D. Krizanc**, [et al.], On minimizing the sum of sensor movements for barrier coverage of a line segment, in *Ad-Hoc, Mobile and Wireless Networks* (Proc. 9th Int. Conf., Edmonton, Canada, Aug. 20–22, 2010) (Springer, Heidelberg, 2010), pp. 29–42 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 6288), DOI: 10.1007/978-3-642-14785-2_3.
3. **S. Dobrev, S. Durocher, M. Eftekhari**, [et al.], Complexity of barrier coverage with relocatable sensors in the plane, *Theor. Comput. Sci.* **579**, 64–73 (2015), DOI: 10.1016/j.tcs.2015.02.006.
4. **H. Wang and X. Zhang**, Minimizing the maximum moving cost of interval coverage, in *Algorithms and Computation* (Proc. 26th Int. Symp., Nagoya, Japan, Dec. 9–11, 2015) (Springer, Heidelberg, 2015), pp. 188–198 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9472), DOI: 10.1007/978-3-662-48971-0_17.
5. **A. Cherry, J. Gudmundsson, and J. Mestre**, Barrier coverage with uniform radii in 2D, in *Algorithms for Sensor Systems* (Rev. Sel. Pap. 13th Int. Symp. Algorithms and Experiments for Wireless Sensor Networks, Vienna, Austria, Sept. 4–8, 2017) (Springer, Cham, 2017), pp. 57–69 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 10718), DOI: 10.1007/978-3-319-72751-6_5.
6. **A. I. Erzin and N. A. Lagutkina**, FPTAS for barrier covering problem with equal circles in 2D, *Optim. Lett.* **15** (4), 1397–1406 (2021), DOI: 10.1007/s11590-020-01650-8.
7. **A. I. Erzin, N. A. Lagutkina, and N. Ioramishvili**, Barrier covering in 2D using mobile sensors with circular coverage areas, in *Learning and Intelligent Optimization* (Rev. Sel. Pap. 13th Int. Conf., Chania, Greece, May 27–31, 2019) (Springer, Cham, 2020), pp. 342–354 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 11968), DOI: 10.1007/978-3-030-38629-0_28.
8. **A. I. Erzin and N. A. Lagutkina**, Barrier coverage problem in 2D, in *Algorithms for Sensor Systems* (Rev. Sel. Pap. 14th Int. Symp. Algorithms and Experiments for Wireless Sensor Networks, Helsinki, Finland, Aug. 23–24, 2018) (Springer, Cham, 2019), pp. 118–130 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 11410), DOI: 10.1007/978-3-030-14094-6_8.
9. **A. I. Erzin and A. V. Shadrina**, Optimal placement of mobile sensors for the distance-constrained line routing problem, in *Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends* (Rev. Sel. Pap. 23th Int. Conf., Omsk, Russia, June 30–July 6, 2024) (Springer, Cham, 2024), pp. 172–184 (Commun. Comput. Inf. Sci., Vol. 2239), DOI: 10.1007/978-3-031-73365-9.
10. **A. Bar-Noy, D. Rawitz, and P. Terlecky**, “Green” barrier coverage with mobile sensors, in *Algorithms and Complexity* (Proc. 9th Int. Conf., Paris, France, May 20–22, 2015) (Springer, Cham, 2015), pp. 33–46 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9079), DOI: 10.1007/978-3-319-18173-8_2.
11. **R. Benkoczi, Z. Friggstad, D. Gaur, and M. Thom**, Minimizing total sensor movement for barrier coverage by non-uniform sensors on a line, in *Algorithms for Sensor Systems* (Rev. Sel. Pap. 11th Int. Symp. Algorithms and Experiments for Wireless Sensor Networks, Patras, Greece, Sept. 17–18, 2015) (Springer, Cham, 2015), pp. 98–111 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9536), DOI: 10.1007/978-3-319-28472-9_8.

12. **A. M. Andrews** and **H. Wang**, Minimizing the aggregate movements for interval coverage, *Algorithmica* **78** (1), 47–85 (2017), DOI: 10.1007/s00453-016-0153-8.
13. **W. P. Coutinho**, **M. Battarra**, and **J. Fliege**, The unmanned aerial vehicle routing and trajectory optimisation problem, a taxonomic review, *Comput. Ind. Eng.* **120**, 116–128 (2018), DOI: 10.1016/j.cie.2018.04.037.
14. **J. F. Campbell**, **A. Corberan**, **I. Plana**, and **J. M. Sanchis**, Drone arc routing problems, *Networks* **72** (4), 543–559 (2018), DOI: 10.1002/net.21858.
15. **A. G. H. Kek**, **R. L. Cheu**, and **Q. Meng**, Distance-constrained capacitated vehicle routing problems with flexible assignment of start and end depots, *Math. Comput. Model.* **47**, 140–152 (2008), DOI: 10.1016/j.mcm.2007.02.007.
16. **A. I. Erzin** and **R. V. Plotnikov**, Distance-constrained line routing problem, in *Optimization and Applications* (Rev. Sel. Pap. 10th Int. Conf., Petrovac, Montenegro, Sep. 30–Oct. 4, 2019) (Springer, Cham, 2020), pp. 43–55 (Commun. Comput. Inf. Sci., Vol. 1145), DOI: 10.1007/978-3-030-38603-0_4.
17. **V. L. Beresnev**, **Eh. Kh. Gimadi**, and **V. T. Dementyev**, *Extremal Problems of Standardization* (Nauka, Novosibirsk, 1978) [Russian].
18. **R. V. V. Vidal**, Optimal partition of an interval—The discrete version, in *Applied Simulated Annealing*, (Springer, Heidelberg, 1993), pp. 291–312 (Lect. Notes Econ. Math. Syst., Vol. 396), DOI: 10.1007/978-3-642-46787-5_15.
19. **B. Jackson**, **J. D. Scargle**, **D. Barnes**, [et al.], An algorithm for optimal partitioning of data on an interval, *IEEE Signal Proces. Lett.* **12** (2), 105–108 (2005), DOI: 10.1109/LSP.2001.838216.
20. **P. Tilli** and **D. Zucco**, Optimal partitioning of an interval and applications to Sturm–Liouville eigenvalues, *J. Differ. Equ.* **268** (8), 4900–4919 (2019), DOI: 10.1016/j.jde.2019.12.026.

Adil I. Erzin
Anzhela V. Shadrina

Received February 10, 2025
Revised March 11, 2025
Accepted April 22, 2025

О СООТНОШЕНИИ ДВУХ КЛАССОВ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ
ДЕРЕВЬЕВ С ЗАДАННОЙ СТЕПЕННОЙ
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ

С. А. Круподерова^а, А. Д. Курносов^б

Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет),
Институтский пер., 9, 141700 Долгопрудный, Россия
E-mail: ^аkrupoderova.sa@phystech.edu, ^бkurnosov@phystech.edu

Аннотация. Вершины графа, смежные с листьями, назовём *опорными*. В работе исследуется, как могут соотноситься между собой два класса экстремальных деревьев, имеющих одну и ту же последовательность степеней вершин: класс деревьев, реализующих минимум числа опорных вершин и класс деревьев, реализующих минимум числа доминирования. Заметную роль здесь играют две величины, определяемые через степенную последовательность: число Слэйтера, предложенное Слэйтером в качестве нижней оценки числа доминирования, и предложенная Курносовым нижняя оценка числа опорных вершин дерева. В работе полностью решена задача сравнения классов в случае, когда максимумом из двух величин является вторая. Ил. 2, библиогр. 14.

Ключевые слова: степенная последовательность, дерево, доминирующее множество, число доминирования, лист, висячая вершина, опорная вершина.

Введение

В работе рассматриваются простые неориентированные графы. Для произвольной пары смежных или совпадающих вершин v и w будем говорить, что вершина v *покрывается* вершиной w (или w *покрывает* v). Подмножество D вершин графа G называется *доминирующим*, если каждая вершина графа покрывается некоторой вершиной D . Таким образом, любая вершина графа либо принадлежит доминирующему множеству, либо у неё есть сосед из доминирующего множества. Число доминирования $\gamma(G)$ — это размер наименьшего доминирующего множества графа G .

При оценке различных инвариантов графа часто используется его степенная последовательность: Андрианттиана [1] рассмотрел деревья с заданной степенной последовательностью, на которых достигаются экстремальные значения некоторых перечислительных инвариантов графа, таких как индекс Хосойи; Бесси и Ротенбах [2] оценивали экстремальные значения хроматического числа в графах с фиксированной степенной последовательностью; Рао [3] оценил кликовое число через степенную последовательность; а число независимости оценивали, например, Фаварон, Махео, Сакле [4], Григгс и Клейтман [5], Пеппер [6].

В 1992 г. Слэйтер [7] представил следующую нижнюю оценку числа доминирования, выраженную через специальную величину sl , в настоящее время именуемую *числом Слэйтера*.

Теорема 1 [7]. Пусть граф G имеет невозрастающую степенную последовательность $(d_1, d_2, \dots, d_n)$. Тогда $\gamma(G) \geqslant sl(G)$, где

$$sl(G) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^k (d_i + 1) \geqslant n \right\}.$$

Оценки числа доминирования для заданной степенной последовательности приводились и при дополнительных ограничениях на структуру графов: Гентнер, Хеннинг и Ротенбах [8, 9] ограничились рассмотрением лесов с предписанными степенными последовательностями (в тех же работах приведены оценки числа независимости); Курносов и вовсе сузил круг рассматриваемых графов до деревьев [10], также им была исследована нижняя оценка числа связного доминирования на классе связных графов с заданной степенной последовательностью [11].

В данной работе рассматриваемыми классами графов являются множества деревьев с фиксированными степенными последовательностями.

Вершины графа, смежные с листьями назовём *опорными*. Множество опорных вершин графа G обозначим через $H(G)$. Также $L(G)$ — множество листьев в G , а $S(G)$ — подграф G , порождённый вершинами $V(G) \setminus (H(G) \cup L(G))$.

Ясно, что висячую вершину в доминирующем множестве графа можно заменить смежной ей опорной вершиной (в случае отсутствия в графе изолированных рёбер), не потеряв свойства доминирования. Неудивительно поэтому, что при исследовании наименьших доминирующих множеств часто в том или ином виде рассматривается связь таких множеств с множеством опорных вершин [8, 10–13], как, например, в следующем утверждении.

Лемма 1 [10]. В любом связном графе G , имеющем не менее трёх вершин, существует такое доминирующее множество D размера $\gamma(G)$, для которого $D \cap L(G) = \emptyset$. Для такого D выполнено $D \supseteq H(G)$.

В дальнейшем доминирующее множество графа G , не содержащее ни одного листа, будем называть *безлистным* доминирующим множеством. Как видно из леммы 1, в любом дереве T хотя бы с тремя вершинами выполнено $\gamma(T) \geq |H(T)|$ и, кроме того, для вычисления $\gamma(T)$ достаточно выяснить, сколько минимум вершин из $S(T)$ надо добавить к $H(T)$, чтобы полученное множество покрывало все вершины $S(T)$.

Следовательно, довольно естественным представляется рассмотрение связи между классом деревьев с заданной степенной последовательностью $\mathbf{d}$, имеющих экстремальное значение числа доминирования среди всех деревьев со степенной последовательностью $\mathbf{d}$, и классом деревьев с той же степенной последовательностью, имеющих аналогичное экстремальное значение величины $|H(T)|$.

В настоящей работе частично решена задача для минимальных значений γ и $|H|$.

1. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

Приведём обозначения и необходимые утверждения из более ранних работ, которыми далее воспользуемся для формулирования и доказательства основных результатов.

Через $\mathcal{N}_G(v)$ будем обозначать множество соседей, а через $\deg_G(v)$ — степень вершины v в графе G . *Прходными* будем называть вершины степени два. Если $(d_1, \dots, d_n)$ — степенная последовательность некоторого графа G , то будем говорить, что G *реализует* эту последовательность.

Неубывающую последовательность натуральных чисел длины n будем называть *n -последовательностью*. Введём следующие обозначения для n -последовательности $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$:

- $n_k(\mathbf{d})$ — число членов последовательности $\mathbf{d}$, равных k ;
- $n_{\geq k}(\mathbf{d})$ — число членов последовательности $\mathbf{d}$, не меньших чем k ;
- $n_{\leq k}(\mathbf{d})$ — число членов последовательности $\mathbf{d}$, не превосходящих k .

В этих обозначениях будем иногда опускать аргумент $\mathbf{d}$, если его вид очевиден из контекста.

Сокращённой будем называть непустую n -последовательность, состоящую из чисел d_i , $1 \leq i \leq n$, вида $2 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Сокращённую n -последовательность обычно будем обозначать через $\tilde{\mathbf{d}}$. Для сокращённой n -последовательности $\tilde{\mathbf{d}}$ положим

$$l(\tilde{\mathbf{d}}) = \sum_{i=1}^n d_i - 2(n-1).$$

Обозначим через $\mathcal{T}_{\tilde{\mathbf{d}}}$ множество всех деревьев, реализующих последовательность $1, 1, \dots, 1, d_1, d_2, \dots, d_n$, в которой ровно $l(\tilde{\mathbf{d}})$ единиц.

Если существует реализация последовательности, являющаяся деревом, то соответствующая последовательность называется *древесной*. Широко известен следующий критерий древесности n -последовательностей, легко доказываемый по индукции.

Теорема 2 (см., например, [14, теорема 47.2]). *Последовательность положительных целых чисел $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ может быть реализована деревом тогда и только тогда, когда выполнено равенство $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$.*

Для произвольного дерева T определим *усечение* T как дерево T' , получающееся из T удалением всех листьев. Само дерево T будем при этом называть *расширением* дерева T' . В дальнейшем будем придерживаться именно такого обозначения для усечения T .

Лемма 2 [10]. Пусть $\tilde{\mathbf{d}}$ — произвольная сокращённая n -последовательность $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Тогда множество деревьев $\mathcal{T}_{\tilde{\mathbf{d}}}$ непусто.

Ясно, что каждому дереву хотя бы с тремя вершинами соответствует сокращённая n -последовательность $\tilde{\mathbf{d}} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ степеней нелистовых вершин, а число листьев дерева равно $l(\tilde{\mathbf{d}})$, что следует из теоремы 2. Лемма 2 и теорема 2 говорят также об обратном: каждой сокращённой n -последовательности $\tilde{\mathbf{d}} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ соответствует непустое множество деревьев $\mathcal{T}_{\tilde{\mathbf{d}}}$ хотя бы с тремя вершинами, у которых степени нелистовых вершин образуют в точности последовательность $\tilde{\mathbf{d}}$; число листьев во всех таких деревьях равно $l(\tilde{\mathbf{d}})$. Тем самым изучение классов $\mathcal{T}_{\tilde{\mathbf{d}}}$ равносильно изучению всех возможных деревьев хотя бы с тремя вершинами и заданными степенными последовательностями.

Введём обозначения

$$\gamma_{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) = \min\{\gamma(T) \mid T \in \mathcal{T}_{\tilde{\mathbf{d}}}\},$$

$$|H|_{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) = \min\{|H(T)| \mid T \in \mathcal{T}_{\tilde{\mathbf{d}}}\},$$

в которых будем иногда опускать аргумент $\tilde{\mathbf{d}}$, когда его вид ясен из контекста. Также введём в рассмотрение два класса экстремальных деревьев

$$\mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) = \{T \in \mathcal{T}_{\tilde{\mathbf{d}}} \mid \gamma(T) = \gamma_{\min}(\tilde{\mathbf{d}})\},$$

$$\mathcal{T}_H^{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) = \{T \in \mathcal{T}_{\tilde{\mathbf{d}}} \mid |H(T)| = |H|_{\min}(\tilde{\mathbf{d}})\},$$

которые сравниваются в настоящей работе.

Величину $\text{sl}(G)$ естественным образом распространим на неубывающую *сокращённую* n -последовательность $\tilde{\mathbf{d}} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, воспользовавшись тем, что $n + l(\tilde{\mathbf{d}})$ есть число вершин в деревьях из класса $\mathcal{T}_{\tilde{\mathbf{d}}}$:

$$\text{sl}(\tilde{\mathbf{d}}) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=n-k+1}^n (d_i + 1) \geq n + l(\tilde{\mathbf{d}}) \right\}.$$

Важной нижней оценкой обоих параметров $|\mathbf{H}|$ и γ является следующая величина, введённая Курносовым в [10] и определяемая через число листьев в деревьях класса $\mathcal{T}_{\tilde{\mathbf{d}}}$ (отметим, что при $n = 1$ данная величина не определена):

$$\text{lv}(\tilde{\mathbf{d}}) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=n-k+1}^n (d_i - 1) \geq l(\tilde{\mathbf{d}}) \right\}.$$

Величины $\text{sl}(\tilde{\mathbf{d}})$ и $\text{lv}(\tilde{\mathbf{d}})$ можно эквивалентно переопределить следующим образом:

$$\text{sl}(\tilde{\mathbf{d}}) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{n-k} (d_i + 1) \leq 2n - 2 \right\}, \quad (1)$$

$$\text{lv}(\tilde{\mathbf{d}}) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{n-k} (d_i - 1) \leq n - 2 \right\}. \quad (2)$$

Именно этими величинами определяется минимальное значение числа доминирования в классе деревьев с заданной степенной последовательностью:

Теорема 3 [10]. Пусть $\tilde{\mathbf{d}} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ — сокращённая n -последовательность. Тогда

$$\gamma_{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) = \max\{\text{sl}(\tilde{\mathbf{d}}), \text{lv}(\tilde{\mathbf{d}})\}.$$

При доказательстве теоремы 3 в [10] получен следующий результат, важный для сравнения классов $\mathcal{T}_{\mathbf{H}}^{\min}(\tilde{\mathbf{d}})$ и $\mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\tilde{\mathbf{d}})$.

Лемма 3 [10]. Для любого дерева $T \in \mathcal{T}_{\tilde{\mathbf{d}}}$ с сокращённой степенной n -последовательностью $\tilde{\mathbf{d}}$ при $n > 1$ выполнено неравенство

$$|\mathbf{H}(T)| \geq \text{lv}(\tilde{\mathbf{d}}).$$

Также приведём подробное описание конструкции экстремального дерева из доказательства теоремы 3 (справедливость всех соотношений, на которых основана данная конструкция, обоснована в [10]). Она используется для получения основных результатов настоящей работы.

Конструкция [10]. Пусть дана сокращённая n -последовательность $\tilde{\mathbf{d}} = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, $2 \leq d_1 < n$. Тогда дерево $\tilde{T}_{\min} \in \mathcal{T}_{\tilde{\mathbf{d}}}$, для которого

$$\gamma(\tilde{T}_{\min}) = \gamma_{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) = r = \max\{\text{sl}(\tilde{\mathbf{d}}), \text{lv}(\tilde{\mathbf{d}})\},$$

может быть построено, например, следующим образом. Рассмотрим множество вершин $V = \{v_1, \dots, v_n\}$. Пусть

$$V_2 = \{v_i \in V \mid i \leq n_2\}, \quad V_3 = \{v_i \in V \mid i > n - r\}.$$

Построим такое дерево из класса $\mathcal{T}_{\tilde{\mathbf{d}}}$ с множеством нелистовых вершин V , в котором множество V_3 будет наименьшим доминирующим.

1. Пусть $n_2 \geq n - r$. Заметим, что тогда все $n - r$ первых членов n -последовательности являются двойками и $n - r \leq 2(r - 1)$ (см. [10, с. 71]). Соединим все n вершин в цепь в следующем порядке:

$$v_{n-r+1}, v_1, v_2, v_{n-r+2}, v_3, v_4, v_{n-r+3}, \dots, v_{n-r}, v_{n-r+\lceil \frac{n-r}{2} \rceil + 1}, \dots, v_n.$$

Тем самым в этой цепи между вершинами v_{n-r+i} и $v_{n-r+i+1}$ лежат ровно две вершины v_{2i-1} и v_{2i} для каждого $1 \leq i \leq \lceil \frac{n-r}{2} \rceil - 1$. При $i = \lceil \frac{n-r}{2} \rceil$ между v_{n-r+i} и $v_{n-r+i+1}$ лежат вершины v_{n-r-1} и v_{n-r} , когда $n - r$ чётно, и только одна вершина v_{n-r} , когда $n - r$ нечётно. Далее после вершины $v_{n-r+\lceil \frac{n-r}{2} \rceil + 1}$ идут все оставшиеся вершины в порядке возрастания номеров вплоть до вершины v_n .

Искомое дерево $\tilde{T}_{\min}$ получим как расширение построенной цепи: присоединим к каждой вершине v_i столько листьев, чтобы выполнялось $\deg_{\tilde{T}_{\min}}(v_i) = d_i$. Тогда все вершины v_i ($1 \leq i \leq n - r$) имеют степень 2 и по построению не соединены с листьями. С другой стороны, каждая из этих вершин соединена с некоторой вершиной $v_j \in V_3$. В таком случае множество V_3 действительно доминирующее.

2. Пусть $n_2 < n - r$, т. е. множество вершин с номерами $n_2 + 1, n_2 + 2, \dots, n - r$ пусто.

Соединим последовательно вершины $v_{n_2+1}, v_{n_2+2}, \dots, v_{n-r}$ так, чтобы они образовывали простую цепь, и обозначим её через P . Далее будем поочерёдно, начиная с v_{n_2+1} , соединять вершины из P с вершинами из V_2 так, чтобы каждая вершина из V_2 соединялась не более чем с одной вершиной в P и чтобы степень каждой вершины v_i ($n_2 + 1 \leq i \leq n - r$) в итоге не превзошла $d_i - 1$. Всего к вершинам из P мы присоединим

$$\min \left\{ \sum_{i=n_2+1}^{n-r} (d_i - 3) + 2, n_2 \right\} \text{ вершин из } V_2. \text{ Дополним степень каждой}$$

вершины v_i текущего дерева до d_i , присоединив к ним вершины из множества V_3 так, что вершины V_3 будут висячими в получившемся дереве $\tilde{T}$. Заметим, что в $\tilde{T}$ у каждой вершины v_i при $i \leq n - r$ будет сосед из V_3 ,

при этом незадействованных вершин из V_3 будет ровно

$$n - 2 - \sum_{i=1}^{n-r} (d_i - 1) \geq 0.$$

Как видно, вершин из V_3 действительно хватает для построения $\tilde{T}$. Также из описания конструкции в [10] следует, что число оставшихся вершин из V_3 есть по крайней мере половина от оставшихся вершин из V_2 . Это значит, что можно соединить все оставшиеся вершины в цепь так, что один конец u этой цепи будет из V_3 , другой конец — из V_2 (если оно непусто), и в этой цепи не найдётся трёх подряд идущих вершин из V_2 . Соединим конец цепи, отличный от u , с некоторым листом $\tilde{T}$ (в котором все листья лежат в множестве V_3) так, чтобы он был смежен с концом цепи P .

В итоге в полученном дереве T' каждая вершина v_i ($1 \leq i \leq n - r$) имеет степень d_i и при этом имеет хотя бы одного соседа из V_3 . Вершины из V_3 имеют степень не выше 2. Восстановим по усечённому дереву T' дерево $\tilde{T}_{\min} \in \mathcal{T}_{\tilde{\mathbf{d}}}$, добавив к вершинам из V_3 необходимое число листьев (добиваемся равенства $\deg_{\tilde{T}_{\min}}(v_i) = d_i$), очевидно, отличное от нуля. Тогда V_3 является доминирующим множеством размера r и, кроме того, совпадает с $H(\tilde{T}_{\min})$. Тем самым искомое дерево $\tilde{T}_{\min}$ построено.

Теперь рассмотрим операции по перестроению графа, применявшиеся в [10] и используемые в настоящей работе.

Для произвольного графа G , в котором выбраны два непересекающихся по концам рёбра tu и vw , назовём X_{vw}^{tu} -операцией действие, заключающееся в удалении рёбер tu и vw и проведении рёбер uv и tw .

Пусть в графе G выбраны вершины u, v, w, s, t (допустимо совпадение t и u , но не остальных) такие, что $uv, vw, st \in E(G)$. Назовём Y_{uvw}^{st} -операцией действие, заключающееся в удалении из графа рёбер uv, vw, st и добавлении рёбер uw, sv, vt .

В произвольном дереве T между любыми двумя вершинами существует единственный путь. Последовательность вершин $v_1, v_2, \dots, v_k$ будем называть T -упорядоченной, если путь в T от вершины v_1 к вершине v_k проходит через каждую из вершин v_i ($1 \leq i \leq k$), причём порядок их следования такой же, как в последовательности (т. е. при $1 \leq i < j \leq k$ вершина v_i встречается на пути раньше, чем v_j).

Указанные X - и Y -операции позволяют преобразовать одно дерево в другое с той же степенной последовательностью, если применять их к определённым образом упорядоченным последовательностям вершин.

Лемма 4 [10]. Пусть $T \in \mathcal{T}_{\tilde{\mathbf{d}}}$, а T^X и T^Y — графы, получающиеся из T с помощью X_{vw}^{tu} - и Y_{xyz}^{pq} -операций соответственно для T -упорядоченных

последовательностей вершин (t, u, w, v) и (p, q, x, y, z) . Тогда $T^X, T^Y \in \mathcal{T}_{\tilde{\mathbf{d}}}$ и при этом

$$|\gamma(T^X) - \gamma(T)| \leq 1, \quad |\gamma(T^Y) - \gamma(T)| \leq 1.$$

2. Основные результаты

2.1. Сравнение величин sl и lv . Поскольку именно наибольшей из величин sl и lv определяется значение $\gamma_{\min}$, рассмотрим, как они соотносятся между собой в зависимости от степенной последовательности.

Утверждение 1. Если $\tilde{\mathbf{d}}$ — сокращённая n -последовательность, причём $n > 1$ и

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} d_i < \left\lfloor \frac{3n-3}{2} \right\rfloor,$$

то $\text{sl}(\tilde{\mathbf{d}}) \geq \text{lv}(\tilde{\mathbf{d}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\text{lv} > \text{sl}$. По определению (1) величины sl имеем

$$\sum_{i=1}^{n-\text{sl}} (d_i + 1) \leq 2n - 2.$$

Из определения (2) величины lv следует, что для $\text{sl} < \text{lv}$ выполняется

$$\sum_{i=1}^{n-\text{sl}} (d_i - 1) \geq n - 1.$$

Тогда

$$n - 1 + n - \text{sl} \leq \sum_{i=1}^{n-\text{sl}} d_i \leq 2n - 2 - n + \text{sl},$$

откуда видно, что $n + 1 \leq 2\text{sl}$. Возьмём ровно $n - k$ слагаемых, где $k = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Для такого числа слагаемых нарушается неравенство из определения lv . Получаем

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} d_i \geq n + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 1.$$

В итоге из того, что $\text{lv} > \text{sl}$, следует, что

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} d_i \geq \left\lfloor \frac{3n-3}{2} \right\rfloor.$$

Таким образом, если

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} d_i < \left\lfloor \frac{3n-3}{2} \right\rfloor,$$

то $sl \geq lv$. Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Если $\tilde{\mathbf{d}}$ — сокращённая n -последовательность, причём $n > 1$ и

$$\sum_{i=1}^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} d_i > \left\lceil \frac{3n-3}{2} \right\rceil,$$

то $lv(\tilde{\mathbf{d}}) \geq sl(\tilde{\mathbf{d}})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $sl > lv$. По определению lv имеем

$$\sum_{i=1}^{n-lv} (d_i - 1) \leq n - 2.$$

Из определения sl следует, что для $lv < sl$ выполняется

$$\sum_{i=1}^{n-lv} (d_i + 1) \geq 2n - 1.$$

Тогда

$$n + lv - 1 \leq \sum_{i=1}^{n-lv} d_i \leq 2n - 2 - lv,$$

откуда видно, что $2lv \leq n - 1$. Возьмём $n - k$ слагаемых, где $k = \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$. Тогда для $n - k = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ первых степеней выполнено неравенство из определения lv :

$$\sum_{i=1}^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} d_i \leq n + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil - 2.$$

В итоге из того, что $sl > lv$, следует, что

$$\sum_{i=1}^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} d_i \leq \left\lceil \frac{3n-3}{2} \right\rceil.$$

Таким образом, если

$$\sum_{i=1}^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} d_i > \left\lceil \frac{3n-3}{2} \right\rceil,$$

то $lv \geq sl$. Утверждение 2 доказано.

Стоит отметить, что к любой сокращённой n -последовательности $\tilde{\mathbf{d}}$ при $n > 1$ всегда применимо по крайней мере одно из утверждений 1 и 2. Действительно, пусть к $\tilde{\mathbf{d}}$ не применимо утверждение 1. Тогда выполняется цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{3n-3}{2} \right\rfloor &\leq \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} d_i \leq \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} d_i - d_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} \leq \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} d_i - 2, \\ \sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} d_i &\geq \left\lfloor \frac{3n-3}{2} \right\rfloor + 2 > \left\lceil \frac{3n-3}{2} \right\rceil, \end{aligned}$$

а значит, к $\tilde{\mathbf{d}}$ применимо утверждение 2.

Таким образом, с учётом теоремы 3 может быть сформулирована

Теорема 4. Если для сокращённой n -последовательности $\tilde{\mathbf{d}}$, $n > 1$, выполнено неравенство

$$\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} d_i < \left\lfloor \frac{3n-3}{2} \right\rfloor,$$

то $\gamma_{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) = \text{sl}(\tilde{\mathbf{d}})$, иначе $\gamma_{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) = \text{lv}(\tilde{\mathbf{d}})$.

Неформально утверждения 1 и 2 и теорема 4 говорят о том, что если в «первой половине» сокращённой n -последовательности $\tilde{\mathbf{d}}$ значения её членов «в среднем меньше 3» (т. е. в первой половине последовательности относительно большое число «двоек» и не слишком много вершин «большой» степени), то $\gamma_{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) = \text{sl}(\tilde{\mathbf{d}})$, иначе $\gamma_{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) = \text{lv}(\tilde{\mathbf{d}})$. В частности, из утверждения 2 следует, что если $n > 1$ и $d_1 \geq 3$, то $\gamma_{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) = \text{lv}(\tilde{\mathbf{d}})$.

Отметим также то, что к сокращённой n -последовательности $\tilde{\mathbf{d}}$ иногда могут быть применимы оба утверждения. Например, при $n = 2$ вы-

полняются сразу и неравенство $\sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} d_i = 0 < 1 = \left\lfloor \frac{3n-3}{2} \right\rfloor$, и неравен-

ство $\sum_{i=1}^{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil} d_i = d_1 + d_2 \geq 4 > 2 = \left\lceil \frac{3n-3}{2} \right\rceil$. В таких случаях получаем $\gamma_{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) = \text{lv}(\tilde{\mathbf{d}}) = \text{sl}(\tilde{\mathbf{d}})$.

2.2. Соотношение классов $\mathcal{T}_H^{\min}(\tilde{\mathbf{d}})$ и $\mathcal{T}_\gamma^{\min}(\tilde{\mathbf{d}})$ при $\text{lv}(\tilde{\mathbf{d}}) \geq \text{sl}(\tilde{\mathbf{d}})$.

В данном случае оказывается, что неравенство $\text{lv}(\tilde{\mathbf{d}}) \geq \text{sl}(\tilde{\mathbf{d}})$ влечёт включение как минимум одного класса в другой, что показывает

Лемма 5. Если для сокращённой n -последовательности $\tilde{\mathbf{d}}$ выполнено $\text{lv}(\tilde{\mathbf{d}}) \geq \text{sl}(\tilde{\mathbf{d}})$, то

$$\mathcal{T}_\gamma^{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) \subseteq \mathcal{T}_H^{\min}(\tilde{\mathbf{d}}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В этом случае из теоремы 3 следует равенство $\gamma_{\min} = \text{lv}$, а из леммы 3 получаем оценку $|H|_{\min} \geq \text{lv}$. С другой стороны, согласно лемме 1 выполнено неравенство $\gamma_{\min} \geq |H|_{\min}$, а значит,

$$\gamma_{\min} = \text{lv} = |H|_{\min}.$$

Таким образом, для любого дерева $T \in \mathcal{T}_\gamma^{\min}(\tilde{\mathbf{d}})$ в силу всё той же леммы 1 выполнено

$$\text{lv} = \gamma(T) \geq |H(T)| \geq \text{lv} \implies |H(T)| = \text{lv} = |H|_{\min},$$

откуда и получаем требуемое. Лемма 5 доказана.

Следующая теорема полностью отвечает на вопрос, в каких случаях есть совпадение указанных классов, а в каких — строгое включение, при условии, что $\text{lv}(\tilde{\mathbf{d}}) \geq \text{sl}(\tilde{\mathbf{d}})$.

Теорема 5. Пусть сокращённая n -последовательность $\tilde{\mathbf{d}}$ такова, что $\text{lv}(\tilde{\mathbf{d}}) \geq \text{sl}(\tilde{\mathbf{d}})$. Тогда

$$\mathcal{T}_\gamma^{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) \begin{cases} = \mathcal{T}_H^{\min}(\tilde{\mathbf{d}}), & \text{если } d_1 \geq n - \text{lv}(\tilde{\mathbf{d}}), \\ \subset \mathcal{T}_H^{\min}(\tilde{\mathbf{d}}), & \text{если } d_1 < n - \text{lv}(\tilde{\mathbf{d}}). \end{cases}$$

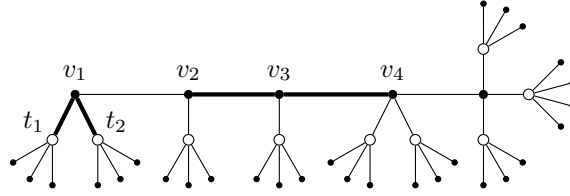
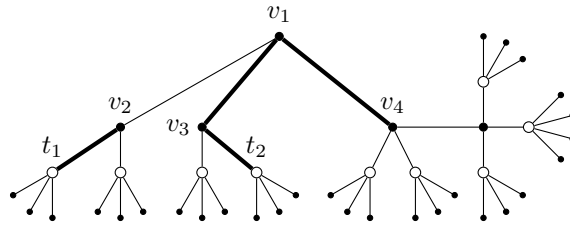
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 5 имеем $\mathcal{T}_\gamma^{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) \subseteq \mathcal{T}_H^{\min}(\tilde{\mathbf{d}})$. Значит, остаётся проверить существование дерева $T \in \mathcal{T}_H^{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) \setminus \mathcal{T}_\gamma^{\min}(\tilde{\mathbf{d}})$. При этом, как было показано при доказательстве леммы 5, для класса $\tilde{\mathbf{d}}$ выполняется равенство $\gamma_{\min} = \text{lv} = |H|_{\min}$.

СЛУЧАЙ 1: $d_1 \geq n - \text{lv}$. Рассмотрим дерево $T \in \mathcal{T}_H^{\min}(\tilde{\mathbf{d}})$. Для него $|H(T)| = \text{lv}$. Поскольку в $S(T)$ ровно $n - \text{lv}$ вершин и $\deg(v) \geq d_1 \geq n - \text{lv}$ для любой $v \in S(T)$, очевидно, что у вершины v есть хотя бы один сосед из $H(T)$. Следовательно, $H(T)$ является безлистным доминирующим множеством. Тогда $\gamma(T) = |H(T)| = \text{lv}$. Значит, $T \in \mathcal{T}_\gamma^{\min}(\tilde{\mathbf{d}})$. Таким образом, установили включение $\mathcal{T}_H^{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) \subseteq \mathcal{T}_\gamma^{\min}(\tilde{\mathbf{d}})$, а значит, и равенство $\mathcal{T}_H^{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) = \mathcal{T}_\gamma^{\min}(\tilde{\mathbf{d}})$.

СЛУЧАЙ 2: $d_1 < n - \text{lv}$. Покажем существование дерева $T \in \mathcal{T}_H^{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) \setminus \mathcal{T}_\gamma^{\min}(\tilde{\mathbf{d}})$. Рассмотрим несколько подслучаев.

СЛУЧАЙ 2.1: $d_1 < n - \text{lv}$, $n_2 < n - \text{lv}$. Возьмём дерево $\tilde{T}$ из конструкции (2.).

1. Пусть $d_1 \geq 3$, вершины $v_1, v_2, \dots, v_{n-lv}$ образуют простую цепь $P = S(\tilde{T})$, $\deg(v_1) = d_1$, а v_1 смежна с вершинами $t_1, t_2, \dots, t_{d_1-1}$, опорными в $\tilde{T}$. Поскольку любая последовательность $t_i, v_1, v_2, \dots, v_{n-lv}$ при $1 \leq i \leq d_1 - 1$ $\tilde{T}$ -упорядоченная, по лемме 4 каждая из $X_{v_1 t_i}^{v_{i+1} v_{i+2}}$ -операций даёт дерево $T_i \in \mathcal{T}_{\tilde{\mathbf{d}}}^{\min}$ (эти операции проводим по порядку с очередным получившимся деревом). В итоговом дереве $T = T_{d_1-1}$ имеем $\mathcal{N}_T(v_1) = \{v_2, v_3, \dots, v_{d_1+1}\} \subseteq S(T)$. При этом $|H(T)| = lv = |H|_{\min}$, но $H(T)$ не доминирующе, поскольку $v_1 \in S(T)$ и данная вершина не имеет ни одного соседа среди $H(T)$. В итоге $\gamma(T) > |H(T)| = lv = \gamma_{\min}$, т. е. $T \notin \mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\tilde{\mathbf{d}})$; искомое дерево найдено. На рис. 1 и 2 представлено построение дерева из класса $\mathcal{T}_{\mathbf{H}}^{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) \setminus \mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\tilde{\mathbf{d}})$ для частного случая (выделенными являются рёбра, участвующие в операциях по перестроению).

Рис. 1. Пример дерева $\tilde{T}$ при $d_1 \geq 3$ Рис. 2. Дерево $\tilde{T}$ после перестроения

2. Пусть $d_1 = 2$. Всего в $S(\tilde{T})$ ровно $n - lv \geq d_1 + 1 = 3$ вершин. Тогда по определению конструкции (2.) в $\tilde{T}$ есть проходная вершина u степени $\deg_{\tilde{T}}(u) = 2$, смежная с $t \in H(\tilde{T})$ и с $v \in P$, и есть две отличные от u смежные вершины v_1, v_2 (v_2 может совпадать с v) из $S(\tilde{T})$ (либо две из P , либо одна из P , а другая — некоторая проходная в $\tilde{T}$ из $S(\tilde{T})$). Не умаляя общности, можно считать, что последовательность v_1, v_2, v, u, t $\tilde{T}$ -упорядоченная. Тогда по лемме 4 с помощью $Y_{vut}^{v_1 v_2}$ -операции получим дерево $T \in \mathcal{T}_{\tilde{\mathbf{d}}}^{\min}$. В нём $|H(T)| = lv = |H|_{\min}$, но $H(T)$ не будет доминирующим, поскольку $u \in S(T)$ и данная вершина не имеет ни одного соседа среди

$H(T)$. В итоге $\gamma(T) > |H(T)| = lv = \gamma_{\min}$, т. е. $T \notin \mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\tilde{\mathbf{d}})$; искомое дерево найдено.

СЛУЧАЙ 2.2: $d_1 < n - lv$, $n_2 \geq n - lv$. Из этих неравенств следует, что $n_2 > 0$, поэтому $d_1 = 2$. Тогда $n - lv > d_1 = 2$, а значит, выполнена цепочка неравенств $n_2 \geq n - lv \geq 3$. Рассмотрим дерево $\tilde{T}$, построенное согласно конструкции 1. По построению поддерево $S(\tilde{T})$ содержит ровно $n - lv \geq 3$ вершин, причём все они проходные в $\tilde{T}$. При этом из леммы 5 и её доказательства знаем, что $|H(\tilde{T})| = |H|_{\min} = lv = \gamma_{\min} = \gamma(\tilde{T})$, т. е. наименьшее безлистное доминирующее множество в дереве является в точности множеством опорных вершин.

Будем использовать обозначения, введённые при построении: проходные вершины v_1, v_2 смежны и лежат между v_{n-lv+1} и $v_{n-lv+2} \in H(\tilde{T})$, а проходная вершина v_3 смежна с $v_{n_2+2} \in H(\tilde{T})$ и некоторой вершиной v . Понятно, что последовательность $v_1, v_2, v_{n_2+2}, v_3, v$ будет $\tilde{T}$ -упорядоченной. Тогда по лемме 4 с помощью $Y_{v_{n-lv+2}v_3v}^{v_1v_2}$ -операции получим дерево $T \in \mathcal{T}_{\tilde{\mathbf{d}}}$. Для него $|H(T)| = |H(\tilde{T})| = |H|_{\min}$, но $H(T)$ не доминирующее, поскольку $v_3 \in S(T)$ и данная вершина не имеет ни одного соседа среди $H(T)$. В итоге $\gamma(T) > |H(T)| = lv = \gamma_{\min}$, т. е. $T \in \mathcal{T}_H^{\min}(\tilde{\mathbf{d}}) \setminus \mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\tilde{\mathbf{d}})$. Теорема 5 доказана.

Таким образом, вопрос о соотношении классов $\mathcal{T}_H^{\min}(\tilde{\mathbf{d}})$ и $\mathcal{T}_{\gamma}^{\min}(\tilde{\mathbf{d}})$ решён полностью в случае $lv(\tilde{\mathbf{d}}) \geq sl(\tilde{\mathbf{d}})$. Дальнейший интерес представляет ситуация $lv(\tilde{\mathbf{d}}) < sl(\tilde{\mathbf{d}})$. Поскольку в указанном случае число доминирования экстремальных деревьев будет числом Слэйтера, не имеющее явной связи с множеством опорных вершин (в отличие от величины lv), исследование такой ситуации требует новых подходов.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт бюджета Московского физико-технического института (национального исследовательского университета). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Литература

1. **Andriantiana E.** Energy, Hosoya index and Merrifield–Simmons index of trees with prescribed degree sequence // Discrete Appl. Math. 2013. V. 161, No. 6. P. 724–741.

2. **Bessy S., Rautenbach D.** Extremal values of the chromatic number for a given degree sequence // *Graphs Comb.* 2017. V. 33, No. 4. P. 789–799.
3. **Rao A. R.** The clique number of a graph with given degree sequence // *Graph Theory. Proc. Symp. (Calcutta, India, Dec. 20–25, 1976)*. New Delhi: MacMillan India, 1979. P. 251–267. (ISI Lect. Notes; V. 4).
4. **Favaron O., Mahéo M., Saclé J.** On the residue of a graph // *J. Graph Theory.* 1991. V. 15, No. 1. P. 39–64.
5. **Griggs R., Kleitman D.** Independence and the Havel–Hakimi residue // *Discrete Math.* 1994. V. 127. P. 209–212.
6. **Pepper R.** On the annihilation number of a graph // *Proc. 15th Am. Conf. Applied Mathematics (Houston, USA, Apr. 30–May 2, 2009)*. Stevens Point, WI: WSEAS, 2009. P. 217–220.
7. **Slater P. J.** Locating dominating sets and locating-dominating sets // *Proc. 7th Quad. Int. Conf. Theory and Applications of Graphs (Kalamazoo, MI, USA, June 1–5, 1992)*. V. 2. New York: Wiley, 1995. P. 1073–1079.
8. **Gentner M., Henning M., Rautenbach D.** Largest domination number and smallest independence number of forests with given degree sequence // *Discrete Appl. Math.* 2016. V. 206. P. 181–187.
9. **Gentner M., Henning M., Rautenbach D.** Smallest domination number and largest independence number of graphs and forests with given degree sequence // *J. Graph Theory.* 2018. V. 88, No. 1. P. 131–145.
10. **Курносков А. Д.** Множество всех возможных значений числа доминирования в деревьях с заданной степенной последовательностью // *Дискрет. анализ и исслед. операций.* 2020. Т. 27, № 1. С. 61–87.
11. **Курносков А. Д.** О нижней оценке числа связного доминирования в графах с фиксированной степенной последовательностью // *Тр. МФТИ.* 2020. Т. 12, № 2. С. 40–54.
12. **DeLavina E., Larson C. E., Pepper R., Waller B., Favaron O.** On total domination and support vertices of a tree // *AKCE Int. J. Graphs Comb.* 2010. V. 7, No. 1. P. 85–95.
13. **Desormeaux W. J., Haynes T. W., Henning M. A.** Improved bounds on the domination number of a tree // *Discrete Appl. Math.* 2014. V. 177. P. 88–94.
14. **Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.** Лекции по теории графов. М.: Наука. Физматлит, 1990. 384 с.

Круподерова Софья Андреевна
Курносков Артём Дмитриевич

Статья поступила
29 января 2025 г.
После доработки —
15 марта 2025 г.
Принята к публикации
22 марта 2025 г.

ON RELATION BETWEEN TWO CLASSES OF EXTREMAL TREES WITH PRESCRIBED DEGREE SEQUENCE

S. A. Krupoderova^a and A. D. Kurnosov^b

Moscow Institute of Physics and Technology
(National Research University),

9 Institutskii Lane, 141700 Dolgoprudnyi, Russia

E-mail: ^akrupoderova.sa@phystech.edu, ^bkurnosov@phystech.edu

Abstract. A non-pendant vertex of a graph is called a *support vertex* if it is adjacent to a leaf. This paper examines the relationship between two classes of extremal trees with the same vertex degree sequence: the class of trees minimizing the number of support vertices and the class of trees minimizing the domination number. Two values defined in terms of a degree sequence play a significant role here: the Slater number, proposed by Slater as a lower bound for the domination number, and the lower bound for the number of support vertices of a tree, proposed by Kurnosov. This paper completely solves the problem of comparing the classes in the case where the maximum of the two values is the latter. Illustr. 2, bibliogr. 14.

Keywords: degree sequence, tree, dominating set, domination number, leaf, pendant vertex, support vertex.

References

1. **E. Andriantiana**, Energy, Hosoya index and Merrifield–Simmons index of trees with prescribed degree sequence, *Discrete Appl. Math.* **161** (6), 724–741 (2013).
2. **S. Bessy** and **D. Rautenbach**, Extremal values of the chromatic number for a given degree sequence, *Graphs Comb.* **33** (4), 789–799 (2017).
3. **A. R. Rao**, The clique number of a graph with given degree sequence, in *Graph Theory* (Proc. Symp., Calcutta, India, Dec. 20–25, 1976) (MacMillan India, New Delhi, 1979), pp. 251–267 (ISI Lect. Notes, Vol. 4).
4. **O. Favaron**, **M. Mahéo**, and **J. Saclé**, On the residue of a graph, *J. Graph Theory* **15** (1), 39–64 (1991).

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **19** (2) (2025).

5. **R. Griggs** and **D. Kleitman**, Independence and the Havel–Hakimi residue, *Discrete Math.* **127**, 209–212 (1994).
6. **R. Pepper**, On the annihilation number of a graph, in *Proc. 15th Am. Conf. Applied Mathematics, Houston, USA, Apr. 30 – May 2, 2009* (WSEAS, Stevens Point, WI, 2009), pp. 217–220.
7. **P. J. Slater**, Locating dominating sets and locating-dominating sets, in *Proc. 7th Quad. Int. Conf. Theory and Applications of Graphs, Kalamazoo, MI, USA, June 1–5, 1992*, Vol. 2 (Wiley, New York, 1995), pp. 1073–1079.
8. **M. Gentner**, **M. Henning**, and **D. Rautenbach**, Largest domination number and smallest independence number of forests with given degree sequence, *Discrete Appl. Math.* **206**, 181–187 (2016).
9. **M. Gentner**, **M. Henning**, and **D. Rautenbach**, Smallest domination number and largest independence number of graphs and forests with given degree sequence, *J. Graph Theory* **88** (1), 131–145 (2018).
10. **A. D. Kurnosov**, The set of all values of the domination number in trees with a given degree sequence, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **27** (1), 61–87 (2020) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **14** (1), 131–147 (2020)].
11. **A. D. Kurnosov**, On a lower bound of connected domination number for graphs with prescribed degree sequence, *Tr. MFTI* **12** (2), 40–54 (2020) [Russian].
12. **E. DeLavina**, **C. E. Larson**, **R. Pepper**, **B. Waller**, and **O. Favaron**, On total domination and support vertices of a tree, *AKCE Int. J. Graphs Comb.* **7** (1), 85–95 (2010).
13. **W. J. Desormeaux**, **T. W. Haynes**, and **M. A. Henning**, Improved bounds on the domination number of a tree, *Discrete Appl. Math.* **177**, 88–94 (2014).
14. **V. A. Emelichev**, **O. I. Melnikov**, **V. I. Sarvanov**, and **R. I. Tyshkevich**, *Lectures on Graph Theory* (Nauka, Moscow, 1990 [Russian]; B. I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994).

Sofya A. Krupoderova
 Artyom D. Kurnosov

Received January 29, 2025
 Revised March 15, 2025
 Accepted March 22, 2025

МАСШТАБИРУЕМЫЙ ПОДХОД К КОДИЗАЙНУ
ТОПОЛОГИЙ И АЛГОРИТМОВ МАРШРУТИЗАЦИИ
ДЛЯ СЕМЕЙСТВ ОПТИМАЛЬНЫХ ЦИРКУЛЯНТНЫХ
СЕТЕЙ СТЕПЕНИ ЧЕТЫРЕ

О. Г. Монахов^а, Э. А. Монахова^б

Институт вычислительной математики и математической геофизики,
пр. Акад. Лаврентьева, 6, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: ^аmonakhov@rav.sccc.ru, ^бemilia@rav.sccc.ru

Аннотация. В настоящей работе представлен новый подход к совместному конструированию топологий оптимальных по диаметру циркулянтных сетей $C(N; 1, s_2)$ и реализуемых для них оптимальных алгоритмов маршрутизации сложности $O(1)$. Новые алгоритмы маршрутизации основаны на использовании масштабируемых параметров L -образных шаблонов в плотной укладке графов на плоскости для семейств оптимальных сетей. Доказана масштабируемость параметров L -образных шаблонов для множества семейств оптимальных сетей $C(N; 1, s_2)$. Получены аналитические формулы зависимости этих параметров от диаметра графов, сокращающие время настройки алгоритма маршрутизации на предварительном этапе с $O(\log N)$ до $O(1)$. Сравнение нового алгоритма маршрутизации с известным в литературе оптимальным алгоритмом маршрутизации показывает его большую эффективность в среднем более чем на 10% по затратам времени на маршрутизацию в семействах оптимальных графов. Благодаря хорошей масштабируемости и простоте маршрутизации оптимальные циркулянтные сети степени четыре представляют интерес как эффективные и надёжные сети связи для сетей на кристалле, многопроцессорных суперкомпьютерных систем, телекоммуникационных сетевых структур и нейронных сетей связи. Табл. 1, ил. 6, библиогр. 20.

Ключевые слова: неориентированная циркулянтная сеть, оптимальный алгоритм маршрутизации, семейство оптимальных циркулянтов, диаметр, плотная укладка графов на плоскости.

Введение

Структура циркулянтных сетей степени четыре [1–5] изучается в различных прикладных областях, а также в качестве топологии сетей связи вычислительных и инфокоммуникационных систем, в том числе сетей на кристалле, благодаря лучшим структурным свойствам циркулянтов по сравнению с торами и двумерными решётками. Актуальность таких сетей обусловлена свойствами симметричности, высокой связности и масштабируемости, что позволяет применять их также в центрах коллективного пользования, беспроводных сенсорных и нейронных сетях [6–8]. Работы исследователей фокусируются в основном на разработке алгоритмов маршрутизации для циркулянтных сетей и оптимизации самой структуры сети по структурным задержкам или другим значимым показателям сетей.

Циркулянтная сеть степени четыре представляет собой неориентированный граф $C(N; s_1, s_2)$, $1 \leq s_1 < s_2 < N/2$, с множеством вершин $V = Z_N = \{0, 1, \dots, N-1\}$, в котором каждая вершина i связана с вершинами $(i \pm s_1) \bmod N$ и $(i \pm s_2) \bmod N$. Числа s_1, s_2 — длины хорд (или образующие) графа, N — его порядок. Граф $C(N; s_1, s_2)$ связан, если $\text{НОД}(N, s_1, s_2) = 1$. На рис. 1 изображена циркулянтная сеть $C(10; 1, 4)$.

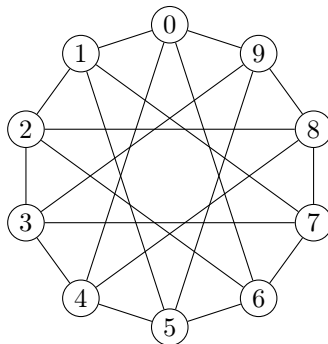


Рис. 1. Циркулянтная сеть $C(10; 1, 4)$

Диаметр графа — длина максимального кратчайшего пути на множестве всевозможных пар вершин, среднее расстояние — математическое ожидание всех длин кратчайших путей между парами вершин. Оптимальным называется циркулянтный граф $C(N; s_1, s_2)$ с минимально возможным диаметром (и/или средним расстоянием) для заданного N . Минимизация диаметра при фиксированных порядке и степени графа оптимизирует такие характеристики топологии сети связи, как надёжность

связи при отказах элементов, структурные задержки при передаче данных, скорость коммуникаций [3, 9]. В виду этого одна из фундаментальных проблем синтеза оптимальных топологий в различных классах регулярных графов состоит в поиске графов с минимальным диаметром (средним расстоянием) при заданных степени и числе вершин [1, 2, 10]. Для класса циркулянтных сетей $C(N; 1, s_2)$ авторами представлен в Интернете [11] датасет всех оптимальных графов до 50 000 вершин, а также их аналитически описываемые семейства, которые будут представлять объект исследования в настоящей работе.

Другая актуальная проблема при использовании циркулянтов в качестве сетей связи инфокоммуникационных систем состоит в разработке эффективных алгоритмов маршрутизации для передачи сообщений между парами узлов (вершин). Алгоритм маршрутизации называется оптимальным, если передача сообщений происходит вдоль кратчайших путей из источника в приёмник. В литературе известно большое число алгоритмов маршрутизации для циркулянтов степени четыре с разными оценками сложности (см. обзор в [4]).

Рассмотрим алгоритмы, не требующие таблиц маршрутизации (что является преимуществом для сетей на кристалле) и имеющие константную оценку времени вычисления маршрута из источника в приёмник. Среди них есть алгоритмы аналитического вида [4, 5, 12, 13] (для специальных семейств оптимальных циркулянтов) и алгоритмы с предварительной подготовкой топологических параметров сети для выполнения маршрутизации [14, 15]. К числу последних, как наиболее эффективный из них, относится алгоритм, предложенный в [14], где рассмотрен оптимальный алгоритм маршрутизации константного времени для циркулянтов вида $C(N; s_1, s_2)$.

Указанный алгоритм основан на применении параметров a, b, p, q (рис. 2а) для L -образных шаблонов (L -shapes, L -shaped tiles [16, 17]), задающих плотную укладку графа $C(N; s_1, s_2)$ на плоскости Z^2 . На рис. 2б

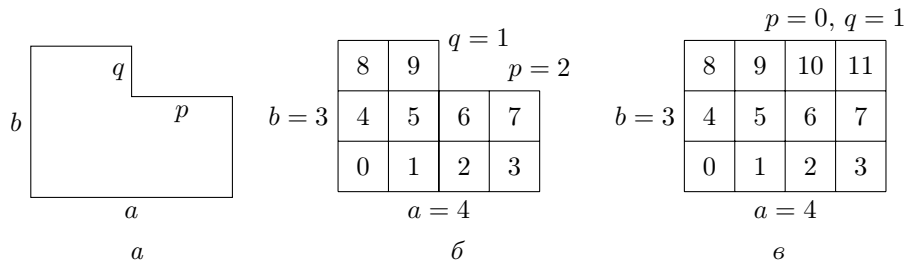


Рис. 2. Параметры L -образных шаблонов для циркулянтов $C(N; 1, s_2)$

		8	9								
		4	5	6	7	8	9				
8	9	0	1	2	3	4	5	6	7		
4	5	6	7	8	9	0	1	2	3		
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		
		8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
		4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
		0	1	2	3	4	5	6	7		
						0	1	2	3		

Рис. 3. Плотная укладка на плоскости L -образного шаблона для графа $C(10; 1, 4)$

и рис. 3 показано представление и укладка на плоскости циркулянтного графа $C(10; 1, 4)$ в виде L -образного шаблона.

Для алгоритма из [14] требуется предварительно определить параметры a, b, p, q и найти решение $(\bar{x}, \bar{y})$ сравнения $s_1x + s_2y \equiv 1 \pmod{N}$. Указанные параметры находятся при помощи алгоритма со сложностью порядка $O(N)$ [18] или $O(\log N)$ [16], что затратно при расчётах в сетях с большим числом узлов $N > 10^5$.

В настоящей работе для семейств оптимальных сетей $C(N; 1, s_2)$ предложен алгоритм получения аналитических формул, определяющих параметры a, b, p, q L -образных шаблонов, со сложностью $O(1)$ в отличие от существующего алгоритма сложности $O(\log N)$. Доказана аналитически задаваемая масштабируемость указанных параметров L -образных шаблонов для семейств оптимальных сетей $C(N; 1, s_2)$. Представлен также новый оптимальный алгоритм маршрутизации со сложностью порядка $O(1)$ для семейств оптимальных сетей $C(N; 1, s_2)$. Проведено сравнение нового алгоритма маршрутизации с алгоритмом из [14] для различных семейств оптимальных сетей, взятых из датасета оптимальных циркулянтов степени четыре [19], и показана эффективность нового алгоритма.

1. Плотная укладка циркулянтов на плоскости Z^2

В работах [16–18] описан алгоритм укладки ориентированных циркулянтов $C(N; s_1, s_2)$ на плоскости в виде L -образных шаблонов. В [17] доказано, что произвольный L -образный шаблон образует плотную укладку на плоскости, и получена следующая базовая система сравнений для

расположения нулей (вершин с номером 0) на плоскости:

$$\begin{aligned} as_1 - qs_2 &\equiv 0 \pmod{N}, \\ -ps_1 + bs_2 &\equiv 0 \pmod{N}. \end{aligned} \quad (1)$$

Сравнения (1) выполняются также для неориентированных циркулянтов $C(N; s_1, s_2)$, представленных в виде L -образных шаблонов, в том числе и прямоугольных (рис. 2в), при этом $N = ab - pq$. Согласно [17], если имеется несколько L -образных шаблонов размера N для заданной позиции нулевых вершин на плоскости, то они все могут быть получены с одними и теми же образующими s_1 и s_2 . Рассмотрим в качестве объекта исследования элементы множества аналитически задаваемых семейств оптимальных двухконтурных циркулянтов [19, 20].

Отметим, во-первых, что по построению каждое такое семейство состоит из оптимальных графов, т. е. графов с минимально возможным диаметром (и в большинстве случаев минимальным средним расстоянием) для заданного порядка графа. Минимально возможный диаметр оптимального графа с N вершинами равен $\lceil (-1 + \sqrt{2N-1})/2 \rceil$ [2].

Во-вторых, члены семейства описаны полиномами от диаметра d , где порядок графов N — квадратичная функция, а образующие s_2 — линейные или квадратичные функции от d . Члены семейства существуют при

$$d = d_m + kP, \quad k \geq 0, \quad (2)$$

где d_m — минимальный диаметр, при котором член семейства является оптимальным графом, $P = \text{const} \in \mathbb{N}$ — период появления (повторения) членов семейства.

В-третьих, авторами получен и представлен в Интернете [11] в открытом доступе датасет семейств оптимальных графов $C(N(d); 1, s_2(d))$. В данный момент в датасете представлено более 2000 оптимальных семейств, и число их будет постепенно пополняться. Область возможных значений диаметров (2) для членов оптимального семейства либо ограничена рамками датасета $d \leq 158$, либо при доказательстве бесконечности семейства (см. [20]) параметр k в (2) может расти неограниченно.

В следующем разделе покажем, что при плотной укладке на плоскости Z^2 члены оптимального семейства могут образовывать масштабируемую последовательность L -образных шаблонов, что даёт возможность выразить параметры a, b, p, q в виде линейных полиномов от диаметра.

2. Масштабируемость параметров L -образных шаблонов для семейств оптимальных циркулянтов

Пусть задано семейство оптимальных аналитически задаваемых циркулянтов $C(N(d); 1, s_2(d))$, где $d \geq d_m$, $P \in \mathbb{N}$. Вычислим значения полиномов $N(d)$, $s_2(d)$ при $d_1 = d_m$ и $d_2 = d_1 + P$ для двух последовательных

членов семейства $C(N(d_1); 1, s_2(d_1))$ и $C(N(d_2); 1, s_2(d_2))$. Применим алгоритм из [18] или [16] для расчёта параметров a, b, p, q найденных членов семейства. Пусть это будут значения $a(d_1), b(d_1), p(d_1), q(d_1)$ и $a(d_2), b(d_2), p(d_2), q(d_2)$. После этого получим значения приращения искомых параметров для двух последовательных членов семейства:

$$\begin{aligned}\Delta a &= a(d_2) - a(d_1), & \Delta b &= b(d_2) - b(d_1), \\ \Delta p &= p(d_2) - p(d_1), & \Delta q &= q(d_2) - q(d_1).\end{aligned}\tag{3}$$

При выполнении условий

$$\Delta a \geq 0, \quad \Delta b \geq 0, \quad \Delta p \geq 0, \quad \Delta q \geq 0$$

определим параметры L -образного шаблона для k -го члена семейства следующим образом:

$$\begin{aligned}a(d) &= a(d_1) + k\Delta a, & b(d) &= b(d_1) + k\Delta b, \\ p(d) &= p(d_1) + k\Delta p, & q(d) &= q(d_1) + k\Delta q.\end{aligned}$$

Подставляя значение $k = (d - d_1)/P$, получим линейного вида формулы от диаметра для всех искомых параметров:

$$\begin{aligned}a(d) &= (\Delta a/P)d + a(d_1) - (\Delta a/P)d_1, \\ b(d) &= (\Delta b/P)d + b(d_1) - (\Delta b/P)d_1, \\ p(d) &= (\Delta p/P)d + p(d_1) - (\Delta p/P)d_1, \\ q(d) &= (\Delta q/P)d + q(d_1) - (\Delta q/P)d_1.\end{aligned}\tag{4}$$

Справедливость формул (4) для определения параметров $a(d), b(d), p(d), q(d)$ L -образных шаблонов семейств оптимальных циркулянтных сетей вида $C(N(d); 1, s_2(d))$ основана на следующем предположении: значения (3) приращения параметров $\Delta a, \Delta b, \Delta p, \Delta q$, полученные для двух последовательных членов семейства, сохраняются на всём диапазоне существования заданного семейства оптимальных циркулянтных графов $C(N(d); 1, s_2(d))$, где d удовлетворяет условию (2).

Продemonстрируем справедливость этого утверждения при помощи теоретического обоснования для ряда конкретных семейств.

Лемма 1. *Параметры L -образных шаблонов для семейства оптимальных циркулянтов $C(2d^2 + 2d + 1; 1, 2d + 1)$, где $d \geq 1$, $P = 1$, равны $a(d) = 2d + 1$, $b(d) = d + 1$, $p(d) = d$, $q(d) = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d_1 = 3$, $d_2 = 4$. Тогда

$$N(d_1) = 25, \quad s_2(d_1) = 7, \quad N(d_2) = 41, \quad s_2(d_2) = 9.$$

Применение алгоритма из [16] (или [18]) для двух последовательных членов семейства даёт равенства

$$a(d_1) = 7, \quad b(d_1) = 4, \quad p(d_1) = 3, \quad q(d_1) = 1,$$

$$a(d_2) = 9, \quad b(d_2) = 5, \quad p(d_2) = 4, \quad q(d_2) = 1.$$

Тогда $\Delta a = 2$, $\Delta b = 1$, $\Delta p = 1$, $\Delta q = 0$. Отсюда в силу (4) имеем

$$a(d) = 2d + 1, \quad b(d) = d + 1, \quad p(d) = d, \quad q(d) = 1.$$

Покажем, что базовая система сравнений (1) для расположения нулевых вершин на плоскости выполняется для полученных функций при любом $d \geq 1$:

$$(2d + 1) - (2d + 1) = 0 \equiv 0 \pmod{N},$$

$$-d + (d + 1)(2d + 1) = 2d^2 + 2d + 1 \equiv N \pmod{N}.$$

Лемма 1 доказана.

Данное семейство относится к экстремальным циркулянтам (см. [2]) — оптимальным графам степени четыре с максимально возможным порядком при любом диаметре. На рис. 4 изображены L -образные шаблоны для трёх графов семейства — $C(13; 1, 5)$, $C(25; 1, 7)$, $C(41; 1, 9)$ с диаметрами $d = 2, 3, 4$ соответственно, демонстрирующие масштабируемость параметров a , b , p , q .

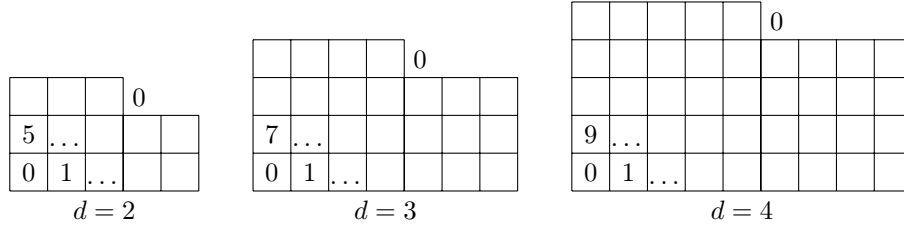


Рис. 4. Масштабируемость параметров L -образных шаблонов для графов экстремального семейства из леммы 1

Лемма 2. Параметры L -образных шаблонов для семейства оптимальных циркулянтов $C(2d^2 + 2d - 7; 1, 2d + 5)$, где $d \geq 5$, $P = 2$, равны $a(d) = d + 2$, $b(d) = 3d - 4$, $p(d) = d + 1$, $q(d) = d - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d_1 = 5$, $d_2 = 7$. Применив алгоритм из [16], имеем $\Delta a = 9 - 7 = 2$, $\Delta b = 17 - 11 = 6$, $\Delta p = 8 - 6 = 2$, $\Delta q = 6 - 4 = 2$. В силу (4) получаем $a(d) = d + 2$, $b(d) = 3d - 4$, $p(d) = d + 1$, $q(d) = d - 1$. Проверка выполнения (1) даёт при любом нечётном $d \geq 5$ равенства

$$(d + 2) - (d - 1)(2d + 5) = -2d^2 - 2d + 7 = -N,$$

$$-(d + 1) + (3d - 4)(2d + 5) = 6d^2 + 6d - 21 = 3N.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Параметры L -образных шаблонов для семейства оптимальных циркулянтов $C(2d^2 - 3; 1, 4d - 5)$, где $d \geq 4$, $P = 2$, равны $a(d) = (3/2)d - 2$, $b(d) = (3/2)d + 2$, $p(d) = d/2 - 1$, $q(d) = d/2 + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d_1 = 4$, $d_2 = 6$. После применения алгоритма из [16] имеем $\Delta a = 7 - 4 = 3$, $\Delta b = 11 - 8 = 3$, $\Delta p = 2 - 1 = 1$, $\Delta q = 4 - 3 = 1$. В силу (4) получаем $a(d) = (3/2)d - 2$, $b(d) = (3/2)d + 2$, $p(d) = d/2 - 1$, $q(d) = d/2 + 1$. Проверка выполнения (1) даёт при любом чётном $d \geq 4$ равенства

$$\begin{aligned} (3d/2 - 2) - (d/2 + 1)(4d - 5) &= -2d^2 + 3 = -N, \\ -(d/2 - 1) + (3d/2 + 2)(4d - 5) &= 6d^2 - 9 = 3N. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Параметры L -образных шаблонов для семейства оптимальных циркулянтов $C(2d^2 - 2; 1, d^2 - d - 2)$, где $d \geq 5$, $P = 2$, равны $a(d) = d + 1$, $b(d) = 2d - 2$, $p(d) = 0$, $q(d) = d - 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d_1 = 5$, $d_2 = 7$. Применив алгоритм из [16], имеем $\Delta a = 8 - 6 = 2$, $\Delta b = 12 - 8 = 4$, $\Delta p = 0$, $\Delta q = 5 - 3 = 2$. В силу (4) $a(d) = d + 1$, $b(d) = 2d - 2$, $p(d) = 0$, $q(d) = d - 2$. Проверка выполнения (1) даёт при любом нечётном $d \geq 5$ равенства

$$\begin{aligned} (d + 1) - (d - 2)(d^2 - d - 2) &= -d^3 + 3d^2 + d - 3 = N(3 - d)/2, \\ -0 + (2d - 2)(d^2 - d - 2) &= 2d^3 - 4d^2 - 2d + 4 = (d - 2)N. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

Параметр $p(d) = 0$ соответствует семейству с прямоугольным типом L -образного шаблона. Как показано в [16], прямоугольный тип L -образных шаблонов имеет место, если $bs_2 \equiv 0 \pmod{N}$.

Лемма 5. Параметры L -образных шаблонов для семейства оптимальных циркулянтов $C(2d^2; 1, d^2 - 2d + 1)$, где $d \geq 7$, $P = 4$, равны $a(d) = (3d - 1)/2$, $b(d) = (3d + 1)/2$, $p(d) = (d + 1)/2$, $q(d) = (d - 1)/2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $d_1 = 7$, $d_2 = 11$. Применив алгоритм из [16], имеем $\Delta a = 16 - 10 = 6$, $\Delta b = 17 - 11 = 6$, $\Delta p = 6 - 4 = 2$, $\Delta q = 5 - 3 = 2$. В силу (4) получаем $a(d) = (3/2)d - 2$, $b(d) = (3/2)d + 2$, $p(d) = d/2 - 1$, $q(d) = d/2 + 1$. Проверка выполнения (1) даёт при любом $d = 3 + 4k$, $k \geq 1$, равенства

$$\begin{aligned} (3d - 1)/2 - ((d - 1)/2)(d^2 - 2d + 1) &= -kN, \quad k = (d - 3)/4, \\ -(d + 1)/2 + ((3d + 1)/2)(d^2 - 2d + 1) &= (3k + 1)N, \quad k = (d - 3)/4. \end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

Отметим, что данное семейство исследовалось в [13], где для него был разработан аналитический алгоритм маршрутизации, использующий при определении кратчайших путей семь соседних нулей на плоскости. Как будет показано далее, при маршрутизации в графах данного семейства можно ограничиться пятью нулями, что уменьшит время работы алгоритма.

Запись структуры семейства циркулянтов вместе с данными, необходимыми для маршрутизации, представлены в датасете и в табл. 1, где показаны описания семейств из рассмотренных выше лемм. В табл. 1 использованы обозначения: $(c_2, c_1, c_0) = c_2d^2 + c_1d + c_0$ — коэффициенты при степенях d для задания N и s_2 , $(c_1, c_0) = c_1d + c_0$ — коэффициенты для задания a, b, p, q ; а также параметры d_m и P .

Таблица 1

**Задание семейств циркулянтов
с параметрами для маршрутизации**

N	s_2	a	b	p	q	d_m	P
c_2, c_1, c_0	c_2, c_1, c_0	c_1, c_0	c_1, c_0	c_1, c_0	c_1, c_0		
2, 2, 1	0, 2, 1	2, 1	1, 1	1, 0	0, 1	1	1
2, 2, -7	0, 2, 5	1, 2	3, -4	1, 1	1, -1	5	2
2, 0, -3	0, 4, -5	3/2, -2	3/2, 2	1/2, -1	1/2, 1	4	2
2, 0, -2	1, -1, -2	1, 1	2, -2	0, 0	1, -2	5	2
2, 0, 0	1, -2, 1	3/2, -1/2	3/2, 1/2	1/2, 1/2	1/2, -1/2	7	4

С помощью системы Wolfram Mathematica есть возможность проверки выполнения сравнений (1) для оптимальных семейств из датасета, у которых параметры N, s_2, a, b, p, q представимы в виде полиномов от диаметра. После такой проверки, проведённой на всём множестве оптимальных семейств из датасета (общим числом свыше 2000 семейств), осталось 1791 семейств, параметры L -образных шаблонов которых удовлетворяют системе сравнений (1) для диаметров из соответствующих областей существования семейств. Таким образом, для всех этих семейств наблюдается масштабируемость параметров L -образных шаблонов при увеличении диаметра. Все оптимальные семейства, прошедшие проверку на выполнение (1), даны в соответствующем разделе датасета. Ниже приведён фрагмент множества таких семейств, существующих для любого диаметра $d \geq d_m$, для которых соответственно $P = 1$. Для представленных семейств список содержит значения $d_m, P = 1$, полиномы для N и s_2 , коэффициенты при степенях d для параметров a, b, p, q .

Фрагмент датасета оптимальных семейств с аналитическим описанием и масштабируемыми параметрами L -образных шаблонов в формате

$\{d_m, P, \{N, s_2\}, \{\{a_1, a_0\}, \{b_1, b_0\}, \{p_1, p_0\}, \{q_1, q_0\}\}\}$:

$$\begin{aligned}
& \{3, 1, \{2d^2, -1 + 2d\}, \{\{2, -1\}, \{1, 1\}, \{1, -1\}, \{0, 1\}\}\}, \\
& \{3, 1, \{2d^2, 1 + 2d\}, \{\{1, 0\}, \{3, -1\}, \{1, -1\}, \{1, 0\}\}\}, \\
& \{8, 1, \{-13 + 2d^2, -5 + 2d\}, \{\{2, -5\}, \{1, 3\}, \{1, -2\}, \{0, 1\}\}\}, \\
& \{8, 1, \{-13 + 2d^2, 5 + 2d\}, \{\{1, 3\}, \{2, -5\}, \{0, 1\}, \{1, -2\}\}\}, \\
& \{7, 1, \{-12 + 2d^2, -5 + 2d\}, \{\{2, -5\}, \{1, 3\}, \{1, -3\}, \{0, 1\}\}\}, \\
& \{7, 1, \{-12 + 2d^2, 5 + 2d\}, \{\{1, 2\}, \{3, -7\}, \{1, 1\}, \{1, -2\}\}\}, \\
& \{7, 1, \{-11 + 2d^2, -5 + 2d\}, \{\{2, -5\}, \{1, 3\}, \{1, -4\}, \{0, 1\}\}\}, \\
& \{7, 1, \{-11 + 2d^2, 5 + 2d\}, \{\{1, 1\}, \{3, -7\}, \{1, -2\}, \{1, -2\}\}\}, \\
& \{4, 1, \{-5 + 2d^2, -3 + 2d\}, \{\{2, -3\}, \{1, 2\}, \{1, -1\}, \{0, 1\}\}\}, \\
& \{4, 1, \{-5 + 2d^2, 3 + 2d\}, \{\{1, 2\}, \{2, -3\}, \{0, 1\}, \{1, -1\}\}\}, \\
& \{4, 1, \{-4 + 2d^2, -3 + 2d\}, \{\{2, -3\}, \{1, 2\}, \{1, -2\}, \{0, 1\}\}\}, \\
& \{3, 1, \{1 + 2d^2, -1 + 2d\}, \{\{2, -1\}, \{1, 1\}, \{1, -2\}, \{0, 1\}\}\}, \\
& \{3, 1, \{1 + 2d^2, 1 + 2d\}, \{\{2, 1\}, \{1, 0\}, \{1, -1\}, \{0, 1\}\}\}, \\
& \{3, 1, \{2 - 2d + 2d^2, -1 + 2d\}, \{\{2, -1\}, \{1, 0\}, \{1, -2\}, \{0, 1\}\}\}, \\
& \{3, 1, \{3 - 2d + 2d^2, -1 + 2d\}, \{\{2, -1\}, \{1, 0\}, \{1, -3\}, \{0, 1\}\}\}, \\
& \{11, 1, \{-9 - d + 2d^2, 4 + 2d\}, \{\{1, 1\}, \{3, -7\}, \{1, -1\}, \{1, -2\}\}\}, \\
& \{10, 1, \{-8 - d + 2d^2, 4 + 2d\}, \{\{1, 0\}, \{3, -7\}, \{1, -4\}, \{1, -2\}\}\}, \\
& \{9, 1, \{-31 + 2d + 2d^2, 9 + 2d\}, \{\{1, 4\}, \{3, -10\}, \{1, 3\}, \{1, -3\}\}\}, \\
& \{5, 1, \{-17 + 2d + 2d^2, -5 + 2d\}, \{\{2, -5\}, \{1, 4\}, \{1, -3\}, \{0, 1\}\}\}, \\
& \{5, 1, \{-17 + 2d + 2d^2, 7 + 2d\}, \{\{1, 3\}, \{3, -7\}, \{1, 2\}, \{1, -2\}\}\}, \\
& \{4, 1, \{-7 + 2d + 2d^2, -3 + 2d\}, \{\{2, -3\}, \{1, 3\}, \{1, -2\}, \{0, 1\}\}\}, \\
& \{4, 1, \{-7 + 2d + 2d^2, 5 + 2d\}, \{\{1, 2\}, \{3, -4\}, \{1, 1\}, \{1, -1\}\}\}, \\
& \{3, 1, \{-1 + 2d + 2d^2, -1 + 2d\}, \{\{2, -1\}, \{1, 2\}, \{1, -1\}, \{0, 1\}\}\}, \\
& \{3, 1, \{-1 + 2d + 2d^2, 3 + 2d\}, \{\{1, 1\}, \{3, -1\}, \{1, 0\}, \{1, 0\}\}\}, \\
& \{2, 1, \{1 + 2d + 2d^2, 1 + 2d\}, \{\{2, 1\}, \{1, 1\}, \{1, 0\}, \{0, 1\}\}\}.
\end{aligned}$$

Таким образом, определив при малых значениях $d_1 = d_m$ и $d_2 = d_1 + P$ значения a , b , p , q по алгоритму [16], получаем формулы (4) для них, справедливые при любых возможных диаметрах d для графов оптимальных семейств. По найденным формулам можно теперь аналитически определить искомые параметры для больших значений N , тем самым

сократив сложность решения проблемы определения параметров L -образных шаблонов до $O(1)$.

3. Описание алгоритма маршрутизации

В силу симметрии циркулянтов кратчайший путь из вершины i в вершину j равен кратчайшему пути из 0 в вершину $(j - i) \bmod N$, поэтому при поиске кратчайших путей между двумя вершинами достаточно решить задачу поиска кратчайших путей из 0 во все вершины циркулянта. Отметим, что алгоритмы маршрутизации из [9, 12–15] используют поиск кратчайших путей в циркулянтном графе путём минимизации длин путей «источник — приёмник» через применение координат пяти, семи или девяти соседних нулей в плотной укладке графа на плоскости и определении кратчайшего пути к вершине как минимума расстояния от этих нулей к заданной вершине. Основная проблема состоит в определении координат используемых в алгоритме соседних нулей. Пусть это будут нули $(0, 0)$, (u, v) , $(-a_0, b_0)$, $(-u, -v)$ и $(a_0, -b_0)$.

Ниже приведён текст алгоритма маршрутизации (алгоритм 1). Запись типа $a_1 + b_1[s_2]$ означает, что путь из 0 в вершину i содержит a_1 шагов по образующей $s_1 = 1$ плюс b_1 шагов по образующей s_2 . Знаки a_1 и b_1 определяют направление движения по образующей (+) или против образующей (−).

Алгоритм 1. Вычисление кратчайшего пути из вершины 0 в любую другую вершину графа семейства

Вход: параметры N , s_2 , a , b , p , q , $u = a - p$, $v = b - q$, номер вершины-приёмника $i \in \{1, 2, \dots, N - 1\}$.

Выход: кратчайший путь P' из вершины 0 в вершину i .

- 1: **if** $u \geq v$ **then** $a_0 := p$, $b_0 := b$;
 - 2: **else** $a_0 := a$, $b_0 := q$;
 - 3: $(a_1, b_1) := (i, 0) - \text{round}\left(\frac{1}{N}(i, 0) \begin{pmatrix} b_0 & -v \\ a_0 & u \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} u & v \\ -a_0 & b_0 \end{pmatrix}$;
 - 4: $P_1 = a_1 + b_1[s_2]$, $P_2 = a_1 - u + (b_1 - v)[s_2]$, $P_3 = a_1 + a_0 + (b_1 - b_0)[s_2]$,
 $P_4 = a_1 + u + (b_1 + v)[s_2]$, $P_5 = a_1 - a_0 + (b_1 + b_0)[s_2]$;
 - 5: **return** $P' = \min\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$;
-

Предварительный этап настройки алгоритма 1 для графов оптимального семейства $C(N(d); 1, s_2(d))$, где d удовлетворяет (2), заключается в следующем: по формулам (4) определяются параметры $a(d)$, $b(d)$, $p(d)$, $q(d)$ L -образного шаблона для графов семейства. Решением сравнения $x + s_2(d)y \equiv 1 \pmod{N}$ в этом случае будет пара $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 0)$. Этот

предварительный этап делается только один раз после формирования топологии системы в виде графа $C(N; 1, s_2)$.

Таким образом, при использовании семейств оптимальных циркулянтов $C(N; 1, s_2)$ в качестве подсистемы связей сетей на кристалле включение в описание семейства четырёх заранее определённых параметров L -образного шаблона создаёт основу для конструирования масштабируемых по числу элементов больших многоуровневых систем с унификацией по диаметру эффективных алгоритмов маршрутизации константной сложности.

4. Экспериментальные результаты

Предложенный алгоритм маршрутизации (расчёта кратчайшего пути из источника сообщения в его приёмник) реализован в системе Wolfram Mathematica и проверен сравнением с алгоритмом Дейкстры на множестве оптимальных циркулянтов вида $C(N; 1, s_2)$, $1 < s_2 < N/2$, $6 \leq N \leq 500$, при этом образующая s_2 пробегает все возможные оптимальные значения для данного N из полученного датасета. В силу симметрии циркулянтов в качестве источников сообщений взяты нулевые вершины графов. В качестве приёмников рассмотрены все вершины $i \in$

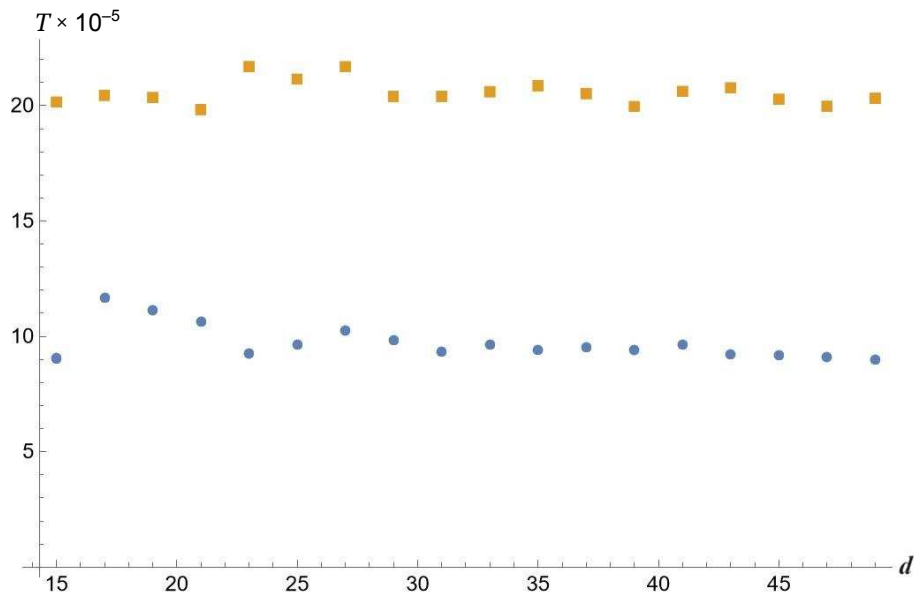


Рис. 5. Время работы алгоритмов маршрутизации на графах семейства из леммы 1

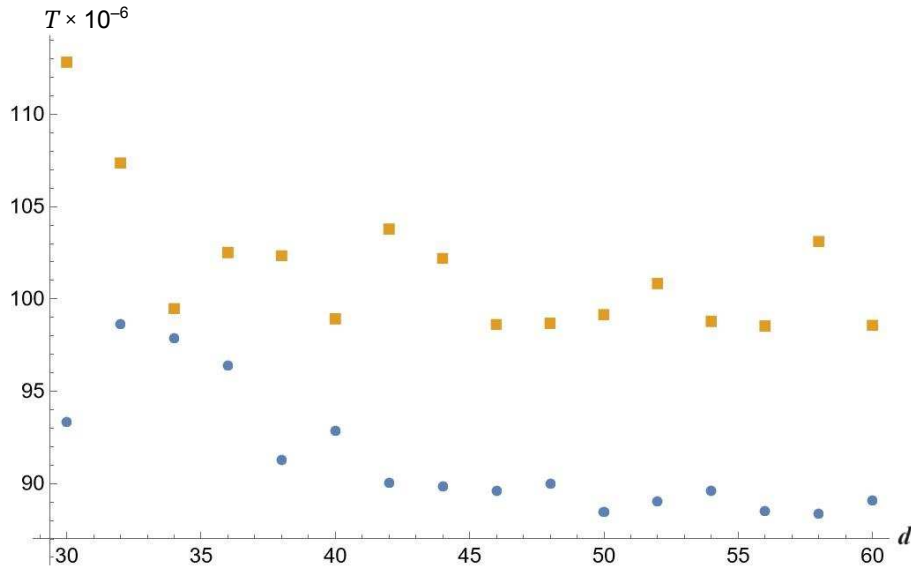


Рис. 6. Время работы алгоритмов маршрутизации на графах семейства из леммы 3

$\{1, 2, \dots, N - 1\}$. Проверена работа алгоритма маршрутизации для всех оптимальных семейств из датасета.

Для графов оптимальных семейств из лемм 1–5 проведено сравнение работы нового алгоритма маршрутизации с алгоритмом из [14].

На рис. 5 и 6 показаны средние оценки времени T (в секундах) работы алгоритма 1 и алгоритма из [14], полученные для двух различных семейств оптимальных графов. Здесь d — диаметр графов, источник сообщений — нулевая вершина, приёмники — все вершины графа. Точки на графиках обозначены кружками (алгоритм 1) и квадратами (алгоритм [14]). Отметим, что новый алгоритм маршрутизации даёт затраты времени для расчёта кратчайших путей лучшие, чем у алгоритма из [14], в среднем от 10 до 50 процентов за счёт меньшего числа операций на шагах 1–2 алгоритма. Кроме того, он может работать на всех семействах оптимальных двумерных циркулянтов вида $C(N; 1, s_2)$ в отличие от алгоритмов из [9, 12, 13], реализованных для отдельных семейств оптимальных графов.

Заключение

В настоящей работе предложен комплексный подход к кодизайну топологий и алгоритмов маршрутизации для множества семейств оптимальных по диаметру неориентированных циркулянтных сетей степени

четыре. Получен новый эффективный алгоритм вычисления кратчайших путей в оптимальных циркулянтах степени четыре, который является модификацией алгоритма маршрутизации константной временной сложности, предложенного в [14], но в отличие от последнего использует меньшее число операций при расчёте кратчайшего пути. Кроме того, найденные аналитические формулы для расчёта масштабируемых параметров L -образных шаблонов для графов оптимальных семейств сокращают время предварительной настройки алгоритма маршрутизации с $O(\log N)$ до $O(1)$. По сравнению с рядом других алгоритмов поиска кратчайших путей, использующих плотную укладку графов на плоскости, данный алгоритм использует минимально возможное количество (пять) соседних нулей и меньшее число операций для расчёта минимального пути из источника в приёмник. Проведённое сравнение с алгоритмом маршрутизации из [14], показало эффективность нового алгоритма от 10 до 50 процентов в зависимости от топологии семейств. В дальнейшем представляет интерес моделирование полученного алгоритма маршрутизации и его прототипирование для подсистем связи в сетях на кристалле.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт бюджетного проекта Института вычислительной математики и математической геофизики (проект № FWNM–2022–0005). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Литература

1. **Hwang F. K.** A survey on multi-loop networks // *Theor. Comput. Sci.* 2003. V. 299, No. 1–3. P. 107–121.
2. **Monakhova E. A.** A survey on undirected circulant graphs // *Discrete Math. Algorithms Appl.* 2012. V. 4, No. 1. Article ID 1250002. 30 p.
3. **Huang X., Ramos A. F., Deng Y.** Optimal circulant graphs as low-latency network topologies // *J. Supercomput.* 2022. V. 78, No. 11. P. 13491–13510.
4. **Monakhova E. A., Romanov A. Yu., Lezhnev E. V.** Shortest path search algorithm in optimal two-dimensional circulant networks: Implementation for networks-on-chip // *IEEE Access.* 2020. V. 8. P. 215010–215019.
5. **Liu H., Li X., Wang S.** Construction of dual optimal bidirectional double-loop networks for optimal routing // *Mathematics.* 2022. V. 10. Article ID 4016. 17 p.

6. Hoffmann R., Deserale D., Seredynski F. Cellular automata rules solving the wireless sensor network coverage problem // *Natural Comput.* 2022. V. 21. P. 417–447.
7. Erickson A., Stewart I. A., Navaridas J., Kiasari A. E. The stellar transformation: From interconnection networks to data-center networks // *Comput. Networks.* 2017. V. 113. P. 29–45.
8. Fei J., Lu C. Adaptive sliding mode control of dynamic systems using double loop recurrent neural network structure // *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* 2018. V. 29. P. 1275–1286.
9. Monakhova E. A., Monakhov O. G., Romanov A. Yu. Routing algorithms in optimal degree four circulant networks based on relative addressing: Comparative analysis for networks-on-chip // *IEEE Trans. Netw. Sci. Eng.* 2023. V. 10, No. 1. P. 413–425.
10. Deng Y., Guo M., Ramos A. F., Huang X., Xu Z., Liu W. Optimal low-latency network topologies for cluster performance enhancement // *J. Supercomput.* 2020. V. 76, No. 12. P. 9558–9584.
11. Monakhova E. A., Monakhov O. G. Optimal double loop networks or optimal circulant graphs $(N; 1, s)$. Dataset. 2024. URL: github.com/mila0411/Double-loop-networks/tree/main/Dataset (accessed 23.07.2025).
12. Beivide R., Herrada E., Balcazar J. L., Arruabarrena A. Optimal distance networks of low degree for parallel computers // *IEEE Trans. Comput.* 1991. V. 40, No. 10. P. 1109–1124.
13. Jha P. K. Dimension-order routing algorithms for a family of minimal-diameter circulants // *J. Interconnect. Netw.* 2013. V. 14, No. 1. Article ID 1350002. 24 p.
14. Chen B.-X., Meng J.-X., Xiao W.-J. A constant time optimal routing algorithm for undirected double-loop networks // *Mobile ad-hoc and sensor networks. Proc. 1st Int. Conf. (Wuhan, China, Dec. 13–15, 2005)*. Heidelberg: Springer, 2005. P. 308–316. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 3794).
15. Camarero C., Martinez C., Beivide R. L-networks: A topological model for regular two-dimensional interconnection networks // *IEEE Trans. Comput.* 2013. V. 62, No. 7. P. 1362–1375.
16. Hwang F. K. A complementary survey on double-loop networks // *Theor. Comput. Sci.* 2001. V. 263, No. 1–2. P. 211–229.
17. Fiol M. A., Yebra J. L. A., Alegre I., Valero M. A discrete optimization problem in local networks and data alignment // *IEEE Trans. Comput.* 1987. V. 36, No. 6. P. 702–713.
18. Wong C. K., Coppersmith D. A combinatorial problem related to multi-module memory organizations // *J. Assoc. Comput. Mach.* 1974. V. 21, No. 3. P. 392–402.
19. Монахова Э. А., Монахов О. Г. Генерация и анализ датасета оптимальных двухконтурных циркулянтных сетей // *Программная инженерия.* 2024. Т. 15, № 8. С. 402–410.

- 20. Монахова Э. А., Монахов О. Г.** Анализ базы данных оптимальных двухконтурных кольцевых сетей // Прикл. дискрет. математика. 2024. № 64. С. 56–71.

Монахов Олег Геннадьевич
Монахова Эмилия Анатольевна

Статья поступила
19 июля 2024 г.
После доработки —
11 августа 2024 г.
Принята к публикации
22 сентября 2024 г.

A SCALABLE APPROACH TO CO-DESIGN OF TOPOLOGIES AND ROUTING ALGORITHMS FOR FAMILIES OF OPTIMAL DEGREE-FOUR CIRCULANT NETWORKS

O. G. Monakhov^a and E. A. Monakhova^b

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
6 Acad. Lavrentyev Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: ^amonakhov@rav.sbcc.ru, ^bemilia@rav.sbcc.ru

Abstract. This paper presents a new approach to the joint construction of topologies for diameter-optimal circulant networks $C(N; 1, s_2)$ and optimal routing algorithms of complexity $O(1)$ implemented for them. New routing algorithms are based on the use of scalable parameters of L -shaped patterns in a dense packing of graphs on the plane for families of optimal networks. The scalability of the parameters of L -shaped patterns for a set of families of optimal networks $C(N; 1, s_2)$ is shown. We obtain analytical formulas for the dependence of these parameters on the graph diameter, reducing the time for setting up the routing algorithm at the preliminary stage from $O(\log N)$ to $O(1)$. A comparison of the new routing algorithm with the optimal one known in the literature demonstrates its greater efficiency, on average, by more than 10% in terms of routing time in families of optimal graphs. Due to their good scalability and ease of routing, optimal degree-four circulant networks are of interest as efficient and reliable communication networks for networks-on-chip, multiprocessor supercomputer systems, telecommunications network structures, and neural communication networks. Tab. 1, illustr. 6, bibliogr. 20.

Keywords: undirected circulant network, optimal routing algorithm, family of optimal circulant networks, diameter, dense packing of graphs on a plane.

References

1. **F. K. Hwang**, A survey on multi-loop networks, *Theor. Comput. Sci.* **299** (1–3), 107–121 (2003).

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **19** (2) (2025).

2. **E. A. Monakhova**, A survey on undirected circulant graphs, *Discrete Math. Algorithms Appl.* **4** (1), ID 1250002 (2012).
3. **X. Huang, A. F. Ramos, and Y. Deng**, Optimal circulant graphs as low-latency network topologies, *J. Supercomput.* **78** (11), 13491–13510 (2022).
4. **E. A. Monakhova, A. Yu. Romanov, and E. V. Lezhnev**, Shortest path search algorithm in optimal two-dimensional circulant networks: Implementation for networks-on-chip, *IEEE Access* **8**, 215010–215019 (2020).
5. **H. Liu, X. Li, and S. Wang**, Construction of dual optimal bidirectional double-loop networks for optimal routing, *Mathematics* **10**, ID 4016 (2022).
6. **R. Hoffmann, D. Deserale, and F. Seredynski**, Cellular automata rules solving the wireless sensor network coverage problem, *Natural Comput.* **21**, 417–447 (2022).
7. **A. Erickson, I. A. Stewart, J. Navaridas, and A. E. Kiasari**, The stellar transformation: From interconnection networks to data-center networks, *Comput. Netw.* **113**, 29–45 (2017).
8. **J. Fei and C. Lu**, Adaptive sliding mode control of dynamic systems using double loop recurrent neural network structure, *IEEE Trans. Neural Netw. Learn. Syst.* **29**, 1275–1286 (2018).
9. **E. A. Monakhova, O. G. Monakhov, and A. Yu. Romanov**, Routing algorithms in optimal degree four circulant networks based on relative addressing: Comparative analysis for networks-on-chip, *IEEE Trans. Netw. Sci. Eng.* **10** (1), 413–425 (2023).
10. **Y. Deng, M. Guo, A. F. Ramos, X. Huang, Z. Xu, and W. Liu**, Optimal low-latency network topologies for cluster performance enhancement, *J. Supercomput.* **76** (12), 9558–9584 (2020).
11. **E. A. Monakhova and O. G. Monakhov**, Optimal double loop networks or optimal circulant graphs $(N; 1, s)$. Dataset (2024), URL: github.com/mila0411/Double-loop-networks/tree/main/Dataset (accessed 23.07.2025).
12. **R. Beivide, E. Herrada, J. L. Balcazar, and A. Arruabarrena**, Optimal distance networks of low degree for parallel computers, *IEEE Trans. Comput.* **40** (10), 1109–1124 (1991).
13. **P. K. Jha**, Dimension-order routing algorithms for a family of minimal-diameter circulants, *J. Interconnect. Netw.* **14** (1), ID 1350002 (2013).
14. **B.-X. Chen, J.-X. Meng, and W.-J. Xiao**, A constant time optimal routing algorithm for undirected double-loop networks, in *Mobile Ad-Hoc and Sensor Networks* (Proc. 1st Int. Conf., Wuhan, China, Dec. 13–15, 2005) (Springer, Heidelberg, 2005), pp. 308–316 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 3794).
15. **C. Camarero, C. Martinez, and R. Beivide**, L-networks: A topological model for regular two-dimensional interconnection networks, *IEEE Trans. Comput.* **62** (7), 1362–1375 (2013).
16. **F. K. Hwang**, A complementary survey on double-loop networks, *Theor. Comput. Sci.* **263** (1–2), 211–229 (2001).

17. **M. A. Fiol, J. L. A. Yebra, I. Alegre, and M. Valero**, A discrete optimization problem in local networks and data alignment, *IEEE Trans. Comput.* **36** (6), 702–713 (1987).
18. **C. K. Wong and D. Coppersmith**, A combinatorial problem related to multimodule memory organizations, *J. Assoc. Comput. Mach.* **21** (3), 392–402 (1974).
19. **E. A. Monakhova and O. G. Monakhov**, Generation and analysis of a dataset of optimal double-loop circulant networks, *Program. Inzh.* **15** (8), 402–410 (2024) [Russian].
20. **E. A. Monakhova and O. G. Monakhov**, Database analysis of optimal double-loop networks, *Prikl. Diskretn. Mat.*, No. 64, 56–71 (2024) [Russian].

Oleg G. Monakhov
Emiliya A. Monakhova

Received July 19, 2024
Revised August 11, 2024
Accepted September 22, 2024

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПО ЧИСЛУ ОТКРЫТЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ ГРАФАХ С МАЛЫМ ЧИСЛОМ РЕБЕР

А. В. Пяткин

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: artem@math.nsc.ru

Аннотация. Открытым треугольником (ОТ) в неориентированном графе называется индуцированный подграф из трёх вершин ровно с двумя рёбрами. Рассматривается класс графов, в котором числа вершин и рёбер отличаются на фиксированную константу s . Получена полная характеристика экстремальных по числу ОТ графов в таком классе с не менее чем $s + 7$ вершинами. Ил. 1, библиогр. 12.

Ключевые слова: открытый треугольник, индуцированный подграф, разреженный граф.

Введение

Задача подсчёта в ориентированном графе числа различных ориентированных трёхвершинных подграфов (так называемый триадный переверч) возникает в социологии при анализе сбалансированности социальной сети, а также её однородности, транзитивности и склонности к кластеризации [1–3]. Это обуславливает интерес к более общей задаче подсчёта количества заданных порождённых подграфов в графе [5–7] как в ориентированном, так и в неориентированном случае. В частности, важно находить графы с наибольшим числом тех или иных подграфов. Такие графы будем называть *экстремальными*.

Для неориентированного графа минимальными по числу вершин нетривиальными подграфами являются трёхвершинные подграфы с одним или двумя рёбрами. Первые оценки на число таких подграфов в n -вершинном графе были получены в работах [8, 9]. Поскольку трёхвершинные подграфы с 1 и 2 рёбрами являются дополнениями друг друга, задачи поиска экстремальных графов для этих подграфов эквивалентны, поэтому достаточно рассматривать только случай двух рёбер. Для этого случая в [10] доказана единственность экстремального графа G при фиксированном числе вершин n , а именно $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$. В той же работе [10]

поставлена задача поиска экстремальных графов с фиксированным числом вершин n и рёбер m . Нетрудно заметить, что при $m < n$ единственным таким графом является $G = K_{1,m} \cup (n - m - 1)K_1$. В [11] получена полная характеристика экстремальных графов при $n = m$. Оказалось, что за исключением случая $n = m = 6$ экстремальный граф всегда единственный. В частности, при $n \geq 7$ он получается добавлением одного ребра к звезде $K_{1,n-1}$. В работе [12] последний результат обобщён для $m = n + c$, а именно доказано, что при $n \geq 4c + 7$ единственный экстремальный граф получается добавлением всесмежной вершины к графу $(n - c - 3)K_1 \cup K_{1,c+1}$.

В настоящей статье устанавливается структура экстремальных графов для случая $m = n + c$ при $n \geq c + 7$. Во-первых, показано, что граф из [12] единственный экстремальный при $n \geq 3c + 7$, и тем самым получен ответ на вопрос, сформулированный там же в [12]. Во-вторых, описывается новый граф, который является единственным экстремальным при $c + 7 \leq n \leq 3n + 5$. При $n = 3n + 6$ оба эти графа экстремальны. Хотя ход доказательства экстремальности этих графов следует той же канве, что и в [12], усиление результата потребовало разработки новых инструментов, которые представляют интерес сами по себе и могут быть полезны и для дальнейших исследований.

В разд. 1 доказывается ряд вспомогательных результатов, включая ключевую теорему 1, которая интересна и сама по себе. В разд. 2 доказывается основной результат работы, а именно описывается структура экстремальных графов при $n \geq c + 7$. В заключении даются некоторые комментарии к работе.

1. Вспомогательные результаты

В этом разделе будет доказан ряд вспомогательных утверждений, в том числе теорема, играющая ключевую роль при выводе основного результата.

Открытым треугольником (ОТ) в неориентированном графе называется индуцированный подграф из трёх вершин и двух рёбер, т. е. путь длины 2, соединяющий две несмежные вершины. *Центром* ОТ назовём вершину, имеющую в нём степень 2. Для целых чисел $a \leq b$ под *интервалом* будем понимать множество $[a, b] = \{a, a + 1, \dots, b\}$. Для произвольной вершины v через $N(v)$ обозначим множество её соседей и положим $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Тогда $d(v) = |N(v)|$ называется *степенью вершины* v , а $\Delta(G) = \max_{v \in V} d(v)$. Через $\Delta_2(G)$ обозначим число ОТ в графе G . Графы с наибольшим числом ОТ при заданных n и m далее будем называть *экстремальными*. Имеет место следующая простая верхняя оценка на $\Delta_2(G)$.

Утверждение 1. Если граф G имеет максимальную степень Δ и содержит m рёбер, то $\Delta_2(G) \leq m(\Delta - 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $f(e)$ число ОТ, содержащих ребро $e = xy$. Нетрудно заметить, что $f(e) \leq d(x) + d(y) - 2$. Поскольку каждый ОТ содержит ровно два ребра, имеем

$$\Delta_2(G) \leq \sum_{e \in E} f(e)/2 \leq m(2\Delta - 2)/2 = m(\Delta - 1),$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что оценка достигается на однородных графах степени Δ без треугольников. Вообще, если граф G не содержит треугольников, то выполняется формула

$$\Delta_2(G) = \sum_{v \in V} \binom{d(v)}{2}, \quad (1)$$

получаемая подсчётом ОТ с центром в каждой вершине.

В работе [11] доказана

Лемма 1 [11]. Пусть G является экстремальным графом на n вершинах с m рёбрами. Тогда

- 1) не более чем одна компонента связности графа G может иметь рёбра;
- 2) если $m \geq n$ и граф G имеет k изолированных вершин и одну связную компоненту C , то либо степень всех вершин в C не меньше $k + 2$, либо для некоторого единственного $d \leq k + 1$ компонента C содержит одну или несколько вершин степени d , смежных с d попарно несмежными вершинами максимальной степени Δ , а степени всех остальных вершин в C (если они есть) лежат в интервале $[k + 2, \Delta - 1]$.

Из второй части леммы 1 очевидно вытекает

Следствие 1. Пусть $m \geq n$ и экстремальный граф G имеет вершины степеней d_1 и d_2 , причём $d_1 > d_2 \geq 1$. Тогда G содержит не более $d_1 - 2$ изолированных вершин.

Докажем ещё одну оценку для числа изолированных вершин в экстремальных графах определённого типа.

Лемма 2. Пусть граф $G = K_{k+1, \Delta} \cup sK_1$ экстремальный с параметрами $n = (\Delta + k + 1 + s)$ и $m = (k + 1)\Delta$, где $k \geq 1$. Тогда $s \leq 2k - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем в графе G произвольную вершину x степени $k + 1$ и обозначим через $y_1, \dots, y_{k+1}$ и $z_1, \dots, z_s$ вершины степеней Δ и 0 соответственно. Пусть $G' = G \setminus \{xy_1, \dots, xy_{k+1}\}$, а $G'' = G' \cup$

$\{y_{k+1}z_1, \dots, y_{k+1}z_k\}$. Нетрудно заметить, что $\Delta_2(G') = \Delta_2(G) - \binom{k}{2} - k - k(\Delta - 1)$, а $\Delta_2(G'') = \Delta_2(G') + \binom{k}{2} + k\Delta = \Delta_2(G)$. Граф G экстремальный, а G'' имеет то же число вершин, рёбер и ОТ, что и G . Значит, G'' тоже экстремальный. Поскольку в нём есть вершины степеней 1 и $k+1$, а также $s - k$ изолированных вершин, по следствию 1 получаем $s \leq 2k - 1$. Лемма 2 доказана.

Пусть заданы целые неотрицательные числа $m > n > D \geq 2$. Назовём граф $G = (V, E)$ *хорошим*, если выполняются следующие условия:

$$|V(G)| = n, \quad |E(G)| = m, \quad \Delta(G) \leq D, \quad m = kD + l, \\ \text{где } k \in [0, D - 1], \quad l \in [1, D], \quad n \geq k + D + 1. \quad (2)$$

Другими словами, чтобы граф G был хорошим, при делении m на D с ненулевым остатком (т. е. при $m = kD$ считаем, что частное равно $k - 1$, а остаток равен D) частное и остаток должны удовлетворять условиям (2), где m — это число рёбер графа G , а D — фиксированное число, являющееся верхней оценкой его максимальной степени.

Обозначим через $f(n, k, l, D)$ максимальное число ОТ среди хороших графов с такими параметрами. Основным результатом этого раздела является

$$\textbf{Теорема 1.} \quad f(n, k, l, D) = k\binom{D}{2} + D\binom{k}{2} + lk + \binom{l}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО сразу следует из лемм 3 и 4 ниже. Отметим также, что вырожденный случай $k = 0$ можно не рассматривать, поскольку тогда $m = l \leq D$ и, очевидно, экстремальный граф представляет собой звезду $K_{1,m}$ с $n - m - 1$ изолированными вершинами, для которой теорема верна. Теорема 1 доказана.

Нам потребуются известные свойства биномиальных коэффициентов, легко проверяемые непосредственно:

$$\binom{a+b}{2} - \binom{b}{2} = \binom{a}{2} + ab, \quad \binom{a-b}{2} + \binom{b}{2} = \binom{a}{2} - ab + b^2, \quad (3)$$

в частности,

$$\binom{a+1}{2} = \binom{a}{2} + a, \quad \binom{a-1}{2} = \binom{a}{2} - a + 1. \quad (4)$$

$$\textbf{Лемма 3.} \quad f(n, k, l, D) \geq k\binom{\Delta}{2} + D\binom{k}{2} + lk + \binom{l}{2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим хороший граф, в котором число ОТ не меньше, чем указано в лемме 3. Рассмотрим полный двудольный граф $K_{k,D}$ и добавим к нему вершину, смежную с l вершинами степени k , а также $n - D - k - 1$ изолированных вершин. Обозначим полученный

граф через $G(n, k, l, D)$. Например, на рис. 1 изображён граф $G(n, 2, 2, 5)$ при $n \geq 8$.

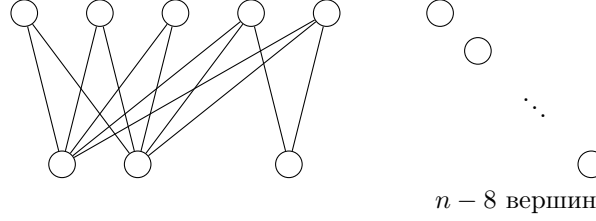


Рис. 1. Граф $G(n, 2, 2, 5)$ при $n \geq 8$

По формулам (1) и (4) имеем

$$\begin{aligned} f(n, k, l, D) &\geq \Delta_2(G(n, k, l, D)) = \\ &= k \binom{D}{2} + (D - l) \binom{k}{2} + l \binom{k+1}{2} + \binom{l}{2} = \\ &= k \binom{D}{2} + D \binom{k}{2} + lk + \binom{l}{2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. $f(n, k, l, D) \leq k \binom{D}{2} + D \binom{k}{2} + lk + \binom{l}{2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим индукцию по D . При $D = 2$ по условию (2) имеем $m \in \{3, 4\}$ и максимальное число ОТ (2 или 4 соответственно) достигается на пути длины 3 или цикле длины 4, поэтому выполняются требуемые неравенства $f(n, 1, 1, 2) \leq 2$ и $f(n, 1, 2, 2) \leq 4$.

Пусть теперь $D \geq 3$ и лемма верна при всех $D' < D$. Положим $A = k \binom{D}{2} + D \binom{k}{2} + lk + \binom{l}{2}$ и предположим, что существуют хорошие графы, содержащие больше чем A ОТ. Среди всех таких графов выберем граф с наименьшим числом вершин и обозначим его через G . Рассмотрим два случая.

СЛУЧАЙ 1: $\Delta(G) = D$. Обозначим через x произвольную вершину степени D и положим $G' = G \setminus x$. Тогда в G содержится не более $\binom{D}{2}$ ОТ с центром в вершине x , не более $m - D$ ОТ, в которых x имеет степень 1, и не более $\Delta_2(G')$ ОТ, не содержащих x . Поскольку граф G' хороший с параметрами $n - 1, k - 1, l, D$, по определению f имеем $\Delta_2(G') \leq f(n - 1, k - 1, l, D)$, а по выбору G для графа G' лемма 4 верна. Значит, учитывая (4), получаем

$$\Delta_2(G) \leq \binom{D}{2} + kD + l - D + (k - 1) \binom{D}{2} + D \binom{k - 1}{2} +$$

$$+ l(k-1) + \binom{l}{2} = k \binom{D}{2} + D \binom{k}{2} + lk + \binom{l}{2} = A;$$

противоречие.

СЛУЧАЙ 2: $\Delta(G) \leq D-1$. Рассмотрим три подслучая.

ПОДСЛУЧАЙ 2.1: $k = D-1$. Имеем

$$\begin{aligned} A &= (D-1) \binom{D}{2} + D \binom{D-1}{2} + l(D-1) + \binom{l}{2} = \\ &= D^3 - \frac{5}{2}D^2 + lD + \frac{3}{2}D + \frac{l^2 - 3l}{2}, \end{aligned}$$

но по утверждению 1

$$\begin{aligned} \Delta_2(G) &\leq m(\Delta(G) - 1) \leq (D^2 - D + l)(D - 2) = \\ &= D^3 - 3D^2 + Dl + 2D - 2l = A - \frac{D^2 - D + l^2 + l}{2} < A, \end{aligned}$$

поскольку $D \geq 3$ и $l \geq 0$.

ПОДСЛУЧАЙ 2.2: $k \leq D-2$ и $l+k \leq D-1$. Тогда

$$m = kD + l = k(D-1) + l + k,$$

т. е. G удовлетворяет условиям (2) для $D' = D-1$, $k' = k$, $l' = l+k$. По индукции и формулам (3) и (4) получаем

$$\begin{aligned} \Delta_2(G) &\leq f(n, k, l+k, D-1) \leq \\ &\leq k \binom{D-1}{2} + (D-1) \binom{k}{2} + (l+k)k + \binom{l+k}{2} = \\ &= k \binom{D}{2} - k(D-1) + D \binom{k}{2} - \binom{k}{2} + k^2 + lk + \binom{l}{2} + \binom{k}{2} + lk = \\ &= k \binom{D}{2} + D \binom{k}{2} + lk + \binom{l}{2} + k^2 + lk - kD + k \leq A, \end{aligned}$$

поскольку $k(k+l+1-D) \leq 0$.

ПОДСЛУЧАЙ 2.3: $k \leq D-2$ и $l+k \geq D$. Тогда

$$m = kD + l = (k+1)(D-1) + l + k + 1 - D,$$

т. е. G удовлетворяет условиям (2) для $D' = D-1$, $k' = k+1$, $l' = l+k+1-D$. По индукции имеем

$$\begin{aligned} \Delta_2(G) &\leq f(n, k+1, l+k+1-D, D-1) \leq \\ &\leq (k+1) \binom{D-1}{2} + (D-1) \binom{k+1}{2} + l'(k+1) + \binom{l'}{2}. \quad (5) \end{aligned}$$

Заметим, что по формуле (4) получаем

$$\begin{aligned} (k+1)\binom{D-1}{2} + (D-1)\binom{k+1}{2} &= \\ &= (k+1)\left(\binom{D}{2} - D + 1\right) + (D-1)\left(\binom{k}{2} + k\right) \\ &= k\binom{D}{2} + D\binom{k}{2} + \binom{D}{2} - \binom{k}{2} - D + 1. \end{aligned}$$

С другой стороны, из формулы (3) вытекает

$$\begin{aligned} \binom{l+k+1-D}{2} - \binom{k}{2} + \binom{D}{2} &= \binom{l+1-D}{2} + \binom{D}{2} + \\ &+ (l+1-D)k = \binom{l+1}{2} - (l+1)D + D^2 + kl + k - kD = \\ &= \binom{l}{2} + l - l'D + kl + k. \end{aligned}$$

Подставляя в (5), получим

$$\begin{aligned} \Delta_2(G) &\leq k\binom{D}{2} + D\binom{k}{2} - D + 1 + l'(k+1) + \binom{l}{2} + \\ &+ l - l'D + kl + k = A + l'(k+2-D) \leq A, \end{aligned}$$

поскольку $l' \geq 0$ и $k+2 \leq D$. Лемма 4 доказана.

Отметим также, что граф $G(n, k, l, D)$ не является единственным хорошим графом, где достигается оценка из теоремы 1. Более того, экстремальный граф может даже не содержать вершины степени D . Например, при $n = 8$, $m = 12$, $D = 5$ (т. е. $k = l = 2$) максимальное число ОТ, равное 30, содержат как граф $G(8, 2, 2, 5)$, так и $K_{3,4} \cup K_1$.

2. Основной результат

Обозначим через G экстремальный граф на n вершинах с $m = n + c$ рёбрами, где $c \geq 1$. В [12] доказана

Лемма 5 [12]. Если экстремальный граф G_0 имеет вершину v степени $n-1$ (всесмежную вершину), то $G_0 \setminus \{v\} = (n-c-3)K_1 \cup K_{1,c+1}$ и имеет место формула $\Delta_2(G) = (n^2 - 3n + c^2 - c)/2$.

Сначала покажем, что граф G_0 из леммы 5 экстремальный в случае $n \geq 3c + 7$, улучшая тем самым результат теоремы 1 из [12].

Теорема 2. Если граф $G = (V, E)$ содержит $|V| = n \geq 3c + 7$ вершин и $|E| = m = n + c$ рёбер, то $\Delta_2(G) \leq (n^2 - 3n + c^2 - c)/2$, причём в этих условиях граф G_0 из леммы 5 единственный экстремальный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in V$ — вершина максимальной степени Δ в графе G . Случай $\Delta = n - 1$ разобран в лемме 5. Рассмотрим остальные варианты.

СЛУЧАЙ 1. Пусть $(n + c)/2 \leq \Delta \leq n - 2$. Сначала оценим сверху максимальное число ОТ в графе G . Очевидно, что граф G содержит не более $\binom{\Delta}{2}$ ОТ с центром x , причём равенство достигается только в случае, когда $N(x)$ независимо. Также имеется не более $m - \Delta$ ОТ, в которых вершина x имеет степень 1, причём равенство достигается только в случае, когда каждое из $m - \Delta$ рёбер, неинцидентных x , имеет ровно один конец в $N(x)$. Наконец, $\Delta_2(G \setminus \{x\}) \leq \binom{m - \Delta}{2}$, и равенство достигается только в случае, когда граф $G \setminus \{x\}$ содержит в качестве подграфа звезду $K_{1, m - \Delta}$. Поскольку $m - \Delta \leq \Delta$, все три условия достижения равенства выполняются для графа $G(n, 1, m - \Delta, \Delta)$. Так как этот граф содержит вершины степени 2, из следствия 1 получаем, что либо в G нет изолированных вершин (тогда $\Delta = n - 2$), либо в G нет вершин степени 1 (тогда $\Delta = (n + c)/2$).

Если $\Delta = n - 2$, то при $n \geq 3c + 7$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta_2(G) &\leq \binom{n - 2}{2} + c + 2 + \binom{c + 2}{2} = \\ &= \frac{n^2 - 5n + c^2 + 5c + 12}{2} < \frac{n^2 - 3n + c^2 - c}{2}, \end{aligned}$$

а если $\Delta = (n + c)/2$, то

$$\begin{aligned} \Delta_2(G) &= 2 \binom{(n + c)/2}{2} + \frac{n + c}{2} = \frac{n^2 + 2cn + c^2}{4} = \\ &= \frac{n^2 - 3n + c^2 - c}{2} - \frac{n^2 - 2cn + c^2 - 6n - 2c}{4}. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} n^2 - 2cn + c^2 - 6n - 2c &= n(n - 2c - 6) + c^2 - 2c \geq \\ &\geq (3c + 7)(c + 1) + c^2 - 2c > 0, \end{aligned}$$

так что получаем $\Delta_2(G) < (n^2 - 3n + c^2 - c)/2$.

СЛУЧАЙ 2. Пусть $(3n - c)/7 \leq \Delta < (n + c)/2$. Оценим $\Delta_2(G)$ сверху так же, как и в случае 1:

$$\Delta_2(G) < \binom{\Delta}{2} + n + c - \Delta + \binom{n + c - \Delta}{2}.$$

Отметим, что неравенство строгое, поскольку все три условия достижения равенства из предыдущего случая выполниться не могут. Действительно, из неравенства $\Delta < m - \Delta$ и независимости $N(x)$ следует, что либо граф $G \setminus x$ не содержит звезды $K_{1, m-\Delta}$, либо хотя бы одно из её рёбер не имеет вершин в $N(x)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta_2(G) &< \frac{n^2 + c^2 + 2\Delta^2 + 2nc - 2n\Delta - 2c\Delta + n + c - 2\Delta}{2} = \\ &= \frac{n^2 - 3n + c^2 - c}{2} - \frac{2n\Delta - 2nc + 2c\Delta - 2\Delta^2 - 4n + 2\Delta - 2c}{2}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} n - \Delta - 1 &= \frac{n}{2} + \left(\frac{n}{2} - \Delta\right) - 1 > \frac{3c+7}{2} - \frac{c}{2} - 1 = c + \frac{5}{2}, \\ \Delta - c - 2 &\geq \frac{3n - c - 7c - 14}{7} \geq \frac{9c + 21 - 8c - 14}{7} = 1 + \frac{c}{7}. \end{aligned}$$

Из целочисленности имеем $n - \Delta - 1 \geq c + 3$ и $\Delta - c - 2 \geq 2$. Значит,

$$\begin{aligned} n\Delta - nc - 2n - \Delta^2 + c\Delta + \Delta - c &= \\ &= (n - \Delta - 1)(\Delta - c - 2) - 2c - 2 \geq 2(c + 3) - 2c - 2 = 4 > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $\Delta_2(G) < (n^2 - 3n + c^2 - c)/2$.

СЛУЧАЙ 3. Пусть $\Delta \leq (3n - c - 1)/7$. По утверждению 1 имеем

$$\begin{aligned} \Delta_2(G) &\leq m(\Delta - 1) \leq \frac{(n + c)(3n - c - 8)}{7} = \\ &= \frac{3n^2 + 2nc - c^2 - 8n - 8c}{7} = \frac{n^2 - 3n + c^2 - c}{2} - \\ &\quad - \frac{n^2 - 4nc - 5n + 9c^2 + 9c}{14}. \end{aligned}$$

Однако при $n \geq 3c + 7$ получаем

$$n^2 - 4nc - 5n + 9c^2 + 9c = (n - 2c)(n - 2c - 5) + 5c^2 - c > 0,$$

а следовательно, $\Delta_2(G) < (n^2 - 3n + c^2 - c)/2$. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим случай $n \in [c + 7, 3c + 6]$. Оказывается, при таких n экстремальным будет граф $G(n, 1, c + 2, n - 2)$, встретившийся в случае 1 доказательства теоремы 2.

Теорема 3. Если граф $G = (V, E)$ содержит $|V| = n \in [c + 7, 3c + 6]$ вершин и $|E| = m = n + c$ рёбер, то $\Delta_2(G) \leq (n^2 - 5n + c^2 + 5c + 12)/2$. В этих условиях граф $G_1 = G(n, 1, c + 2, n - 2)$ экстремальный, а в случае $n \leq 3c + 5$ — единственный экстремальный.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in V$ — вершина максимальной степени Δ в графе G . Рассмотрим несколько случаев.

СЛУЧАЙ 1. Если $\Delta = n - 1$, то при $n \in [c + 7, 3c + 6]$ по лемме 5 имеем

$$\Delta_2(G) \leq \frac{n^2 - 3n + c^2 - c}{2} \leq \frac{n^2 - 5n + c^2 + 5c + 12}{2},$$

причём равенство достигается только в случае $n = 3c + 6$.

СЛУЧАЙ 2. Если $(n + c)/2 \leq \Delta \leq n - 2$, то, как и в случае 1 доказательства теоремы 2, имеем два возможных кандидата на роль экстремального графа, а именно $G_1 = G(n, 1, c + 2, n - 2)$ и $G_2 = K_{2, (n+c)/2} \cup sK_1$, где $s = (n - c)/2 - 2$. При этом

$$\begin{aligned} \Delta_2(G_1) - \Delta_2(G_2) &= \frac{n^2 - 5n + c^2 + 5c + 12}{2} - \frac{n^2 + 2cn + c^2}{4} = \\ &= \frac{(n - c - 4)(n - c - 6)}{4} > 0, \end{aligned}$$

а значит, экстремальным будет только граф $G_1 = G(n, 1, c + 2, n - 2)$.

СЛУЧАЙ 3. Пусть $c + 3 \leq \Delta < (n + c)/2$. Аналогично случаю 2 из доказательства теоремы 2 имеем

$$\begin{aligned} \Delta_2(G_1) - \Delta_2(G) &> \frac{n^2 - 5n + c^2 + 5c + 12}{2} - \\ &- \frac{n^2 + c^2 + 2\Delta^2 + 2nc - 2n\Delta - 2c\Delta + n + c - 2\Delta}{2} = \\ &= n\Delta + c\Delta - cn - \Delta^2 - 3n + 2c + \Delta + 6 = \\ &= (n - \Delta - 2)(\Delta - c - 3) \geq 0, \end{aligned}$$

т. е. граф G не экстремальный.

СЛУЧАЙ 4. Пусть $(c + 6)/2 \leq \Delta \leq c + 2$. Докажем, что в этом случае граф G должен быть хорошим для $D = \Delta$. Действительно, предположим, что $m = k\Delta + l$, где $l \in [1, \Delta]$. Если $k \geq \Delta$, то $4c + 6 \geq m > \Delta^2 \geq c^2/4 + 3c + 9$, откуда $c^2 - 4c + 12 < 0$; противоречие. Если $n \leq k + \Delta$, то $c + 7 \leq n \leq k + c + 2$, а значит, $k \geq 5$. Однако, с другой стороны, $k\Delta + l = m = n + c \leq k + \Delta + c$ и, следовательно,

$$\Delta \leq \frac{c + k - l}{k - 1} < \frac{c}{2} + 3$$

даже при $k \geq 3$; противоречие. Значит, граф G удовлетворяет условиям (2). Тогда из лемм 3 и 4 вытекает, что $\Delta_2(G) \leq \Delta_2(G(n, k, l, \Delta))$. Покажем, что граф $G_3 = G(n, k, l, \Delta)$ не может быть экстремальным.

Если $l < \Delta$, то G_3 содержит $n - \Delta - k - 1$ изолированных вершин, а также одновременно вершины степеней k и $k+1$. Тогда по следствию 1 имеем $n - \Delta - k - 1 \leq k - 1$, т. е. $n \leq 2k + \Delta$. Значит, $c + 7 \leq n \leq 2k + c + 2$, откуда в виду целочисленности имеем $k \geq 3$. Поскольку $k\Delta + l = m = n + c \leq 2k + \Delta + c$, получаем

$$\Delta \leq \frac{c + 2k - l}{k - 1} = \frac{c}{k - 1} + 2 + \frac{2 - l}{k - 1} < \frac{c}{2} + 3$$

при $k \geq 3$ и $l \geq 1$.

Если $l = \Delta$, то $G_3 = K_{k+1, \Delta} \cup sK_1$, где $s = n - \Delta - k - 1$. Тогда $n \leq 3k + \Delta$ по лемме 2. Следовательно, $c + 7 \leq n \leq 3k + c + 2$, а значит, $k \geq 2$. С другой стороны, $(k + 1)\Delta = m = n + c \leq 3k + \Delta + c$, откуда $\Delta \leq 3 + c/k < c/2 + 3$ при $k \geq 3$. Осталось рассмотреть случай $k = 2$, т. е. $G_3 = K_{3, \Delta} \cup sK_1$ и $n + c = m = 3\Delta$. По формуле (1) получаем

$$\begin{aligned} \Delta_2(G_3) &= 3 \binom{\Delta}{2} + \Delta \binom{3}{2} = \frac{3\Delta(\Delta + 1)}{2} = \frac{(n + c)(n + c + 3)}{6} = \\ &= \frac{n^2 + 2nc + c^2 + 3n + 3c}{6} = \frac{n^2 - 5n + c^2 + 5c + 12}{2} - \\ &\quad - \frac{2n^2 - 2nc + 2c^2 - 18n + 12c + 36}{6}. \end{aligned}$$

Поскольку при $n \geq c + 7$

$$n^2 - nc + c^2 - 9n + 6c + 18 = (n - 2)(n - c - 7) + c^2 + 4c + 4 > 0,$$

то $\Delta_2(G_3) < \Delta_2(G_1)$, т. е. граф G_3 не экстремальный.

СЛУЧАЙ 5. Если $\Delta \leq (c + 5)/2$, то по утверждению 1 имеем

$$\begin{aligned} \Delta_2(G) &\leq m(\Delta - 1) \leq \frac{(n + c)(c + 3)}{2} = \frac{nc + c^2 + 3n + 3c}{2} = \\ &= \frac{n^2 - 5n + c^2 + 5c + 12}{2} - \frac{n^2 - nc - 8n + 2c + 12}{2}. \end{aligned}$$

Однако при $n \geq c + 7$

$$n^2 - nc - 8n + 2c + 12 = (n - 1)(n - c - 7) + c + 5 > 0,$$

а значит, граф G не может быть экстремальным. Теорема 3 доказана.

Из доказательств теорем 2 и 3 следует, что единственными экстремальными графами при $n \geq 3c + 7$ и $n \in [c + 7, 3c + 5]$ являются графы G_0

и G_1 соответственно. При $n = 3c + 6$ оба этих графа экстремальны, поскольку $\Delta_2(G_0) = \Delta_2(G_1) = 5c^2 + 13c + 9$, а других экстремальных графов нет.

Заключение

В работе найдена характеристика экстремальных по числу ОТ графов с n вершинами и $m = n + c$ рёбрами для $n \geq c + 7$. Доказано, что при $n \neq 3c + 6$ такой граф единствен и совпадает либо с G_0 из леммы 5 при $n \geq 3n + 7$, либо с G_1 из теоремы 3 при $n \in [c + 7, 3c + 5]$. В случае $n = 3c + 6$ оба этих графа экстремальны, причём других экстремальных графов нет. В качестве направлений дальнейших исследований можно предложить охарактеризовать экстремальные по числу ОТ n -вершинные графы с числом рёбер, равным $m = an + b$.

Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева (проект № FWNF-2022-0019). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. **Johnsen E. C.** Structure and process: Agreement models for friendship formation // Soc. Networks. 1986. V. 8, No. 3. P. 257–306.
2. **Moody J.** Matrix methods for calculating the triad census // Soc. Netw. 1998. V. 20, No. 4. P. 291–299.
3. **Wasserman S., Faust K.** Social network analysis: Methods and applications. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1994. 826 p. (Struct. Anal. Soc. Sci.; V. 8). DOI: 10.1017/cbo9780511815478.
4. **Batagelj V., Mrvar A.** A subquadratic triad census algorithm for large sparse networks with small maximum degree // Soc. Netw. 2001. V. 23, No. 3. P. 237–243.
5. **Milo R., Shen-Orr S., Itzkovitz S., Kashtan N., Chklovskii D., Alon U.** Network motifs: Simple building blocks of complex networks // Science. 2002. V. 298. P. 824–827.
6. **Robins G.** A tutorial on methods for the modeling and analysis of social network data // J. Math. Psychol. 2013. V. 57. P. 261–274.
7. **Schank T., Wagner D.** Finding, counting and listing all triangles in large graphs, an experimental study // Experimental and efficient algorithms. Proc. 4th Int. Workshop WEA 2005 (Santorini Island, Greece, May 10–13, 2005). Heidelberg: Springer, 2005. P. 606–609. (Lect. Notes Comp. Sci.; V. 3503). DOI: 10.1007/11427186_54.

8. **Goodman A. W.** On sets of acquaintances and strangers at any party // Am. Math. Mon. 1959. V. 66, No. 9. P. 778–783. DOI: 10.1080/00029890.1959.11989408.
9. **Sauvé L.** On chromatic graphs // Am. Math. Mon. 1961. V. 68, No. 2. P. 107–111. DOI: 10.1080/00029890.1961.11989632.
10. **Pyatkin A. V., Lykhovyd E., Butenko S. I.** The maximum number of induced open triangles in graphs of a given order // Optim. Lett. 2019. V. 13, No. 8. P. 1927–1935. DOI: 10.1007/s11590-018-1330-2.
11. **Пяткин А. В., Чёрных О. И.** О максимальном числе открытых треугольников в графах с одинаковым числом вершин и рёбер // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2022. Т. 29, № 1. С. 46–55.
12. **Пяткин А. В.** О максимальном числе открытых треугольников в графах с малым числом рёбер // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2024. Т. 31, № 3. С. 134–142.

Пяткин Артём Валерьевич

Статья поступила

19 марта 2025 г.

После доработки —

26 марта 2025 г.

Принята к публикации

22 апреля 2025 г.

ON GRAPHS WITH SMALL NUMBER OF EDGES HAVING EXTREMAL NUMBER OF OPEN TRIANGLES

A. V. Pyatkin

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptuyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: artem@math.nsc.ru

Abstract. In an undirected graph, a 3-vertex induced subgraph with exactly two edges is called an open triangle (OT). We consider the class of graphs in which the numbers of vertices and edges differ by a fixed constant c . The complete characterization of extremal OT graphs in this class with at least $c + 7$ vertices is obtained. Illustr. 1, bibliogr. 12.

Keywords: open triangle, induced subgraph, sparse graph.

References

1. **E. C. Johnsen**, Structure and process: Agreement models for friendship formation, *Soc. Netw.* **8** (3), 257–306 (1986).
2. **J. Moody**, Matrix methods for calculating the triad census, *Soc. Netw.* **20** (4), 291–299 (1998).
3. **S. Wasserman** and **K. Faust**, *Social Network Analysis: Methods and Applications* (Camb. Univ. Press, Cambridge, 1994) (Struct. Anal. Soc. Sci., Vol. 8), DOI: 10.1017/cbo9780511815478.
4. **V. Batagelj** and **A. Mrvar**, A subquadratic triad census algorithm for large sparse networks with small maximum degree, *Soc. Netw.* **23** (3), 237–243 (2001).
5. **R. Milo**, **S. Shen-Orr**, **S. Itzkovitz**, **N. Kashtan**, **D. Chklovskii**, and **U. Alon**, Network motifs: Simple building blocks of complex networks, *Science* **298**, 824–827 (2002).
6. **G. Robins**, A tutorial on methods for the modeling and analysis of social network data, *J. Math. Psychol.* **57**, 261–274 (2013).
7. **T. Schank** and **D. Wagner**, Finding, counting and listing all triangles in large graphs, an experimental study, in *Experimental and Efficient Algorithms* (Proc. 4th Int. Workshop WEA 2005, Santorini Island, Greece, May 10–13, 2005) (Springer, Heidelberg, 2005), pp. 606–609 (Lect. Notes Comp. Sci., Vol. 3503), DOI: 10.1007/11427186_54.

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **19** (2) (2025).

-
8. **A. W. Goodman**, On sets of acquaintances and strangers at any party, *Am. Math. Mon.* **66** (9), 778–783 (1959), DOI: 10.1080/00029890.1959.11989408.
 9. **L. Sauvé**, On chromatic graphs, *Am. Math. Mon.* **68** (2), 107–111 (1961), DOI: 10.1080/00029890.1961.11989632.
 10. **A. V. Pyatkin**, **E. Lykhovyd**, and **S. I. Butenko**, The maximum number of induced open triangles in graphs of a given order, *Optim. Lett.* **13** (8), 1927–1935 (2019), DOI: 10.1007/s11590-018-1330-2.
 11. **A. V. Pyatkin** and **O. I. Chernykh**, On the maximum number of open triangles in graphs with the same number of vertices and edges, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **29** (1), 46–55 (2022) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **16** (1), 116–121 (2022)].
 12. **A. V. Pyatkin**, On the maximum number of open triangles in graphs with few edges, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **31** (3), 134–142 (2024) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **18** (3), 516–520 (2024)].

Artyom V. Pyatkin

Received March 19, 2025

Revised March 26, 2025

Accepted April 22, 2025

ЦЕЛОЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ С УСЛОВИЯМИ
ОПТИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ
СУММАРНОГО ВЗВЕШЕННОГО ВРЕМЕНИ
ОБСЛУЖИВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ ОДНИМ ПРИБОРОМ

Р. Ю. Симанчёв^{1,2,а}, И. В. Уразова^{1,б}

¹ Омский гос. университет им. Ф. М. Достоевского,
пр. Мира, 55а, 644077 Омск, Россия

² Омский научный центр СО РАН,
пр. Карла Маркса, 15, 644024 Омск, Россия
E-mail: ^аosiman@rambler.ru, ^бurazovainn@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается следующая задача теории расписаний. Требования обслуживаются одним прибором. Для каждого требования определены положительный вес и момент ожидания, до которого включительно оно недоступно для обработки. Длительности обслуживания одинаковы. В обслуживании разрешены прерывания. Время предполагается дискретным. Необходимо найти расписание обслуживания требований, минимизирующее взвешенную сумму моментов окончания обработки требований. Сложностной статус задачи на сегодня не известен. В работе представлена новая модель булева линейного программирования для данной задачи, включающая в себя некоторые необходимые условия оптимальности расписаний. Эти условия представлены в виде линейных неравенств. В результате проведённого вычислительного эксперимента замечено, что модель выдаёт целочисленное решение даже без наложения условий целочисленности на переменные. Табл. 3, ил. 2, библиогр. 10.

Ключевые слова: расписание, целочисленная модель, условие оптимальности.

Введение

Рассматривается задача минимизации взвешенной суммы моментов окончания обслуживания множества требований одним прибором. Задача формулируется следующим образом. На одном приборе необходимо обслужить n требований. В каждый момент прибор обслуживает не более одного требования. Множество всех требований обозначим через V .

Для каждого требования $i \in V$ заданы следующие характеристики: момент поступления $r_i \geq 0$ — момент времени, до которого включительно требование i недоступно для обработки; продолжительность обслуживания $p_i = p > 0$; $w_i \geq 0$ — вес требования. В обслуживании требований разрешены прерывания. Все характеристики целочисленны, в силу чего время будем считать дискретным.

Расписанием обслуживания требований будем называть $(0, 1)$ -вектор x с координатами x_{ik} , $i \in V$, $k = 1, 2, \dots$, которые определяются правилами: $x_{ik} = 1$, если в момент времени k требование i находится в обработке, в противном случае $x_{ik} = 0$. Введём величину $C_i(x) = \max\{k \in D \mid x_{ik} = 1\}$ — момент завершения обработки требования i в расписании x . Рассматриваемая задача заключается в нахождении расписания, минимизирующего взвешенную сумму моментов окончания обработки требований.

В стандартной системе обозначений [1] эта задача может быть записана как $1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i C_i$.

В обзоре [2] представлено большое число целочисленных моделей для различных задач теории расписаний, в том числе для одного прибора. Мы работаем с целочисленной моделью, впервые предложенной в работе [3]. Модель имеет наглядную интерпретацию с точки зрения теории графов. Кроме того, данная модель легко проецируется на ряд других задач построения расписаний с прерываниями на одном приборе, среди которых есть полиномиально разрешимые, NP-трудные задачи и задачи с открытым статусом сложности, например:

$$\begin{aligned} &1|pmtn; r_i| \sum C_i, \quad 1|pmtn; r_i| \sum w_i C_i, \\ &1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i T_i, \quad 1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum T_i, \\ &1|pmtn; r_i| \sum w_i U_i, \quad 1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i U_i. \end{aligned}$$

Все эти задачи упомянуты в [4]. Что касается рассматриваемой нами формулировки задачи, т. е. $1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i C_i$, то в настоящее время её сложностной статус неизвестен [4].

Так как число требований конечно, можно ввести в рассмотрение некоторый общий директивный срок d , достаточный для того, чтобы все требования были обслужены. При этом будем использовать обозначение $D = \{1, 2, \dots, d\}$. При такой договорённости расписание x удобно представлять в виде таблицы размера $n \times d$, в которой каждая строка соответствует требованию $i \in V$, а каждый столбец — моменту времени $k \in D$. Всякий столбец этой таблицы, не содержащий единиц, назовём *пустым*.

Отметим, что при $d > np$ упомянутая таблица будет иметь по крайней мере один пустой столбец. В этом случае очевидно, что задача разбивается на серию подзадач, удовлетворяющих условию $d = np$, из оптимальных решений которых естественным образом склеивается оптимальное решение исходной задачи. В связи с этим, без ограничения общности, будем далее полагать, что $d = np$.

Ясно, что введённые выше расписания являются целочисленными решениями следующей системы ограничений:

$$\sum_{k \in D} x_{ik} = p, \quad i \in V, \quad (1)$$

$$\sum_{i \in V} x_{ik} = 1, \quad k \in D, \quad (2)$$

$$x_{ik} \geq 0, \quad i \in V, k = r_i + 1, r_i + 2, \dots, d, \quad (3)$$

$$x_{ik} = 0, \quad i \in V, k = 1, 2, \dots, r_i. \quad (4)$$

Полиэдр, задаваемый условиями (1)–(4), по сути дела является многогранником транспортной задачи с целыми правыми частями и, следовательно, целочисленный.

Как уже отмечалось, в теории расписаний рассматривается большое число задач на рассматриваемом множестве расписаний. Эти задачи отличаются различной структурой целевых функций. Мы рассматриваем задачу минимизации функции

$$f(x) = \sum_{i \in V} w_i C_i(x) \quad (5)$$

на множестве вершин полиэдра (1)–(4). Отметим, что эта задача не является задачей целочисленного линейного программирования, так как её целевая функция нелинейна. Эта трудность типична для большинства задач теории расписаний при использовании аппарата целочисленного линейного программирования.

Для дальнейшего изложения нам понадобятся следующие понятия и обозначения.

Пусть G — обыкновенный граф. Если i и j — смежные вершины графа G , то для обозначения ребра между ними будем использовать запись ij . Степень вершины i графа G обозначим через $d_G(i)$. Граф H является подграфом графа G ($H \subset G$), если множества вершин и рёбер графа H являются подмножествами вершин и рёбер графа G соответственно. Для графов G_1 и G_2 запись $G_1 \cup G_2$ означает граф, полученный теоретико-множественным объединением множеств вершин и множеств

рёбер этого графа. Многогранником в конечномерном евклидовом пространстве будем называть выпуклую оболочку конечного множества точек, полиэдром — множество решений конечной системы линейных уравнений и неравенств, если оно ограничено. Полиэдр, содержащий данный многогранник, будем называть полиэдральной релаксацией многогранника.

В настоящей работе описан специальный подход к построению линейной целевой функции для задачи $1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i C_i$, основанный на графовом представлении и переходе от него к полиэдральной постановке. В разд. 1 даются графовая и полиэдральная постановки рассматриваемой задачи. Разд. 2 посвящён описанию некоторых свойств оптимальных расписаний в терминах линейных неравенств и, как следствие, получению новой ЦЛП-модели задачи. В заключении обсуждаются некоторые сопутствующие результаты, связанные с численным экспериментом на предложенной ЦЛП-модели.

1. Графовое описание множества расписаний и полиэдральная постановка задачи

Перейдём к описанию множества расписаний в терминах теории графов. Эта конструкция впервые была описана в [3] и далее получила своё развитие в [5, 6]. Рассмотрим три множества вершин: V — множество требований, D — множество моментов времени, в которые обслуживаются требования, Y — дубликат множества V (это вспомогательное множество, с помощью которого будут подсчитываться моменты окончания обслуживания требований). При этом для множеств V и Y порядок элементов несуществен, а множество $D = \{1, 2, \dots, d\}$ упорядочено. Так как множества V и Y по сути идентичны, в случаях, когда будет иметься в виду принадлежность элемента i множеств V и Y одновременно, будем использовать запись $i \in V = Y$. Пусть $G_1 = (V, D; E_1)$ — полный двудольный граф с долями V и D и множеством рёбер $E_1 = \{ik \mid i \in V, k \in D\}$; $G_2 = (Y, D; E_2)$ — полный двудольный граф с долями Y и D и множеством рёбер $E_2 = \{ik \mid i \in Y, k \in D\}$. Сформируем граф $G = G_1 \cup G_2$. В графе G определим семейство подграфов $\mathcal{H}$ по следующему правилу. Подграф $H \subset G$, $H = H_1 \cup H_2$, $H_1 \subset G_1$, $H_2 \subset G_2$, принадлежит семейству $\mathcal{H}$ (называется *расписанием*), если выполняются следующие три условия:

- (6) $d_{H_1}(i) = p$ для $i \in V$;
- (7) если $i \in V$, то $d_{H_1}(k) = 0$ при $k = 1, 2, \dots, r_i$ и $d_{H_1}(k) \leq 1$ при $k = r_i + 1, r_i + 2, \dots, d$;
- (8) для $i \in V = Y$ и $k \in D$ включение $ik \in EH_2$ имеет место тогда и только тогда, когда существует момент времени $l \in D$, $l \geq k$, такой, что $il \in EH_1$.

На рис. 1 приведён фрагмент такого графа $H \in \mathcal{H}$ для вершины $i = 3$.

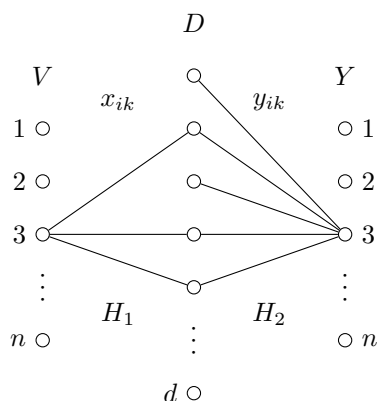


Рис. 1. Фрагмент графа $H \in \mathcal{H}$ для $i = 3$

Если $H = H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}$, то в силу (6) и (7) включение $ik \in EH_1$ означает, что в момент $k \in D$ требование $i \in V$ и только оно находится в обработке, а условие (8) гарантирует, что вершина $i \in Y$ будет соединена рёбрами со всеми вершинами множества $\{1, 2, \dots, C_i\} \subseteq D$. Таким образом, подграф $H_1 \subset H$ задаёт расписание обслуживания требований, а степени вершин $i \in Y$ относительно подграфа $H_2 \subset H$ суть моменты окончания обслуживания.

Данная конструкция позволяет сформулировать рассматриваемую задачу (5) в виде

$$\min \left\{ \sum_{i \in Y} w_i d_{H_2}(i) \mid H = H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H} \right\}. \quad (9)$$

Построим модель булева линейного программирования для задачи (9). Пусть $R^E = R^{E_1} \times R^{E_2}$ — пространство, ассоциированное с множеством рёбер графа G . Иными словами, R^E — это пространство вектор-столбцов, компоненты которых индексированы элементами множества $E = E_1 \cup E_2$. Оси координат в R^{E_1} будем именовать x_{ik} , в R^{E_2} — y_{ik} . Пусть $H \in \mathcal{H}$. Вектором инцидентностей подграфа $H = H_1 \cup H_2$ назовём вектор $(x^{H_1}, y^{H_2}) \in R^{E_1} \times R^{E_2}$ с координатами

$$x_{ik}^{H_1} = \begin{cases} 1, & \text{если } ik \in EH_1, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad i \in V, k \in D,$$

$$y_{ik}^{H_2} = \begin{cases} 1, & \text{если } ik \in EH_2, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad i \in Y, k \in D.$$

Теперь с множеством расписаний $\mathcal{H}$ можно связать многогранник

$$P_{\mathcal{H}} = \text{conv}\{(x^{H_1}, y^{H_2}) \in R^E \mid H = H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}\}.$$

В работах [3, 6] доказана

Теорема 1. Подграф $H = H_1 \cup H_2 \subset G$ принадлежит семейству $\mathcal{H}$ (является расписанием) тогда и только тогда, когда его вектор инцидентий $(x^{H_1}, y^{H_2}) \in R^E$ является целочисленной точкой полиэдра, задаваемого ограничениями (1)–(4) и ограничениями

$$\sum_{l=k}^d x_{il} \leq y_{ik}, \quad i \in V = Y, k \in D, \quad (10)$$

$$y_{ik} \leq \sum_{l=k}^d x_{il}, \quad i \in V = Y, k \in D, \quad (11)$$

$$y_{ik} \leq 1, \quad i \in Y, k \in D. \quad (12)$$

Полиэдр, задаваемый ограничениями (1)–(4), (10)–(12), обозначим через $M_{\mathcal{H}}$. Из теоремы 1 следует, что $P_{\mathcal{H}} \subseteq M_{\mathcal{H}}$, т. е. $M_{\mathcal{H}}$ является полиэдральной релаксацией многогранника $P_{\mathcal{H}}$. Более того, так как $M_{\mathcal{H}}$ и $P_{\mathcal{H}}$ лежат в единичном кубе, можем сформулировать следствие из теоремы 2.

Следствие 1. Множество вершин многогранника $P_{\mathcal{H}}$ совпадает множеством целочисленных точек пространства R^E , принадлежащих полиэдру $M_{\mathcal{H}}$.

Теперь задачу (9) можно сформулировать как задачу булева программирования вида

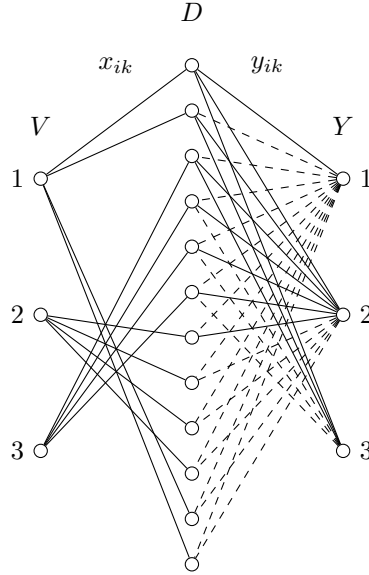
$$\min \left\{ g(x, y) = \sum_{i \in Y} \sum_{k=1}^d w_i y_{ik} \mid (x, y) \in M_{\mathcal{H}} \cap Z^E \right\}, \quad (13)$$

где Z^E — целочисленная решётка пространства R^E .

Таблица 1

Значения переменных y_{ik} для точки, изображённой на рис. 2

$i \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	0,75	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,25
2	1	1	1	1	1	1	1	0,75	0,5	0,25	0	0
3	1	1	1	0,75	0,5	0,25	0	0	0	0	0	0

Рис. 2. Пример нецелочисленной вершины полиэдра $M_{\mathcal{H}}$

Пример на рис. 2 показывает, что полиэдр $M_{\mathcal{H}}$ имеет также нецелочисленные вершины, т. е. включение $P_{\mathcal{H}} \subset M_{\mathcal{H}}$ строгое. Вершина полиэдра $M_{\mathcal{H}}$ приведена в графовом виде. Здесь $n = 3$, $p = 4$, $d = 12$, $r = (0, 2, 2)$. Сплошной линией изображены переменные, по которым точка $(x, y) \in M_{\mathcal{H}}$ имеет значение 1, штриховой — нецелочисленные переменные. В табл. 1 приведены значения для каждой переменной y_{ik} . Этот пример получен применением симплекс-метода к полиэдру (1)–(4), (10)–(12) (вид целевой функции значения не имеет).

2. Целочисленная модель с условиями оптимальности

Среди всех расписаний семейства $\mathcal{H}$ выделим подсемейство $\mathcal{H}^*$ оптимальных расписаний задачи $1|pmtn; p_i = p; r_i | \sum w_i C_i$, т. е. семейство всех таких подграфов $H^* = H_1^* \cup H_2^* \in \mathcal{H}$, что $g(x^{H_1^*}, y^{H_2^*}) \leq g(x^{H_1}, y^{H_2})$ для любого $H = H_1 \cup H_2 \in \mathcal{H}$.

Изучению структурных свойств оптимальных расписаний посвящены, например, работы [7–10]. В частности, в [10] сформулирована следующая теорема. Для расписания $x \in \Sigma_d$ через $S_i(x)$ обозначим момент начала обработки требования $i \in V$, т. е. $S_i(x) = \min\{k \in D \mid x_{ik} = 1\}$.

Теорема 2 [10]. Если $S_i(x) < S_j(x)$ при любом оптимальном расписании $x \in \Sigma_d$, то выполняется либо $C_i(x) < S_j(x)$, либо $C_i(x) > C_j(x)$ для всех $i, j \in V$.

Пользуясь теоремой 2, докажем следующую теорему, также упомянутую в [5].

Теорема 3. В оптимальном расписании различные моменты обработки любого из требований не сравнимы по модулю p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть расписание $x \in \Sigma_d$ оптимально. Выберем произвольно требование $i \in V$ и обозначим через $k_1, k_2, \dots, k_p$ моменты его обработки. Предположим, что найдутся такие $s, t \in \{1, 2, \dots, p\}$, что $k_t = k_s + lp$. В таблице, соответствующей расписанию x , между столбцами k_s и k_t имеется $pl - 1$ непустых столбцов. Это означает, что найдётся требование $j \in V$, моменты обработки которого располагаются как левее, так и правее столбца k_t . Пусть $m_1, m_2, \dots, m_p$ — моменты обработки требования j . При этом будем полагать, что $m_\alpha < k_t < m_{\alpha+1} \leq m_p$. Рассмотрим два случая.

Таблица 2

Фрагмент расписания x из доказательства теоремы 3 для случая $k_1 < m_1$

	...	m_α	...	k_t	...	m_p	...	k_p	...
i	...		...	1	...		...	1	...
j	...	1	...		...	1	...		...

Если $k_1 < m_1$, то по теореме 2 имеем $m_p < k_p$. Фрагмент расписания x , соответствующий этому случаю, представлен в табл. 2. В этой ситуации можем единицу из клетки (i, k_t) перенести в клетку (i, m_p) , а единицу из клетки (j, m_p) перенести в клетку (j, k_t) . Значение целевой функции при этом уменьшится. Следовательно, расписание x не будет оптимальным.

Таблица 3

Фрагмент расписания x из доказательства теоремы 3 для случая $m_1 < k_1$

	...	m_α	...	k_t	...	k_p	...	m_p	...
i	...		...	1	...	1	...		...
j	...	1	...		...		...	1	...

Если же $m_1 < k_1$, то вновь по теореме 2 имеем $k_p < m_p$. Соответствующий фрагмент расписания x представлен в табл. 3. Вновь переносим единицы: из клетки (i, k_p) в клетку (i, m_α) , а из клетки (j, m_α) в клетку (j, k_p) . Значение целевой функции вновь уменьшится, что вновь противоречит оптимальности расписания x . Теорема 3 доказана.

Следствием теоремы 3 и условия (6) в терминах пространства $R^E = R^{E_1} \times R^{E_2}$ являются равенства

$$\sum_{s=0}^{n-1} x_{i(m+sp)} = 1, \quad i \in V, m = 1, \dots, p, \quad (14)$$

которым удовлетворяют все оптимальные расписания задачи. При этом нетрудно привести примеры расписаний, удовлетворяющих ограничениям (14), но не являющихся оптимальными.

Наряду с полиэдром $M_{\mathcal{H}}$, заданным ограничениями (1)–(4), (10)–(12), в пространстве $R^E = R^{E_1} \times R^{E_2}$ определим ещё один полиэдр, учитывающий свойство оптимальных расписаний (14):

$$\sum_{i \in V} x_{ik} = 1, \quad k = 1, \dots, d, \quad (2)$$

$$x_{ik} \geq 0, \quad i \in V, k = r_i + 1, r_i + 2, \dots, d, \quad (3)$$

$$x_{ik} = 0, \quad i \in V, k = 1, 2, \dots, r_i, \quad (4)$$

$$y_{ik} \leq 1, \quad i \in V, k = 1, \dots, d, \quad (12)$$

$$\sum_{s=0}^{n-1} x_{i(m+sp)} = 1, \quad i \in V, m = 1, \dots, p, \quad (14)$$

$$\sum_{l=s}^{n-1} x_{i(m+lp)} \leq y_{i(m+sp)}, \quad i \in V, m = 1, \dots, p, s = 0, 1, \dots, n-1, \quad (15)$$

$$y_{i(k-1)} \geq y_{ik}, \quad i \in V, k = 2, 3, \dots, d, \quad (16)$$

Обозначим этот полиэдр через $Q_{\mathcal{H}}$. Вместе с задачей (13) рассмотрим новую задачу булева программирования

$$\min \left\{ g(x, y) = \sum_{i \in Y} \sum_{k=1}^d w_i y_{ik} \mid (x, y) \in Q_{\mathcal{H}} \cap Z^E \right\}. \quad (17)$$

Нас будет интересовать взаимосвязь оптимальных решений задач (13) и (17). Обратим внимание, что обе эти задачи имеют одну и ту же целевую функцию, но отличаются релаксационными полиэдрами. Докажем, что множества оптимальных решений задач (13) и (17) совпадают. Это позволит для решения исходной задачи $1|pmtn; p_i = p; r_i| \sum w_i C_i$ вместо полиэдра $M_{\mathcal{H}}$ использовать также полиэдр $Q_{\mathcal{H}}$.

Лемма 1. Если целочисленная точка $(\bar{x}, \bar{y})$ является оптимальным решением задачи (17), то она принадлежит полиэдру $M_{\mathcal{H}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $(\bar{x}, \bar{y})$ является решением задачи (17), то $(\bar{x}, \bar{y}) \in Q_{\mathcal{H}}$.

Для доказательства того, что $(\bar{x}, \bar{y}) \in M_{\mathcal{H}}$, достаточно показать, что эта точка удовлетворяет всем ограничениям (1)–(4), (10)–(12). Так как часть ограничений полиэдров $M_{\mathcal{H}}$ и $Q_{\mathcal{H}}$ совпадает, доказательства требует только выполнение ограничений (1), (10) и (11) для точки $(\bar{x}, \bar{y})$.

Ограничение (1) при каждом фиксированном i следует из ограничений (14) суммированием по $m = 1, 2, \dots, p$.

Докажем, что для точки $(\bar{x}, \bar{y})$ выполняются ограничения (10). Возьмём произвольно $i \in V = Y$ и $k = m_* + s_*p$ (подходящие $m_* \in \{1, 2, \dots, p\}$ и $s_* \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ существуют для любого $k \in \{1, 2, \dots, d\}$). Суммируя (15) и пользуясь ограничениями (16), получаем требуемое:

$$\begin{aligned} \sum_{l=k}^d \bar{x}_{il} &= \sum_{m=1}^p \sum_{l=s_*}^{n-1} \bar{x}_{i(m_*+m+lp)} \leq \sum_{m=1}^p \bar{y}_{i(m_*+m+s_*p)} \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^p \bar{y}_{i(m_*+s_*p)} = \sum_{m=1}^p \bar{y}_{ik} = p\bar{y}_{ik}. \end{aligned}$$

Остаётся доказать, что точка $(\bar{x}, \bar{y})$ удовлетворяет ограничениям (11). Если $\bar{y}_{ik} = 0$, то (11) выполняется в силу неотрицательности $\bar{x}_{il}$, $i \in V$, $l \in \{k, k+1, \dots, d\}$.

Пусть $\bar{y}_{ik} = 1$. Если $\sum_{l=k}^d \bar{x}_{il} \geq 1$, доказывать нечего. Предположим, что

$\sum_{l=k}^d \bar{x}_{il} = 0$. В силу (16) упорядоченный набор переменных $\bar{y}_{i1}, \bar{y}_{i2}, \dots, \bar{y}_{id}$ разбивается на две части: сначала идёт последовательность единиц, затем — последовательность нулей. Обозначим через $\bar{y}_{it} = 1$ последнюю единицу в строке $i \in Y$ таблицы $\bar{y} = (\bar{y}_{ik})_{i \in V, k=1,2,\dots,d}$. Ясно, в частности, что $k \leq t$. Сформируем новую точку $(\bar{x}, \tilde{y})$, занулив в $\bar{y}$ ровно одну координату $\bar{y}_{it}$. Покажем, что $(\bar{x}, \tilde{y}) \in Q_{\mathcal{H}}$. Ограничения (2)–(4) и (14) для точки $(\bar{x}, \tilde{y})$ выполняются, так как координаты x_{ik} не менялись. Выполнение ограничений (12) также очевидно. Ограничения (16) выполняются в силу того, что $\bar{y}_{it} = 1$ — последняя единица в строке $i \in Y$ таблицы $\bar{y}$. Наконец, выполнение ограничений (15) следует из предположения, что $\sum_{l=k}^d \bar{x}_{il} = 0$, т. е. $\bar{x}_{ik} = \bar{x}_{i(k+1)} = \dots = \bar{x}_{id} = 0$. Тем самым $(\bar{x}, \tilde{y}) \in Q_{\mathcal{H}}$.

Однако легко заметить, что при этом в силу структуры целевой функции задачи (17) получаем неравенство $g(\bar{x}, \tilde{y}) < g(\bar{x}, \bar{y})$, что противоречит оптимальности точки $(\bar{x}, \bar{y})$ для задачи (17). Следовательно, предположение о том, что $\sum_{l=k}^d \bar{x}_{il} = 0$ при $\bar{y}_{ik} = 1$, неверно. Таким образом, ограничения (11) для точки $(\bar{x}, \bar{y})$ также выполняются. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$ является оптимальным решением задачи (13), то она принадлежит полиэдру $Q_{\mathcal{H}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$ принадлежит полиэдру $M_{\mathcal{H}}$, она удовлетворяет всем ограничениям (1)–(4), (10)–(12), поэтому остаётся доказать, что точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$ удовлетворяет ограничениям (14)–(16).

Если нарушается какое-либо из ограничений (14), то в оптимальном расписании $\tilde{x}$ найдётся требование, в обработке которого есть моменты времени, сравнимые по модулю p . Это противоречит теореме 3. Значит, точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$ удовлетворяет ограничениям (14).

Перейдём к ограничениям (16). Если для некоторых $i \in V$ и $k \in \{1, 2, \dots, d\}$ имеем неравенство $\tilde{y}_{i(k-1)} < \tilde{y}_{ik}$, то очевидно, что $\tilde{y}_{i(k-1)} = 0$ и $\tilde{y}_{ik} = 1$. В этом случае в силу (10) имеем $\sum_{l=k-1}^d \tilde{x}_{il} = 0$ и, как следствие, $\sum_{l=k}^d \tilde{x}_{il} = 0$, но тогда из (11) следует, что $\tilde{y}_{ik} = 0$; противоречие. Значит, ограничения (16) также выполняются для точки $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Наконец, рассмотрим ограничения (15) для точки $(\tilde{x}, \tilde{y})$. Возьмём произвольно $i \in V = Y$ и $k = m_* + s_*p \in \{1, 2, \dots, d\}$. Если $\tilde{y}_{ik} = 1$, то, пользуясь (14), получим

$$\sum_{l=s_*}^{n-1} \tilde{x}_{i(m_*+lp)} \leq \sum_{l=0}^{n-1} \tilde{x}_{i(m_*+lp)} = 1 = \tilde{y}_{ik}.$$

Если же $\tilde{y}_{ik} = 0$, то в силу (10) имеем

$$\sum_{l=s_*}^d \tilde{x}_{i(m_*+lp)} \leq \sum_{l=k}^d \tilde{x}_{il} = 0 = \tilde{y}_{i(m_*+s_*p)}.$$

В обоих случаях ограничения (15) выполняются. Лемма 2 доказана.

Следствием лемм 1 и 2 является совпадение множеств оптимальных решений задач (13) и (17).

Теорема 4. Целочисленная точка является оптимальным решением задачи (13) тогда и только тогда, когда она является оптимальным решением задачи (17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если точка $(\bar{x}, \bar{y})$ является оптимальным решением задачи (17), то по лемме 1 имеем $(\bar{x}, \bar{y}) \in Q_{\mathcal{H}} \cap M_{\mathcal{H}}$. Предположим, что оптимальным решением задачи (13) является отличная от $(\bar{x}, \bar{y})$ точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$ и при этом $g((\tilde{x}, \tilde{y})) < g((\bar{x}, \bar{y}))$. Так как точка $(\tilde{x}, \tilde{y})$ оптимальна в (13), по лемме 2 она принадлежит полиэдру $Q_{\mathcal{H}}$ и, следовательно, $(\bar{x}, \bar{y})$ не оптимальна в задаче (17); противоречие.

Обратная импликация доказывается аналогично. Теорема 4 доказана.

Заключение

В работе в терминах теории графов построены новые модели, формализующие задачу минимизации общего взвешенного времени окончания обслуживания множества требований на одной машине. Принципиальной особенностью предложенных в данной работе моделей является то, что в них множество всех расписаний трактуется как семейство подграфов некоторого специального графа. Как следствие, получаем богатый арсенал возможностей для анализа комбинаторной структуры задачи, который существенно расширяется при использовании полиэдральных свойств соответствующего многогранника.

Получена полиэдральная релаксация многогранника оптимальных расписаний. В качестве сопутствующего результата отметим, что при проведении вычислительного эксперимента на новой модели среди более тысячи задач с различными входными данными целочисленность оптимального решения достигалась без требования целочисленности переменных. Рассмотрены примеры с $n = 10, 20 \dots, 200$ и $p = 3, 4, 10, 15, 20$. На каждую комбинацию параметров n и p было решено по 10 задач с различными значениями $r_i, w_i, i \in V$. Найти дробное решение соответствующей задачи линейного программирования на данный момент не удалось.

Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках государственного задания Омского научного центра СО РАН (проекта № 121022000112–2). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. Lawler E. L., Lenstra J. K., Rinnooy Kan A. H. G., Shmoys D. B. Sequencing and scheduling: Algorithms and complexity // Logistics of production and inventory. Amsterdam: North-Holland, 1993. P. 445–522. (Handb. Oper. Res. Manag. Sci.; V. 4).
2. Blazewicz J., Dror D., Weglarz J. Mathematical programming formulations for machine scheduling: A survey // Eur. J. Oper. Res. 1991. V. 51, No. 3. P. 283–300.
3. Симанчёв Р. Ю., Шерешик Н. Ю. Целочисленные модели обслуживания требований одним прибором с прерываниями // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2014. Т. 21, № 4. С. 89–101.
4. Brucker P., Knust S. Complexity results for scheduling problems. Osnabrück: Osnabrück Univ., 2009. URL: mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class (accessed: July 9, 2025).

5. **Шерешик Н. Ю.** Релаксации многогранника оптимальных расписаний обслуживания требований одним прибором с прерываниями // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2015. Т. 22, № 6. С. 78–90.
6. **Simanchev R. Yu., Urazova I. V.** Integer models for the total weighted tardiness problem on a single machine // Mathematical optimization theory and operations research: Recent trends. Rev. Sel. Pap. 22nd Int. Conf. (Yekaterinburg, Russia, July 2–8, 2023). Cham: Springer, 2023. P. 176–187. (Commun. Comput. Inf. Sci.; V. 1881). DOI: 10.1007/978-3-031-43257-6_14.
7. **Smith W. E.** Various optimizers for single-stage production // Nav. Res. Logist. Q. 1956. V. 3, No. 1–2. P. 59–66.
8. **Sauer N., Stone M.** Preemptive scheduling // Algorithms and order. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1989. P. 307–323. (NATO Sci. Ser. C; V. 255).
9. **Баптист Ф., Карлье Ж., Кононов А. В., Керан М., Севастьянов С. В., Свириденко М.** Структурные свойства оптимальных расписаний с прерыванием операций // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2009. Т. 16, № 1. С. 3–36.
10. **Лазарев А. А., Кварацхелия А. Г.** Свойства оптимальных расписаний задачи теории расписаний минимизации суммарного взвешенного момента окончания для одного прибора // Автоматика и телемеханика. 2010. № 10. С. 80–89.

Симанчёв Руслан Юрьевич
Уразова Инна Владимировна

Статья поступила
15 ноября 2024 г.
После доработки —
17 декабря 2024 г.
Принята к публикации
22 марта 2025 г.

AN INTEGER MODEL WITH OPTIMALITY CONDITIONS
FOR THE TOTAL WEIGHTED TARDINESS PROBLEM
ON A SINGLE MACHINER. Yu. Simanchev^{1,2, a} and I. V. Urazova^{1, b}¹ Dostoevsky Omsk State University,
55a Mir Avenue, 644077 Omsk, Russia² Omsk Scientific Center of SB RAS,
15 Karl Marx Avenue, 644024 Omsk, RussiaE-mail: ^aosiman@rambler.ru, ^burazovainn@mail.ru

Abstract. The paper considers the following problem of scheduling theory. Jobs are serviced by a single machine. For each job, a positive weight and a release date are defined. The service durations are the same. Interruptions are allowed during service. Time is assumed to be discrete. It is necessary to find a schedule for servicing jobs that minimizes the weighted sum of end times of job processing. The complexity of the problem is currently unknown. This paper presents a new Boolean linear programming model for this problem, which includes certain necessary conditions for schedule optimality. These conditions are represented as linear inequalities. As a result of a computational experiment, it is noted that the model yields an integer solution even without imposing conditions on the variables to be integer. Tab. 3, illustr. 2, bibliogr. 10.

Keywords: schedule, integer model, optimality condition.

References

1. E. L. Lawler, J. K. Lenstra, A. H. G. Rinnooy Kan, and D. B. Shmoys, Sequencing and scheduling: Algorithms and complexity, in *Logistics of Production and Inventory*, (North-Holland, Amsterdam, 1993), pp. 445–522 (Handb. Oper. Res. Manag. Sci., Vol. 4).
2. J. Blazewicz, D. Dror, and J. Weglarz, Mathematical programming formulations for machine scheduling: A survey, *Eur. J. Oper. Res.* **51** (3), 283–300 (1991).

3. **R. Yu. Simanchev** and **N. Yu. Shereshik**, Integer models for the interrupt-oriented services of jobs by single machine, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **21** (4), 89–101 (2014) [Russian].
4. **P. Brucker** and **S. Knust**, Complexity results for scheduling problems (Osnabrück Univ., Osnabrück, 2009), URL: mathematik.uni-osnabrueck.de/research/OR/class (accessed: July 9, 2025).
5. **N. Yu. Shereshik**, Relaxations for the polyhedron of optimal schedules for the problem of interrupt-oriented service of jobs with a single machine, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **22** (6), 78–90 (2015) [Russian].
6. **R. Yu. Simanchev** and **I. V. Urazova**, Integer models for the total weighted tardiness problem on a single machine, in *Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends* (Rev. Sel. Pap. 22nd Int. Conf., Yekaterinburg, Russia, July 2–8, 2023) (Springer, Cham, 2023), pp. 176–187 (Commun. Comput. Inf. Sci., Vol. 1881), DOI: 10.1007/978-3-031-43257-6_14.
7. **W. E. Smith**, Various optimizers for single-stage production, *Nav. Res. Logist. Q.* **3** (1–2), 59–66 (1956).
8. **N. Sauer** and **M. Stone**, Preemptive scheduling, in *Algorithms and Order*, (Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989), pp. 307–323 (NATO Sci. Ser. C, Vol. 255).
9. **P. Baptiste**, **J. Carlier**, **A. V. Kononov**, **M. Queyranne**, **S. V. Sevastyanov**, and **M. Sviridenko**, Structural properties of optimal schedules with preemption, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **16** (1), 3–36 (2009) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **4** (4), 455–474 (2010)].
10. **A. A. Lazarev** and **A. G. Kvaratskheliya**, Properties of optimal schedules for the minimization total weighted completion time in preemptive equal-length job with release dates scheduling problem on a single machine, *Avtom. Telemekh.*, No. 10, 80–89 (2010) [Russian] [*Autom. Remote Control* **71** (10), 2085–2092 (2010)].

Ruslan Yu. Simanchev
Inna V. Urazova

Received November 15, 2024
Revised December 17, 2024
Accepted March 22, 2025

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

2025. Том 32, № 2

Зав. редакцией Ю. В. Шамардин

Журнал подготовлен с использованием макропакета $\text{\LaTeX 2}_{\epsilon}$.

The present publication has been typeset using $\text{\LaTeX 2}_{\epsilon}$.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-85978 от 26.09.2023 г.

Размещение в сети Интернет: math-sobolev.ru.

Дата размещения в сети Интернет 30.09.2025 г.

Формат 70×100 1/16. Усл. печ. л. 11,0. Объём 1,04 МБ.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия