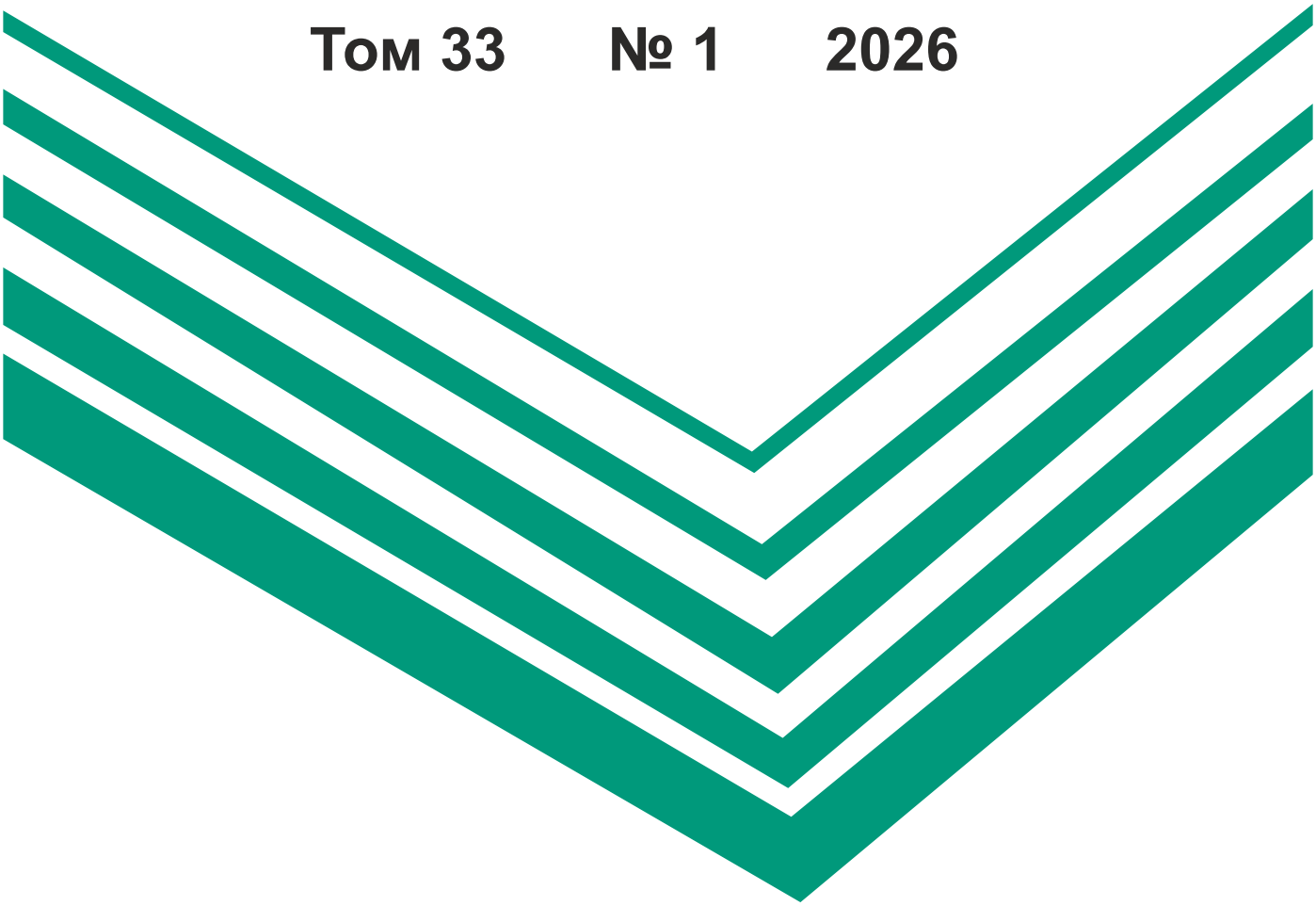
ISSN 2949-5598

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Том 33 № 1 2026



Новосибирск
Издательство Института математики

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Главный редактор	**В. Л. Береснев**
Зам. главного редактора	**А. А. Евдокимов**
Ответственный секретарь	**Ю. В. Шамардин**

С. В. Августинович	**М. Я. Ковалёв**	**А. В. Пяткин**
Г. П. Агибалов	**А. В. Кононов**	**А. А. Сапоженко**
В. Б. Алексеев	**А. В. Косточка**	**М. Свириденко**
О. В. Бородин	**В. В. Кочергин**	**Б. Я. Рябко**
В. А. Васильев	**Ю. А. Кочетов**	**Н. Н. Токарева**
Э. Х. Гимади	**В. К. Леонтьев**	**Ю. А. Флеров**
А. Ю. Григорьев	**Б. М.-Т. Лин**	**Ф. В. Фомин**
С. Демпе	**В. В. Лозин**	**М. Ю. Хачай**
А. И. Ерзин	**П. Пардалос**	**Я. М. Шафранский**

Учредители журнала Сибирское отделение РАН
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Журнал включён в базу данных Russian Science Citation Index (RSCI) на платформе Web of Science. Переводы статей на английский язык публикуются в *Journal of Applied and Industrial Mathematics* и доступны по ссылке `www.springer.com/mathematics/journal/11754`.

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Выпускается с 1994 г. Научный журнал 4 номера в год

Том 33, № 1 (167) **Январь–март 2026**

СОДЕРЖАНИЕ

Акентьев В. В. *Полудискретное геометрическое моделирование объектов в задаче двумерной упаковки* **5**

Васильев В. А. *О крайних точках множества Харшаньи* **26**

Гусев В. В. *Устойчивые по Нэшу коалиционные структуры в ограниченных кооперативных играх* **38**

Ерзин А. И. *Оптимальное размещения дронов, покрывающих барьер в прямоугольной метрике* **56**

Захарова Ю. В., Заозёрская Л. А. *Матэвристика на основе локального поиска для одной модификации обобщённой задачи о назначениях* **71**

Крылатов А. Ю. *Достаточность в задаче оптимизации топологии сети* **91**

Шабаркова А. О., Абросимов М. Б. *Простые и непростые регулярные турниры* **114**

НОВОСИБИРСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ

В журнале публикуются оригинальные научные статьи и обзоры теоретической и прикладной направленности по следующим разделам дискретного анализа, исследования операций и информатики:

- дискретная оптимизация
- комбинаторика
- контроль и надёжность дискретных устройств
- математические модели и методы принятия решений
- математическое программирование
- модели экономики
- моделирование процессов управления
- построение и анализ алгоритмов
- синтез и сложность управляющих систем
- теория автоматов
- теория графов
- теория игр и её приложения
- теория кодирования
- теория расписаний и размещений

Адрес редакции:
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4,
630090 Новосибирск, Россия
Телефон: +7 (383) 329–75–79
E-mail: discopr@math.nsc.ru

© Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 2026

SIBERIAN BRANCH OF THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII

/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/

Published since 1994 Scientific journal 4 issues per year

Vol. 33, No. 1 (167) **January–March, 2026**

CONTENTS

V. V. Akentev. *Semi-discrete geometric representation of objects in the two-dimensional nesting problem* **5**

V. A. Vasil'ev. *On the extreme points of the Harsanyi set* **26**

V. V. Gusev. *Nash-stable coalition partitions in restricted cooperative games* **38**

A. I. Erzin. *Optimal drone placement to cover a barrier in the rectilinear metric* **56**

Yu. V. Zakharova and **L. A. Zaozerskaya.** *A local-search-based matheuristic for a modification of the generalized assignment problem* .. **71**

A. Yu. Krylatov. *Sufficency in the optimal network design problem* **91**

A. O. Shabarkova and **M. B. Abrosimov.** *Simple and non-simple regular tournaments* **114**

NOVOSIBIRSK
SOBOLEV INSTITUTE PRESS

In this journal we publish original research papers and survey papers of both theoretical and practical importance on the following topics of discrete analysis, operations research and informatics:

- discrete optimization
- combinatorics
- control and reliability of discrete devices
- decision making models and methods
- mathematical programming
- economic models
- management modeling
- design and analysis of algorithms
- synthesis and complexity of control systems
- automata theory
- graph theory
- game theory and its applications
- coding theory
- theory of scheduling and facility location

Editorial office address:
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Avenue,
630090 Novosibirsk, Russia
Phone: +7 (383) 329–75–79
E-mail: discopr@math.nsc.ru

© Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 2026

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2026. Т. 33, № 1. С. 5–25

УДК 519.7 DOI: 10.33048/daio.2026.33.845

ПОЛУДИСКРЕТНОЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ В ЗАДАЧЕ ДВУМЕРНОЙ УПАКОВКИ

В. В. Акентьев

Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: akentevvv01@gmail.com

Аннотация. Рассматривается задача двумерной упаковки (nesting problem), заключающаяся в размещении набора объектов произвольной формы в ограниченную полосу с целью минимизации её используемой длины. Одним из ключевых этапов решения подобных задач является выбор способа моделирования геометрических объектов, который определяет как точность аппроксимации их формы, так и вычислительные затраты алгоритма упаковки. Предлагается новый метод моделирования объектов на основе адаптивных трапеций. В отличие от актуального метода — сегментного подхода — он позволяет значительно снизить избытки аппроксимации, возникающие при несовпадении вершин с узлами сетки, и повысить точность представления формы объектов. Проведённые вычислительные эксперименты на типовых наборах данных ESICUP показали, что использование предложенного метода при выполнении алгоритма упаковки вниз-влево (bottom-left-fill) обеспечивает более плотное размещение объектов при умеренном увеличении вычислительных затрат. Полученные результаты подтверждают эффективность предложенного метода и его практическую применимость в задачах двумерной упаковки. Табл. 2, ил. 11, библиогр. 11.

Ключевые слова: задача раскроя, задача упаковки, полудискретное кодирование, алгоритм нижнего левого заполнения.

Введение

Задача двумерной упаковки объектов произвольной формы (nesting problem) имеет широкий спектр практических приложений. Она возникает в текстильной, металлургической, стекольной и машиностроительной промышленности, где требуется рациональное использование материала при раскрое или компоновке деталей. В литературе данная задача

© В. В. Акентьев, 2026

рассматривается как частный случай общей задачи резки и упаковки (cutting and packing, C&P). В отличие от других подзадач C&P, в задаче вложения рассматриваются как выпуклые, так и невыпуклые многоугольники. Учёт последних существенно усложняет решение по сравнению с постановками, ограниченными выпуклыми объектами.

Формально задача вложения заключается в размещении множества двумерных простых (самонепересекающихся) многоугольников внутри заданных контейнеров при условии отсутствия пересечений между объектами. В качестве контейнеров могут рассматриваться как ограниченные многоугольные области, так и неограниченная по длине полоса. Конкретная целевая функция определяется прикладной областью и может включать минимизацию используемой длины полосы, минимизацию числа контейнеров и другие критерии. Ключевая вычислительная сложность задачи связана с проверкой пересечений объектов произвольной формы, что требует применения эффективных методов вычислительной геометрии и во многом определяет масштабируемость алгоритма.

Производительность алгоритма решения во многом определяется способом моделирования объектов. Существующие подходы условно делятся на два класса:

- точные (методы на основе no fit polygon, φ-функций [1] и др.);
- дискретные (пиксельный [2], полосный [3], сегментный [4] методы и др.).

Точные методы обеспечивают корректное геометрическое представление и отсутствие ошибок аппроксимации, однако характеризуются высокими вычислительными затратами и слабой масштабируемостью. Дискретные методы, напротив, позволяют значительно ускорить выполнение основных операций (проверку пересечения, поиск позиции для размещения и само размещение), что особенно важно в эвристических и метаэвристических алгоритмах, где качество решения напрямую зависит от количества итераций. Однако повышение скорости достигается ценой снижения точности аппроксимации формы объектов, что в ряде случаев может приводить к ухудшению качества упаковки.

В последние годы внимание исследователей привлекли полудискретные методы, в которых дискретизация выполняется только по одному направлению. Такой подход обеспечивает баланс между скоростью и точностью [5]. В частности, в [6] показано, что применение полудискретного сегментного кодирования позволяет достигать высокой производительности при умеренных искажениях формы. Однако данный метод чувствителен к выбору шага сетки: если вершины объектов не совпадают с узлами сетки, то аппроксимация может давать значительные избытки, что приводит к ухудшению решения.

В настоящей работе предлагается новый полудискретный метод кодирования объектов, основанный на использовании адаптивных трапеций. Он призван устранить указанный недостаток сегментного подхода, повысив точность аппроксимации без существенного увеличения вычислительных затрат. Целью работы является разработка и исследование предложенного метода, а также экспериментальное сравнение его с существующим сегментным кодированием в контексте применения в жадных алгоритмах двумерной упаковки.

Работа организована следующим образом. В разд. 1 рассматривается историческое развитие дискретных методов. Ограничения актуального сегментного подхода описаны в разд. 2. В разд. 3 представлены новый метод кодирования и его особенности. Результаты вычислительных экспериментов приведены в разд. 4, а в заключении сформулированы основные выводы и направления дальнейших исследований.

1. Обзор дискретных кодировок

Важным направлением исследований в области задачи вложения является разработка дискретных кодировок, ориентированных на достижение точной аппроксимации форм объектов при сохранении высокой вычислительной эффективности. Под кодировкой в данном контексте понимается дискретное представление геометрического объекта в виде конечного множества элементов регулярной структуры, позволяющее выполнять основные операции над объектами — проверку пересечений, смещение и размещение — в упрощённой форме. Применение таких кодировок сводит сложные геометрические операции к работе с более простыми структурами, что существенно облегчает проверку пересечений по сравнению с точными методами.

В процессе решения задачи работа ведётся непосредственно с кодировками объектов: объекты считаются пересекающимися, если пересекаются их представления. Поскольку пересечения объектов недопустимы, кодировка должна полностью покрывать исходный объект. При этом упрощения, возникающие в процессе аппроксимации, могут приводить к появлению дополнительных областей — избытков аппроксимации, вследствие чего аппроксимация оказывается несколько увеличенной по сравнению с исходным объектом.

Поскольку большинству дискретных методов построения кодировки характерно использование одномерной или двумерной сетки, её шаг R выступает параметром, определяющим точность аппроксимации. В типичных случаях уменьшение шага делает дискретное представление ближе к исходной форме объекта и расширяет пространство допустимых решений. Однако такое поведение наблюдается не всегда: если шаг сетки

изначально согласован с геометрией объекта, то его дальнейшее уменьшение может приводить к появлению избыточных областей аппроксимации и, как следствие, к ухудшению точности представления. Тем самым уменьшение шага неизбежно увеличивает вычислительные затраты. Поэтому актуальной задачей является разработка подходов, позволяющих достичь приемлемой точности аппроксимации даже при сравнительно крупном шаге сетки.

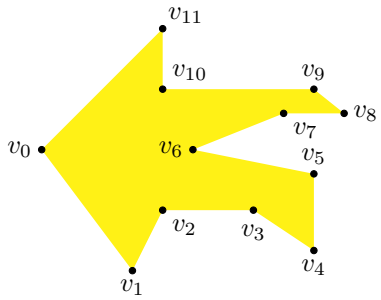
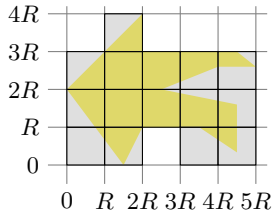


Рис. 1. Исходный объект

Ниже представлены основные подходы дискретного моделирования на примере объекта, приведённого на рис. 1, отражающие последовательное развитие идей и методов к их кодированию.

• **Бинарное кодирование**, предложенное в 1993 г. [2], заключается в построении двумерной сетки и формировании массива, в котором каждой ячейке соответствует клетка сетки. Если клетка или её граница пересекается с объектом, то в соответствующей ячейке массива фиксируется единица, в противном случае — нуль. Таким образом формируется пиксельная аппроксимация объекта (рис. 2а, 2б).



а

0	1	0	0	0
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1

б

0	1	0	0	0
5	4	3	2	1
5	4	3	2	1
2	1	0	2	1

в

Рис. 2. Методы бинарного кодирования и кодирования переходов:
а) аппроксимация объекта на сетке; б) массив бинарного кодирования;
в) массив кодирования переходов

• **Кодирование переходов**, предложенное в 2001 г. [7], представляет собой развитие бинарного подхода. На основе бинарного представления объекта формируется массив тех же размеров, где каждая ячейка получает значение, равное нулю, если соответствующая ячейка в бинарной матрице равна нулю; в противном случае указывается число ячеек, на которое надо переместиться вправо до первой нулевой ячейки или конца массива.

Такой способ кодирования не изменяет геометрическое представление кодировки, но позволяет ускорить проверку пересечений по сравнению с бинарным кодированием, поскольку каждая ячейка хранит дополнительную информацию о расстоянии до области, не содержащей объекта (рис. 2в).

• **Полосное кодирование**, предложенное в 2007 г. [3], является полудискретным методом, так как использует одномерную сетку для кодирования. Объект аппроксимируется множеством прямоугольников, пара сторон каждого из которых опирается на соседние узлы сетки, а объединение всех прямоугольников полностью покрывает объект.

Метод на порядки ускоряет выполнение основных операций по сравнению с двумя описанными выше подходами. Кроме того, полудискретизация обеспечивает более точное приближение формы объектов, что положительно сказывается на качестве решений. Пример полосной аппроксимации объекта приведён на рис. 3.

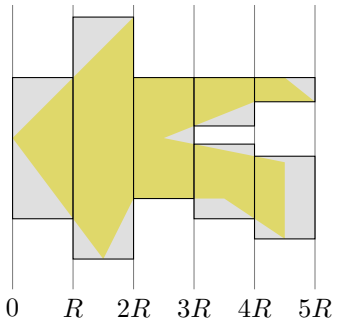


Рис. 3. Полосный метод кодирования

• **Сегментное кодирование**, впервые представленное в 2013 г. [4] и подробно описанное в [6], представляет собой актуальный полудискретный подход. В отличие от полосного метода, здесь для аппроксимации используются трапеции (включая вырожденные случаи с основанием нулевой длины). Основания трапеций располагаются на соседних узлах сетки, а боковые стороны касаются границы объекта. Для обеспечения корректности на трапеции накладывается ограничение: пересечение

y-проекций оснований трапеции на любой узел сетки непусто. Если допустимы несколько вариантов угла наклона боковой стороны, то выбирается прямой угол.

Элементами кодировки выступают основания трапеций, представляемые сегментами, которым присваиваются метки трёх типов: L (left), R (right) или M (middle), в зависимости от их положения и взаимного пересечения. Так, левый (правый) сегмент трапеции получает метку L (R). Если пересекаются два однотипных сегмента, то они объединяются в один с тем же типом. В случае пересечения разнотипных сегментов соответствующая общая часть выделяется в отдельный сегмент с меткой M, тогда как оставшиеся непересекающиеся участки сохраняют исходную маркировку (рис. 4).

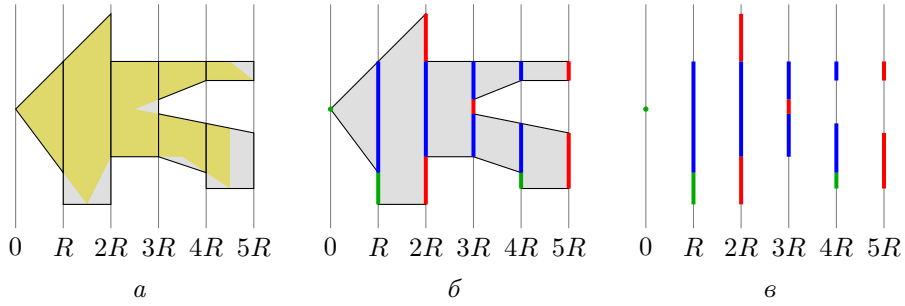


Рис. 4. Сегментный метод кодирования (сегменты L — зелёные, M — синие, R — красные): а) аппроксимация объекта трапециями; б) построение сегментной кодировки; в) сегментная кодировка

В предыдущих методах кодировки объекты считались пересекающимися, если пересекалась хотя бы одна пара их элементарных составляющих. В предлагаемом подходе сохраняется тот же принцип, однако допускается пересечение сегментов типов L и R, что интерпретируется как касание объектов без наложения.

Данный метод обеспечивает существенно более высокую точность аппроксимации по сравнению с предыдущим подходом при сопоставимых вычислительных затратах на выполнение основных операций. Благодаря этому сегментное кодирование в последние годы стало основой для разработки эффективных эвристических алгоритмов решения задачи вложения.

Для более наглядной интерпретации метода в данной работе дополнительно введён шаг, описывающий построение трапеций, что также позволяет интуитивно объяснить корректность сегментного представления.

2. Недостатки сегментного кодирования

У актуального полудискретного способа кодирования сохраняется существенный недостаток, связанный с появлением избыточных областей аппроксимации. Эти излишки возникают в тех случаях, когда вершины многоугольника не совпадают с узлами сетки: при дискретизации части фигуры аппроксимация выходит за границы оригинала, что снижает точность представления и может ухудшать качество размещения. Пример возникновения таких избыточных областей показан на рис. 5.

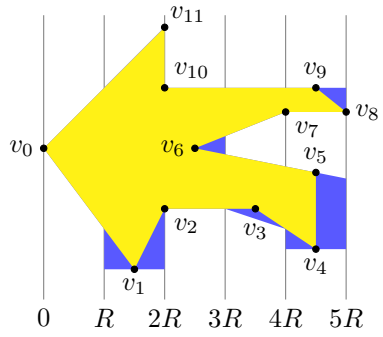


Рис. 5. Избытки аппроксимации сегментной кодировки

Данную проблему можно устранить подбором шага сетки так, чтобы все абсциссы вершин делились на этот шаг, однако требование одновременной целочисленной кратности множества произвольных координат, как правило, неразрешимо на практике. Альтернативой является уменьшение шага для повышения точности аппроксимации. При этом размер кодировки и вычислительная сложность основных операций возрастают пропорционально уменьшению шага, что сводит на нет преимущество полудискретного подхода по вычислительной эффективности.

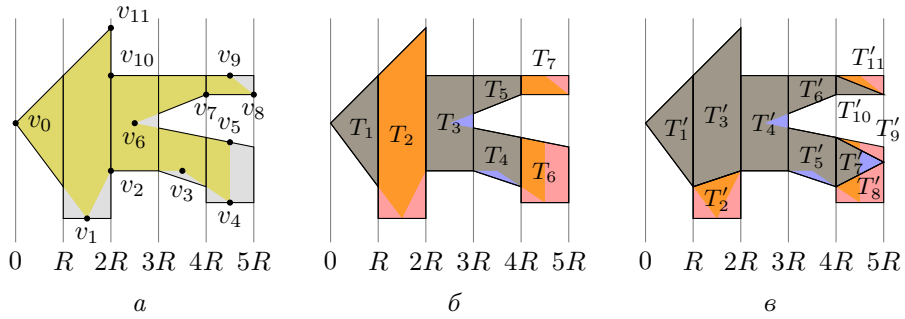
Для минимизации описанного недочёта разработан новый метод кодирования, который частично снимает проблему избыточной аппроксимации с сохранением высокой вычислительной эффективности; его описание приведено ниже.

3. Кодирование адаптивными трапециями

Идея предлагаемого способа кодирования развивает сегментное представление и базируется на той же аппроксимации объекта набором (аппроксимирующих) трапеций, основания которых лежат на соседних узлах сетки, а боковые стороны касаются границ исходного многоугольника, пример которой приведён на рис. 6а.

Ключевое отличие заключается в параметризации выбора угла наклона боковой стороны трапеции в случаях, когда он неоднозначен. Жёсткое правило фиксации прямого угла заменяется параметрическим подходом, при котором значение угла определяется динамически в процессе выполнения основных операций с учётом текущей компоновки объектов.

В качестве элементов кодировки выступают адаптивные трапеции: статичные и нестатичные. Это части аппроксимирующих трапеций, которые не допускают и допускают изменения во время выполнения основных операций соответственно. Статичные трапеции формируются из аппроксимирующих, которые либо не содержат вершин кодируемого объекта (см. трапеции T_1 и T_5 на рис. 6б), либо включают только вершины, соответствующие локально вогнутым углам — вогнутым углам многоугольника, образуемого пересечением этой трапеции с кодируемым объектом (например, трапеции T_3 и T_4). Оставшиеся аппроксимирующие трапеции (T_2, T_6 и T_7), содержащие иные типы вершин, относятся к нестатичным и могут изменяться в процессе выполнения операций. При этом на них накладывается ограничение, что даже после адаптации они обязаны полностью содержать соответствующий фрагмент исходного объекта.



а *б* *в*

Рис. 6. Построение кодировки адаптивными трапециями (статичные трапеции синие, нестатичные — красные): а) аппроксимация объекта трапециями; б) классификация трапеций; в) разделение нестатичных трапеций

Для повышения эффективности выполнения базовых операций размеры нестатичных трапеций уменьшаются путём их разбиения на статичную и нестатичные части, при этом статичная часть выбирается максимально возможной. В результате из одного аппроксимирующего элемента выделяются статичная и одна либо две нестатичные части в зависимости от геометрии аппроксимируемой области.

• Пересечение двух узлов сетки. Если аппроксимируемая часть объекта пересекает оба соседних узла сетки, то разбиение порождает одну статичную и одну нестатичную трапеции. Примером служит трапеция T_2

(рис. 6б), которая разбивается на трапеции T'_2 и T'_3 (рис. 6в). При этом если бы вершина v_{11} лежала между узлами R и $2R$ (аналогично вершине v_1), то была бы образована ещё одна нестатичная трапеция.

• Двукратное пересечение одного узла. Если аппроксимируемая часть дважды пересекает один и тот же узел сетки, то разбиение приводит к одной статичной и двум нестатичным трапециям. В этом случае выбор основания статичной трапеции со стороны непересекаемого узла является неоднозначным; для устранения неоднозначности и снижения избытков аппроксимации это основание задаётся точкой, ордината которой совпадает с серединой второго основания данной трапеции. Пример иллюстрируется на рис. 6б трапецией T_6, которая после разбиения образует трапеции T'_7, T'_8 и T'_9 (см. рис. 6в).

В обоих случаях у каждой нестатичной трапеции фиксируется одна боковая сторона — та, что непосредственно соприкасается со статичной трапецией, полученной в результате разбиения.

Статичная трапеция однозначно определяется парой своих оснований, тогда как нестатичная адаптивная трапеция характеризуется не только основаниями, но и дополнительными параметрами: множеством точек адаптации, представляющих собой вершины кодируемого объекта вне узлов сетки, лежащие внутри трапеции или на её подвижной боковой стороне, относительно которых выполняется адаптация, а также фиксируемой стороной (верхней или нижней), общей со статичной частью.

3.1. Построение нестатичной адаптивной трапеции. Опишем алгоритм построения структуры данных, соответствующей нестатичной адаптивной трапеции. Рассмотрим пару трапеций — статичную и нестатичную, образовавшихся в результате разбиения одной аппроксимирующей трапеции, а также фрагмент объекта, который они совместно кодируют (рис. 7а) в ячейке i. Как отмечалось ранее, фиксируемой стороной нестатичной трапеции является сторона, общая со статичной частью. Далее изложение ведётся для случая, когда фиксированным является верхнее основание (рис. 7); алгоритм для варианта с фиксированным нижним основанием строится аналогично.

Определение точек адаптации. Из множества всех вершин кодируемого объекта выберем только лежащие внутри адаптивной трапеции либо принадлежащие её подвижной боковой стороне. К ним добавим вершины трапеции s_l и s_r, принадлежащие фиксируемой боковой стороне. *Точками адаптации* назовём последовательность вершин $V = (v_1, \ldots, v_n)$ выпуклой оболочки полученного множества, являющихся вершинами кодируемого объекта и упорядоченных от левой фиксированной точки s_l к правой s_r. В примере на рис. 7 таковыми являются

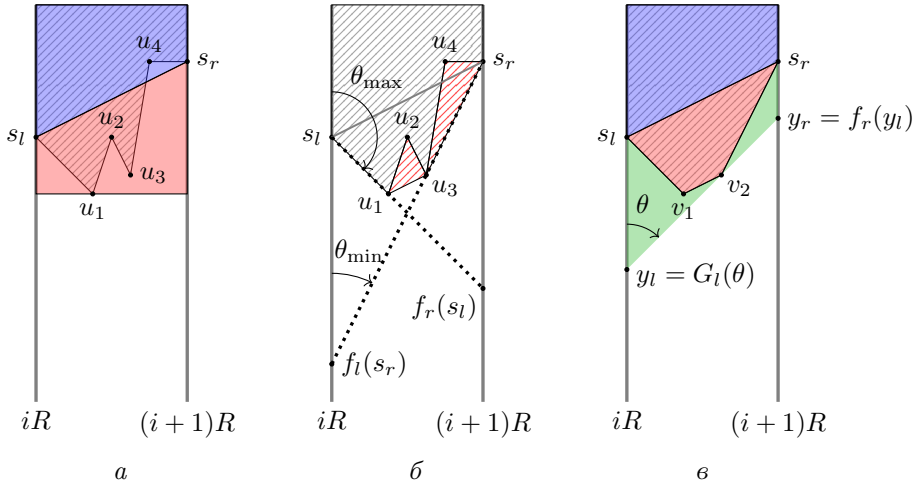


Рис. 7. Построение структуры нестатичной адаптивной трапеции:
а) кодируемый фрагмент и аппроксимирующие трапеции;
б) определение точек адаптации и параметров нестатичной трапеции;
в) демонстрация перестроения подвижной стороны

вершины u_1 и u_3, переименованные далее в v_1 и v_2 соответственно. Если множество точек адаптации пусто, то данный фрагмент полностью аппроксимируется ранее определённой статичной трапецией, и построения нестатичной трапеции не требуется.

Функции перестроения подвижной боковой стороны. Для корректного обновления положения подвижной боковой стороны вводятся функции

$$f_r(y_l) = \min_{v \in V} \left(y_l + \frac{v_y - y_l}{v_x - iR} R \right), \tag{1}$$

$$f_l(y_r) = \min_{v \in V} \left(y_r - \frac{v_y - y_r}{v_x - (i+1)R} R \right). \tag{2}$$

Функция (2) (соответственно функция (1)) по y-координате левой (правой) подвижной точки возвращает y-координату правой (левой) подвижной точки таким образом, чтобы прямая, проходящая через эти две точки, являлась касательной к аппроксимируемому фрагменту объекта.

Адаптация по углу наклона. Положение подвижной стороны задаётся углом её наклона. Для этого вводится функция, связывающая угол наклона с координатой левой подвижной точки трапеции:

$$g_l(\theta) = \min_{v \in V} (v_y + \operatorname{ctg} \theta (v_x - iR)). \tag{3}$$

Угол наклона боковой стороны, проходящей через две точки u и v, определяется функцией

$$\Phi(v,u) = \operatorname{arcctg}\left(\frac{v_y - u_y}{v_x - u_x}\right). \tag{4}$$

Особые углы адаптации. На основе множества точек адаптации формируется множество *особых углов адаптации* Θ, описывающее все положения подвижной боковой стороны, при которых она становится касательной к одной из сторон выпуклой оболочки аппроксимируемого фрагмента:

$$\Theta = \{\Phi(s_l, v_1)\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \{\Phi(v_i, v_{i+1})\} \cup \{\Phi(v_n, s_r)\}, \quad v_j \in V. \tag{5}$$

Максимальное и минимальное значения угла наклона подвижной стороны достигаются соответственно при $\Phi(s_l, v_1)$ и $\Phi(v_n, s_r)$; далее они обозначаются через $\theta_{\max}$ и $\theta_{\min}$.

Ограничение области адаптации. Чтобы обеспечить корректную адаптацию боковой стороны, вводится обобщение функции, ограничивающее угол её наклона в пределах допустимой области:

$$G_l(\theta) = \begin{cases} g_l(\theta_{\min}), & \text{если } \theta < \theta_{\min}, \\ g_l(\theta), & \text{если } \theta_{\min} \leqslant \theta \leqslant \theta_{\max}, \\ g_l(\theta_{\max}), & \text{если } \theta_{\max} < \theta. \end{cases} \tag{6}$$

На рис. 8 показана визуализация двух из множества возможных представлений кодировки адаптивными трапециями для объекта с рис. 1.

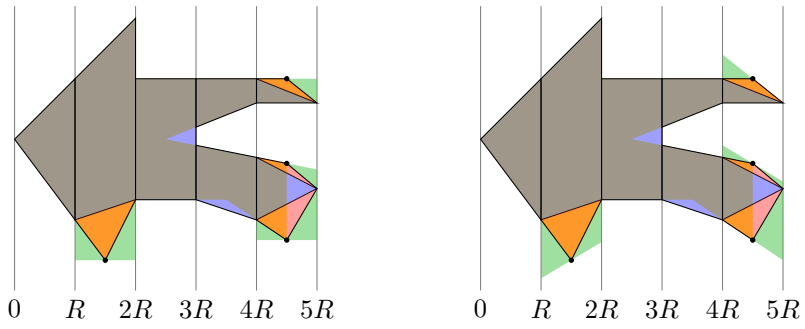


Рис. 8. Кодирование адаптивными трапециями:
статичные трапеции синие, фиксированная (изменяемая) область
нестатичных трапеций — красная (зелёная)

3.2. Проверка пересечений. Опишем алгоритм проверки пересечений пар адаптивных трапеций, находящихся в одной ячейке. Рассмотрим три возможных случая: пара статичных трапеций, комбинация статичной и нестатичной трапеции и пара нестатичных трапеций.

1. Пара статичных трапеций. Две статичные трапеции пересекаются тогда и только тогда, когда пересекается хотя бы одна пара их оснований или их боковые стороны.

2. Статичная и нестатичная трапеции. Если нестатичная трапеция зафиксирована сверху, то её нижняя сторона адаптируется по верхнему углу статичной трапеции, после чего пересечение определяется по критерию, аналогичному случаю двух статичных трапеций. В случае, когда нестатичная трапеция зафиксирована снизу, аналогично адаптируется её верхняя сторона.

3. Пара нестатичных трапеций. Возможны два случая: обе трапеции зафиксированы с одной стороны или с разных сторон.

Если обе трапеции зафиксированы с одной стороны (например сверху), то первая адаптируется по углу фиксированной боковой стороны второй трапеции, а вторая — по углу фиксированной стороны первой. Далее для адаптированных трапеций пересечение проверяется по критерию для пары статичных.

В случае фиксации трапеций с разных сторон они не пересекаются, если среди объединения множеств их особых углов существует угол, при котором адаптированные трапеции не пересекаются.

Следует отметить, что благодаря особенностям алгоритма построения кодировки количество нестатичных трапеций в представлении объекта ограничено сверху числом его вершин. Это, в свою очередь, ограничивает число сравнительно затратных вычислительных операций адаптации по углу, выполняемых для пары нестатичных трапеций для любого шага сетки. Таким образом, при уменьшении шага сетки рост вычислительных затрат обусловлен преимущественно менее ресурсоёмкими операциями, что обеспечивает масштабируемость метода относительно шага сетки.

3.3. Размещение. Опишем процедуру размещения предметов в контейнере, основанную на жадном алгоритме заполнения вниз-влево (bottom-left-fill), который является базовым для большинства эвристических алгоритмов.

Пусть заданы частично заполненный контейнер и предмет. Размещение осуществляется последовательным поиском первой допустимой позиции в кодировке контейнера, начиная из нижнего левого угла. Для каждой проверяемой позиции выполняются следующие шаги.

Шаг 1. Производится проверка на наличие пересечения адаптивных трапеций размещаемого предмета с трапециями, принадлежащими уже размещённым объектам. Если пересечений не обнаружено, то предмет фиксируется в текущем положении.

Шаг 2. В случае наличия пересечений предмет сдвигается в новую позицию вдоль сетки на минимальное расстояние, при котором найденные пересекающиеся адаптированные трапеции соприкасаются, не образуя перекрытий.

Шаг 3. Если после сдвига предмет выходит за рамки текущей ячейки, то поиск позиции продолжается с начала следующей ячейки.

Если при этом кодировка предмета выходит за пределы контейнера по ячейкам, то предмет считается не размещаемым в данной конфигурации упаковки.

Для формирования общей упаковки используется классический жадный алгоритм bottom-left-fill. На первом этапе предметы сортируются в невозрастающем порядке по площади, после чего последовательно размещаются с использованием описанной выше процедуры.

3.4. Сравнение с сегментным способом кодирования. Как отмечалось ранее, актуальный полудискретный способ кодирования имеет недостаток, связанный с избытками аппроксимации, возникающими в случаях, когда вершины кодируемого объекта не совпадают с узлами сетки. Предлагаемый метод частично сохраняет данную проблему, однако выражена она значительно слабее. Избытки аппроксимации наблюдаются лишь в двух случаях:

1) для вершин, соответствующих локально вогнутым углам (например, вершины v_3 и v_6 на рис. 6);

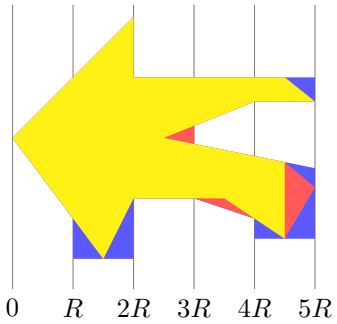
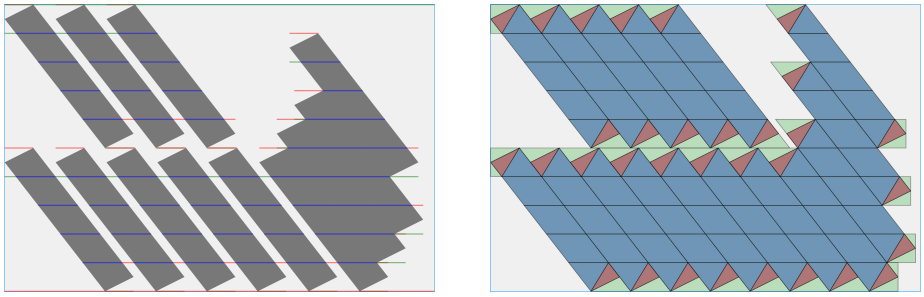


Рис. 9. Избытки аппроксимаций: избытки сегментного кодирования красные и синие, избытки кодирования адаптивными трапециями — красные

2) для фрагментов объекта, пересекающих сетку ровно в двух точках (пример подобного фрагмента показан на рис. 6б и соответствует трапеции T_6).

Во всех остальных случаях избытки аппроксимации полностью устранены.

На рис. 9 представлено наглядное сравнение избытков аппроксимации для объекта, показанного на рис. 1, полученных при использовании сегментного способа и кодирования с помощью адаптивных трапеций. Из иллюстрации видно, что применение адаптивных трапеций позволяет существенно сократить избытки аппроксимации по сравнению с исходным методом, что приводит к более точному воспроизведению формы объекта.



а *б*

Рис. 10. Сравнение результатов упаковки при использовании различных способов кодирования: а) сегментное кодирование; б) кодирование адаптивными трапециями

На рис. 10 приведён пример упаковки одинаковых прямоугольников алгоритмом bottom-left-fill, использующим различные способы кодирования. Как видно из иллюстрации, при применении предложенного метода удалось разместить 16 прямоугольников, тогда как при сегментном способе — лишь 12. Помимо увеличения числа размещённых объектов новый метод обеспечивает более плотное прилегание сторон многоугольников, что особенно важно при практическом использовании в задачах резки и раскроя на этапе резки. Этот пример наглядно демонстрирует, что снижение избытков аппроксимации непосредственно повышает эффективность упаковки и качество использования доступного пространства.

Таким образом, предложенный метод, во-первых, повышает точность аппроксимации и, как следствие, обеспечивает более плотное размещение объектов, а во-вторых, значительно упрощает задачу подбора шага сетки, поскольку обладает меньшей чувствительностью к вершинам, не совпадающим с её узлами.

4. Результаты вычислительных экспериментов

В рамках настоящего раздела осуществляется сравнение двух методов кодирования объектов задачи двумерной упаковки: сегментного метода кодирования (segment encoding, SE) и метода кодирования адаптивными трапециями (adaptive trapezoid encoding, ATE). Оба метода реализованы на языке C++ и протестированы на процессоре Intel Core i5-10400F. Сравнение подходов осуществляется по результатам, полученным с использованием алгоритма bottom-left-fill, описанным выше.

Вычислительные эксперименты проводились на следующих типовых наборах данных ESICUP: Shirts из [9], Han из [10], а также Trousers и Swim из [11]. Эти наборы включают как выпуклые, так и невыпуклые фрагменты различных размеров. Для оценки масштабируемости дополнительно создан набор Random500, содержащий 500 случайно сгенерированных объектов разной формы и размеров. Каждый объект в этом наборе имеет от одной до трёх копий. Контейнером в экспериментах служил лист фиксированной ширины и неограниченной длины. Во всех тестах не допускались повороты и отражения объектов. Характеристики наборов данных приведены в табл. 1.

Таблица 1

Информация по используемым тестам

Тест	Общее число предметов	Число уникальных предметов	Среднее число вершин предметов	Ширина контейнера	Интервал длины x-проекции предметов	R_b
Han	23	20	7,35	58	$[1; 19]$	1
Shirts	99	8	6,05	40	$[1; 11]$	1
Swim	48	10	20	5752	$[1; 915]$	36
Trousers	64	17	6,06	79	$[1; 57]$	1
Random500	500	246	13,49	600	$[0{,}001; 63{,}9]$	0,95

В качестве шага сетки применяется предложенный в работе [6] шаг R_b, обеспечивающий компромисс между точностью аппроксимации и вычислительными затратами. Этот шаг определяется по формуле

$$R_b = \max\{P_e, P_p/n_e\},$$

где P_e — минимальная ненулевая длина x-проекций всех невертикальных рёбер всех объектов, P_p — длина x-проекции наименьшего по ширине объекта, а n_e — число рёбер этого объекта. Такой выбор шага гарантирует наличие как минимум одного элемента кодирования на каждое ребро при сохранении приемлемых вычислительных затрат.

4.1. Анализ избытков аппроксимации. Для оценки зависимости избытков аппроксимации от шага сетки были проведены тесты, результаты которых показаны на рис. 11. На графиках представлено отношение суммарной площади избытков аппроксимации к общей площади кодируемых объектов в зависимости от шага сетки для методов SE и ATE.

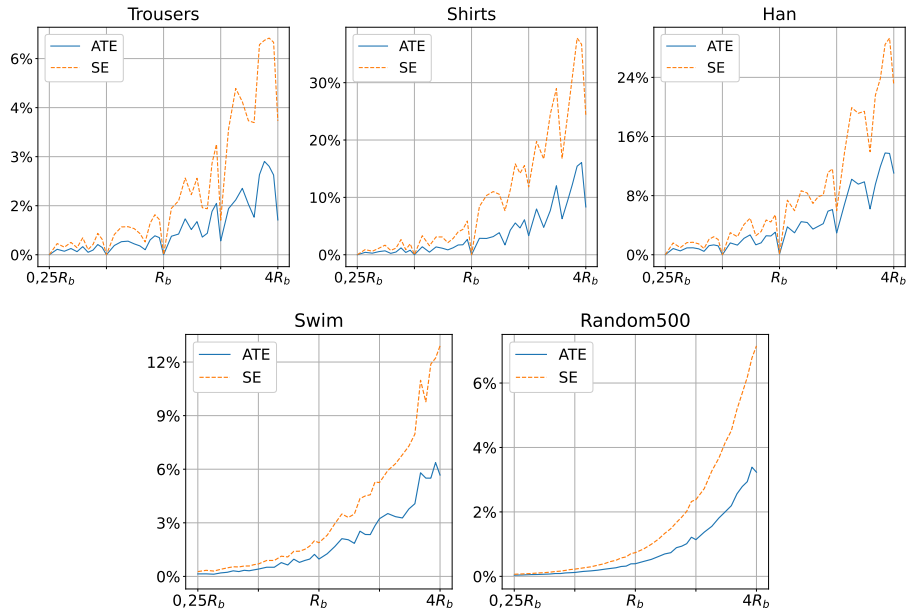


Рис. 11. Зависимость доли избытков аппроксимации от шага сетки

Результаты показывают, что при оптимальном выборе шага сетки удаётся полностью устранить избытки аппроксимации (например, для наборов Han, Shirts и Trousers при $R_b = 1$). Однако даже незначительное отклонение от этого значения приводит к заметному росту избытков: до 5% для метода SE и до 2% для ATE. В среднем метод кодирования ATE демонстрирует в 2,2 раза меньшую долю избытков по сравнению с SE, что подтверждает его значительно более высокую точность описания формы объектов.

4.2. Анализ времени работы. Для сравнения производительности для каждого метода выполнено по 1000 запусков с шагом сетки $2^n R_b$, где $n = 1, 0, -1, -2, -3$. В табл. 2 приведены среднее время работы (вместе со среднеквадратичным отклонением) и длина упаковки.

Из табл. 2 видно, что с применением ATE время работы алгоритма увеличивается по сравнению с SE для всех тестов. В среднем время выполнения при кодировании методом ATE примерно в 1,7 раза больше.

Таблица 2

Сравнение длины и времени упаковки для разных способов кодирования

Тест	Шаг сетки	Время, мс		Длина	
		SE	ATE	SE	ATE
Han	2	0,1 ± 0,02	0,2 ± 0,04	55,0	53,0
	1	0,1 ± 0,03	0,2 ± 0,04	50,0	50,0
	0,5	0,2 ± 0,05	0,3 ± 0,09	51,0	51,0
	0,25	0,3 ± 0,07	0,5 ± 0,10	51,0	51,0
	0,125	0,5 ± 0,11	0,9 ± 0,21	51,2	51,2
Shirts	2	0,3 ± 0,10	0,9 ± 0,16	74,0	74,0
	1	0,4 ± 0,14	0,5 ± 0,13	71,0	71,0
	0,5	0,6 ± 0,26	0,9 ± 0,93	70,0	70,0
	0,25	1,0 ± 0,20	1,6 ± 0,34	69,5	69,5
	0,125	1,8 ± 0,35	3,3 ± 0,69	68,6	68,6
Swim	72	1,0 ± 0,14	1,8 ± 0,32	7687,5	7687,5
	36	1,6 ± 0,23	2,6 ± 0,46	7615,5	7471,5
	18	2,2 ± 0,35	3,5 ± 0,63	7471,5	7471,5
	9	3,3 ± 0,59	5,9 ± 1,74	7444,5	7399,5
	4,5	6,3 ± 1,17	10,4 ± 2,01	7449,0	7417,5
Trousers	2	0,3 ± 0,07	0,5 ± 0,11	285,0	285,0
	1	0,4 ± 0,13	0,6 ± 0,19	284,0	284,0
	0,5	0,7 ± 0,17	1,3 ± 0,37	284,0	284,0
	0,25	1,3 ± 0,30	2,6 ± 0,64	283,8	283,8
	0,125	2,5 ± 0,61	5,3 ± 1,24	283,6	283,6
Random500	1,9	99,1 ± 8,66	138 ± 14,4	885,3	872,0
	0,95	131 ± 11,5	161 ± 15,7	861,6	860,6
	0,475	170 ± 15,5	233 ± 21,1	855,4	845,4
	0,2375	265 ± 21,7	409 ± 31,0	843,8	840,7
	0,11875	484 ± 34,1	740 ± 48,6	841,3	840,2

Это связано с адаптацией нестатичных трапеций, которая требует дополнительных вычислений. Тем не менее для теста Shirts наблюдается противоположный эффект: при уменьшении шага сетки с $2R_b$ до R_b время работы сокращается, поскольку все вершины объектов попадают в узлы сетки, и в кодировке остаются только статичные адаптивные трапеции.

4.3. Качество упаковки. Если принять во внимание длину упаковки, то метод кодирования ATE в среднем показывает более качественные результаты. В проведённых экспериментах все значения длины упаковки, полученные с использованием ATE, оказались не хуже, чем при SE. Это объясняется более точной аппроксимацией формы, позволяющей эффективнее использовать доступное пространство контейнера.

Однако следует отметить, что подобное преимущество не гарантировано для всех случаев. Возможны ситуации, когда улучшение аппроксимации формы приводит к локальному ухудшению общего результата из-за изменения взаимного расположения объектов. Аналогичные эффекты наблюдаются и при уменьшении шага сетки, что обсуждается в работе [6].

Результаты также показывают, что целесообразность применения того или иного метода определяется структурой данных. Для наборов, где удаётся подобрать шаг сетки так, чтобы вершины объектов совпадали с узлами, сегментный метод остаётся более эффективным, так как он обеспечивает аналогичное качество аппроксимации при меньшем времени работы (например, в тестах Han, Shirts и Trousers). Однако для более сложных случаев, где сетка не может быть согласована с вершинами (например, в тестах Swim и Random500), адаптивные трапеции показывают значительное преимущество, обеспечивая более точное кодирование формы и более плотное размещение объектов.

Заключение

В работе представлен новый метод кодирования двумерных объектов с использованием адаптивных трапеций, предназначенный для решения задач резки и раскроя. В отличие от сегментного подхода, предложенный метод обеспечивает более точную аппроксимацию формы объектов и существенно снижает избытки аппроксимации, возникающие при несоответствии вершин узлам сетки. Проведённые вычислительные эксперименты показали, что применение данного метода в жадном алгоритме упаковки позволяет добиться более плотного размещения объектов при умеренном увеличении вычислительных затрат.

Разработанный метод характеризуется хорошей масштабируемостью, что делает его удобным для интеграции в различные эвристические и метаэвристические алгоритмы двумерной упаковки. В перспективе представляется интересным исследование его применения для аппроксимации объектов со сглаженными или криволинейными контурами, не являющимися многоугольниками, путём модификации процедуры адаптации трапеций под такие случаи.

Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева (проект № FWNF–2022–0019). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. **Stoyan Y., Terno J., Scheithauer G., Gil N., Romanova T.** Phi-functions for primary 2D-objects // Stud. Inform. Univers. 2002. V. 2, No. 1. P. 1–32.
2. **Oliveira J. F., Ferreira J. S.** Algorithms for nesting problems // Applied simulated annealing. Heidelberg: Springer, 1993. P. 255–273. DOI: 10.1007/978-3-642-46787-5_13.
3. **Ma H., Liu C. C.** Fast nesting of 2-D sheet parts with arbitrary shapes using a greedy method and semi-discrete representations // IEEE Trans. Autom. Sci. Eng. 2007. V. 4, No. 2. P. 273–282. DOI: 10.1109/TASE.2006.874973.
4. **Akunuru R., Babu N. R.** A semi-discrete geometric representation for nesting problems // Int. J. Prod. Res. 2013. V. 51, No. 14. P. 4155–4174. DOI: 10.1080/00207543.2012.751508.
5. **Burke E., Hellier R., Kendall G., Whitwell G.** A new bottom-left-fill heuristic algorithm for the two-dimensional irregular packing problem // Oper. Res. 2006. V. 54, No. 3. P. 587–601. DOI: 10.1287/opre.1060.0293.
6. **Chehrazad S., Roose D., Wauters T.** A fast and scalable bottom-left-fill algorithm to solve nesting problems using a semi-discrete representation // Eur. J. Oper. Res. 2022. V. 300, No. 3. P. 809–826. DOI: 10.1016/j.ejor.2021.10.043.
7. **Babu A. R., Babu N. R.** A generic approach for nesting of 2-D parts in 2-D sheets using genetic and heuristic algorithms // Comput. Aided Des. 2001. V. 33, No. 12. P. 879–891. DOI: 10.1016/S0010-4485(00)00112-3.
8. **Bennell J. A., Oliveira J. F.** The geometry of nesting problems: A tutorial // Eur. J. Oper. Res. 2008. V. 184, No. 2. P. 397–415. DOI: 10.1016/j.ejor.2006.11.038.
9. **Dowsland K. A., Dowsland W. B., Bennell J. A.** Jostling for position: Local improvement for irregular cutting patterns // J. Oper. Res. Soc. 1998. V. 49, No. 6. P. 647–658. DOI: 10.1057/palgrave.jors.2600563.
10. **Han G.-C., Na S.-J.** Two-stage approach for nesting in two-dimensional cutting problems using neural network and simulated annealing // Proc. Inst. Mech. Eng. Part B: J. Eng. Manuf. 1996. V. 210, No. 6. P. 509–519. DOI: 10.1243/PIME_PROC_1996_210_150_02.
11. **Oliveira J. F., Gomes A. M., Ferreira J. S.** TOPOS — A new constructive algorithm for nesting problems // OR Spectrum. 2000. V. 22, No. 2. P. 263–284. DOI: 10.1007/s002910050105.

Акентьев Всеволод Владиславович

Статья поступила
19 ноября 2025 г.
После доработки —
12 декабря 2025 г.
Принята к публикации
22 декабря 2025 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2026. Vol. 33, No. 1. P. 5–25

UDC 519.7 DOI: 10.33048/daio.2026.33.845

SEMI-DISCRETE GEOMETRIC REPRESENTATION OF OBJECTS IN THE TWO-DIMENSIONAL NESTING PROBLEM

V. V. Akentev

Novosibirsk State University,
2 Pirogov Street, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: akentevvv01@gmail.com

Abstract. The paper addresses the two-dimensional nesting problem, which consists in arranging a set of irregularly shaped objects within a bounded strip so as to minimize its utilized length. One of the key aspects affecting the efficiency of nesting algorithms is the choice of geometric representation, as it determines both the accuracy of shape approximation and the computational cost of the packing process. We introduce a novel object representation method based on adaptive trapezoids. In contrast to the commonly used segment-based approach, the proposed technique significantly reduces approximation errors caused by the misalignment between polygon vertices and grid nodes, thereby improving the fidelity of the geometric model. Computational experiments conducted on standard ESICUP benchmark datasets demonstrate that integrating the proposed representation into a bottom-left-fill packing algorithm yields denser layouts with only a moderate increase in computational effort. The results confirm the effectiveness and practical applicability of the proposed method for two-dimensional nesting problems. Tab. 2, illustr. 11, bibliogr. 11.

Keywords: cutting problem, nesting problem, semi-discrete representation, bottom-left-fill algorithm.

References

1. **Y. Stoyan, J. Terno, G. Scheithauer, N. Gil,** and **T. Romanova,** Phi-functions for primary 2D-objects, *Stud. Inform. Univers.* **2** (1), 1–32 (2002).
2. **J. F. Oliveira** and **J. S. Ferreira,** Algorithms for nesting problems, in *Appliad Simulated Annealing* (Springer, Heidelberg, 1993), pp. 255–273, DOI: 10.1007/978-3-642-46787-5_13.

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **20** (1) (2026).

3. **H. Ma** and **C. C. Liu,** Fast nesting of 2-D sheet parts with arbitrary shapes using a greedy method and semi-discrete representations, *IEEE Trans. Autom. Sci. Eng.* **4** (2), 273–282 (2007), DOI: 10.1109/TASE.2006.874973.
4. **R. Akunuru** and **N. R. Babu,** A semi-discrete geometric representation for nesting problems, *Int. J. Prod. Res.* **51** (14), 4155–4174 (2013), DOI: 10.1080/00207543.2012.751508.
5. **E. Burke, R. Hellier, G. Kendall,** and **G. Whitwell,** A new bottom-left-fill heuristic algorithm for the two-dimensional irregular packing problem, *Oper. Res.* **54** (3), 587–601 (2006), DOI: 10.1287/opre.1060.0293.
6. **S. Chehrazad, D. Roose,** and **T. Wauters,** A fast and scalable bottom-left-fill algorithm to solve nesting problems using a semi-discrete representation, *Eur. J. Oper. Res.* **300** (3), 809–826 (2022), DOI: 10.1016/j.ejor.2021.10.043.
7. **A. R. Babu** and **N. R. Babu,** A generic approach for nesting of 2-D parts in 2-D sheets using genetic and heuristic algorithms, *Comput. Aided Des.* **33** (12), 879–891 (2001), DOI: 10.1016/S0010-4485(00)00112-3.
8. **J. A. Bennell** and **J. F. Oliveira,** The geometry of nesting problems: A tutorial, *Eur. J. Oper. Res.* **184** (2), 397–415 (2008), DOI: 10.1016/j.ejor.2006.11.038.
9. **K. A. Dowsland, W. B. Dowsland,** and **J. A. Bennell,** Jostling for position: Local improvement for irregular cutting patterns, *J. Oper. Res. Soc.* **49** (6), 647–658 (1998), DOI: 10.1057/palgrave.jors.2600563.
10. **G.-C. Han** and **S.-J. Na,** Two-stage approach for nesting in two-dimensional cutting problems using neural network and simulated annealing, *Proc. Inst. Mech. Eng., Part B: J. Eng. Manuf.* **210** (6), 509–519 (1996), DOI: 10.1243/PIME_PROC_1996_210_150_02.
11. **J. F. Oliveira, A. M. Gomes,** and **J. S. Ferreira,** TOPOS — A new constructive algorithm for nesting problems, *OR Spectrum* **22** (2), 263–284 (2000), DOI: 10.1007/s002910050105.

Vsevolod V. Akentev

Received November 19, 2025
Revised December 12, 2025
Accepted December 22, 2025

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2026. Т. 33, № 1. С. 26–37

УДК 519.83 DOI: 10.33048/daio.2026.33.853

О КРАЙНИХ ТОЧКАХ МНОЖЕСТВА ХАРШАНЬИ

В. А. Васильев

Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия
E-mail: vasilev@math.nsc.ru

Аннотация. В работе даётся полное описание крайних точек множества Харшаньи произвольной конечной кооперативной игры с побочными платежами. Выигрыши, отвечающие каждой такой точке, задаются некоторой полной упорядоченностью всех игроков. При этом дивиденд каждой коалиции передаётся целиком тому из её участников, кто является первым (в случае отрицательности этого дивиденда) или последним (в случае неотрицательности такового) в данной коалиции в смысле заданной упорядоченности. Полученный результат дополняет известную теорему Шепли о строении ядер выпуклых кооперативных игр. Библиогр. 14.

Ключевые слова: кооперативная игра, ядро, распределение Харшаньи, крайняя точка многогранника Харшаньи.

Введение

В современной теории кооперативных игр с побочными платежами (TU-игры) одной из центральных задач является построение и анализ принципов оптимального распределения совокупного выигрыша между участниками. Наряду с классическими концепциями решения, такими как ядро и множество Вебера, фундаментальное значение имеет множество Харшаньи. Оно определяет границы справедливого распределения на основе вкладов коалиций и обобщает идею дележей через коалиционные дивиденды. Дивиденды Харшаньи, введенные в 1959 г., отражают «чистый» экономический эффект от кооперации внутри каждой конкретной коалиции. Распределение этих дивидендов между членами коалиций порождает класс векторов выплат Харшаньи. Множество Харшаньи определяется как выпуклая оболочка всех допустимых распределений дивидендов и представляет собой замкнутый выпуклый многогранник.

© В. А. Васильев, 2026

Известно, что множество Харшаньи любой кооперативной игры v совпадает с ядром некоторой другой выпуклой игры, определённым образом связанной с v. Несмотря на имеющееся уже достаточно полное представление о структуре ядер выпуклых игр, задача полной характеризации вершин многогранника Харшаньи для произвольных TU-игр долгое время оставалась нерешённой. Прямые вычисления здесь осложняются экспоненциальным ростом числа коалиций и знакопеременной природой дивидендов. В результате геометрия множества Харшаньи оказывается значительно сложнее строения классического ядра выпуклой игры.

В настоящей работе даётся полное описание крайних точек множества Харшаньи произвольной кооперативной игры n лиц. Полученный результат естественным образом сопоставляется с известной теоремой Шепли о строении ядер выпуклых кооперативных игр. В разд. 1 даётся определение множества Харшаньи $H(v)$ и приводится его представление в форме ядра некоторой выпуклой игры v_H, ассоциированной с исходной игрой v. Разд. 2 содержит подробное описание крайних точек множества Харшаньи и указывает их отличие от вершин ядер выпуклых кооперативных игр.

1. Основные определения

Напомним (см., например, [1–4]) определение классической кооперативной игры n лиц с побочными платежами (TU-кооперативной игры в другой терминологии). Таковой называется пара $\Gamma = (N, v)$, где множество $N = \{1, \ldots, n\}$ описывает совокупность игроков игры Γ, а отображение $v\colon 2^N \to \mathbb{R}^N$ задаёт характеристическую функцию этой игры, указывающую максимальные гарантированные выигрыши $v(S)$ коалиций $S \subseteq N$ (по определению $v(\varnothing) = 0$). В дальнейшем, как обычно, всякую игру $\Gamma = (N, v)$ будем отождествлять с её характеристической функцией v. Простейшими примерами классических игр являются так называемые *игры единогласия* [1)] u^S, $S \in \sigma_0$, определяемые соотношениями

$$u^S(T) = \begin{cases} 1, & \text{если } S \subseteq T, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \tag{1}$$

где через σ_0 обозначается совокупность всех непустых коалиций игры v:

$$\sigma_0 = \{S \subseteq N \mid S \neq \varnothing\}.$$

Нетрудно убедиться, что игры единогласия составляют базис линейного пространства $V = V(N)$ всех TU-кооперативных игр n лиц, заданных на множестве N (см. [4]), а именно, для каждой игры $v \in V$ существует

[1)] В другой терминологии — простейшие игры [3].

единственное представление в виде линейной комбинации игр u^S, определяемых формулой (1):

$$v = \sum_{S \in \sigma_0} v_S u^S, \quad v \in V. \tag{2}$$

Коэффициенты v_S, участвующие в разложении (2) игры v, называются *дивидендами Харшаньи* этой игры [2)].

Далее, как обычно, для $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $S \in \sigma_0$ используются сокращения

$$x(S) = \sum_{i \in S} x_i, \quad S \in \sigma_0.$$

Для описания множества Харшаньи [7] игры v введём необходимые определения. Обозначим через Δ^S грань симплекса $\sigma_F^* = \{\alpha \in \mathbb{R}_+^N \mid \alpha(N) = 1\}$, отвечающую коалиции $S \in \sigma_0$:

$$\Delta^S = \left\{\alpha^S = \left(\alpha_i^S\right)_{i \in N} \in \mathbb{R}_+^N \mid \alpha^S(N) = 1,\ \alpha^S_{N \setminus S} = 0\right\}, \quad S \in \sigma_0, \tag{3}$$

где, как обычно, через x_S обозначается сужение вектора $x = (x_i)_{i \in N}$ из $\mathbb{R}^N$ на множество S, т. е. $x_S = (x_i)_{i \in S} \in \mathbb{R}^S$.

Определение 1. Вектор $x \in \mathbb{R}^N$ называется *распределением Харшаньи* (сокращённо H-распределением) игры v, если существуют распределения $\alpha^S \in \Delta^S$, $S \in \sigma_0$, такие, что справедливо представление

$$x = \sum_{S \in \sigma_0} v_S \alpha^S. \tag{4}$$

Совокупность H-распределений игры v

$$H(v) = \left\{ \sum_{S \in \sigma_0} v_S \alpha^S \mid \alpha^S \in \Delta^S,\ S \in \sigma_0 \right\} \tag{5}$$

называется её *множеством Харшаньи* [3)](см. [5–7]).

Замечание 1. Как видно из определения 1, множество Харшаньи является взвешенной суммой $\sum\limits_{S \in \sigma_0} v_S \Delta^S$ конечного числа выпуклых многогранников (каждый из которых согласно (3) представляет собой симплекс той или иной размерности). Следовательно (см. [8, 9]), множество $H(v)$ — тоже выпуклый многогранник (т. е. является выпуклым компактом, представимым в виде пересечения конечного числа полупространств). Список указанных полупространств для $H(v)$ найден в работе [7], где также приведен и список крайних точек множества $H(v)$,

[2)] Детальное описание общих свойств дивидендов Харшаньи и возможности их использования для анализа несимметричных значений игр с побочными платежами см., например, в [5, 6].

[3)] В литературе используется также синоним *многогранник Харшаньи*.

но соответствующее доказательство дано лишь в эскизной форме. Цель настоящей заметки состоит в восполнении имеющихся в [7] пробелов.

Для описания крайних точек $H(v)$ понадобятся два вспомогательных результата из [7], представляющих и самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Для произвольной игры $v \in V(N)$ справедлива формула*

$$v(S) = \sum_{T \subseteq S} v_T, \quad S \in \sigma_0. \tag{6}$$

В частности, для большой коалиции N выполняется равенство

$$v(N) = \sum_{T \subseteq N} v_T.$$

Доказательство. Ввиду равенства $v = \sum\limits_{T \in \sigma_0} v_T u^T$ и соотношений $u^T(S) = 1$ при $T \subseteq S$ и $u^T(S) = 0$ при $T \not\subseteq S$ (справедливых для любой коалиции $S \in \sigma_0$ в силу определения простейших игр u^T) получаем

$$v(S) = \sum_{T \in \sigma_0} v_T u^T(S) = \sum_{T \subseteq S} v_T, \quad S \in \sigma_0.$$

Тем самым и при $S = N$ имеем требуемое равенство

$$v(N) = \sum_{S \in \sigma_0} v_T u^T(N) = \sum_{T \subseteq N} v_T.$$

Лемма 1 доказана.

Используя лемму 1, получим её обобщение, имеющее важное значение для описания крайних точек многогранника $H(v)$. Введём необходимые обозначения. Пусть $S_1, \ldots, S_m$ — множество m произвольных непустых попарно не пересекающихся коалиций игры v. Зададим семейство $[S_1, \ldots, S_m]$ формулой

$$[S_1, \ldots, S_m] = \left\{ T \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} S_i \mid T \cap S_i \neq \varnothing,\ i = 1, \ldots, m \right\}.$$

Напомним [2], что величина $v_m(S_1, \ldots, S_m)$, определяемая соотношением

$$v_m(S_1, \ldots, S_m) = \sum_{K \subseteq M} (-1)^{m-|K|} v\Big(\bigcup_{i \in K} S_i \Big), \quad v \in V(N), \tag{7}$$

где $M = \{1, \ldots, m\}$, называется *полиномиальной разностью* (порядка m) функции v (на разбиении $\{S_1, \ldots, S_m\}$). Приведём используемое далее выражение полиномиальной разности функции $v \in V(N)$ через её дивиденды Харшаньи.

Утверждение 1. *Для произвольной игры $v \in V(N)$ и любого семейства её m непустых попарно не пересекающихся коалиций $S_1, \ldots, S_m$ выполняется равенство*

$$v_m(S_1, \ldots, S_m) = \sum_{T \in [S_1, \ldots, S_m]} v_T, \quad v \in V(N). \tag{8}$$

Доказательство. Используя формулу (6), распишем альтернированную сумму через соответствующие дивиденды Харшаньи её слагаемых. Отметим сразу, что среди них, очевидным образом, фигурируют (с соответствующим знаком) лишь те дивиденды v_T, для которых T содержится в объединении коалиций S_i: $T \subseteq \sum\limits_{i=1}^{m} S_i$. Возможны два случая:

1) T пересекается с каждой из коалиций S_i, $i = 1, \ldots, m$;

2) T не пересекается хотя бы с одной из коалиций S_i.

Ясно, что в первом случае дивиденд v_T фигурирует только в одном слагаемом альтернированной суммы $\sum\limits_{K \subseteq M} (-1)^{m-|K|} v\big(\bigcup\limits_{i \in K} S_i\big)$, а именно, в слагаемом $v\big(\bigcup\limits_{i \in M} S_i\big)$. Следовательно, в итоговую сумму он входит с коэффициентом $+1$.

Рассматривая второй случай, положим $L = \{i \in M \mid S_i \cap T = \varnothing\}$. В этом случае $L \neq \varnothing$, поэтому, вычисляя коэффициент a_T при v_T в альтернированной сумме, согласно формулам (6) и (7) с точностью до знака имеем $a_T = \sum\limits_{k=0}^{l} (-1)^k C_l^k$. Отсюда по известной комбинаторной формуле получаем $a_T = (1-1)^l = 0$. Итак, в силу произвольности выбора T имеем требуемое равенство (8). Утверждение 1 доказано.

В заключение раздела напомним используемое в дальнейшем понятие классического *ядра* $C(v)$ игры v, которое задаётся формулой

$$C(v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = v(N),\ x(S) \geqslant v(S),\ S \in \sigma_0\}$$

и определяет совокупность дележей игры v, не блокируемых никакой коалицией $S \in \sigma_0$ (см., например, [4, 10, 11]). В дальнейшем будем опираться на следующую характеризацию множества Харшаньи, полученную в [7].

Теорема 1. *Для произвольной игры $v \in V(N)$ справедливо представление $H(v) = C(v_H)$, где*

$$v_H(S) = v(S) - v_2^-(S, N \setminus S), \quad S \in \sigma_0. \tag{9}$$

Здесь и далее используется сокращение $v_2^-(S, N \setminus S) = (v^-)_2(S, N \setminus S)$, где через v^- обозначается функция

$$v^-(S) = \sum_{T \subseteq S} \max\{-v_T, 0\}, \quad S \subseteq N. \tag{10}$$

2. Вершины многогранника Харшаньи

Как отмечалось в разд. 1, полиэдральное множество $H(v)$, определённое формулами (4) и (5), задаётся системой линейных неравенств, характеризующих ядро другой кооперативной игры v_H, порождаемой функцией v. А именно, оказывается [7], что для всех кооперативных игр n лиц справедливо представление

$$H(v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = v(N),\ x(S) \geqslant v_H(S),\ S \subseteq N\} \tag{11}$$

при $v \in V(N)$. Также в [7] установлено, что для любой игры $v \in V(N)$ ассоциированная с ней игра v_H выпукла [4)]. Именно этот факт вместе с равенством (11) и известной теоремой Шепли о крайних точках ядер выпуклых кооперативных игр [12] используется в настоящем разделе для описания крайних точек многогранника Харшаньи. Как видно из приводимой ниже теоремы 2, и здесь определяющую роль играет способ распределения дивидендов Харшаньи между участниками соответствующих коалиций, определяемый их «иерархией». Этот способ, выявляющий единоличных собственников тех или иных дивидендов, указывается приводимым ниже построением.

Через $\Pi = \Pi(N)$ будем обозначать совокупность всех перестановок (взаимно однозначных отображений $\pi\colon N \to N$) множества N. При этом под упорядочением, определяемым перестановкой π, понимается расположение игроков из N в последовательность $(i_1, \ldots, i_n)$, удовлетворяющую условию $\pi(i_k) = k$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Другими словами, номер игрока $i \in N$, определяемый перестановкой π, задаётся числом $\pi(i)$, при этом из двух игроков i и j старшим считается тот, чей номер ($\pi(i)$ или $\pi(j)$) больше.

Кроме того, как и в общем случае полуупорядоченных пространств (см. [13, 14]), через v^+ и v^- обозначаются положительная и отрицательная полиномиальные вариации функции $v \in V(N)$ соответственно:

$$v^+ = \sum_{S \in \sigma_0} \max\{v_S, 0\} u^S, \quad v^- = \sum_{S \in \sigma_0} \max\{-v_S, 0\} u^S \tag{12}$$

[4)] Игра $u \in V(N)$ называется *выпуклой*, если для любых коалиций S и T выполняется неравенство $v(S \cup T) + v(S \cap T) \geqslant v(S) + v(T)$.

(несколько иной вариант определения функции v^- приводился в формуле (10)). Легко видеть, что из очевидного равенства $v = v^+ - v^-$ и соотношений (8)–(10) и (12) вытекает равенство

$$v_H(S) = \sum_{T \subseteq S} v_T - \sum_{T \in [S, N \setminus S]} (v^-)_T, \quad S \subseteq N,\ v \in V(N). \tag{13}$$

Теорема 2 (крайние точки $H(v)$). *Множество* $\operatorname{ex} H(v)$ *крайних точек многогранника Харшаньи состоит из маргинальных дележей* $v_H^\pi, \pi \in \Pi$, *выпуклой игры* v_H, *определяемых согласно соответствующему упорядочению* $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$ *по формуле*

$$v_H^\pi(i_{k+1}) = v_H\big(S_{k+1}^\pi\big) - v_H\big(S_k^\pi\big), \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

где $S_k^\pi = \{i_1, \ldots, i_k\}$, $k = 1, \ldots, n$, *а функция* v_H *задана формулой* (13). *При этом значения выигрышей* $v_H^\pi(i_{k+1})$, *выраженных в дивидендах Харшаньи игры* v, *задаются соотношениями*[5)]

$$v_H^\pi(i_{k+1}) = v(i_{k+1}) + v_2^+\big(i_{k+1}, S_k^\pi\big) - v_2^-\big(i_{k+1}, N \setminus S_{k+1}^\pi\big) \tag{14}$$

для всех $k = 0, \ldots, n-1$. *Иначе говоря, в крайних точках многогранника* $H(v)$ *распределение дивидендов Харшаньи между участниками игры* v *при упорядочении* π *осуществляется* (*согласно* (14)) *по следующим правилам:*

1) *все неотрицательные дивиденды* v_T *целиком достаются старшим* (*при упорядочении* π) *участникам этих коалиций;*

2) *все отрицательные дивиденды* v_T *целиком достаются младшим*[6)] (*при упорядочении* π) *участникам этих коалиций.*

Для доказательства теоремы 2 воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2. *Пусть* T_1 T_2 *и* T_3 *— непустые попарно дизъюнктные* (*непересекающиеся*) *коалиции из множества* N. *Тогда для произвольной игры* $v \in V(N)$ *выполняется равенство*

$$v_2(T_1, T_2 \cup T_3) = v_2(T_1, T_2) + v_2(T_1, T_3) + v_3(T_1, T_2, T_3), \tag{15}$$

где, как и ранее,

$$v_3(T_1, T_2, T_3) = v(T_1 \cup T_2 \cup T_3) - \sum_{\{i,j\} \subseteq \{1,2,3\}} v(T_i \cup T_j) + \sum_{i=1}^{3} v(T_i).$$

[5)] Ниже вводим сокращения $v_2^+(i, S \setminus i) = (v^+)_2(i, S \setminus i)$, $v_2^-(i, S \setminus i) = (v^-)_2(i, S \setminus i)$.

[6)] *Младшим* (*старшим*) в T при упорядочении π называется игрок $i \in T$, для которого выполняется условие $\pi(i) \leqslant \pi(k)$ для всех $k \in T$ ($\pi(i) \geqslant \pi(k)$ для всех $k \in T$). Другими словами, это игрок, первым (последним) в смысле π вступивший в коалицию T.

Доказательство вытекает из утверждения 1, согласно которому

$$v_m(T_1,\dots,T_m)=\sum_{T\in[T_1,\dots,T_m]} v_T,\quad v\in V(N), \tag{16}$$

где $T_1,\dots,T_m$ — m произвольных непустых попарно не пересекающихся подмножеств N, а множество $[T_1,\dots,T_m]$ определяется формулой

$$[T_1,\dots,T_m]=\left\{T\subseteq\bigcup_{i=1}^{m}T_i \mid T\cap T_i\neq\varnothing,\ i=1,\dots,m\right\}. \tag{17}$$

Действительно, нетрудно проверить, что в силу определения (17) для любых трёх непустых попарно не пересекающихся множеств T_1,T_2,T_3 справедливо тождество

$$[T_1,T_2\cup T_3]=[T_1,T_2]\cup[T_1,T_3]\cup[T_1,T_2,T_3].$$

Отсюда на основании (16) получаем искомое равенство (15):

$$v_2(T_1,T_2\cup T_3)=v_2(T_1,T_2)+v_2(T_1,T_3)+v_3(T_1,T_2,T_3).$$

Лемма 2 доказана.

Кроме того, при доказательстве теоремы 2 используется следующее важное свойство функций v_H.

Утверждение 2 (о маргинальных значениях функции v_H). *Если коалиция S непустая, а игрок r содержится в её дополнении* (*т. е. r принадлежит $N\setminus S$*), *то справедлива формула*

$$v_H(S\cup r)-v_H(S)=v(r)+v_2^+(r,S)-v_2^-(r,N\setminus(S\cup r)),\quad v\in V(N). \tag{18}$$

Доказательство. Полагая $T_1=S$, $T_2=\{r\}$ и $T_3=N\setminus(S\cup r)$ и используя лемму 2, получаем

$$v_2^-(S,N\setminus S)=v_2^-(S,r\cup N\setminus(S\cup r))=$$
$$=v_2^-(S,r)+v_2^-(S,N\setminus(S\cup r))+v_3^-(S,r,N\setminus(S\cup r)), \tag{A1}$$
$$v_2^-(S\cup r,N\setminus(S\cup r))=v_2^-(S,N\setminus(S\cup r))+$$
$$+v_2^-(r,N\setminus(S\cup r))+v_3^-(S,r,N\setminus(S\cup r)). \tag{A2}$$

Кроме того, в силу (6), (13) и очевидного равенства $v=v^+-v^-$ выполняется соотношение

$$v(S\cup r)-v(S)=v(r)+v_2^+(r,S)-v_2^-(r,S). \tag{A3}$$

Введём обозначения

$$B_1=v_2^-(S,N\setminus S),\quad B_2=v_2^-(S\cup r,N\setminus(S\cup r)),\quad B_3=v(S\cup r)-v(S).$$

Согласно формуле, задающей функцию v_H, имеем

$$v_H(S\cup r)-v_H(S)=B_1-B_2+B_3. \tag{19}$$

При этом в силу соотношений (A1) и (A3) выполняется равенство

$$B_1 + B_3 = v(r) + v_2^+(r, S) + v_2^-(S, N \setminus (S \cup r)) + v_3^-(S, r, N \setminus (S \cup r)).$$

Тогда с учётом (A2) получаем равенство

$$B_1 - B_2 + B_3 = v(r) + v_2^+(r, S) - v_2^-(r, N \setminus (S \cup r)),$$

которое согласно (19) и есть требуемая формула (18). Утверждение 2 доказано.

Доказательство теоремы 2. Нетрудно проверить, что (14) очевидным образом вытекает из утверждения 2, если положить $r = i_{k+1}$, $S = S_k^\pi$ и воспользоваться формулой (18). Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Интересно отметить, что для крайних точек ядра $C(v)$ выпуклой игры v согласно теореме Шепли [12] распределение дивидендов Харшаньи между участниками коалиций при упорядочении π осуществляется по другому правилу: все дивиденды v_T независимо от их знака достаются целиком старшим при упорядочении π участникам коалиций T.

Соединяя теорему 2 и замечание 2, получаем установленное ранее важное следствие (см., например, [6]).

Следствие 1. *Если все дивиденды Харшаньи игры v, кроме отвечающих одноэлементным коалициям, неотрицательные, то её ядро совпадает с множеством Харшаньи: $C(v) = H(v)$. Другими словами, для указанных игр (называемых почти положительными* [3]*) делёж неблокируем тогда и только тогда, когда он является распределением Харшаньи рассматриваемой игры.*

Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева (проект № FWNF–2026–0022). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. **Фон Нейман Дж., Моргенштерн О.** Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. 708 с.
2. **Оуэн Г.** Теория игр. М.: Мир, 1971. 232 с.
3. **Печерский С. Л., Яновская Е. Б.** Кооперативные игры: Решения и аксиомы. СПб.: Изд-во Европ. ун-та в С.-Петербурге, 2004. 460 с.

4. **Розенмюллер И.** Кооперативные игры и рынки. М.: Мир, 1974. 160 с.
5. **Dehez P.** On Harsanyi dividends and asymmetric values // Int. Game Theory Rev. 2017. V. 19, No. 3. Article ID 1750012. 36 p.
6. **Vasil'ev V. A.** Cores and generalized NM-solutions for some classes of cooperative games // Russian contributions to game theory and equilibrium theory. Heidelberg: Springer, 2006. P. 91–149. (Theory Decis. Libr. C; V. 39).
7. **Васильев В. А.** Об H-дележах кооперативных игр // Оптимизация. Вып. 24. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1980. С. 18–32.
8. **Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.** Выпуклый анализ и его приложения. М.: Либроком, 2011. 176 с.
9. **Рокафеллар Р. Т.** Выпуклый анализ. М.: Мир, 1973. 472 с.
10. **Бондарева О. Н.** Теория ядра для игры n лиц // Вестн. ЛГУ. Сер. Математика, механика, астрономия. 1962. Т. 13, № 3. С. 141–142.
11. **Бондарева О. Н.** Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр // Пробл. кибернетики. Вып. 10. М.: Физматгиз, 1963. С. 119–140.
12. **Shapley L. S.** Cores of convex games // Int. J. Game Theory. 1971. V. 1. P. 11–26.
13. **Вулих Б. З.** Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М.: Физматгиз, 1961. 408 с.
14. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.

Васильев Валерий Александрович

Статья поступила
4 февраля 2026 г.
После доработки —
11 февраля 2026 г.
Принята к публикации
22 февраля 2026 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2026. Vol. 33, No. 1. P. 26–37

UDC 519.83 DOI: 10.33048/daio.2026.33.853

ON THE EXTREME POINTS OF THE HARSANYI SET

V. A. Vasil'ev

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: vasilev@math.nsc.ru

Abstract. A complete description of the extreme points of the Harsanyi set of a cooperative n-player game is given. We establish that each extreme Harsanyi payoff of any such game, as an extreme imputation in the core of a convex game, is determined by some linear ordering of the players. However, in contrast to the extreme core imputations of a convex game, in Harsanyi payoffs each coalitional dividend is assigned either to the last (when the dividend is nonnegative), or to the first member of the coalition (when the dividend is negative). The terms "last" and "first" are applied with respect to the mentioned linear ordering. Note that, according to the famous Shapley theorem on the core of a convex game, the extreme core imputation determined by such linear ordering assigns each coalitional dividend exactly to the last participant of the coalition (independently of the sign of the dividend under consideration). Bibliogr. 14.

Keywords: cooperative game, core, Harsanyi payoff, extreme point of Harsanyi polyhedron.

References

1. **J. von Neumann** and **O. Morgenstern,** *Theory of Games and Economic Behavior* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1953; Nauka, Moscow, 1970 [Russian]).
2. **G. Owen,** *Game Theory* (Saunders, Philadelphia, 1968; Mir, Moscow, 1971 [Russian]).
3. **S. L. Pecherskiy** and **E. B. Yanovskaya,** *Cooperative Games: Solutions and Axioms* (Izd. Eur. Univ. St. Petersburg, St. Petersburg, 2004) [Russians].
4. **J. Rosenmüller,** *Kooperative Spiele und Märkte* (Springer, Heidelberg, 1971 [German]; Mir, Moscow, 1974 [Russian]).

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **20** (1) (2026).

5. **P. Dehez,** On Harsanyi dividends and asymmetric values, *Int. Game Theory Rev.* **19** (3), ID 1750012 (2017).
6. **V. A. Vasil'ev,** Cores and generalized NM-solutions for some classes of cooperative games, in *Russian Contributions to Game Theory and Equilibrium Theory* (Springer, Heidelberg, 2006), pp. 91–149 (Theory Decis. Libr. C, Vol. 39).
7. **V. A. Vasil'ev,** On H-divisions of cooperative games, in *Optimization*, Vol. 24 (Inst. Mat. SO AN SSSR, Novosibirsk, 1980), pp. 18–32 [Russian].
8. **G. G. Magaril-Ilyaev** and **V. M. Tikhomirov,** *Convex Analysis and Its Applications* (Leebrokom, Moscow, 2011) [Russian].
9. **R. T. Rockafellar,** *Convex Analysis* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1970; Mir, Moscow, 1973 [Russian]).
10. **O. N. Bondareva,** Core theory for a game of n people, *Vestn. Leningr. Gos. Univ., Ser. Mat., Mekh., Astron.* **13** (3), 141–142 (1962) [Russian].
11. **O. N. Bondareva,** Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games, in *Problems of Cybernetics*, Vol. 10 (Fizmatgiz, Moscow, 1963), pp. 119–140 [Russian].
12. **L. S. Shapley,** Cores of convex games, *Int. J. Game Theory* **1**, 11–26 (1971).
13. **B. Z. Vulikh,** *Introduction to the Theory of Semi-Ordered Spaces* (Fizmatgiz, Moscow, 1961) [Russian].
14. **L. V. Kantorovich** and **G. P. Akilov,** *Functional Analysis* (Nauka, Moscow, 1977) [Russian].

Valery A. Vasil'ev

Received February 4, 2026
Revised February 11, 2026
Accepted February 22, 2026

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2026. Т. 33, № 1. С. 38–55

УДК 519.83 DOI: 10.33048/daio.2026.33.840

УСТОЙЧИВЫЕ ПО НЭШУ КОАЛИЦИОННЫЕ СТРУКТУРЫ В ОГРАНИЧЕННЫХ КООПЕРАТИВНЫХ ИГРАХ

В. В. Гусев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», ул. Кантемировская, 3, 194100, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: vgusev@hse.ru

Аннотация. Ограниченная кооперативная игра представляет собой кооперативную игру с трансферабельной полезностью, в которой характеристическая функция зависит от коалиционного разбиения. Коалиционное разбиение ограничивает кооперацию, а именно, допустимы только те коалиции игроков, которые принадлежат одной и той же группе разбиения. Из-за такого ограничения возникает вопрос существования устойчивых коалиционных структур. В данной работе мы рассматриваем некоторые классические значения кооперативной теории игр и показываем существование устойчивых по Нэшу коалиционных структур в ограниченных кооперативных играх. Результаты о существовании устойчивых коалиционных структур основаны на теории потенциальных функций. Табл. 2, библиогр. 14.

Ключевые слова: теория игр, устойчивое коалиционное разбиение, ограниченная кооперативная игра, потенциальная игра.

Введение

1. Ограниченные кооперативные игры. В экономических, социологических, биологических системах можно выделить агентов, которые заинтересованы в максимизации своего выигрыша. В экономике под выигрышем можно понимать денежное вознаграждение, прибыль. В социальных системах выигрыш — это статус агента, в биологии — число выделенных ресурсов. В зависимости от целей, агенты могут кооперироваться друг с другом. Коалиция способна получить больший выигрыш, нежели когда участники коалиции работают по одиночке.

Предположим, что агенты разбиваются на коалиции. От каждой коалиции её участники получают некоторый выигрыш. В таком случае каждый агент задумывается о следующем: увеличится ли его выигрыш,

© В. В. Гусев, 2026

если он перейдёт в другую коалицию? Если его выигрыш увеличится, то рассматриваемый игрок совершит переход из своей коалиции в другую. После перехода выигрыши остальных игроков могут кардинально измениться, и в таком случае начнётся процесс переходов между коалициями.

Мы заинтересованы в таком разбиении игроков, в котором каждый игрок не хочет покидать свою коалицию по одиночке. Если такое разбиение существует, то оно называется устойчивым по Нэшу [1]. Существование устойчивых по Нэшу коалиционных разбиений важно для приложений. Если некоторое разбиение неустойчиво, то каждая коалиция агентов понимает, что кто-то её покинет или кто-то придёт в неё. Частое изменение состава коалиций влияет на их целостность, и первоначальные цели могут быть не достигнуты, что негативно отражается на выигрышах старых игроков.

В большинстве работ по устойчивости коалиций предполагается, что выигрыш игрока явно зависит от коалиционного разбиения [2–4]. Например, если N — множество игроков, а $\Pi(N)$ — множество коалиционных разбиений, то выигрыш игрока $i \in N$ — это отображение $u_i \colon \Pi(N) \to \mathbb{R}$.

В этой работе выигрыши игроков зависят от коалиционной структуры неявно. Сначала определим характеристическую функцию $v \colon 2^N \to \mathbb{R}$, $v(\varnothing) = 0$, которая показывает значение каждой коалиции игроков. Вводится коалиционное разбиение $\pi \in \Pi(N)$, которое ограничивает кооперацию. Определим ограниченную характеристическую функцию

$$v^\pi(K) = \sum_{B \in \pi} v(K \cap B), \quad K \subseteq N.$$

Значение $v^\pi(K)$ представляет собой сумму значений максимальных коалиций игроков, которые могут друг с другом кооперироваться. Характеристическая функция v^π является частным случаем характеристической функции из работы [5], где кооперация ограничена графом связей, а в настоящей работе — коалиционным разбиением. Пример вычисления ограниченной характеристической функции приводится в п. 1.1.

Рассматривается ограниченная кооперативная игра (N, v^π). Присоединяясь к той или иной коалиции, каждый игрок понимает, с кем он может кооперироваться, а с кем нет. Это делает вопрос существования устойчивых коалиционных структур актуальным для рассматриваемых игр. В статье показывается существование ограниченных кооперативных игр с устойчивыми коалиционными структурами относительно некоторых классических значений игры.

2. Описание результатов. Рассматриваем равномерное, пропорциональное, равномерноостаточное значения кооперативной игры, а также Шепли и Шепли-эгалитарное значения. Покажем, что относительно всех

перечисленных значений существует ограниченная кооперативная игра с устойчивой по Нэшу коалиционной структурой. Результаты интересны тем, что изначальная характеристическая функция v принимает произвольные значения.

Полученные результаты основаны на существовании потенциальной функции [6]. В теории потенциальных игр определяется потенциальная функция, максимум которой — это равновесие по Нэшу. Теория потенциальных функций была адаптирована для коалиционных разбиений в работе [7]. Относительно рассматриваемых значений кооперативной игры найдены потенциальные функции, которые гарантируют существование ограниченных кооперативных игр с устойчивыми коалиционными разбиениями.

Также покажем, как максимизировать потенциальную функцию с помощью алгоритма динамического программирования из работы [8].

1. Основные обозначения и определения

1.1. Кооперативные игры и дележи. Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ — множество игроков. Произвольное непустое подмножество множества N назовём *коалицией*, в частности N — *гранд-коалиция*. Через $\Pi(N)$ обозначим множество всевозможных разбиений множества N, т. е.

$$\Pi(N) = \left\{ \{B_1, B_2, \ldots, B_l\} \subset 2^N \mid \bigcup_{i=1}^{l} B_i = N,\ B_i \cap B_j = \varnothing,\ 1 \leqslant i < j \leqslant l \right\}.$$

Произвольное разбиение $\pi \in \Pi(N)$ назовём *коалиционной структурой*. *Кооперативной игрой* называется пара (N, v), где N — множество игроков, $v\colon 2^N \to \mathbb{R}$ — *характеристическая функция*, $v(\varnothing) = 0$. Обозначим через G_N множество всех кооперативных игр с множеством игроков N. Таким образом, кооперативная игра с коалиционной структурой образуется тройкой (N, v, π), где N и v — элементы кооперативной игры (N, v), а $\pi \in \Pi(N)$ — коалиционное разбиение.

Пусть (N, v, π) — кооперативная игра с коалиционной структурой. Кооперативная игра (N, v^π) называется *ограниченной,* если характеристическая функция v^π имеет вид

$$v^\pi(K) = \sum_{B \in \pi} v(K \cap B), \quad K \in 2^N.$$

Пример 1. Рассмотрим кооперативную игру (N, v, π) с множеством игроков $N = \{1, 2, 3, 4\}$, коалиционной структурой $\pi = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$ и характеристической функцией $v(K) = |K|^2$, $K \in 2^N$. В этом случае характеристическая функция ограниченной кооперативной игры (N, v^π) принимает следующие значения:

$$v^\pi(\varnothing) = 0, \quad v^\pi(\{i\}) = v(\{i\}) = 1, \quad i \in N,$$
$$v^\pi(\{1,2\}) = v(\{1,2\}) = 4, \quad v^\pi(\{3,4\}) = v(\{3,4\}) = 4,$$
$$v^\pi(\{1,3\}) = v(\{1\}) + v(\{3\}) = 1 + 1 = 2,$$
$$v^\pi(\{1,4\}) = v(\{1\}) + v(\{4\}) = 1 + 1 = 2,$$
$$v^\pi(\{2,3\}) = v(\{2\}) + v(\{3\}) = 1 + 1 = 2,$$
$$v^\pi(\{2,4\}) = v(\{2\}) + v(\{4\}) = 1 + 1 = 2,$$
$$v^\pi(\{1,2,3\}) = v(\{1,2\}) + v(\{3\}) = 4 + 1 = 5,$$
$$v^\pi(\{1,2,4\}) = v(\{1,2\}) + v(\{4\}) = 4 + 1 = 5,$$
$$v^\pi(\{1,3,4\}) = v(\{1\}) + v(\{3,4\}) = 1 + 4 = 5,$$
$$v^\pi(\{2,3,4\}) = v(\{2\}) + v(\{3,4\}) = 1 + 4 = 5,$$
$$v^\pi(\{1,2,3,4\}) = v(\{1,2\}) + v(\{3,4\}) = 4 + 4 = 8.$$

Значением кооперативной игры называется вектор $\varphi\colon G_N \to \mathbb{R}^n$, при этом число $\varphi_i(v)$ обозначает выигрыш игрока $i \in N$ в кооперативной игре (N, v).

Равномерное значение (equal division value [9]) — это значение кооперативной игры (N, v), в которой выигрыш игрока i равен

$$\mathrm{ED}_i(v) = \frac{v(N)}{n}.$$

Для равномерного значения выигрыш гранд-коалиции делится между всеми игроками поровну.

Пропорциональное значение (proportional division value [10]) — это значение кооперативной игры (N, v), в которой выигрыш игрока i равен

$$\mathrm{PD}_i(v) = \frac{v(\{i\})}{\sum\limits_{j \in N} v(\{j\})} \cdot v(N).$$

Число $v(\{i\})$ — это значение игрока $i \in N$, когда i ни с кем не кооперируется. Можем сказать, что число $v(\{i\})$ характеризует силу игрока i. Для пропорционального значения выигрыш гранд-коалиции делится между её участниками пропорционально силам игроков. Если $v(\{i\}) = 1$ для любого $i \in N$, то пропорциональное значение тождественно равномерному значению.

Равномерноостаточное значение (equal surplus division value) — это значение кооперативной игры (N, v), в которой выигрыш игрока i равен

$$\mathrm{ESD}_i(v) = v(\{i\}) + \frac{v(N) - \sum\limits_{j \in N} v(\{j\})}{n}.$$

Для равномерноостаточного значения предполагается, что игроки работают как по одиночке, так и в гранд-коалиции. Когда игроки работают в одиночных коалициях, игрок $i \in N$ получает выигрыш $v(\{i\})$. Когда игроки работают в гранд-коалиции, её остаток делится между игроками поровну. Складывая выигрыши, получаем равномерноостаточное значение.

Значение *Шепли* [11] — это значение кооперативной игры (N, v), в которой выигрыш игрока i равен

$$\mathrm{Sh}_i(v) = \sum_{i \in K \subseteq N} \frac{\lambda_K(v)}{|K|},$$

где $\lambda_K(v) = \sum\limits_{R \subseteq K} (-1)^{|K|-|R|} \cdot v(R)$ — дивиденды Харсани [12]. Также значение Шепли может быть рассчитано по формуле

$$\mathrm{Sh}_i(v) = \sum_{i \in K \subseteq N} \frac{(|K|-1)!\,(|N|-|K|)!}{|N|!} \cdot (v(K) - v(K \setminus \{i\})).$$

Значение Шепли — единственное значение кооперативной игры, которое удовлетворяет аксиомам эффективности, симметрии, нулевого игрока и аддитивности [11]. Такие аксиомы имеют широкое приложение и делают значение Шепли объектом исследования во многих прикладных науках.

Шепли-эгалитарное значение [13] — это значение кооперативной игры (N, v), в которой выигрыш игрока i равен

$$\mathrm{ShED}_i(v) = \alpha \cdot \mathrm{Sh}_i(v) + (1-\alpha) \cdot \mathrm{ED}_i(v),$$

где $\alpha \in [0; 1]$. Шепли-эгалитарное значение представляет собой средневзвешенное значения Шепли и равномерного значения.

1.2. Устойчивость ограниченных кооперативных игр и потенциальные функции. Чтобы сформулировать определение ограниченной кооперативной игры с устойчивым по Нэшу коалиционным разбиением, введём следующие обозначения.

Пусть $\pi \in \Pi(N)$ — некоторое разбиение. Через $\pi(i)$ обозначим коалицию разбиения π, содержащую игрока i, т. е. $i \in \pi(i) \in \pi$. Если $B \in \pi$, то множество $\pi - B$ получается путём удаления коалиции B из разбиения π. Аналогично если $A, B \in \pi$, то $\pi - (A, B) = (\pi - A) - B$ — множество, полученное из π удалением коалиций A и B. Например, для $\pi = \{\{1\}, \{2,3\}, \{4,5\}, \{6,7,8\}\}$ имеем

$$\pi - \{2,3\} = \{\{1\}, \{4,5\}, \{6,7,8\}\}, \quad \pi - (\{1\}, \{6,7,8\}) = \{\{2,3\}, \{4,5\}\}.$$

Положим

$$D_i(\pi) = \{\pi\} \cup \{\pi - (\pi(i), B) \cup \{\pi(i) \setminus \{i\}, B \cup \{i\}\} \mid B \in \pi - \pi(i) \cup \{\varnothing\}\},$$

т. е. множество $D_i(\pi)$ состоит из разбиения π и коалиционных структур, которые получаются при переходе игрока i в другую коалицию, причём игрок i может создать коалицию из одного себя. Например, для $\pi = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$

$$D_1(\pi) = \{\{\{1,2\},\{3,4\}\},\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\},\{\{2\},\{1,3,4\}\}\}.$$

Рассмотрим ограниченную кооперативную игру (N, v^π) для кооперативной игры с коалиционной структурой (N, v, π). Будем говорить, что коалиционная структура $\pi \in \Pi(N)$ ограниченной кооперативной игры (N, v^π) *устойчива по Нэшу* относительно значения φ, если для любого $i \in N$ выполняются неравенства

$$\varphi_i(v^\pi) - \varphi_i(v^\rho) \geqslant 0, \quad \rho \in D_i(\pi).$$

Иначе говоря, коалиционная структура π устойчива по Нэшу, если никакому игроку не выгодно покидать свою коалицию в π поодиночке.

1.3. Потенциальные функции. Чтобы исследовать вопрос существования устойчивых по Нэшу коалиционных разбиений, будем пользоваться теорией потенциальных функций. Адаптируем классическое определение потенциальной игры из работы [6].

Будем говорить, что для кооперативной игры (N, v) существует *потенциальная функция* $P\colon \Pi(N) \to \mathbb{R}$ относительно значения φ, если для любых $\pi \in \Pi(N)$ и $i \in N$ выполняются равенства

$$\varphi_i(v^\pi) - \varphi_i(v^\rho) = P(\pi) - P(\rho), \quad \rho \in D_i(\pi).$$

Будем говорить, что для кооперативной игры (N, v) существует *весовая потенциальная функция* $P\colon \Pi(N) \to \mathbb{R}$ с весами $w_1, w_2, \ldots, w_n > 0$ относительно значения φ, если для любых $\pi \in \Pi(N)$ и $i \in N$ выполняются равенства

$$\varphi_i(v^\pi) - \varphi_i(v^\rho) = w_i \cdot (P(\pi) - P(\rho)), \quad \rho \in D_i(\pi).$$

Покажем, что потенциальная функция P достигает своего максимума на устойчивой коалиционной структуре ограниченной кооперативной игры. Поскольку множество $\Pi(N)$ конечно, найдётся $\pi^* \in \arg\max\limits_{\pi \in \Pi(N)} P(\pi)$. Так как разбиение π^* максимизирует потенциальную функцию P на множестве $\Pi(N)$ и включение $D_i(\pi^*) \subseteq \Pi(N)$ имеет место для любого $i \in N$, то

$$P(\pi^*) - P(\rho) \geqslant 0, \quad \rho \in D_i(\pi^*),\ i \in N.$$

Разность потенциальных функций равна разности значений игроков для соответствующих ограниченных кооперативных игр, следовательно,

$$\varphi_i(v^{\pi^*}) - \varphi_i(v^\rho) \geqslant 0, \quad \rho \in D_i(\pi^*),\ i \in N.$$

Значит, по определению $\pi^* \in \Pi(N)$ — устойчивая по Нэшу коалиционная структура ограниченной кооперативной игры (N, v^{π^*}).

Аналогичные рассуждения справедливы для весовых потенциальных функций.

Далее рассмотрим вопрос существования устойчивых по Нэшу коалиционных разбиений относительно указанных выше значений.

2. Существование устойчивых коалиционных разбиений

2.1. Равномерное, пропорциональное и равномерноостаточное значения. Пусть дана кооперативная игра с коалиционной структурой (N, v, π) и (N, v^π) — ограниченная кооперативная игра. Для ограниченной кооперативной игры равномерное, пропорциональное и равномерноостаточное значения имеют вид

$$\mathrm{ED}_i(v^\pi) = \frac{v^\pi(N)}{n}, \quad \mathrm{PD}_i(v^\pi) = \frac{v^\pi(\{i\})}{\sum\limits_{j\in N} v^\pi(\{j\})} \cdot v^\pi(N),$$

$$\mathrm{ESD}_i(v^\pi) = v^\pi(\{i\}) + \frac{v^\pi(N) - \sum\limits_{j\in N} v^\pi(\{j\})}{n}$$

соответственно.

Сформулируем теорему о существовании устойчивых разбиений.

Теорема 1. 1. *Для любой кооперативной игры (N, v) существует весовая потенциальная функция*

$$P(\pi) = v^\pi(N) = \sum_{B\in\pi} v(B)$$

относительно равномерного, пропорционального и остаточного значений.

2. *Для любой кооперативной игры (N, v) существует ограниченная кооперативная игра с коалиционным разбиением, устойчивым по Нэшу относительно равномерного, пропорционального и равномерноостаточного значений одновременно.*

Доказательство. 1. Покажем, что $P(\pi) = v^\pi(N)$ — весовая потенциальная функция.

Равномерное значение. Для любых $i \in N$, $\pi \in \Pi(N)$ и $\rho \in D_i(\pi)$ справедливы равенства

$$\mathrm{ED}_i(v^\pi) - \mathrm{ED}_i(v^\rho) = \frac{v^\pi(N)}{n} - \frac{v^\rho(N)}{n} = \frac{1}{n} \cdot (v^\pi(N) - v^\rho(N)).$$

Следовательно, $\mathrm{ED}_i(v^\pi) - \mathrm{ED}_i(v^\rho) = w_i \cdot (P(\pi) - P(\rho))$ для $w_i = \frac{1}{n}$, $i \in N$, и по определению $P(\pi) = v^\pi(N)$ — весовая потенциальная функция.

Пропорциональное значение. Так как

$$v^\pi(\{i\}) = \sum_{B \in \pi} v(\{i\} \cap B) = v(\{i\}),$$

для любых $i \in N$, $\pi \in \Pi(N)$ и $\rho \in D_i(\pi)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}\mathrm{PD}_i(v^\pi) - \mathrm{PD}_i(v^\rho) = \\ = \frac{v^\pi(\{i\})}{\sum\limits_{j \in N} v^\pi(\{j\})} \cdot v^\pi(N) - \frac{v^\rho(\{i\})}{\sum\limits_{j \in N} v^\rho(\{j\})} \cdot v^\rho(N) = \\ = \frac{v(\{i\})}{\sum\limits_{j \in N} v(\{j\})} \cdot (v^\pi(N) - v^\rho(N)).\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathrm{PD}_i(v^\pi) - \mathrm{PD}_i(v^\rho) = w_i \cdot (P(\pi) - P(\rho))$ для

$$w_i = \frac{v(\{i\})}{\sum\limits_{j \in N} v(\{j\})}, \quad i \in N,$$

и по определению $P(\pi) = v^\pi(N)$ — весовая потенциальная функция.

Равномерноостаточное значение. Для любых $i \in N$, $\pi \in \Pi(N)$ и $\rho \in D_i(\pi)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned}\mathrm{ESD}_i(v^\pi) - \mathrm{ESD}_i(v^\rho) = \\ = v^\pi(\{i\}) + \frac{v^\pi(N) - \sum\limits_{j \in N} v^\pi(\{j\})}{n} - v^\rho(\{i\}) - \frac{v^\rho(N) - \sum\limits_{j \in N} v^\rho(\{j\})}{n} = \\ = \frac{v^\pi(N) - \sum\limits_{j \in N} v(\{j\})}{n} - \frac{v^\rho(N) - \sum\limits_{j \in N} v(\{j\})}{n} = \frac{1}{n} \cdot (v^\pi(N) - v^\rho(N)).\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathrm{ESD}_i(v^\pi) - \mathrm{ESD}_i(v^\rho) = w_i \cdot (P(\pi) - P(\rho))$ для $w_i = \frac{1}{n}$, $i \in N$, и по определению $P(\pi) = v^\pi(N)$ — весовая потенциальная функция.

2. Из п. 1 следует, что для рассматриваемых значений кооперативной игры существует одна и та же весовая потенциальная функция $P(\pi) = v^\pi(N)$. Следовательно, её максимум достигается на коалиционной структуре ограниченной кооперативной игры, устойчивой относительно каждого из рассматриваемых значений. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 следует, что коалиционная структура π^* ограниченной кооперативной игры, устойчивая относительно равномерного, пропорционального или равномерноостаточного значения, является решением оптимизационной задачи

$$\pi^* \in \arg\max_{\pi \in \Pi(N)} \sum_{B \in \pi} v(B).$$

Известно, что количество коалиционных структур для n игроков имеет экспоненциальный порядок, т. е. $\Pi(N) = O(n^n)$. В [8] был предложен алгоритм динамического программирования для рассматриваемой оптимизационной задачи, который работает за время $O(2^n)$.

Так как множество коалиционных структур дискретно, существование потенциальной функции гарантирует, что любая последовательность наилучших ответов конечна. Это говорит о следующем. Если изначально имеется неустойчивая ограниченная кооперативная игра, то игроки могут переходить по одиночке из коалиции в коалицию, чтобы увеличить свой выигрыш. В таком случае число переходов конечно и соответствующая последовательность коалиционных структур сходится к некоторому устойчивому разбиению.

Отметим, что относительно рассматриваемых значений кооперативной игры может не существовать устойчивой по Нэшу коалиционной структуры в игре (N, v, π). Здесь предполагается, что выигрыш игрока рассчитывается по соответствующей формуле для коалиции, в которой находится игрок. Продемонстрируем такое отличие на примере кооперативной игры с тремя игроками.

Пример 2. Пусть $N = \{1, 2, 3\}$, а характеристическая функция принимает значения

$$v(\varnothing) = 0, \quad v(\{1\}) = 3, \quad v(\{2\}) = 5, \quad v(\{3\}) = 3,$$
$$v(\{1,2\}) = 9, \quad v(\{1,3\}) = 5, \quad v(\{2,3\}) = 8, \quad v(\{1,2,3\}) = 8.$$

Рассмотрим кооперативную игру с коалиционной структурой (N, v, π), в которой равномерное значение рассчитывается для коалиции, в которой находится игрок, т. е.

$$\mathrm{ED}_i(N, v, \pi) = \frac{v(\pi(i))}{|\pi(i)|}.$$

Покажем, что относительно равномерного значения не существует устойчивой по Нэшу коалиционной структуры. Разбиение $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ неустойчиво, потому что игроку 3 выгодно присоединиться к игроку 2, т. е. $v(\{3\}) < \frac{v(\{2,3\})}{2}, 3 < \frac{8}{2}$. Разбиение $\{\{1\}, \{2,3\}\}$ неустойчиво, так как игроку 2 выгодно покинуть коалицию $\{2,3\}$ и присоединиться к игроку 1,

т. е. $\frac{v(\{2,3\})}{2} < \frac{v(\{1,2\})}{2}$, $\frac{8}{2} < \frac{9}{2}$. Разбиение $\{\{2\},\{1,3\}\}$ неустойчиво, потому что игроку 1 выгодно покинуть коалицию $\{1,3\}$ и присоединиться к игроку 2, т. е. $\frac{v(\{1,3\})}{2} < \frac{v(\{2,3\})}{2}$, $\frac{5}{2} < \frac{8}{2}$. Разбиение $\{\{3\},\{1,2\}\}$ неустойчиво, поскольку игроку 2 выгодно покинуть коалицию $\{1,2\}$ и создать одиночную коалицию, т. е. $\frac{v(\{1,2\})}{2} < v(\{2\})$, $\frac{9}{2} < 5$. И наконец, разбиение $\{\{1,2,3\}\}$ неустойчиво, потому что игроку 2 выгодно создать одиночную коалицию, т. е. $\frac{v(\{1,2,3\})}{3} < v(\{2\})$, $\frac{8}{3} < 5$. Таким образом, устойчивой по Нэшу коалиционной структуры не существует.

Найдём устойчивое коалиционное разбиение ограниченной кооперативной игры, которое существует согласно теореме 1. Для этого вычислим значения потенциальной функции $P(\pi) = \sum\limits_{B\in\pi} v(B)$ и найдём её максимум:

$$\begin{gathered}
P(\{\{1\},\{2\},\{3\}\}) = v(\{1\}) + v(\{2\}) + v(\{3\}) = 3 + 5 + 3 = 11,\\
P(\{\{1\},\{2,3\}\}) = v(\{1\}) + v(\{2,3\}) = 3 + 8 = 11,\\
P(\{\{2\},\{1,3\}\}) = v(\{2\}) + v(\{1,3\}) = 5 + 5 = 10,\\
P(\{\{3\},\{1,2\}\}) = v(\{3\}) + v(\{1,2\}) = 3 + 9 = 12,\\
P(\{\{1,2,3\}\}) = v(\{1,2,3\}) = 8.
\end{gathered}$$

Максимальное значение потенциальной функции равно 12 при $\pi^* = \{\{3\}, \{1,2\}\}$. Следовательно, π^* — устойчивое коалиционное разбиение ограниченной кооперативной игры (N, v^{π^*}).

2.2. Значение Шепли. Покажем существование устойчивой коалиционной структуры ограниченной кооперативной игры относительно значения Шепли.

Значение Шепли игрока $i \in N$ в ограниченной кооперативной игре (N, v^π) задаётся формулами

$$\mathrm{Sh}_i(v^\pi) = \sum_{i\in K\subseteq N} \frac{\lambda_K(v^\pi)}{|K|}, \quad \lambda_K(v^\pi) = \sum_{R\subseteq K} (-1)^{|K|-|R|} \cdot v^\pi(R).$$

Пусть $B \subseteq N$, $B \neq \varnothing$. Для игры (N, v, π) определим характеристическую функцию

$$v_B(K) = v(K \cap B), \quad K \subseteq N.$$

Тогда $v^\pi(K)$ можем представить в виде

$$v^\pi(K) = \sum_{B\in\pi} v_B(K), \quad K \subseteq N.$$

Значением *Аумана — Дрезе* [14] кооперативной игры с коалиционной структурой (N, v, π) называется значение Шепли, вычисленное для коалиции, в которой находится игрок:

$$\mathrm{AD}_i(N, v, \pi) = \sum_{i \in K \subseteq \pi(i)} \frac{\lambda_K(v)}{|K|}.$$

Сформулируем теорему о существовании устойчивых коалиционных структур для значения Шепли.

Теорема 2. 1. *Для произвольной кооперативной игры с коалиционной структурой* (N, v, π) *выполняются равенства*

$$\mathrm{Sh}_i(v^\pi) = \mathrm{AD}_i(N, v, \pi), \quad i \in N.$$

2. *Для любой кооперативной игры* (N, v) *существует ограниченная кооперативная игра с коалиционным разбиением, устойчивым по Нэшу относительно значений Аумана — Дрезе и Шепли.*

Доказательство. 1. Дивиденды Харсани удовлетворяют равенству

$$\lambda_K(v_B) = \begin{cases} \lambda_K(v), & \text{если } K \subseteq B, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Значение Шепли обладает свойствами аддитивности и нулевого игрока. Используя эти свойства и свойства дивидендов Харсани, выполним следующие преобразования:

$$\mathrm{Sh}_i(v^\pi) = \mathrm{Sh}_i\Big(\sum_{B \in \pi} v_B\Big) = \sum_{B \in \pi} \mathrm{Sh}_i(v_B) = \mathrm{Sh}_i(v_{\pi(i)}) =$$
$$= \sum_{i \in K \subseteq N} \frac{\lambda_K(v_{\pi(i)})}{|K|} = \sum_{i \in K \subseteq \pi(i)} \frac{\lambda_K(v)}{|K|} = \mathrm{AD}_i(N, v, \pi).$$

Следовательно, для любого $i \in N$

$$\mathrm{Sh}_i(v^\pi) = \mathrm{AD}_i(N, v, \pi).$$

2. Относительно значения Аумана — Дрезе существует потенциальная функция [7]

$$P(\pi) = \sum_{B \in \pi} \sum_{\varnothing \neq K \subseteq B} \frac{\lambda_K(v)}{|K|}.$$

Предположим, что разбиение $\pi^* \in \Pi(N)$ максимизирует потенциальную функцию $P(\pi)$. С учётом п. 1 коалиционная структура π^* ограниченной кооперативной игры (N, v^{π^*}), устойчивая относительно значения Аумана — Дрезе, устойчива и относительно значения Шепли. Теорема 2 доказана.

2.3. Шепли-эгалитарное значение. Шепли-эгалитарное значение игрока $i \in N$ в ограниченной кооперативной игре (N, v^π) вычисляется для некоторого $\alpha \in [0;1]$ по формуле

$$\mathrm{ShED}_i(v^\pi) = \alpha \cdot \mathrm{Sh}_i(v^\pi) + (1-\alpha) \cdot \mathrm{ED}_i(v^\pi),$$

Теорема 3. *Для любой кооперативной игры (N, v) существует ограниченная кооперативная игра с коалиционным разбиением, устойчивым по Нэшу относительно Шепли-эгалитарного значения.*

Доказательство. Введём в рассмотрение вспомогательную характеристическую функцию

$$w^\pi(K) = \begin{cases} v^\pi(N), & \text{если } K = N, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Игра (N, w^π) симметрична относительно выбора игрока, следовательно, значения Шепли любых двух игроков одинаковы. Так как сумма значений Шепли всех игроков равна $w^\pi(N)$, для любого $i \in N$ имеем

$$\mathrm{Sh}_i(w^\pi) = \frac{w^\pi(N)}{n} = \frac{v^\pi(N)}{n} = \mathrm{ED}_i(v^\pi).$$

Учитывая свойство линейности значения Шепли, преобразуем Шепли-эгалитарное значение следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathrm{ShED}_i(v^\pi) &= \alpha \cdot \mathrm{Sh}_i(v^\pi) + (1-\alpha) \cdot \mathrm{ED}_i(v^\pi) = \\ &= \alpha \cdot \mathrm{Sh}_i(v^\pi) + (1-\alpha) \cdot \mathrm{Sh}_i(w^\pi) = \mathrm{Sh}_i(\alpha \cdot v^\pi) + \mathrm{Sh}_i((1-\alpha) \cdot w^\pi) = \\ &= \mathrm{Sh}_i(\alpha \cdot v^\pi + (1-\alpha) \cdot w^\pi), \end{aligned}$$

т. е.

$$\mathrm{ShED}_i(v^\pi) = \mathrm{Sh}_i(u^\pi), \quad u^\pi = \alpha \cdot v^\pi + (1-\alpha) \cdot w^\pi.$$

Так как Шепли-эгалитарное значение представляет собой значение Шепли некоторой ограниченной кооперативной игры, утверждение теоремы 3 следует из п. 2 теоремы 2. Теорема 3 доказана.

3. Пример для значения Шепли

Согласно теореме 2 для любой кооперативной игры с коалиционной структурой существует ограниченная кооперативная игра с устойчивым по Нэшу коалиционным разбиением. Чтобы найти устойчивое разбиение, достаточно максимизировать потенциальную функцию. В этом разделе показано, как максимизировать потенциальную функцию с помощью динамического алгоритма из [8].

Для кооперативной игры (N, v) положим

$$w(B) = \sum_{\varnothing \neq K \subseteq B} \frac{\lambda_K(v)}{|K|}, \quad B \subseteq N, \quad w(\varnothing) = 0.$$

Подставляя дивиденды Харсани в явном виде, преобразуем функцию w следующим образом:

$$w(B) = \sum_{\varnothing \neq K \subseteq B} \frac{\lambda_K(v)}{|K|} = \sum_{\varnothing \neq K \subseteq B} v(K) \sum_{s=0}^{|N|-|K|} (-1)^s \frac{C^s_{|N|-|K|}}{s+|K|} =$$
$$= \sum_{\varnothing \neq K \subseteq B} \frac{(|K|-1)! \cdot (|N|-|K|)!}{|N|!} \cdot v(K).$$

Для нахождения устойчивой коалиционной структуры ограниченной кооперативной игры достаточно решить следующую задачу дискретной оптимизации:

$$\pi^* \in \arg\max_{\pi \in \Pi(N)} \sum_{B \in \pi} w(B).$$

В [8] показано, что максимум оптимизируемой функции совпадает с наибольшим значением функции

$$f(K) = \begin{cases} w(K), & \text{если } |K| = 1, \\ \max\{w(K), \max\limits_{\{K_1,K_2\} \in \Pi(K)} f(K_1) + f(K_2)\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Изначальная оптимизируемая функция определена на множестве коалиционных разбиений, а функция f — на подмножествах множества N. Это позволяет уменьшить время нахождения максимума с $O(n^n)$ до $O(2^n)$.

Таблица 1

Значения функций v и w

K	v	w	K	v	w	K	v	w
{1}	1	1	{1,3}	7	$5\frac{1}{2}$	{1,2,3}	21	$16\frac{1}{3}$
{2}	8	8	{1,4}	9	8	{1,2,4}	17	16
{3}	3	3	{2,3}	12	$11\frac{1}{2}$	{1,3,4}	18	$14\frac{1}{2}$
{4}	6	6	{2,4}	10	12	{2,3,4}	19	$18\frac{1}{6}$
{1,2}	13	11	{3,4}	15	12	{1,2,3,4}	22	$21\frac{3}{4}$

Пусть $N = \{1, 2, 3, 4\}$, значения функций v и w представлены в табл. 1. Найдём коалиционную структуру, которая максимизирует потенциальную функцию. Для этого найдём значения функции f, вычисления которых отображены в табл. 2.

Функция f принимает наибольшее значение 23 при $K = \{1, 2, 3, 4\}$, которое соответствует коалиционной структуре $\pi^* = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. Значит, разбиение π^* является коалиционной структурой ограниченной кооперативной игры, устойчивой относительно значения Шепли.

Таблица 2

Вычисление функции f

$\lvert K\rvert$	K	K_1, K_2	$w(K)$	$w(K_1)+w(K_2)$	$f(K)$
2	$\{1,2\}$	$\{1\},\{2\}$	11	9	11
	$\{1,3\}$	$\{1\},\{3\}$	$5\frac{1}{2}$	4	$5\frac{1}{2}$
	$\{1,4\}$	$\{1\},\{4\}$	8	7	8
	$\{2,3\}$	$\{2\},\{3\}$	$11\frac{1}{2}$	11	$11\frac{1}{2}$
	$\{2,4\}$	$\{2\},\{4\}$	12	14	14
	$\{3,4\}$	$\{3\},\{4\}$	12	9	12
3	$\{1,2,3\}$	$\{1\},\{2,3\}$	$16\frac{1}{3}$	$12\frac{1}{2}$	$16\frac{1}{3}$
		$\{2\},\{1,3\}$		$12\frac{1}{2}$	
		$\{3\},\{1,2\}$		14	
	$\{1,2,4\}$	$\{1\},\{2,4\}$	16	15	17
		$\{2\},\{1,4\}$		16	
		$\{4\},\{1,2\}$		17	
	$\{1,3,4\}$	$\{1\},\{3,4\}$	$14\frac{1}{2}$	13	$14\frac{1}{2}$
		$\{3\},\{1,4\}$		11	
		$\{4\},\{1,3\}$		$11\frac{1}{2}$	
	$\{2,3,4\}$	$\{2\},\{3,4\}$	$18\frac{1}{6}$	20	20
		$\{3\},\{2,4\}$		17	
		$\{4\},\{2,3\}$		$17\frac{1}{2}$	
4	$\{1,2,3,4\}$	$\{1\},\{2,3,4\}$	$21\frac{3}{4}$	21	23
		$\{2\},\{1,3,4\}$		$22\frac{1}{2}$	
		$\{3\},\{1,2,4\}$		20	
		$\{4\},\{1,2,3\}$		$22\frac{1}{3}$	
		$\{1,2\},\{3,4\}$		23	
		$\{1,3\},\{2,4\}$		$19\frac{1}{2}$	
		$\{1,4\},\{2,3\}$		$19\frac{1}{2}$	

Заключение

Большая часть работ в кооперативной теории игр посвящена нахождению аксиоматически справедливого дележа. Однако если относительно рассматриваемого дележа не существует устойчивого разбиения, то делёж не приемлем на практике из-за будущих манипуляций игроков.

В этой статье рассмотрен вопрос существования устойчивых коалиционных структур в ограниченных кооперативных играх. Найдены потенциальные функции относительно некоторых классических значений

игры. Определение потенциальной функции адаптировано таким образом, что её максимум — это устойчивая коалиционная структура ограниченной кооперативной игры.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт Российского научного фонда (проект № 25–21–00227, `rscf.ru/project/25-21-00227`). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. **Bogomolnaia A., Jackson M. O.** The stability of hedonic coalition structures // Games Econ. Behav. 2002. V. 38, No. 2. P. 201–230.
2. **Casajus A.** On the stability of coalition structures // Econ. Lett. 2008. V. 100, No. 2. P. 271–274.
3. **Cechlárová K., Romero-Medina A.** Stability in coalition formation games // Int. J. Game Theory. 2001. V. 29, No. 4. P. 487–494.
4. **Yi S. S.** Stable coalition structures with externalities // Games Econ. Behav. 1997. V. 20, No. 2. P. 201–237.
5. **Myerson R. B.** Graphs and cooperation in games // Math. Oper. Res. 1977. V. 2, No. 3. P. 225–229.
6. **Monderer D., Shapley L. S.** Potential games // Games Econ. Behav. 1996. V. 14, No. 1. P. 124–143.
7. **Gusev V. V.** Nash-stable coalition partition and potential functions in games with coalition structure // Eur. J. Oper. Res. 2021. V. 295, No. 3. P. 1180–1188.
8. **Yun Yeh D.** A dynamic programming approach to the complete set partitioning problem // BIT Numer. Math. 1986. V. 26, No. 4. P. 467–474.
9. **Béal S., Casajus A., Huettner F., Rémila E., Solal P.** Characterizations of weighted and equal division values // Theory Decision. 2016. V. 80, No. 4. P. 649–667.
10. **Zou Z., van den Brink R., Chun Y., Funaki Y.** Axiomatizations of the proportional division value // Soc. Choice Welf. 2021. V. 57, No. 1. P. 35–62.
11. **Shapley L. S.** A value for n-person games // Contributions to the theory of games. V. 2. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1953. P. 307–318.
12. **Harsanyi J. C.** A bargaining model for the cooperative n-person game // Contributions to the theory of games. V. 4. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1959. P. 325–355.
13. **Choudhury D., Borkotokey S., Kumar R., Sarangi S.** The egalitarian Shapley value: A generalization based on coalition sizes // Ann. Oper. Res. 2021. V. 301, No. 1. P. 55–63.

14. Aumann R. J., Dreze J. H. Cooperative games with coalition structures // Int. J. Game Theory. 1974. V. 3, No. 4. P. 217–237.

Гусев Василий Васильевич

Статья поступила
3 сентября 2025 г.
После доработки —
11 октября 2025 г.
Принята к публикации
22 декабря 2025 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2026. Vol. 33, No. 1. P. 38–55

UDC 519.83 DOI: 10.33048/daio.2026.33.840

NASH-STABLE COALITION PARTITIONS IN RESTRICTED COOPERATIVE GAMES

V. V. Gusev

HSE University,
3 Kantemirovskaya Street, 194100 St. Petersburg, Russian Federation
E-mail: vgusev@hse.ru

Abstract. A restricted cooperative game is a cooperative game with transferable utility in which the characteristic function depends on the coalition partition. The coalition partition restricts cooperation, namely, only those coalitions of players who belong to the same partition group are allowed. This limitation raises the question of the existence of stable coalition partitions. In this paper, we consider some classical values of cooperative game theory and show the existence of Nash-stable coalition structures in restricted cooperative games. The results on the existence of stable coalition structures are based on the theory of potential functions. Tab. 2, bibliogr. 14.

Keywords: game theory, stable coalition partition, restricted cooperative game, potential game.

References

1. **A. Bogomolnaia** and **M. O. Jackson,** The stability of hedonic coalition structures, *Games Econ. Behav.* **38** (2), 201–230 (2002).
2. **A. Casajus,** On the stability of coalition structures, *Econ. Lett.* **100** (2), 271–274 (2008).
3. **K. Cechlárová** and **A. Romero-Medina,** Stability in coalition formation games, *Int. J. Game Theory* **29** (4), 487–494 (2001).
4. **S. S. Yi,** Stable coalition structures with externalities, *Games Econ. Behav.* **20** (2), 201–237 (1997).
5. **R. B. Myerson,** Graphs and cooperation in games, *Math. Oper. Res.* **2** (3), 225–229 (1977).
6. **D. Monderer** and **L. S. Shapley,** Potential games, *Games Econ. Behav.* **14** (1), 124–143 (1996).

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **20** (1) (2026).

7. **V. V. Gusev,** Nash-stable coalition partition and potential functions in games with coalition structure, *Eur. J. Oper. Res.* **295** (3), 1180–1188 (2021).
8. **D. Yun Yeh,** A dynamic programming approach to the complete set partitioning problem, *BIT Numer. Math.* **26** (4), 467–474 (1986).
9. **S. Béal, A. Casajus, F. Huettner, E. Rémila,** and **P. Solal,** Characterizations of weighted and equal division values, *Theory Decision.* **80** (4), 649–667 (2016).
10. **Z. Zou, R. van den Brink, Y. Chun,** and **Y. Funaki,** Axiomatizations of the proportional division value, *Soc. Choice Welf.* **57** (1), 35–62 (2021).
11. **L. S. Shapley,** A value for n-person games, in *Contributions to the Theory of Games*, Vol. II (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1953), pp. 307–318.
12. **J. C. Harsanyi,** A bargaining model for the cooperative n-person game, in *Contributions to the Theory of Games*, Vol. IV (Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1959), pp. 325–355.
13. **D. Choudhury, S. Borkotokey, R. Kumar,** and **S. Sarangi,** The egalitarian Shapley value: A generalization based on coalition sizes, *Ann. Oper. Res.* **301** (1), 55–63 (2021).
14. **R. J. Aumann** and **J. H. Dreze,** Cooperative games with coalition structures, *Int. J. Game Theory* **3** (4), 217–237 (1974).

Vasily V. Gusev

Received September 3, 2025
Revised October 11, 2025
Accepted December 22, 2025

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2026. Т. 33, № 1. С. 56–70

УДК 519.8+518.25 DOI: 10.33048/daio.2026.33.849

ОПТИМАЛЬНОЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ДРОНОВ, ПОКРЫВАЮЩИХ БАРЬЕР В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ МЕТРИКЕ

А. И. Ерзин

Институт математики им. С. Л. Соболева,
пр. Акад. Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: adilerzin@math.nsc.ru

Аннотация. На плоскости рассматривается отрезок прямой — барьер, мониторинг (покрытие) которого осуществляется одинаковыми мобильными сенсорами (дронами) с ограниченной длиной траектории. Каждый дрон стартует из своего депо к некоторой точке барьера, перемещается вдоль барьера и возвращается в своё депо, пройдя путь ограниченной длины. Часть барьера, вдоль которой двигался дрон, считается покрытой этим дроном. Барьер покрыт, если каждая его точка покрыта хотя бы одним дроном. Требуется определить число дронов в каждом депо и найти траекторию каждого дрона так, чтобы весь барьер был покрыт, и общая длина путей (траекторий) дронов была минимальной. Для решения этой задачи с евклидовым расстоянием известен алгоритм динамического программирования, который строит оптимальное решение с псевдополиномиальной трудоёмкостью. В этой статье для решения задачи в прямоугольной метрике предлагается полиномиальный алгоритм, который строит оптимальное решение с квадратичной трудоёмкостью от числа депо. Ил. 3, библиогр. 19.

Ключевые слова: покрытие барьера, линейная маршрутизация, мобильный сенсор (дрон), оптимальное решение.

Введение

Многие протяжённые объекты с некоторой долей абстракции представимы в виде отрезка прямой на плоскости («барьера»). Этими объектами могут быть дороги, трубопроводы, ЛЭП и пр. сооружения, требующие постоянного мониторинга, т. е. проверки целостности и исправности. Использование для этой цели обходчиков (людей) не всегда целесообразно,

© А. И. Ерзин, 2026

а часто просто невозможно. В настоящее время для мониторинга протяжённых объектов всё чаще используют автономные беспилотные летательные устройства (дроны). Для мониторинга дрон оснащён необходимым оборудованием. Считается, что дрон покрывает некоторую область, если все точки этой области находятся в сфере действия его оборудования. Во многих публикациях, посвящённых покрытию барьера, считается, что дрон покрывает круг [1–6]. Мониторинг протяжённого объекта называется *барьерным покрытием*. Дрон, как автономное устройство, имеет ограниченный запас энергии, что ограничивает длину его траектории без возобновления энергии. Исследователи рассматривают задачи оптимального покрытия барьера с использованием трёх критериев: минимизация числа дронов, минимизация максимальной длины пути, пройденного дроном, и минимизация общей длины траекторий дронов. Для обозначения последней задачи часто используется аббревиатура MinSum. В этой статье рассматривается именно задача MinSum.

В традиционной постановке, когда каждый дрон находится в некоторой начальной точке на плоскости (депо) и покрывает круг некоторого радиуса с центром в месте расположения дрона, задача рассматривалась, например, в [2, 4–6, 9–11]. В этих статьях для каждого дрона ищется такое конечное положение, что весь барьер покрыт, а общая длина траекторий дронов минимальна (возвращаться в депо дрону не надо) [1–3, 5, 6]. Известно, что такая задача NP-трудна, когда круги покрытия дронов разные [2, 3]. Если же круги одинаковые, то сложностной статус задачи не известен. Для последнего случая в [5] предложен алгоритм, который с трудоёмкостью $O(m^4)$ строит $\sqrt{2}$-приближённое решение задачи, где m — число дронов. Позже в [6] трудоёмкость была уменьшена до $O(m^2)$.

В [7, 8] приведены достаточно подробные обзоры литературы, относящейся к барьерному покрытию. Там же есть ссылки на работы [12] с постановкой задачи маршрутизации и оптимизации траекторий (routing and trajectory optimization problem) и [13], где поставлена задача маршрутизации дрона на графе (drone arc routing problem) и показана её связь с задачей маршрутизации почтальона на графе (postman arc routing problem), а также [14], в которой предложены две задачи маршрутизации с ограничением на длину пути.

В работе [15], первой из посвящённых задаче, близкой к рассматриваемой в этой статье, доказаны свойства решения в случае, когда в каждом депо находится один дрон. Предложена эффективная реализация динамического программирования для построения допустимого решения в прямоугольной метрике, а также найдены некоторые частные случаи полиномиальной разрешимости задачи. В отличие от [15], в [7, 8] число дронов в каждом депо — это искомая величина. В [7] рассмотрен случай,

когда общее число дронов не ограничено, и предложен псевдополиномиальный алгоритм для построения оптимального решения при условии, что каждый дрон покрывает отрезок барьера длины не менее некоторого заданного $\delta > 0$. Трудоёмкость предложенного алгоритма $O(mL^3/\delta)$, где m — число депо, а L — длина барьера. В [8] рассмотрена обобщённая задача с ограничением сверху на число дронов некоторым $n > 0$. Для её решения разработаны два алгоритма. Первый алгоритм ищет оптимальное покрытие оптимальным числом дронов n^* с трудоёмкостью $O(L^2/\delta^2)$. Если $n^* \leqslant n$, то построенное решение оптимально и для случая ограниченного числа дронов. Иначе второй из указанных алгоритмов строит оптимальное покрытие с трудоёмкостью $O(mnL^2/\delta^2)$.

Новизна результатов, представленных в этой статье, характеризуется тем, что предложенный алгоритм в случае прямоугольной метрики L_1 строит оптимальное решение задачи MinSum с трудоёмкостью $O(m^2)$.

1. Постановка задачи

Барьер — это отрезок $[0, L]$ оси OX на плоскости XOY. Известны координаты (x_i, y_i), $y_i \geqslant 0$, каждого депо $d_i \in D$, $i = 1, \ldots, m$, в котором можно разместить произвольное число дронов. Пронумеруем депо слева направо согласно абсциссам, т. е. номер i депо d_i меньше номера j депо d_j тогда и только тогда, когда $x_i < x_j$. При равенстве абсцисс депо с большей ординатой, очевидно, можно исключить. Ограничим максимальную длину траектории каждого дрона величиной $q > 0$. Для покрытия барьера траектория каждого дрона начинается в его депо, проходит вдоль отрезка барьера и заканчивается в том же депо, откуда исходит. Часть барьера, вдоль которой прошёл дрон, считается *покрытой* этим дроном. Будем говорить, что дроны из депо d_i *покрывают* отрезок $[a_i, b_i] \subseteq [0, L]$, если каждый из них стартует из депо d_i, перемещается вдоль барьера, возвращается в своё депо, проходя путь не длиннее q, и совокупно дроны покрывают отрезок $[a_i, b_i]$.

Определение 1. *Покрытием* C барьера $[0, L]$ называется множество отрезков $[a_i, b_i] \subseteq [0, L]$ таких, что каждый из них покрывается дронами одного депо $d_i \in D$, при этом $\bigcup\limits_{i=1}^{m} [a_i, b_i] \supseteq [0, L]$ и длина траектории каждого дрона не превосходит q.

Чтобы задать покрытие C, требуется определить число дронов в каждом депо $d_i \in D$, отрезок барьера $[a_i, b_i] \subseteq [0, L]$, покрываемый дронами этого депо, а также траектории всех дронов.

Задача MinSum. *Требуется определить число дронов в каждом депо, а также траекторию движения каждого дрона так, чтобы покрыть барьер* $[0, L]$ *и минимизировать общую длину траекторий дронов.*

В евклидовой метрике оптимальная траектория каждого дрона — это треугольник с одной вершиной в депо, одной стороной на барьере и периметром, не превосходящим q. В прямоугольной метрике L_1 траектория дрона из некоторого депо — это граница прямоугольника с периметром не более q, нижней стороной на барьере и депо, находящимся на верхней стороне. При этом очевидно, что в оптимальном решении в одном депо не будет размещено более двух дронов. Далее в статье рассматривается только прямоугольная метрика.

Нам понадобятся следующие определения и утверждения.

Определение 2. Покрытие, при котором для произвольной пары депо $d_i, d_j \in D$ неравенство $b_i \leqslant a_j$ выполняется тогда и только тогда, когда $i < j$, называется *сохраняющим порядок* (ПСП).

Оптимальное ПСП можно построить с помощью динамического программирования, так как свойство сохранения порядка обеспечивает выполнение принципа оптимальности Беллмана.

Лемма 1 [7]. *Для задачи* MinSum *существует оптимальное покрытие, при котором дроны из одного депо покрывают один отрезок барьера.*

Лемма 2 [7]. *Для задачи* MinSum *существует оптимальное покрытие, сохраняющее порядок.*

В случае, когда в каждом депо находится не более одного дрона, лемма 2 не верна [15].

Обозначим через $f_i(a, b)$ функцию, равную минимальной длине траекторий дронов из депо d_i, которые покрывают отрезок $[a, b]$. Необходимо решить следующую задачу оптимального разбиения отрезка на подотрезки, которая известна как Задача о ближайшем соседе [16]:

$$\sum_{i=1}^{m} f_i(z_{i-1}, z_i) \to \min_z, \tag{1}$$

$$0 = z_0 \leqslant z_1 \leqslant \ldots \leqslant z_m = L, \tag{2}$$

где z_i — точки разбиения барьера. Таким образом, требуется оптимально разбить барьер на m подотрезков (некоторые из них могут быть пустыми).

В [7] приведена схема динамического программирования, которая позволяет решить задачу (1), (2) с трудоёмкостью $O(mL^3/\delta)$ при условии, что каждый дрон покрывает отрезок барьера, длина которого кратна $\delta > 0$.

В прямоугольной метрике предложенный в [7] алгоритм также построит оптимальное решение с псевдополиномиальной трудоёмкостью. В этой статье на основе свойств метрики L_1 предлагается полиномиальный алгоритм для решения задачи MinSum (1), (2).

2. Алгоритм решения задачи в метрике L_1

Для каждого депо d_k определим максимальный отрезок $[A_k, B_k]$, который могут покрыть дроны этого депо:

$$A_k = \max\{0,\, x_k - q/2 + y_k\}, \quad B_k = \min\{L,\, x_k + q/2 - y_k\}.$$

Если $\bigcup\limits_{k=1}^{m} [A_k, B_k] \supseteq [0, L]$, то рассматриваемая задача MinSum имеет решение.

Если известны функции $f_k(x,l)$, $k = 1, \ldots, m$, $x \in [0, L]$, $l \in [x, L]$, то произвольное покрытие однозначно определяется разбиением барьера на m частей (отрезков), каждый из которых покрывается дронами из одного депо. Введём функционал $S_k(l)$, равный минимальной длине всех траекторий дронов из депо $d_1, \ldots, d_k$, покрывающих совокупно отрезок $[0, l]$. Очевидно выполнение следующих рекуррентных соотношений для построения оптимального ПСП:

$$S_1(l) = \begin{cases} f_1(0,l), & \text{если } l \leqslant B_1, \\ +\infty & \text{иначе,} \end{cases} \qquad x_1(l) = l, \tag{3}$$

$$S_k(l) = \begin{cases} \min\limits_{A_k \leqslant x \leqslant l} \{f_k(x,l) + S_{k-1}(x)\} = \\ \qquad = f_k(x_k(l), l) + S_{k-1}(x_k(l)), & \text{если } l \leqslant B_k, \\ +\infty & \text{иначе,} \end{cases} \qquad k = 2, \ldots, m, \tag{4}$$

где $x_k(l)$ — условно оптимальное решение. Главная цель статьи — эффективная реализация соотношений (3), (4). Для этого нужно рассматривать не все допустимые значения l, а найти отрезки принадлежности l, в которых $S_k(l)$ имеет одно аналитическое выражение.

Рассмотрим подробно процедуру вычисления значений $f_k(x,l)$ для всех допустимых значений переменных и фиксированного депо k.

Имеем $f_k(x,x) = 0$; $f_k(x,l) = +\infty$, если $[x,l] \not\subseteq [A_k, B_k]$.

Пусть $x \in [A_k, B_k)$, $l \in (x, B_k]$. Возможны следующие случаи (рис. 1):

0) $x_k \leqslant 0$: $f_k(x,l) = f_k(0,l) = 2(l - x_k + y_k)$;

1) $x_k > 0$, $l \in [A_k, x_k]$: $f_k(x,l) = f_k(x,x_k) = 2(x_k - x + y_k)$;

2) $l > x_k > 0$, $p_k(l) = l - q/2 + y_k \leqslant x < x_k$: $f_k(x,l) = 2(l - x + y_k)$;

3) $l > x_k > 0$, $x < p_k(l) < x_k$: $f_k(x,l) = 2(l - x + 2y_k)$;

4) $x \geqslant x_k > 0$: $f_k(x,l) = f_k(x_k,l) = 2(l - x_k + y_k)$.

На рис. 1а показана область определения функции $f_k(x,l)$ при $x_k \leqslant 0$ (случай 0), а на рис. 1б показаны четыре области определения функции $f_k(x,l)$ при $x_k > 0$ (случаи 1–4). В каждой области (0)–(4) функция $f_k(x,l)$ линейна. Более того, в областях (0), (1) и (4) она зависит от одной переменной.

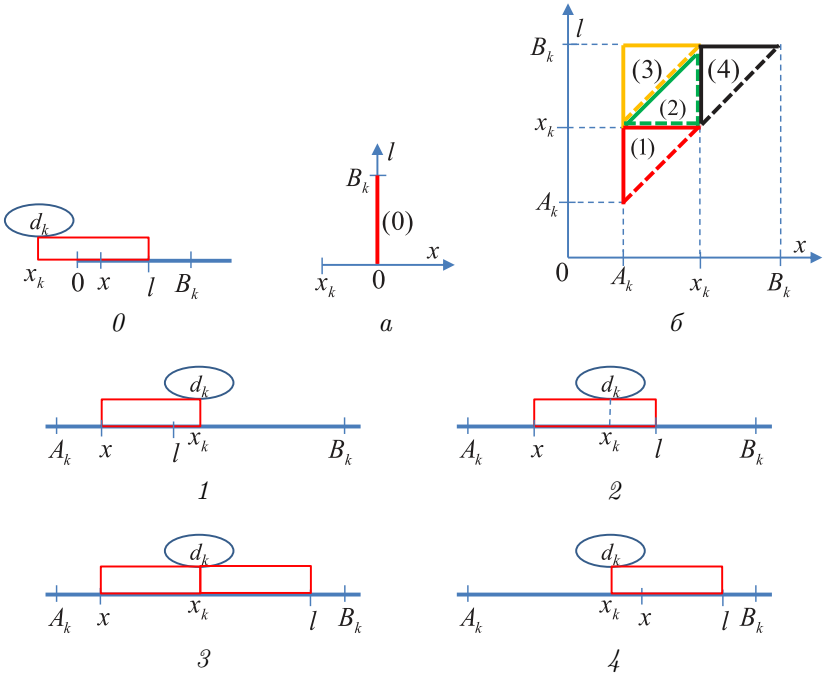


Рис. 1. Варианты покрытия отрезка $[x, l]$
в зависимости от положения депо и значений переменных x и l (0–4):
а) допустимая область переменной l функции $f_k(0, l)$ в случае 0;
б) допустимые области переменных (x, l) функции $f_k(x, l)$ в случаях 1–4

Лемма 3. *Если* $x_i \leqslant 0$, $x_j \leqslant 0$, $B_i \geqslant B_j$, *то* $f_i(0, l) \leqslant f_j(0, l)$ *для всех* $l \in (0, L]$.

Доказательство. Имеем $B_i = x_i + (q - 2y_i)/2 \geqslant B_j = x_j + (q - 2y_j)/2$. Значит, $x_i - y_i \geqslant x_j - y_j$, откуда следует требуемое неравенство $f_i(0, l) = 2(l - x_i + y_i) \leqslant f_j(0, l) = 2(l - x_j + y_j)$. Лемма 3 доказана.

Очевидно, что справедлива также

Лемма 4. *Если* $x_i \geqslant L$, $x_j \geqslant L$, $A_i \leqslant A_j$, *то* $f_i(x, L) \leqslant f_j(x, L)$ *для всех* $x \in [0, L]$.

Из сказанного выше следует, что нужно оставить не более одного депо слева от барьера и не более одного депо справа от барьера. Далее примем это утверждение в качестве аксиомы. При таком условии только депо 1 может находиться левее барьера и только депо m может находиться правее барьера.

Рассмотрим сначала случай с единственным депо 1. Имеем

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \min\{L, x_1 + q/2 - y_1\},$$

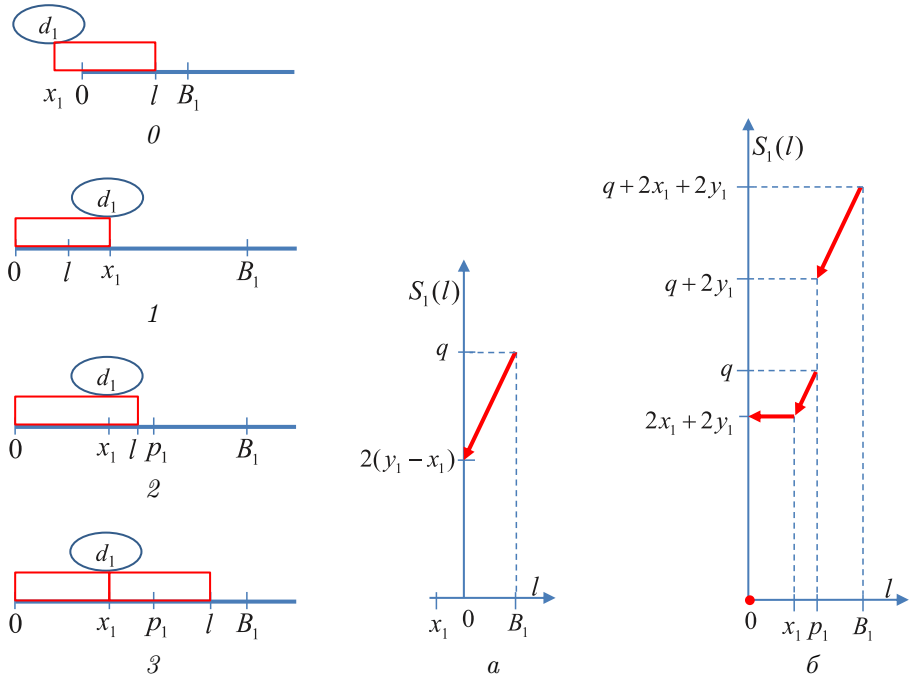


Рис. 2. Варианты покрытия отрезка $[0, l]$ в зависимости от x_1 и l (0–3). График функционала $S_1(l)$: а) при $x_1 \leqslant 0$; б) при $x_1 > 0$

$$S_1(l) = \begin{cases} f_1(0,l), & \text{если } l \leqslant B_1, \\ +\infty & \text{иначе,} \end{cases} \qquad x_1(l) = l.$$

Иллюстрация возможных вариантов покрытия отрезка $[0, l]$ представлена на рис. 2:

0) $x_1 \leqslant 0$: $S_1(l) = f_1(0,l) = 2(l - x_1 + y_1)$;
1) $A_1 = 0 < l \leqslant x_1$: $S_1(l) = f_1(0, x_1) = 2(x_1 + y_1)$;
2) $x_1 < l \leqslant p_1 = q/2 - y_1$: $S_1(l) = f_1(0,l) = 2(l + y_1)$;
3) $l > p_1 = q/2 - y_1$: $S_1(l) = f_1(0,l) = 2(l + y_1)$.

Таким образом получаем конечное множество *точек переключения* $P_1 \subseteq \{0,\, x_1,\, q/2 - y_1,\, B_1\}$. Между соседними точками переключения функционал $S_1(l)$ представляет собой определённую линейную функцию.

Пусть посчитаны кусочно линейные функции $S_i(l)$ и найдены условно-оптимальные решения $x_i(l)$ для $i = 1, \ldots, k-1$, а также точки переключения P_{k-1}. Если l принадлежит отрезку между соседними точками переключения, то функционал $S_{k-1}(l)$ имеет вид конкретной линейной функции. Рассмотрим процесс вычисления $S_k(l)$. Это делается по формуле (4). Согласно лемме 3 $x_k > 0$ при $k > 1$. Следовательно, возможны следующие четыре случая:

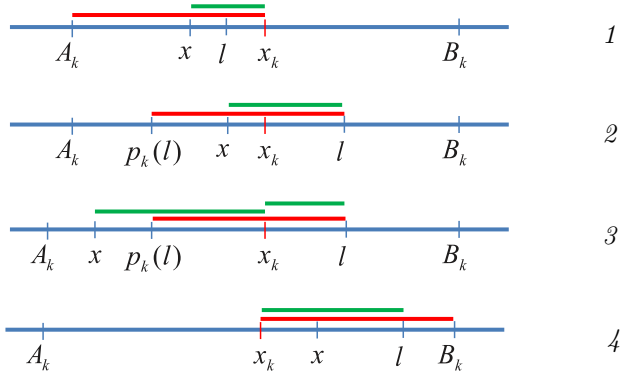


Рис. 3. Варианты покрытия отрезка $[x, l]$ дронами депо k

1) $l \in [A_k, x_k]$: $S_k(l) = \min\limits_{A_k \leqslant x \leqslant l} \{2(x_k - x + y_k) + S_{k-1}(x)\}$;

2) $l \in (x_k, B_k]$ и $p_k(l) \leqslant x < x_k$: $S_k(l) = \min\limits_{p_k(l) \leqslant x < x_k} \{2(l - x + y_k) + S_{k-1}(x)\}$;

3) $l > x_k$ и $x < p_k(l) < x_k$: $S_k(l) = \min\limits_{A_k \leqslant x < l} \{2(l - x + 2y_k) + S_{k-1}(x)\}$;

4) $x \geqslant x_k$: $S_k(l) = 2(l - x_k + y_k) + S_{k-1}(x_k)$.

Рассмотрим эти случаи детально. На рис. 3 длина красной линии равна $l - p_k(l)$ — длине максимального отрезка, который может покрыть один дрон из депо k. Зелёные линии показывают отрезки, которые покрываются одним (случаи 1, 2, 4) или двумя (случай 3) дронами из депо k.

1) Здесь функции f_k и S_{k-1} зависят только от x, при этом они обе кусочно линейные. Значит, минимум достигается в граничных точках и точках разрыва или излома, которые выше названы точками переключения. Если l известно, то известно, какие точки переключения из P_{k-1} находятся на отрезке $[A_k, l]$, и для нахождения $S_k(l)$ достаточно сравнить значения $f_k(x, x_k) + S_{k-1}(x)$ только в этих точках x и выбрать минимальное. При этом не нужно вычислять функции в континууме значений l, достаточно рассмотреть отрезки $[A_k, l]$, для которых множество точек переключения одинаковое. В результате получим несколько отрезков, разделённых точками переключения P_k, в каждом из которых функция $S_k(l)$ имеет одно линейное представление.

2) В этом случае отрезок $[x, l]$ покрывается одним дроном из депо k. Функция $f_k(x, l)$ линейна по каждой из переменных, причём $x \in [p_k(l), l]$. Зная l, однозначно определяем множество точек переключения из P_{k-1}, попадающих в отрезок $[p_k(l), l]$. Как и в предыдущем случае, достаточно рассмотреть отрезки значений l, при которых в отрезок $[p_k(l), l]$ попадает одно и то же подмножество точек переключения. В результате получим

несколько отрезков, разделённых точками переключения P_k, в каждом из которых функция $S_k(l)$ имеет одно линейное представление.

3) При $x < p_k(l)$ отрезок $[x, l]$ может быть покрыт только двумя дронами. Здесь для вычисления значений $S_k(l)$ нужно рассматривать точки переключения x из отрезка $[A_k, p_k(l)]$. В результате получим отрезки для l такие, что в отрезке $[A_k, p_k(l)]$ одно и то же множество точек переключения и $S_k(l)$ представлена одной линейной функцией.

4) В этом случае f_k зависит только от l, а S_{k-1} — константа. Следовательно, сразу получаем линейную функцию для $S_k(l)$.

В результате рассмотрения всех случаев получаем конечное число отрезков между соседними точками переключения из множества P_k, в которых $S_k(l)$ имеет одно линейное представление.

На последнем шаге прямого хода определяем отрезок $[x_m(L), L]$, который покрывается дронами депо m. На обратном ходе строим оптимальное решение, используя условно оптимальные значения $x_k(l)$, полученные при выполнении прямого хода.

Теорема 1. *Предложенный алгоритм динамического программирования для построения оптимального решения задачи* MinSum *в случае прямоугольной метрики может быть реализован с трудоёмкостью* $O(m^2)$.

Доказательство. Наиболее трудоёмкой частью алгоритма является прямой ход. На каждом шаге k прямого хода для отрезка значений l находится минимум $f_k(x, l) + S_{k-1}(x)$ путём перебора значений x из подмножества точек переключения. На каждом шаге алгоритма добавляется $O(1)$ точек переключения. Всего прямой ход выполняет m шагов. На каждом шаге рассматривается $O(m)$ отрезков принадлежности l, и для каждого отрезка ищется оптимальное значение x в подмножестве точек переключения. Следовательно, всего $O(m)$ точек переключения, и трудоёмкость алгоритма ограничена функцией $O(m^3)$. Однако при увеличении l с использованием равенств (4) в отрезок $[A_k, l]$ добавляется всего одно значение x. Таким образом, для нахождения условно оптимального решения $x_k(l)$ достаточно найти значение $f_k(x, l) + S_{k-1}(x)$ только в добавленной точке переключения. При такой организации вычислений трудоёмкость алгоритма снижается до $O(m^2)$.

Заключение

В статье рассматривается задача покрытия отрезка $[0, L]$ на плоскости (барьера) одинаковыми мобильными устройствами (дронами) с ограниченным запасом энергии, который определяет максимальную длину q траектории каждого дрона. Дрон стартует из своего депо, двигается вдоль отрезка барьера и возвращается в своё депо, проделав путь длины

не более q. Отрезок барьера, вдоль которого двигался дрон, считается покрытым этим дроном. В задаче MinSum требуется определить число дронов в каждом депо и их траектории так, чтобы покрыть барьер, при этом суммарная длина траекторий всех дронов должна быть минимальной.

Ранее в [15] рассматривалась задача MinSum, в которой в каждом депо находился один дрон и оставалось определить траекторию каждого дрона. Для такой постановки задачи не всегда существует оптимальное покрытие, сохраняющее порядок (ПСП), поэтому динамическое программирование не всегда строит оптимальное решение. Если число дронов в каждом депо — искомая величина, то всегда существует оптимальное ПСП [7]. В [7] предложен алгоритм динамического программирования, решающий задачу с псевдополиномиальной трудоёмкостью $O(mL^3)$, где m — число депо, в предположении, что каждый дрон покрывает отрезок целочисленной длины. В [8] предложены два новых алгоритма для решения задачи в случае, когда общее число дронов ограничено числом n. Первый алгоритм находит оптимальное покрытие оптимальным числом дронов n^* с трудоёмкостью $O(L^2)$. Если $n^* > n$, то второй алгоритм строит оптимальное решение с трудоёмкостью $O(nmL^2)$.

В этой статье задача MinSum рассмотрена в прямоугольной метрике L_1 и для нахождения оптимального решения разработан алгоритм динамического программирования полиномиальной трудоёмкости $O(m^2)$.

Финансирование работы

Работа выполнена в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева (проект № FWNF–2026–0021). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. **Bhattacharya B., Burmester M., Hu Y., Kranakis E., Shi Q., Wiese A.** Optimal movement of mobile sensors for barrier coverage of a planar region // Theor. Comput. Sci. 2009. V. 410, No. 52. P. 5515–5528. DOI: 10.1016/j.tcs.2009.07.007.
2. **Czyzowicz J., Kranakis E., Krizanc D.** [et al.]. On minimizing the sum of sensor movements for barrier coverage of a line segment // Ad-hoc, mobile and wireless networks. Proc. 9th Int. Conf. (Edmonton, Canada, Aug. 20–22, 2010). Heidelberg: Springer, 2010. P. 29–42. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 6288). DOI: 10.1007/978-3-642-14785-2_3.

3. **Dobrev S., Durocher S., Eftekhari M.** [et al.]. Complexity of barrier coverage with relocatable sensors in the plane // Theor. Comput. Sci. 2015. V. 579. P. 64–73. DOI: 10.1016/j.tcs.2015.02.006.
4. **Wang H., Zhang X.** Minimizing the maximum moving cost of interval coverage // Algorithms and computation. Proc. 26th Int. Symp. (Nagoya, Japan, Dec. 9–11, 2015). Heidelberg: Springer, 2015. P. 188–198. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 9472). DOI: 10.1007/978-3-662-48971-0_17.
5. **Cherry A., Gudmundsson J., Mestre J.** Barrier coverage with uniform radii in 2D // Algorithms for sensor systems. Rev. Sel. Pap. 13th Int. Symp. Algorithms and Experiments for Wireless Sensor Networks (Vienna, Austria, Sept. 4–8, 2017). Cham: Springer, 2017. P. 57–69. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 10718). DOI: 10.1007/978-3-319-72751-6_5.
6. **Erzin A. I., Lagutkina N. A.** Barrier coverage problem in 2D // Algorithms for sensor systems. Rev. Sel. Pap. 14th Int. Symp. Algorithms and Experiments for Wireless Sensor Networks (Helsinki, Finland, Aug. 23–24, 2018). Cham: Springer, 2019. P. 118–130. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 11410). DOI: 10.1007/978-3-030-14094-6_8.
7. **Erzin A. I., Shadrina A. V.** Optimal placement of mobile sensors for the distance-constrained line routing problem // Mathematical optimization theory and operations research: Recent trends. Rev. Sel. Pap. 23th Int. Conf. (Omsk, Russia, June 30 – July 6, 2024). Cham: Springer, 2024. P. 172–184. (Commun. Comput. Inf. Sci.; V. 2239). DOI: 10.1007/978-3-031-73365-9_12.
8. **Ерзин А. И, Шадрина А. В.** Размещение дронов для оптимального покрытия барьера // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2025. Т. 32, № 2. С. 54–71. DOI: 10.33048/daio.2025.32.828.
9. **Bar-Noy A., Rawitz D., Terlecky P.** "Green" barrier coverage with mobile sensors // Algorithms and complexity. Proc. 9th Int. Conf. (Paris, France, May 20–22, 2015). Cham: Springer, 2015. P. 33–46. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 9079). DOI: 10.1007/978-3-319-18173-8_2.
10. **Benkoczi R., Friggstad Z., Gaur D., Thom M.** Minimizing total sensor movement for barrier coverage by non-uniform sensors on a line // Algorithms for sensor systems. Rev. Sel. Pap. 11th Int. Symp. Algorithms and Experiments for Wireless Sensor Networks (Patras, Greece, Sept. 17–18, 2015). Cham: Springer, 2015. P. 98–111. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 9536). DOI: 10.1007/978-3-319-28472-9_8.
11. **Andrews A. M., Wang H.** Minimizing the aggregate movements for interval coverage // Algorithmica. 2017. V. 78, No. 1. P. 47–85. DOI: 10.1007/s00453-016-0153-8.
12. **Coutinho W. P., Battarra M., Fliege J.** The unmanned aerial vehicle routing and trajectory optimisation problem, a taxonomic review // Comput. Ind. Eng. 2018. V. 120. P. 116–128. DOI: 10.1016/j.cie.2018.04.037.
13. **Campbell J. F., Corberan A., Plana I., Sanchis J. M.** Drone arc routing problems // Networks. 2018. V. 72, No. 4. P. 543–559. DOI: 10.1002/net.21858.

14. Kek A. G. H., Cheu R. L., Meng Q. Distance-constrained capacitated vehicle routing problems with flexible assignment of start and end depots // Math. Comput. Model. 2008. V. 47. P. 140–152. DOI: 10.1016/j.mcm.2007.02.007.

15. Erzin A. I., Plotnikov R. V. Distance-constrained line routing problem // Optimization and applications. Rev. Sel. Pap. 10th Int. Conf. (Petrovac, Montenegro, Sep. 30 – Oct. 4, 2019). Cham: Springer, 2020. P. 43–55. (Commun. Comput. Inf. Sci.; V. 1145). DOI: 10.1007/978-3-030-38603-0_4.

16. Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т. Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978. 334 с.

17. Vidal R. V. V. Optimal partition of an interval — The discrete version // Applied simulated annealing. Heidelberg: Springer, 1993. P. 291–312. (Lect. Notes Econ. Math. Syst.; V. 396). DOI: 10.1007/978-3-642-46787-5_15.

18. Jackson B., Scargle J. D., Barnes D. [et al.]. An algorithm for optimal partitioning of data on an interval // IEEE Signal Proces. Lett. 2005. V. 12, No. 2. P. 105–108. DOI: 10.1109/LSP.2001.838216.

19. Tilli P., Zucco D. Optimal partitioning of an interval and applications to Sturm–Liouville eigenvalues // J. Differ. Equ. 2019. V. 268, No. 8. P. 4900–4919. DOI: 10.1016/j.jde.2019.12.026.

Ерзин Адиль Ильясович

Статья поступила
17 декабря 2025 г.
После доработки —
15 января 2026 г.
Принята к публикации
22 января 2026 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2026. Vol. 33, No. 1. P. 56–70

UDC 519.8+518.25 DOI: 10.33048/daio.2026.33.849

OPTIMAL DRONE PLACEMENT TO COVER A BARRIER IN THE RECTILINEAR METRIC

A. I. Erzin

Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
E-mail: adilerzin@math.nsc.ru

Abstract. We consider a line segment in the plane, called a barrier, and its monitoring (coverage) which is performed by identical mobile sensors (drones) with limited trajectory length. Each drone starts from its depot at a certain point on the barrier, moves along the barrier, and returns to its depot after having covered a path of limited length. The part of the barrier along which the drone moves is called covered by this drone. The barrier is covered if each point of it is covered by at least one drone. It is necessary to determine the number of drones in each depot and a trajectory of each drone so that the entire barrier is covered and the total length of the drones' paths (trajectories) is minimal. A dynamic programming algorithm is known for solving this problem with Euclidean distance. It constructs an optimal solution with pseudo-polynomial complexity. In this article, a polynomial algorithm is proposed to solve the problem in a rectilinear metric that constructs an optimal solution with quadratic complexity of the depot number. Illustr. 3, bibliogr. 19.

Keywords: barrier covering, linear routing, mobile sensor (drone), optimal solution.

References

1. **B. Bhattacharya, M. Burmester, Y. Hu, E. Kranakis, Q. Shi,** and **A. Wiese** Optimal movement of mobile sensors for barrier coverage of a planar region, *Theor. Comput. Sci.* **410** (52), 5515–5528 (2009), DOI: 10.1007/978-3-540-85097-7_10.

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **20** (1) (2026).

2. **J. Czyzowicz, E. Kranakis, D. Krizanc,** [et al.], On minimizing the sum of sensor movements for barrier coverage of a line segment, in *Ad-Hoc, Mobile and Wireless Networks* (Proc. 9th Int. Conf., Edmonton, Canada, Aug. 20–22, 2010) (Springer, Heidelberg, 2010), pp. 29–42 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 6288), DOI: 10.1007/978-3-642-14785-2_3.
3. **S. Dobrev, S. Durocher, M. Eftekhari,** [et al.], Complexity of barrier coverage with relocatable sensors in the plane, *Theor. Comput. Sci.* **579**, 64–73 (2015), DOI: 10.1016/j.tcs.2015.02.006.
4. **H. Wang** and **X. Zhang,** Minimizing the maximum moving cost of interval coverage, in *Algorithms and Computation* (Proc. 26th Int. Symp., Nagoya, Japan, Dec. 9–11, 2015) (Springer, Heidelberg, 2015), pp. 188–198 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9472), DOI: 10.1007/978-3-662-48971-0_17.
5. **A. Cherry, J. Gudmundsson,** and **J. Mestre,** Barrier coverage with uniform radii in 2D, in *Algorithms for Sensor Systems* (Rev. Sel. Pap. 13th Int. Symp. Algorithms and Experiments for Wireless Sensor Networks, Vienna, Austria, Sept. 4–8, 2017) (Springer, Cham, 2017), pp. 57–69 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 10718), DOI: 10.1007/978-3-319-72751-6_5.
6. **A. I. Erzin** and **N. A. Lagutkina,** Barrier coverage problem in 2D, in *Algorithms for Sensor Systems* (Rev. Sel. Pap. 14th Int. Symp. Algorithms and Experiments for Wireless Sensor Networks, Helsinki, Finland, Aug. 23–24, 2018) (Springer, Cham, 2019), pp. 118–130 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 11410), DOI: 10.1007/978-3-030-14094-6_8.
7. **A. I. Erzin** and **A. V. Shadrina,** Optimal placement of mobile sensors for the distance-constrained line routing problem, in *Mathematical Optimization Theory and Operations Research: Recent Trends* (Rev. Sel. Pap. 23th Int. Conf., Omsk, Russia, June 30 – July 6, 2024) (Springer, Cham, 2024), pp. 172–184 (Commun. Comput. Inf. Sci., Vol. 2239), DOI: 10.1007/978-3-031-73365-9.
8. **A. I Erzin** and **A. V. Shadrina,** Drone placement for optimal barrier coverage, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **32** (2), 54–71 (2025) [Russian] [*J. Appl. Ind. Math.* **19** (2), 230–239 (2025), DOI:], DOI: 10.33048/daio.2025.32.828.
9. **A. Bar-Noy, D. Rawitz,** and **P. Terlecky,** "Green" barrier coverage with mobile sensors, in *Algorithms and Complexity* (Proc. 9th Int. Conf., Paris, France, May 20–22, 2015) (Springer, Cham, 2015), pp. 33–46 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9079), DOI: 10.1007/978-3-319-18173-8_2.
10. **R. Benkoczi, Z. Friggstad, D. Gaur,** and **M. Thom,** Minimizing total sensor movement for barrier coverage by non-uniform sensors on a line, in *Algorithms for Sensor Systems* (Rev. Sel. Pap. 11th Int. Symp. Algorithms and Experiments for Wireless Sensor Networks, Patras, Greece, Sept. 17–18, 2015) (Springer, Cham, 2015), pp. 98–111 (Lect. Notes Comput. Sci., Vol. 9536), DOI: 10.1007/978-3-319-28472-9_8.
11. **A. M. Andrews** and **H. Wang,** Minimizing the aggregate movements for interval coverage, *Algorithmica* **78** (1), 47–85 (2017), DOI: 10.1007/s00453-016-0153-8.

12. **W. P. Coutinho, M. Battarra,** and **J. Fliege,** The unmanned aerial vehicle routing and trajectory optimisation problem, a taxonomic review, *Comput. Ind. Eng.* **120**, 116–128 (2018), DOI: 10.1016/j.cie.2018.04.037.
13. **J. F. Campbell, A. Corberan, I. Plana,** and **J. M. Sanchis,** Drone arc routing problems, *Networks* **72** (4), 543–559 (2018), DOI: 10.1002/net.21858.
14. **A. G. H. Kek, R. L. Cheu,** and **Q. Meng,** Distance-constrained capacitated vehicle routing problems with flexible assignment of start and end depots, *Math. Comput. Model.* **47**, 140–152 (2008), DOI: 10.1016/j.mcm.2007.02.007.
15. **A. I. Erzin** and **R. V. Plotnikov,** Distance-constrained line routing problem, in *Optimization and Applications* (Rev. Sel. Pap. 10th Int. Conf., Petrovac, Montenegro, Sep. 30 – Oct. 4, 2019) (Springer, Cham, 2020), pp. 43–55 (Commun. Comput. Inf. Sci., Vol. 1145), DOI: 10.1007/978-3-030-38603-0_4.
16. **V. L. Beresnev, É. Kh. Gimadi,** and **V. T. Dementyev,** *Extremal Problems of Standardization* (Nauka, Novosibirsk, 1978) [Russian].
17. **R. V. V. Vidal,** Optimal partition of an interval — The discrete version, in *Applied Simulated Annealing,* (Springer, Heidelberg, 1993), pp. 291–312 (Lect. Notes Econ. Math. Syst., Vol. 396), DOI: 10.1007/978-3-642-46787-5_15.
18. **B. Jackson, J. D. Scargle, D. Barnes,** [et al.], An algorithm for optimal partitioning of data on an interval, *IEEE Signal Proces. Lett.* **12** (2), 105–108 (2005), DOI: 10.1109/LSP.2001.838216.
19. **P. Tilli** and **D. Zucco,** Optimal partitioning of an interval and applications to Sturm–Liouville eigenvalues, *J. Differ. Equ.* **268** (8), 4900–4919 (2019), DOI: 10.1016/j.jde.2019.12.026.

Adil I. Erzin

Received December 17, 2025
Revised January 15, 2026
Accepted January 22, 2026

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2026. Т. 33, № 1. С. 71–90

УДК 519.8 DOI: 10.33048/daio.2026.33.842

МАТЭВРИСТИКА НА ОСНОВЕ ЛОКАЛЬНОГО ПОИСКА ДЛЯ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ОБОБЩЁННОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ

Ю. В. Захарова[1, a], *Л. А. Заозёрская*[1, 2, b]

[1] Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева,
ул. Певцова, 13, 644099 Омск, Россия

[2] Омский гос. технический университет,
пр. Мира, 11, 644050 Омск, Россия

E-mail: [a] yzakharova@ofim.oscsbras.ru, [b] zaozer@ofim.oscsbras.ru

Аннотация. Рассматривается новая модификация обобщённой задачи о назначениях с ограничениями на объёмы и типы работ. Заданное множество работ необходимо распределить между агентами (исполнителями). Каждая работа имеет объём и тип. Для каждого агента заданы ограничения на количество типов назначенных работ, общий объём назначенных работ, а также эффективность выполнения работ. Требуется максимизировать суммарную эффективность назначения при заданных ограничениях на загрузку. Исследуется вычислительная сложность задачи. Предлагается алгоритм локального поиска с окрестностями произвольного размера, где учитываются известные подходы к решению обобщённой задачи о назначениях и дополнительные условия рассматриваемой задачи. Окрестности строятся путём частичного фиксирования значений переменных, соответствующих назначению работ. Для решения соответствующих подзадач используются точные алгоритмы из известных пакетов решения задач математического программирования. Экспериментальные результаты показывают, что предложенный алгоритм демонстрирует конкурентоспособные результаты по качеству получаемых решений в сравнении с гибридными алгоритмами на основе методов ветвей и отсечений из известных пакетов Gurobi и SCIP при заданном ограничении времени счёта на серии тестовых примеров с различными структурными свойствами. Табл. 7, библиогр. 29.

Ключевые слова: назначение, цветовой класс, сложность, матэвристика.

© Ю. В. Захарова, Л. А. Заозёрская, 2026

Введение

Обобщённая задача о назначениях является известной NP-трудной задачей дискретной оптимизации. В этой задаче каждый агент (станок, рабочий, процессор) может быть назначен на несколько работ (задач, заказов) в отличие от классической задачи о назначениях, где назначение формируется один к одному. Каждая работа выполняется ровно одним агентом. Назначения ограничены ресурсом агентов (время, бюджет, мощность). Требуется минимизировать суммарную стоимость (или максимизировать прибыль) назначений. Задача имеет широкий спектр приложений [1–3]: планирование производственных расписаний, распределение процессов в компьютерных сетях, размещение объектов, управление грузоперевозками, формирование портфелей проектов, распределение заявок по экспертам, распределение учебной загрузки.

Известны различные модификации обобщённой задачи о назначениях [1, 2]: задача о назначениях с несколькими ресурсами, многоуровневая обобщённая задача о назначениях, динамическая обобщённая задача о назначениях, обобщённая задача о назначениях с многократными назначениями и обобщённая задача о назначениях с «узким местом». Исследуются многокритериальные постановки с соответствующими подходами к решению [4]. Рассматривается также максимизационный вариант обобщённой задачи о назначениях, в котором ищется подмножество заданных работ [5]. Важным частным случаем такой постановки является задача о нескольких рюкзаках, в которой затраты ресурса и прибыль от выполнения любой работы не зависят от выбора агента [6].

Известны задача о нескольких рюкзаках и задача об упаковке в контейнеры с цветовыми классами [6, 7]. В них работы имеют «цветовые» характеристики, которые необходимо учитывать при распределении.

В настоящей работе рассматривается модификация обобщённой задачи о назначениях с дополнительными ограничениями на загрузку агентов и цветовыми условиями (классами). Каждая работа дополнительно имеет тип (или цвет). Для каждого агента задано максимально допустимое количество типов назначенных работ. Искомое распределение агентов по работам также должно обеспечивать заданную минимальную загрузку агентов. Такая постановка задачи возникает при решении двукритериальных задач распределения учебной загрузки [3] или управления поставками с дискретными размерами партий [8]. Предыдущие исследования данной задачи, посвящённые анализу моделей целочисленного программирования и структуры множества допустимых решений, представлены на конференциях [3, 8].

В данной статье для обобщённой задачи о назначениях с цветовыми классами предлагается математическая эвристика (матэвристика).

К матэвристикам относятся эвристические методы, основанные на решении серии задач математического программирования (МП) пониженной размерности и их упрощённых версий [9, 10]. В большинстве случаев такие алгоритмы начинают свою работу с допустимого или частичного решения, найденного для упрощённой версии задачи, и итеративно пытаются улучшить результат за счёт локальных изменений. Приведём некоторые типичные варианты матэвристик, предложенных для решения задачи МП в общем виде [9].

Основная идея алгоритма из [11] заключается в поиске хороших допустимых решений, расположенных вблизи ЛП-релаксации, т. е. оптимального решения соответствующей задачи линейного программирования (ЛП). В [12] алгоритмы локального поиска с большими окрестностями начинают работу с решения упрощённой версии задачи как линейного, так и нелинейного программирования с различными ограничениями, а затем переходят к поиску улучшающих шагов на основе решения задач пониженной размерности. В [13] предложен гибридный эвристический алгоритм, сочетающий процедуры поиска допустимых целочисленных направлений и методы линейной оптимизации.

В [14] разработан алгоритм локального поиска для решения задач целочисленного линейного программирования (ЦЛП) на основе окрестностей двух типов: окрестности, использующей информацию из непрерывной релаксации ЦЛП-модели, и управляемые спуски/подъёмы. В работе [15] предполагается использование универсального пакета для решения задач ЦЛП в качестве чёрного ящика для исследования подпространств решений, которые определяются и контролируются с помощью простой внешней схемы ветвления.

Для NP-трудных модификаций задачи о назначениях известен ряд подходов к приближённому и точному решению на основе ЦЛП и метаэвристик. Среди метаэвристик можно выделить генетические алгоритмы, алгоритмы поиска с запретами, имитацию отжига [1, 16].

Для обобщённой задачи о назначениях известны эвристические алгоритмы на основе различных типов пошаговой релаксации [17], декомпозиционные эвристики на базе лагранжевой релаксации [18]. Предложены эвристика локального поиска с переменной глубиной окрестности [19], алгоритм поиска с запретами [20] и гибридный эволюционный алгоритм с проблемно-ориентированными эвристиками и новыми операторами [21].

В [22] предложенная для классической обобщённой задачи о назначениях ЛП-ориентированная эвристика [23] с отсечениями и локальными улучшениями адаптируется к решению обобщённой задачи о назначениях со специальными упорядоченными множествами.

Для задачи об упаковке в контейнеры с цветовыми ограничениями предложены эвристика на основе метода генерации столбцов, гибридный алгоритм локального поиска с чередующимися окрестностями и точный метод на основе ветвлений [7]. Для обобщённой задачи о назначениях [24] разработана эвристика на основе метода генерации столбцов и алгоритма построения верхних оценок на целевую функцию, как и для задачи о рюкзаке с цветовыми классами [25].

В разд. 1 данной статьи приводится постановка задачи, а в разд. 2 — исследуется её сложность. Матэвристика описывается и анализируется в разд. 3. Результаты эксперимента представлены в разд. 4.

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую модификацию задачи о назначениях, которая имеет приложения в образовании при распределении загрузки между преподавателями и в производстве при распределении задач между сотрудниками подразделений.

Множество работ $J = \{j_1, \ldots, j_n\}$ необходимо распределить между агентами (исполнителями) из множества $I = \{i_1, \ldots, i_m\}$. Эффективность назначения работы j агенту i равна c_{ij}, $i \in I$, $j \in J$. Объём работы $j \in J$ равен a_j, а суммарный объём загрузки для агента $i \in I$ должен лежать на отрезке $[d_i, b_i]$.

Кроме того, работы делятся на типы, множество которых обозначается через $K = \{k_1, \ldots, k_l\}$. Максимальное число типов работ, которые могут быть назначены агенту i, равно T_i, $i \in I$, при этом подмножество $J_k \subset J$ задаёт множество работ типа $k \in K$. Требуется составить такое допустимое назначение работ агентам, при котором максимизируется суммарная эффективность.

Построим для рассматриваемой задачи модель булева программирования (БП). Введём булевы переменные

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если работа } j \text{ назначена агенту } i, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если агент } i \text{ выполняет работы типа } k, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$. Пусть $X = (x_{ij})$ — матрица размера $m \times n$. С помощью указанных переменных модель записывается следующим образом:

$$f(X) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \to \max, \tag{1}$$

$$d_i \leqslant \sum_{j \in J} a_j x_{ij} \leqslant b_i, \quad i \in I, \tag{2}$$

$$\sum_{i\in I} x_{ij} = 1, \quad j \in J, \tag{3}$$

$$\sum_{j\in J_k} x_{ij} \leqslant |J_k| y_{ik}, \quad i \in I,\ k \in K, \tag{4}$$

$$\sum_{k\in K} y_{ik} \leqslant T_i, \quad i \in I, \tag{5}$$

$$x_{ij}, y_{ik} \in \{0, 1\}, \quad i \in I,\ j \in J,\ k \in K. \tag{6}$$

Ограничения (2) задают верхнюю и нижнюю границы на объём загрузки каждого агента. Условие (3) показывает, что каждая работа будет назначена ровно одному агенту. Ограничения (4), (5) устанавливают верхнюю границу на число типов работ для каждого агента.

Задача (1)–(3) с условием булевости переменных x_{ij} из (6) есть вариант известной обобщённой задачи о назначениях [1]. Заметим, что в обобщённой задаче о назначениях b_i часто интерпретируют как объём ресурса у агента i, а a_j как объём ресурса, необходимого для выполнения агентом i работы j, и в общем случае для каждой работы он может иметь неодинаковые значения для разных агентов. Таким образом, задачу (1)–(6) можно рассматривать как обобщённую задачу о назначениях с цветовыми классами [6, 7] и нижними границами на загрузку агентов.

Для обобщённой задачи о назначениях доказано [23], что в ЛП-релаксации число работ, разделённых между двумя и более агентами, не превышает m. Ранее в [26] этот результат был получен для варианта обобщённой задачи о назначениях, в котором расход ресурсов для выполнения работ не зависит от выбора агента, т. е. задачи (1)–(3), (6) при $d_i = 0$, $i \in I$. Для доказательства используется переход к эквивалентной транспортной задаче. Отсюда легко получается, что число дробных компонент ЛП-релаксации не превышает $2m$, что свидетельствует о применимости методов, основанных на поиске в окрестности оптимального решения линейной релаксации, особенно при $n \gg m$. Результаты эксперимента показали, что для задачи (1)–(6) указанные свойства не нарушаются в рассматриваемых сериях примеров (см. разд. 4).

2. Вычислительная сложность

Теорема 1. *Поиск допустимого решения в задаче* (1)–(3), (6) *является* NP*-трудной в обычном смысле задачей даже в случае двух агентов.*

Доказательство. Чтобы показать справедливость утверждения теоремы, построим полиномиальное сведéние задачи Разбиение [27] к задаче поиска допустимого решения, указанной в условии.

Задача Разбиение. *Даны конечное множество* $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_{n_0}\}$ *и размер* $e(s) \in \mathbb{Z}_+$ *каждого элемента* $s \in S$. *Существует ли такое подмножество* $S' \subset S$, *что* $\sum\limits_{s \in S'} e(S) = \sum\limits_{s \in S \setminus S'} e(s)$?

Имеем конечное множество S, $|S| = n_0$, и веса $e(s)$ задачи Разбиение. Построим соответствующий пример задачи (2), (3), (6). Пусть имеются два агента и n_0 работ, которые соответствуют элементам множества S задачи Разбиение. Объём a_j работы j равен $e(s_j)$, $j = 1, \ldots, n_0$. Ограничения по объёму для агента $i = 1$ равны $d_i = b_i = \frac{\sum\limits_{s \in S} e(s)}{2}$, $i = 1, 2$.

В таком случае множество S имеет разбиение на два подмножества S' и $S \setminus S'$ в задаче Разбиение тогда и только тогда, когда каждому агенту можно назначить подмножество работ объёма $\frac{\sum\limits_{s \in S} e(s)}{2}$ в задаче (2), (3), (6). Сводимость строится за полиномиальное время. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Поиск допустимого решения в задаче* (1)–(3), (6) *является* NP*-трудной в сильном смысле задачей в случае произвольного числа агентов.*

Доказательство. Достаточно построить полиномиальное сведéние задачи 3-Разбиение [27] к задаче поиска допустимого решения, указанной в условии теоремы.

Задача 3-Разбиение. *Даны множество* $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_{3n_0}\}$, *содержащее* $3n_0$ *элементов, граница* $E \in \mathbb{Z}_+$ *и размер* $e(s) \in \mathbb{Z}_+$ *каждого элемента* $s \in S$ *такие, что* $\frac{E}{4} < e(s) < \frac{E}{2}$ *и* $\sum\limits_{s \in S} e(s) = n_0 E$. *Можно ли множество* S *разбить на* n_0 *попарно не пересекающихся трёхэлементных подмножеств* $S_1, S_2, \ldots, S_{n_0}$ *так, что* $\sum\limits_{s \in S_i} e(s) = E$ *для любого* $i = 1, \ldots, n_0$?

Построим соответствующий пример задачи (2), (3), (6) следующим образом. Элементы множества S задачи 3-Разбиение соответствуют работам (2), (3), (6). Число агентов равно n_0, для каждого из которых ограничения по объёму равны $d_i = b_i = E$, $i = 1, \ldots, n_0$. Веса $e(s_j)$ задачи 3-Разбиение соответствуют объёмам работ a_j, $j = 1, 2, \ldots, n_0$.

В таком случае множество S может быть разбито на n_0 подмножеств $S_1, S_2, \ldots, S_{n_0}$ в задаче 3-Разбиение тогда и только тогда, когда каждому агенту можно назначить подмножество работ объёма E в задаче (2), (3), (6). Сводимость строится за полиномиальное время. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Задача* (1), (3)–(5), (6) *полиномиально разрешима.*

Доказательство. В указанном варианте задачи учитываются только ограничения на число типов без условий на объём. Зададим новое

множество агентов, где для каждого исходного агента i создадим T_i его копий с одинаковой эффективностью c_{ij}, $j \in J$. Если в итоге число агентов будет меньше числа работ, то добавим фиктивных агентов с нулевой эффективностью назначения. Аналогично поступим, если число агентов будет больше числа работ. В результате получим классическую задачу о назначениях, которая полиномиально разрешима [28]. Теорема 3 доказана.

Открытым остаётся вопрос об NP-трудности в сильном смысле рассматриваемой задачи в случае ограниченного константой числа агентов. Возможно, доказательство удастся построить на основе ограничений как по объёму загрузки, так и по числу типов работ.

3. Матэвристика на основе локального поиска

Для решения рассматриваемой задачи предлагается математическая эвристика, в которой на каждой итерации строится задача БП вида (1)–(6) меньшей размерности за счёт фиксирования части переменных. Полученные задачи решаются универсальными пакетами решения задач МП в течение заданного времени. Матэвристика состоит из двух этапов. На первом этапе начальное допустимое решение ищется случайным поиском вблизи допустимого (или оптимального) решения релаксационной задачи для исходной задачи БП. При получении допустимого решения на втором этапе улучшающее решение ищется вблизи допустимого решения с наибольшим значением целевой функции. К найденным допустимым решениям применяется процедура локального поиска.

Релаксацию задачи (1)–(6) определим, заменив условие булевости переменных x_{ij} условием

$$0 \leqslant x_{ij} \leqslant 1, \quad i \in I,\ j \in J. \tag{7}$$

Если условие булевости y_{ik} заменить условием

$$0 \leqslant y_{ik} \leqslant 1, \quad i \in I,\ k \in K,$$

то получим релаксационную задачу ЛП.

Для описания алгоритма введём следующие обозначения:

- h — номер итерации алгоритма;
- H — число итераций случайного поиска вблизи допустимого решения релаксации (1)–(6);
- X_{best} — допустимое решение задачи (1)–(6) с наибольшим значением целевой функции f;
- f_{best} — значение целевой функции решения X_{best};
- $\widetilde{X}$ — вектор, определяющий текущую стартовую точку для поиска.

Алгоритм $\mathbf{MH_{LS}}$

Этап 1. Построение начального решения.

Шаг 1. Решение релаксационной задачи.

Шаг 1.1. Решить задачу (1)–(5), (7), используя пакет МП в течение времени t_0.

Шаг 1.2. Если допустимое решение X_{MIP} найдено, то $\widetilde{X} := X_{\text{MIP}}$, иначе $\widetilde{X} := X_{\text{LP}}$, где X_{LP} — оптимальное или допустимое решение ЛП-релаксации (1)–(6), полученное пакетом МП за время t_0.

Шаг 1.3. Положить $\mathcal{P} = \{(i,j) \mid \widetilde{x}_{ij} = 1\}$, $X_{\text{best}} := \widetilde{X}$, $f_{\text{best}} = 0$, $h = 1$.

Шаг 2. Случайный поиск. Пока $h \leqslant H$ или $f_{\text{best}} = 0$ выполнять

Шаг 2.1. С вероятностью p_{rand} выполнять

- выбрать работу j_{rand} случайным образом с равномерным распределением и назначить её случайно выбранному агенту i_{rand};
- обновить множество $\mathcal{P}$.

Шаг 2.2. В задаче (1)–(6) положить $x_{ij} = 1$ с вероятностью p для пар индексов $(i,j) \in \mathcal{P}$ и решать полученную задачу в течение указанного времени t_1, используя пакет МП.

Шаг 2.3. Если получено допустимое решение X и $f(X) > f_{\text{best}}$, то обновить X_{best} и f_{best}.

Шаг 2.4. Положить $h := h + 1$ и перейти на Шаг 2.1.

Шаг 3. Положить $\widetilde{X} := X_{\text{best}}$ и обновить $\mathcal{P}$.

Этап 2. Локальное улучшение.

Выполнять, пока не сработает критерий остановки:

Шаг 4. Построение и решение редуцированной задачи.

Шаг 4.1. С вероятностью p_{rand} выполнять

- выбрать работу j_{rand} случайным образом с равномерным распределением и назначить её случайно выбранному агенту i_{rand};
- обновить множество $\mathcal{P}$.

Шаг 4.2. В задаче (1)–(6) с дополнительным условием $f(X) \geqslant f_{\text{best}} + 1$ положить $x_{ij} = 1$ с вероятностью p для $(i,j) \in \mathcal{P}$ и решать полученную задачу пакетом МП в течение заданного времени t_1.

Шаг 4.3. Если допустимое решение получено, то

- обновить X_{best} и f_{best};
- к X_{best} применить локальный поиск с вероятностью p_{LS};
- положить $\widetilde{X} := X_{\text{best}}$ и обновить множество $\mathcal{P}$.

Шаг 4.4. Перейти на Шаг 4.1.

Опишем процедуру локального поиска для решения X_{best}.

Пока значение целевой функции увеличивается, выполнять для всех пар агентов:

• для каждой пары агентов, применяя пакет МП, найти оптимальное перераспределение назначенных им работ;

• если переназначение улучшает текущее лучшее решение X_{best}, то обновить это решение.

Теорема 4. *Алгоритм* MH_{LS} *сходится к оптимуму почти наверное при числе итераций, стремящемся к бесконечности.*

Доказательство. Для сходимости почти наверное главным образом служит оператор шага 2.1 и шага 3.1 случайного поиска, который с ненулевой вероятностью назначает случайно выбранную работу случайно выбранному агенту на итерациях. Действительно, за счёт указанного оператора можно за n итераций с ненулевой вероятностью назначить работы агентам в соответствии с оптимальным решением. Назначения каждой итерации согласно множеству $\mathcal{P}$ сохраняются с вероятностью не менее $p^{|\mathcal{P}|}$ на этапах 2 и 3. Отметим, что локальный поиск не применяется на шаге 3.2 с вероятностью $1-p_{LS}$. Далее сходимость почти наверное при числе итераций, стремящемся к бесконечности, следует из результатов, аналогичных теореме 2.1 в [29]. Теорема 4 доказана.

4. Вычислительный эксперимент

Предложенная матэвристика была протестирована на сериях примеров задачи (1)–(6) со случайно сгенерированными исходными данными и сериях примеров обобщённой задачи о назначениях из библиотеки OR-library.

Опишем правила генерации тестовых примеров. Напомним, что ограничение по объёму загрузки агентов имеет вид

$$d_i \leqslant \sum_{j\in J} a_j x_{ij} \leqslant b_i, \quad i \in I.$$

Обозначим через Δ отклонение суммарного объёма работ от суммы нижних границ загрузки агентов, т. е.

$$\Delta = \frac{\sum\limits_{j\in J} a_j - \sum\limits_{i\in I} d_i}{\sum\limits_{i\in I} d_i} 100.$$

Построено три серии по десять примеров со случайными данными и следующими значениями диапазонов для отклонения Δ:

• серия L, где Δ от 2 до 5,2%,

• серия M, где Δ от 1 до 2%,

• серия H, где Δ до 1%.

Для всех задач число агентов равно $|I| = 22$, число типов работ — $|K| = 45$. Число работ каждого типа $|J_k|$ генерировалось с равномерным распределением из множества $\{1, \ldots, 9\}$, в результате число работ $|J| \in \{208, \ldots, 253\}$. Размерности задач БП после предобработки Gurobi по паре (число переменных × число ограничений) варьируются от 5434×1132, 5469×1091 до 6314×1235 и существенно не отличаются по сериям (табл. 1).

Таблица 1

Размерность задач БП

Серия	Число переменных × число ограничений		
	средняя	минимальная	максимальная
L	5794×1156	5434×1132	6314×1235
M	5958×1191	5676×1143	6182×1271
H	5812×1148	5469×1091	5962×1198
	5812×1148	5469×1091	6028×1138

Значения остальных параметров генерируются также с равномерным распределением из следующих диапазонов: $b_i \in [300, 1400]$, $a_j \in [40, 120]$, $c_{ij} \in [1, 10]$. Значения d_i и T_i вычисляются по формулам

$$d_i = [0{,}95 b_i], \quad T_i = \left[\frac{6 b_i}{b_{\max}} + 0{,}5\right], \quad b_{\max} = \max_{i \in I} b_i.$$

В серии включены только те задачи, для которых выполняется необходимое условие разрешимости

$$\sum_{i \in I} d_i \leqslant \sum_{j \in J} a_j \leqslant \sum_{i \in I} b_i.$$

Эксперимент проводился на компьютере с процессором AMD EPYC 7502 CPU. Использовались пакеты МП Gurobi, SCIP и среда разработки GAMS 23.2. Алгоритм MH_{LS} запускался на каждой задаче 30 раз с критерием остановки в виде ограничения на время счёта 1000 секунд, значениями параметров $p = 0{,}7$, $H = 10$, $p_{\text{rand}} = 0{,}000001$, $p_{LS} = 0{,}999999$.

Проводился предварительный вычислительный эксперимент по сравнению результатов для разного числа потоков (4, 8, 10, 12 потоков) при точном решении сгенерированных примеров пакетом Gurobi, а также при решении матэвристикой MH_{LS}. Результаты показали, что с ростом числа потоков результаты MH_{LS} несколько улучшались, но статистически значимых отличий в результатах эксперимента (использовался тест Вилкоксона) не установлено. При точном решении примеров из всех серий пакет Gurobi, т. е. метод на основе ветвлений и отсечений различного

типа, завершал работу через 7–19 часов ввиду нехватки памяти. В итоге число потоков было установлено равным 12, как при точном решении задач, так и с помощью матэвристики. Отметим, что узким местом тестовых примеров являются нижние границы и условия на число типов работ, без которых задачи решаются за приемлемое время без остановки из-за ограничений по памяти.

В таблицах с результатами экспериментов используются следующие обозначения:

- N_{sr} — число запусков, на которых получено допустимое решение матэвристикой,
- $f_a, f_{\min}, f_{\max}$ — среднее, минимальное, максимальное значения целевой функции f, найденные матэвристикой;
- f_G — лучшее значение целевой функции f, найденное Gurobi,
- f_{1000} — значение целевой функции f, найденное Gurobi за 1000 с,
- UB — верхняя граница на целевую функцию, найденная пакетом МП,
- $\delta_B^A = \frac{f_B - f_A}{f_B} \cdot 100$ — отклонение величины f_A от f_B (%).

На лёгкой серии L (табл. 2) относительное отклонение результата MH_{LS} от результата Gurobi f_G составило в среднем 1,18%, а от верхней границы UB — не более 2,4%. При равном времени счёта MH_{LS} показывает несколько лучшие результаты, чем Gurobi, в среднем превосходство составляет 0,1%. Число успешных запусков для всех задач равно 30.

На средней по сложности серии M (табл. 3) среднее относительное отклонение результата MH_{LS} от результата Gurobi схоже с серией L,

Таблица 2

Сравнение рельтатов Gurobi и MH_{LS} на серии L

№	Gurobi			MH_{LS}			Отклонение, %		
	f_{1000}	f_G	UB	f_a	$f_{\min}$	$f_{\max}$	δ^a_{1000}	δ^a_G	δ^a_{UB}
1	1913	1961	1969	1938,7	1922	1947	−1,35	1,14	1,54
2	1914	1928	1937	1911,4	1894	1927	0,13	0,86	1,32
3	1913	1954	1961	1914,6	1897	1930	−0,08	2,02	2,37
4	1939	1947	1959	1915,4	1901	1933	1,22	1,62	2,22
5	1872	1890	1902	1856,3	1842	1871	0,84	1,78	2,40
6	2070	2113	2127	2092,1	2076	2103	−1,07	0,99	1,64
7	2025	2054	2077	2040,4	2025	2052	−0,76	0,66	1,76
8	2085	2106	2117	2094,4	2083	2101	−0,45	0,55	1,07
9	2076	2077	2093	2052,9	2043	2067	1,11	1,16	1,92
10	2185	2221	2249	2198,7	2184	2210	−0,63	1,00	2,24
ср.	1999,2	2025,1	2039,1	2001,5	1986,7	2014,1	−0,1	1,18	1,85

Таблица 3

Сравнение рельтатов Gurobi и $\mathrm{MH_{LS}}$ на серии M

№	Gurobi			$\mathrm{MH_{LS}}$			Отклонение, %		
	f_{1000}	f_G	UB	f_a	$f_{\min}$	$f_{\max}$	δ^a_{1000}	δ^a_G	δ^a_{UB}
1	—	2018	2057	2006,5	1982	2024	—	0,57	2,45
2	—	2006	2043	1999,9	1990	2009	—	0,30	2,11
3	2246	2256	2279	2216,9	2154	2239	1,29	1,73	2,72
4	1924	1953	1980	1923,3	1903	1936	0,04	1,52	2,87
5	2163	2175	2187	2148,7	2134	2162	0,66	1,21	1,75
6	2099	2126	2131	2086,3	2043	2103	0,61	1,87	2,10
7	2036	2057	2074	2041,0	2031	2053	−0,25	0,77	1,59
8	1972	1991	2007	1977,4	1962	1989	−0,27	0,68	1,47
9	2088	2100	2113	2071,6	2062	2080	0,79	1,35	1,96
10	2181	2196	2207	2161,2	2142	2175	0,91	1,58	2,08
ср.	2088,6	2087,8	2107,8	2063,3	2040,3	2077	0,47	1,16	2,11

а отклонение от верхней границы — не более 2,9%. При равном времени счёта $\mathrm{MH_{LS}}$ уступает Gurobi в среднем на 0,47%. Число успешных запусков для задачи 3 равно 29, для остальных задач равно 30.

На сложной серии H (табл. 4) алгоритмом $\mathrm{MH_{LS}}$ найдено допустимое решение для каждой задачи в отличие от Gurobi (при ограничении времени счёта в 1000 с Gurobi найдено допустимое решение только для двух задач). Для трудного примера (номер 2) алгоритмом $\mathrm{MH_{LS}}$ допустимое решение найдено в 12 запусках из 30, для примеров 1 — в 14 запусках, в примерах 3 и 4 — в 19 запусках, для остальных примеров все

Таблица 4

Сравнение рельтатов Gurobi и $\mathrm{MH_{LS}}$ на серии H

№	Gurobi			$\mathrm{MH_{LS}}$			Отклонение, %		
	f_{1000}	f_G	UB	f_a	$f_{\min}$	$f_{\max}$	δ^a_{1000}	δ^a_G	δ^a_{UB}
1	—	—	2089	1987,0	1972	2009	—	—	4,88
2	—	—	2110	1994,4	1967	2013	—	—	5,48
3	—	—	2030	1939,2	1891	1963	—	—	4,47
4	—	—	2021	1930,6	1892	1947	—	—	4,47
5	—	2084	2119	2050,2	2019	2074	—	1,62	3,25
6	—	2006	2060	2012,7	1993	2025	—	−0,33	2,30
7	1960	2026	2069	1984,4	1947	2011	−1,25	2,05	4,09
8	2038	2054	2083	2027,6	2006	2040	0,51	1,29	2,66
9	—	1869	1916	1849,2	1812	1867	—	1,06	3,49
10	—	2137	2166	2104,1	2082	2126	—	1,54	2,86
ср.	1999	2029,3	2066,3	1987,9	1958,1	2007,5	−0,37	1,20	3,79

запуски были успешными, а в среднем по всей серии — в 24,4 запусках из 30. Среднее относительное отклонение результата MH_{LS} от результата Gurobi составило в среднем 1,2%, а отклонение от верхней границы — не более 5,5%.

Таблица 5

Сравнение алгоритмов MH_{RS} и MH_{LS}

Серия	Среднее значение f		Отклонение, %
	MH_{RS}	MH_{LS}	
L	2003,21	2001,50	0,086
M	2066,63	2063,29	0,161
H	1978,78	1987,94	−0,463

Алгоритм MH_{LS} также сравнивался с версией алгоритма, обозначаемой далее через MH_{RS}, где вторая стадия не задействуется (см. табл. 5, где представлены средние значения рекордов по сериям и средние относительные отклонения рекордов MH_{RS} от рекордов MH_{LS}). На сериях L и M алгоритмы показали похожие результаты (результаты теста Вилкоксона показали наличие статистически значимых отличий при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ на четырёх примерах серии L и пяти примерах серии M), а на серии H несколько лучшие результаты показал MH_{LS} (статистически значимые отличия выявлены на двух примерах), что свидетельствует о целесообразности применения рандомизированного поиска и перспективности использования локального поиска при малых отличиях между суммарным объёмом работ и суммы нижних границ на загрузку агентов.

Таблица 6

Оценка разрыва двойственности в среднем по сериям

Серия	f_{LP}	record	gap_{rec}, %	gap_a, %	gap_{min}, %	gap_{max}, %
L	2216,41	2025,10	8,63	9,71	10,38	9,14
M	2280,82	2088,70	8,42	9,53	10,52	8,93
H	2228,74	2014,40	9,62	10,80	12,15	9,92

В табл. 6 представлена оценка разрыва двойственности по сериям. Здесь f_{LP} — оптимальное решение линейной релаксации в среднем по серии, record — наибольшее значение f, среди найденных Gurobi или алгоритмами MH_{LS} и MH_{RS}, gap_{rec}, gap_a, gap_{min}, gap_{max} — отклонения лучшего известного, среднего, минимального, максимального решений соответственно, найденных алгоритмом MH_{LS}, от оптимального решения линейной релаксации.

Величина $\mathrm{gap_x}$, $\mathrm{x} \in \{a, \min, \max\}$, показывает отклонение финальных решений, найденных алгоритмами, от решений линейной релаксации. Полученные значения для $\mathrm{gap_x}$ свидетельствуют о сложности рассматриваемых тестовых примеров ввиду удалённости по целевой функции найденных решений от оптимума линейной релаксации. Это показывает потенциал для алгоритмов на рассматриваемых сериях тестовых примеров различной структуры.

Был проведён вычислительный эксперимент, где для решения подзадач частично целочисленного линейного программирования в $\mathrm{MH_{LS}}$ используется свободно распространяемый пакет SCIP вместо коммерческого пакета Gurobi. Результаты представлены в табл. 7. Здесь f_{best} — значение f, найденное пакетом МП. Как можно видеть, при использовании SCIP результаты алгоритма статистически значительно ухудшаются, но сохраняются на хорошем уровне (в среднем отклонение от f_{best} составляет не более 2,3% при использовании SCIP и не более 1,2% при использовании Gurobi). Результаты при использовании SCIP в матэвристике согласуются с тем, что бесплатные ресурсы, как правило, демонстрируют конкурентоспособные результаты при решении тестовых задач малой размерности, которые как раз и возникают в предлагаемом алгоритме.

Отметим, что итерации алгоритма $\mathrm{MH_{LS}}$ основаны на фиксации части значений x-переменных. Была также исследована версия алгоритма, где осуществлялась фиксация y-переменных, но она показала статистически значимо худшие результаты.

Таблица 7

Сравнение версий $\mathrm{MH_{LS}}$ при использовании пакетов SCIP и Gurobi

Пакет МП	N_{sr}	Отклонение, %				
		δ^a_{1000}	δ^a_{best}	$\delta^{\min}_{\mathrm{best}}$	$\delta^{\max}_{\mathrm{best}}$	δ^a_{UB}
Серия L						
Gurobi	30	−0,10	1,18	1,91	0,55	1,85
SCIP	39	0,68	1,95	3,10	1,19	2,62
Серия M						
Gurobi	29,90	0,47	1,16	2,24	0,51	2,11
SCIP	29,78	0,79	1,69	3,15	0,80	2,64
Серия H						
Gurobi	24,40	−0,37	1,20	2,60	0,26	3,79
SCIP	19,40	2,23	2,28	3,85	1,07	4,21

Разработанный метод универсален для модификаций задачи о назначениях, где ключевую роль играет назначение работ агентам с различными дополнительными ограничениями. Для его применения достаточно использовать соответствующую модель задачи ЦЛП. Алгоритм $\mathrm{MH}_{\mathrm{LS}}$ был применён для обобщённой задачи о назначениях. Для тестирования использовались примеры библиотеки OR-library из серий C, D, E размерности 20×400, 30×900, 40×400, 40×1600, 60×900, 80×1600. Разрыв двойственности для этих примеров в среднем не превосходит 0,1%. Среднее отклонение f_a от f_G равно 0,082%, а от f_{LP} — 0,178%.

Заключение

В статье представлен анализ вычислительной сложности варианта обобщённой задачи о назначениях с цветовыми классами. Предложена и экспериментально исследована математическая эвристика, учитывающая особенности примеров типа задач о назначениях с дополнительными ограничениями. Используемые правила настройки эвристики привели к конкурентоспособным результатам на задачах различной структуры. Важной опцией алгоритма является возможность использования некоммерческих пакетов решения задач математического программирования ввиду решения подзадач настраиваемой размерности на итерациях.

Для дальнейшей работы представляет интерес адаптивная настройка параметров и исследование популяционных методов поиска. Перспективным направлением также выступает использование параллельных вычислений и масштабируемость решений.

Авторы выражают благодарность Омскому филиалу Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН за возможность проведения экспериментов на суперкомпьютерном кластере Tesla.

Финансирование работы

Исследование выполнено в рамках государственного задания Института математики им. С. Л. Соболева (проект № FWNF–2026–0019). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Литература

1. **Kundakcioglu O. E., Alizamir S.** Generalized assignment problem // Encyclopedia of optimization. Boston, MA: Springer, 2008. P. 1153–1162.
2. **Ross G. T., Soland R. M.** Modeling facility location problems as generalized assignment problems // Manag. Sci. 1977. V. 24. P. 345–357.

3. **Zaozerskaya L.** Analysis of integer programming model of academic load distribution // Mathematical Optimization Theory and Operations Research. Rev. Sel. Pap. 18th Int. Conf. (Yekaterinburg, Russia, July 8–12, 2019). Cham: Springer, 2019. P. 266–279. (Commun. Comput. Inf. Sci.; V. 1090). DOI: 10.1007/978-3-030-33394-2_21.
4. **Zhang C. W., Ong H. L.** An efficient solution to biobjective generalized assignment problem // Adv. Eng. Softw. 2007. V. 38. P. 50–58.
5. **Cohen R., Katzir L., Raz D.** An efficient approximation for the generalized assignment problem // Inform. Process. Lett. 2006. V. 100, No. 4. P. 162–166.
6. **Dawande M., Kalagnanam J.** The multiple knapsack problem with color constraints. Yorktown Heights, NY: IBM TJ Watson Res. Center, 1998.
7. **Kondakov A., Kochetov Y.** A core heuristic and the branch-and-price method for a bin packing problem with a color constraint // Optimization Problems and Their Applications. Rev. Sel. Pap. 7th Int. Conf. (Omsk, Russia, July 8–14, 2018). Cham: Springer, 2018. P. 309–320. (Commun. Comput. Inf. Sci.; V. 871). DOI: 10.1007/978-3-319-93800-4_25.
8. **Zaozerskaya L. A., Plankova V. A.** Researching and solving a bicriteria supply management problem with the given volumes of batches // J. Phys.: Conf. Ser. 2019. V. 1210. Article ID 012164. 7 p.
9. **Ngoo C. M., Goh S. L., Sze S. N., Sabar N. R., Hijazi M. H. A., Kendall G.** A survey of mat-heuristics for combinatorial optimisation problems: Variants, trends and opportunities // Appl. Soft Comput. 2024. V. 164. Article ID 111947. 17 p.
10. **Заозёрская Л. А., Захарова Ю. В.** Модели и алгоритмы локального поиска для маршрутизации транспортных средств с возвратами и временными окнами // Изв. Иркутск. гос. ун-та. Сер. Математика. 2024. Т. 48. С. 95–110.
11. **Ibaraki T., Ohashi T., Mine H.** A heuristic algorithm for mixed-integer programming problems // Approaches to integer programming. Heidelberg: Springer, 2009. P. 115–136.
12. **Berthold T., Heinz S., Pfetsch M. E., Vigerske S.** Large neighborhood search beyond MIP. ZIB-Report 11-21. Berlin: Konrad-Zuse-Zentrum Inform., 2011. 12 p.
13. **Genova K.** A heuristic algorithm for solving mixed integer problems // Cybern. Inf. Technol. 2011. V. 11, No. 2. P. 3–12.
14. **Danna E., Rothberg E., Pape C. L.** Exploring relaxation induced neighborhoods to improve MIP solutions // Math. Program. 2005. V. 102, No. 1. P. 71–90.
15. **Fischetti M., Lodi A.** Local branching // Math. Program. 2003. V. 98, No. 1. P. 23–47.
16. **Balachandar S. R., Kannan K.** A new heuristic approach for the large-scale generalized assignment problem // Int. J. Math. Comput. Phys. Elect. Comput. Eng. 2009. V. 3. P. 969–974.
17. **Narciso M. G., Lorena L. A. N.** Lagrangian/surrogate relaxation for generalized assignment problems // Eur. J. Oper. Res. 1999. V. 114. P. 165–177.

18. Haddadi S. Lagrangian decomposition based heuristic for the generalized assignment problem // Inf. Syst. Oper. Res. 1999. V. 37, No. 4. P. 392–402.
19. Amini M. M., Racer M. A rigorous computational comparison of alternative solution methods for the generalized assignment problem // Manag. Sci. 1994. V. 40, No. 7. P. 868–890.
20. D7.0az J. A., Fernandez E. A tabu search heuristic for the generalized assignment problem // Eur. J. Oper. Res. 2001. V. 132, No. 1. P. 22–38.
21. Feltl H., Raidl G. R. An improved hybrid genetic algorithm for the generalized assignment problem // Proc. 2004 ACM Symp. Appl. Comput. (Nicosia, Cyprus, Mar. 14–17, 2004). New York: ACM Press, 2004. P. 990–995.
22. French A. P., Wilson J. M. An LP-based heuristic procedure for the generalized assignment problem with special ordered sets // Comput. Oper. Res. 2007. V. 34, No. 8. P. 2359–2369.
23. Trick M. A. A linear relaxation heuristic for the generalized assignment problem // Nav. Res. Logist. 1992. V. 39, No. 2. P. 137–151.
24. Cattrysse D. G., Salomon M., Van Wassenhove L. N. A set partitioning heuristic for the generalized assignment problem // Eur. J. Oper. Res. 1994. V. 72, No. 1. P. 167–174.
25. Forrest J. J. H., Kalagnanam J., Ladanyi L. A column-generation approach to the multiple knapsack problem with color constraints // INFORMS J. Comput. 2006. V. 18, No. 1. P. 129–134.
26. Srinivasan V., Thompson G. L. An algorithm for assigning uses to sources in a special class of transportation problem // Oper. Res. 1973. V. 21, No. 1. P. 284–295.
27. Garey M. R., Johnson D. S. Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. San Francisco, CA: Freeman, 1979. 338 p.
28. Munkres J. Algorithms for the assignment and transportation problems // J. Soc. Ind. Appl. Math. 1957. V. 5, No. 1. P. 32–38.
29. Rudolph G. Finite Markov chain results in evolutionary computation: A tour d'horizon // Fund. Inform. 1998. V. 35, No. 1–4. P. 67–89.

Захарова Юлия Викторовна
Заозёрская Лидия Анатольевна

Статья поступила
15 октября 2025 г.
После доработки —
12 ноября 2025 г.
Принята к публикации
22 декабря 2025 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2026. Vol. 33, No. 1. P. 71–90

UDC 519.8 DOI: 10.33048/daio.2026.33.842

A LOCAL-SEARCH-BASED MATHEURISTIC FOR A MODIFICATION OF THE GENERALIZED ASSIGNMENT PROBLEM

Yu. V. Zakharova [1, a] and *L. A. Zaozerskaya* [1, 2, b]

[1] Omsk Branch of Sobolev Institute of Mathematics,
13 Pevtsov Street, 123456 Omsk, Russia

[2] Omsk State Technical University,
11 Mir Avenue, 644050 Omsk, Russia

E-mail: [a] yzakharova@ofim.oscsbras.ru, [b] zaozer@ofim.oscsbras.ru

Abstract. The paper considers a new modification of the generalized assignment problem with constraints on volumes and types of jobs. A set of jobs must be assigned to a set of agents (performers). Each job has volume and type. For each agent, constraints are defined on the number of assigned job types, the total volume of assigned jobs, and the efficiency of job execution. The objective is to maximize the total assignment efficiency subject to the given loading constraints. The computational complexity is analyzed. We propose a local search algorithm with neighborhoods of variable size which takes into account known approaches for solving the generalized assignment problem and the additional constraints of the considered problem. The neighborhoods are constructed by partially fixing the values of the variables corresponding to the assignment of jobs. Exact algorithms from the well-known mathematical programming problem-solving packages are used to solve the corresponding subproblems. Experimental results show that the proposed algorithm achieves results competitive to the hybrid algorithms based on branch-and-cut methods from Gurobi and SCIP solvers in terms of solution quality under given time limit on a series of test instances with various structural properties. Tab. 7, bibliogr. 29.

Keywords: assignment, color class, complexity, matheuristic.

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **20** (1) (2026).

References

1. **O. E. Kundakcioglu** and **S. Alizamir,** Generalized assignment problem, in *Encyclopedia of Optimization* (Springer, Boston, MA, 2008), pp. 1153–1162.
2. **G. T. Ross** and **R. M. Soland,** Modeling facility location problems as generalized assignment problems, *Manag. Sci.* **24**, 345–357 (1977).
3. **L. Zaozerskaya,** Analysis of integer programming model of academic load distribution, in *Mathematical Optimization Theory and Operations Research*, Rev. Sel. Pap. 18th Int. Conf. (Yekaterinburg, Russia, July 8–12, 2019) (Springer, Cham, 2019), pp. 266–279 (Commun. Comput. Inf. Sci., Vol. 1090), DOI: 10.1007/978-3-030-33394-2_21.
4. **C. W. Zhang** and **H. L. Ong,** An efficient solution to biobjective generalized assignment problem, *Adv. Eng. Softw.* **38**, 50–58 (2007).
5. **R. Cohen, L. Katzir,** and **D. Raz,** An efficient approximation for the generalized assignment problem, *Inform. Process. Lett.* **100** (4), 162–166 (2006).
6. **M. Dawande** and **J. Kalagnanam,** *The Multiple Knapsack Problem with Color Constraints* (IBM TJ Watson Res. Center, Yorktown Heights, NY, 1998).
7. **A. Kondakov** and **Y. Kochetov,** A core heuristic and the branch-and-price method for a bin packing problem with a color constraint, in *Optimization Problems and Their Applications*, Rev. Sel. Pap. 7th Int. Conf. (Omsk, Russia, July 8–14, 2018) (Springer, Cham, 2018), pp. 309–320 (Commun. Comput. Inf. Sci., Vol. 871), DOI: 10.1007/978-3-319-93800-4_25.
8. **L. A. Zaozerskaya** and **V. A. Plankova,** Researching and solving a bicriteria supply management problem with the given volumes of batches, *J. Phys., Conf. Ser.* **1210**, ID 012164 (2019).
9. **C. M. Ngoo, S. L. Goh, S. N. Sze, N. R. Sabar, M. H. A. Hijazi,** and **G. Kendall,** A survey of mat-heuristics for combinatorial optimisation problems: Variants, trends and opportunities, *Appl. Soft Comput.* **164**, ID 111947 (2024).
10. **L. A. Zaozerskaya** and **Yu. V. Zakharova,** Models and local search algorithms for vehicle routing with returns and time windows, *Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat.* **48**, 95–110 (2024).
11. **T. Ibaraki, T. Ohashi,** and **H. Mine,** A heuristic algorithm for mixed-integer programming problems, in *Approaches to Integer Programming* (Springer, Heidelberg, 2009), pp. 115–136.
12. **T. Berthold, S. Heinz, M. E. Pfetsch,** and **S. Vigerske,** Large neighborhood search beyond MIP. *ZIB-Report 11-21* (Konrad-Zuse-Zentrum Inform., Berlin, 2011).
13. **K. Genova,** A heuristic algorithm for solving mixed integer problems, *Cybern. Inf. Technol.* **11** (2), 3–12 (2011).
14. **E. Danna, E. Rothberg,** and **C. L. Pape,** Exploring relaxation induced neighborhoods to improve MIP solutions, *Math. Program.* **102** (1), 71–90 (2005).
15. **M. Fischetti** and **A. Lodi,** Local branching, *Math. Program.* **98** (1), 23–47 (2003).

16. S. R. Balachandar and **K. Kannan,** A new heuristic approach for the large-scale generalized assignment problem, *Int. J. Math. Comput. Phys. Elect. Comput. Eng.* **3**, 969–974 (2009).
17. M. G. Narciso and **L. A. N. Lorena,** Lagrangian/surrogate relaxation for generalized assignment problems, *Eur. J. Oper. Res.* **114**, 165–177 (1999).
18. S. Haddadi, Lagrangian decomposition based heuristic for the generalized assignment problem, *Inf. Syst. Oper. Res.* **37** (4), 392–402 (1999).
19. M. M. Amini and **M. Racer,** A rigorous computational comparison of alternative solution methods for the generalized assignment problem, *Manag. Sci.* **40** (7), 868–890 (1994).
20. J. A. D7.0az and **E. Fernandez,** A tabu search heuristic for the generalized assignment problem, *Eur. J. Oper. Res.* **132** (1), 22–38 (2001).
21. H. Feltl and **G. R. Raidl,** An improved hybrid genetic algorithm for the generalized assignment problem, in *Proc. 2004 ACM Symp. Appl. Comput.* (Nicosia, Cyprus, Mar. 14–17, 2004) (ACM Press, New York, 2004), pp. 990–995.
22. A. P. French and **J. M. Wilson,** An LP-based heuristic procedure for the generalized assignment problem with special ordered sets, *Comput. Oper. Res.* **34** (8), 2359–2369 (2007).
23. M. A. Trick, A linear relaxation heuristic for the generalized assignment problem, *Nav. Res. Logist.* **39** (2), 137–151 (1992).
24. D. G. Cattrysse, M. Salomon, and **L. N. Van Wassenhove,** A set partitioning heuristic for the generalized assignment problem, *Eur. J. Oper. Res.* **72** (1), 167–174 (1994).
25. J. J. H. Forrest, J. Kalagnanam, and **L. Ladanyi,** A column-generation approach to the multiple knapsack problem with color constraints, *INFORMS J. Comput.* **18** (1), 129–134 (2006).
26. V. Srinivasan, G. L. Thompson, An algorithm for assigning uses to sources in a special class of transportation problem, *Oper. Res.* **21** (1), 284–295 (1973).
27. M. R. Garey and **D. S. Johnson,** *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* (Freeman, San Francisco, CA, 1979).
28. J. Munkres, Algorithms for the assignment and transportation problems, *J. Soc. Ind. Appl. Math.* **5** (1), 32–38 (1957).
29. G. Rudolph, Finite Markov chain results in evolutionary computation: A tour d'horizon, *Fund. Inform.* **35** (1–4), 67–89 (1998).

Yulia V. Zakharova
Lidia A. Zaozerskaya

Received October 15, 2025
Revised November 12, 2025
Accepted December 22, 2025

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2026. Т. 33, № 1. С. 91–113

УДК 519.8+518.25 DOI: 10.33048/daio.2026.33.831

ДОСТАТОЧНОСТЬ В ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ТОПОЛОГИИ СЕТИ

А. Ю. Крылатов [1, 2, a, b]

[1] Санкт-Петербургский гос. университет,
Университетская наб., 7/9, 199034 Санкт-Петербург, Россия
[2] Институт проблем транспорта,
12-я линия, 13, В. О., 199178 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: [a] a.krylatov@spbu.ru, [b] aykrylatov@yandex.ru

Аннотация. Статья посвящена изучению условий достаточности в двухуровневой задаче оптимизации топологии сети. В рассматриваемой постановке задачи менеджер сети инвестирует в пропускные способности маршрутов, стремясь минимизировать общую задержку, возникающую в результате равновесного распределения потоков. Основной массив статей, исследующих соответствующую задачу, посвящён разработке алгоритмов поиска решений на основе необходимых условий оптимальности. В настоящей статье доказывается ряд утверждений, позволяющих проверять множество активных переменных на достаточность при поиске глобального оптимума в задаче оптимизации топологии сети с непересекающимися маршрутами. С практической точки зрения в случае рассматриваемого типа сетей появляется возможность построения множества переменных, достаточного для поиска глобального оптимума посредством работы с переменными только из этого множества. Табл. 3, ил. 2, библиогр. 34.

Ключевые слова: оптимизация топологии сети, минимизация общих затрат, равновесное распределение потоков.

Введение

В общем случае задача оптимизации топологии сети состоит в том, чтобы для заданного множества вершин и соединяющих их рёбер найти такие изменения сети, которые приведут к улучшению её характеристик в некотором заранее определённом смысле [1]. В настоящей работе мы концентрируемся на одной из первых постановок задачи оптимизации топологии сети, формулируемой в виде игры Штакельберга [2].

© А. Ю. Крылатов, 2026

В рамках такой постановки лидер инвестирует в пропускные способности элементов сети, стремясь минимизировать среднее время движения, при условии равновесного распределения потоков на нижнем уровне [3]. Возникновение соответствующей модели связано с тем, что во многих транспортных сетях пользователи ведут себя независимо и конкурентно. Действительно, участники движения в улично-дорожных сетях конкурируют за лучшие маршруты [4], потоки грузов оказывают взаимное влияние на издержки друг друга при движении через единую транспортно-логистическую сеть [5], даже распределение потоков сигналов в беспроводных сетях можно рассматривать как потенциальную игру [6]. Таким образом, поскольку менеджеры сложных сетей зачастую не могут непосредственно влиять на поведение конкурирующих между собой пользователей (единиц потока), им приходится добиваться улучшений в функционировании сети через воздействие на её топологию, в частности, на пропускные способности её элементов [7].

Задача оптимизации топологии сети для транспортного планирования продолжает быть актуальной в силу роста спроса на транспортные сети при ограниченности ресурсов, которые могут быть вложены в их улучшение. Исторически задача формулировалась двумя способами: как дискретная, т. е. позволяющая работать с добавлением новых дуг к существующей сети, и непрерывная, т. е. направленная на поиск оптимальных воздействий на пропускные способности существующих дуг. В любой из двух формулировок целью решения задачи является оптимизация заданной меры эффективности сети, например минимизация общих временных затрат в условиях конкурентного поведения пользователей сети при выборе маршрутов движения [8]. При такой постановке естественным образом возникает двухуровневая задача оптимизации, поскольку решения, принимаемые менеджерами сети в условиях ограниченности ресурсов, влияют на поведение пользователей сети, которое обычно описывается моделью равновесного распределения потоков в виде задачи условной нелинейной оптимизации [9]. В силу своей иерархической структуры задача оптимизации топологии сети была признана исследователями одной из самых сложных, но в то же время наиболее захватывающих задач в области транспортного планирования. Последние 40 лет многие ученые подходили к исследованию задачи и разработке методов её решения с разных сторон [10–13].

Согласно опубликованным работам на сегодняшний момент бóльшая часть исследований в данной области сконцентрированы на непрерывной задаче оптимизации топологии сети. При этом, насколько нам известно, впервые непрерывная задача оптимизации топологии сети была сформулирована в виде задачи двухуровневой оптимизации на рубеже 1960–70-х гг. [14–16]. Как правило, задачи двухуровневой оптимизации

сложны для решения и требуют разработки специальных методов и подходов. Среди первых подходов к решению непрерывной задачи оптимизации топологии сети выделяется подход, основанный на сведении двухуровневой задачи к одноуровневой, что позволяет решать изначальную задачу существующими сходящимися методами. Действительно, задача равновесного распределения потоков нижнего уровня, например, может быть сведена к набору ограничений на переменные величины потоков по маршрутам [17, 18]. В таком случае непрерывная задача оптимизации топологии сети может быть решена методами решения задач условной минимизации [19]. Однако, количество возможных маршрутов движения между каждой парой узлов отправления-прибытия в реальных сетях огромно, а значит, задача построения требуемого набора ограничений на переменные величины потоков по маршрутам сама по себе является трудно реализуемой вычислительной задачей, что делает предложенный подход пригодным только лишь для небольших гипотетических сетей.

Существуют подходы к решению непрерывной задачи оптимизации топологии сети путём сведения её к одноуровневой задаче за счёт представления модели равновесного распределения потоков через вариационные неравенства [20]. Такой подход срабатывает для небольших сетей, но уже для умеренно больших набор ограничений может стать огромным и неразрешимым [21]. Другой подход позволяет представить задачу нижнего уровня одним ограничением, благодаря так называемой маржинальной функции, но к сожалению это единственное ограничение оказывается невыпуклым, что затрудняет поиск глобального оптимума в исходной задаче [22]. Исследователями также представлены подходы сведения задачи оптимизации топологии сети к задаче выпуклого программирования с помощью неявного задания связи между целевыми функциями верхнего и нижнего уровней, но работоспособность алгоритмов для решения полученной задачи продемонстрирована только на очень малых сетях, а оптимум ищется приближённо [23]. Многие исследователи подходили к этой задаче с использованием приближённых представлений реакции нижнего уровня на воздействия верхнего. Наиболее распространённой среди таких представлений является аппроксимация первого порядка, полученная изначально для целей анализа чувствительности равновесного распределения потоков к незначительным изменениям пропускных способностей [24, 25].

Идея аппроксимации реакции нижнего уровня на воздействия верхнего оказалась востребованной, поскольку на её основе можно разрабатывать различные проекционные методы решения [26]. Действительно, приближение первого порядка позволяет эффективно находить точки локального оптимума за счёт применения градиентного спуска [27]. Такие методы демонстрировали хорошую сходимость к локальным оптимумам,

но не смогли справиться с поиском глобального. Исследователи полагали, что множественные локальные оптимумы возникают вследствие невыпуклости задачи оптимизации топологии сети [26, 28]. В то же время недавние результаты показали, что по крайней мере на малых сетях получаемые проекционными методами локальные оптимумы довольно близки к глобальному [29]. Среди свежих идей по поиску глобального оптимума в задаче оптимизации топологии сети можно отметить идею применения обобщённого геометрического программирования [30]. Однако работоспособность такого подхода также продемонстрирована только на малых гипотетических сетях. При этом в 2017 г. вышла работа, в рамках которой наконец исследована вычислительная сложность непрерывной задачи оптимизации топологии сети и показано, что она является строго NP-полной и APX-трудной задачей [31]. Вместе с тем, доказано, что в случае одного истока решение задачи может быть получено за полиномиальное время.

Несмотря на многочисленные исследования непрерывной задачи оптимизации топологии сети, до сих пор существуют открытые вопросы. В частности, мало изучен вопрос об условиях оптимальности, которым с необходимостью или достаточностью должны удовлетворять решения задачи оптимизации топологии сети. Действительно, подавляющее большинство исследований в данной области сосредоточено на поиске алгоритмов решения исходной двухуровневой задачи с опорой на необходимые условия оптимальности, например для преобразованной одноуровневой задачи оптимизации. Однако, как показали недавние результаты, существуют условия, которым с необходимостью должны удовлетворять решения самой исходной двухуровневой задачи оптимизации, полученные для специального вида сетей [32]. При этом условий достаточности для рассматриваемой задачи, насколько нам известно, в литературе вовсе не представлено. В настоящей статье доказывается ряд утверждений, позволяющих проверять множество активных переменных на достаточность при поиске глобального оптимума в задаче оптимизации топологии сети с непересекающимися маршрутами. С практической точки зрения в случае рассматриваемого типа сетей появляется возможность построения множества переменных, достаточного для поиска глобального оптимума посредством работы с переменными только из этого множества.

В разд. 1 статьи приведена математическая постановка исследуемой задачи. Разд. 2 посвящён ряду ранее полученных результатов, позволяющих сводить сформулированную задачу оптимизации топологии сети к минимаксу. В разд. 3 представлены доказательства утверждений, использование которых позволяет строить множество активных переменных задачи таким образом, что величина целевой функции верхнего уровня гарантированно уменьшается. В разд. 4 доказано утверждение,

выполнение условий которого на найденном множестве переменных гарантирует, что расширение этого множества не может привести к уменьшению значения величины целевой функции верхнего уровня. Другими словами, найдены условия, выполнение которых позволяет утверждать, что построенного множества активных переменных достаточно для поиска глобального оптимума. В разд. 5 приведён пример использования полученных условий при решении задачи оптимизации топологии сети с непересекающимися маршрутами.

1. Формулировка задачи

Рассмотрим сеть в виде ориентированного графа $G = (V, E)$. Будем считать, что сеть состоит из n непересекающихся альтернативных путей (каналов), либо исходящих из единственного истока, либо входящих в единственный сток, либо исходящих из единственного истока и входящих в единственный сток. Множество всех таких непересекающихся альтернатив будем обозначать через I, $|I| = n$. Предположим, что каждая альтернатива $i \in I$ характеризуется величиной пропускной способности y_i, $y = (y_1, \ldots, y_n)^\top$ при $y \in \mathbb{R}^n$. При этом будем считать, что величины пропускных способностей y_i, $i \in I$, являются переменными верхнего уровня двухуровневой задачи оптимизации топологии сети, каждая из которых может принимать допустимые значения от $l_i > 0$ до $u_i > 0$, т. е. y_i принадлежит множеству $Y_i = \{y_i \,|\, l_i \leqslant y_i \leqslant u_i\}$ для любого $i \in I$; $l = (l_1, \ldots, l_n)^\top$ и $u = (u_1, \ldots, u_n)^\top$. Более того, для каждого $i \in I$ введём непрерывно дифференцируемую строго возрастающую выпуклую функцию на множестве вещественных неотрицательных чисел g_i, принимающую только неотрицательные значения. Функция $g_i(y_i)$, $i \in I$, будет описывать бюджетные затраты, необходимые для увеличения пропускной способности альтернативы i с величины l_i до величины y_i при $g_i(l_i) = 0$. При этом общий бюджет, который может быть инвестирован в увеличение пропускной способности всех альтернатив, не должен превышать U: $\sum\limits_{i \in I} g_i(y_i) \leqslant U$. Таким образом, получаем область определения переменных верхнего уровня двухуровневой задачи оптимизации топологии сети:

$$Y = \Big\{ y \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in I} g_i(y_i) \leqslant U,\, l_i \leqslant y_i \leqslant u_i,\, i \in I \Big\}.$$

Кроме того, будем считать, что как только допустимый набор величин пропускных способностей $y \in Y$ задан, поток $D > 0$ распределяется среди доступных альтернатив. Через x_i обозначим количество потока, распределённого по альтернативе $i \in I$: $D = \sum\limits_{i \in I} x_i$ и $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ при $x \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, получаем область определения переменных

нижнего уровня двухуровневой задачи оптимизации топологии сети:

$$X = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i \in I} x_i = D,\ x_i \geqslant 0,\ i \in I \Big\}.$$

Более того, будем считать, что каждая альтернатива $i \in I$ характеризуется функцией задержки (затрат) $f_i(x_i, y_i)$ единицы потока x_i по альтернативе с пропускной способностью y_i. С одной стороны, будем предполагать, что $f_i(x_i, \overline{y}_i) \in C^3(\mathbb{R})$ для любого фиксированного $\overline{y}_i > 0$, $i \in I$, при этом

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(0, \overline{y}_i) = 0, \tag{1}$$

и для $m \in \overline{1,2}$ справедливо неравенство

$$\frac{\partial^m f_i}{\partial x_i^m}(x_i, \overline{y}_i) > 0, \quad x_i > 0. \tag{2}$$

С другой стороны, пусть $f_i(\overline{x}_i, y_i) \in C^1(\mathbb{R})$ для любого фиксированного $\overline{x}_i \in \mathbb{R}$, $i \in I$, при этом если $\overline{x}_i \geqslant 0$, то

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_i}(\overline{x}_i, y_i) \leqslant 0, \quad y_i \in Y_i. \tag{3}$$

В настоящей статье мы рассмотрим двухуровневую задачу оптимизации топологии сети G в виде игры Штакельберга. Будем предполагать, что лидер стремится минимизировать общие затраты в сети на верхнем уровне оптимизации, в то время как на нижнем уровне происходит равновесное распределение потоков (затраты на всех используемых альтернативах одинаковы и меньше затрат на неиспользуемых). В рамках введённых предположений, некооперативная игра равновесного распределения потоков на нижнем уровне является потенциальной игрой и может быть сформулирована в виде следующей задачи условной нелинейной оптимизации [9, 33]:

$$\min_{x \in X} \sum_{i \in I} \int_0^{x_i} f_i(u, y_i)\, du.$$

Заметим, что при строго возрастающих по x_i, $i \in I$, функциях $f_i(x_i, y_i)$ для любого $y \in Y$ получаем задачу минимизации выпуклой целевой функции на выпуклом множестве ограничений. Другими словами, для любого $y \in Y$ задача оптимизации нижнего уровня имеет единственное решение. В свою очередь, лидер на верхнем уровне стремится минимизировать общие затраты (общую задержку) в сети за счёт минимальных инвестиций в увеличение пропускной способности альтернатив [34]:

$$\min_{y \in Y} \ \sum_{i \in I} f_i(x_i, y_i) x_i + w \sum_{i \in I} g_i(y_i),$$

где вес $w \geqslant 0$ определяет значимость инвестиционных затрат в целевой функции верхнего уровня. Таким образом, окончательно получаем следующую задачу двухуровневой оптимизации топологии сети [3]:

$$\min_{y \in Y} \sum_{i \in I} f_i(x_i, y_i) x_i + w \sum_{i \in I} g_i(y_i) \tag{4}$$

при

$$x = \arg\min_{x \in X} \sum_{i \in I} \int_0^{x_i} f_i(u, y_i)\, du. \tag{5}$$

2. Сведение задачи оптимизации топологии сети к минимаксу

Для любого $\widehat{I} \subseteq I$ зададим функции

$$\mathbb{f}_{\widehat{I}}(x, y) = \frac{\displaystyle\sum_{i \in \widehat{I}} \frac{f_i(x_i, y_i)}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i, y_i)}}{\displaystyle\sum_{i \in \widehat{I}} \frac{1}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i, y_i)}},$$

$$\varphi_{\widehat{I}}(x, y) = \mathbb{f}_{\widehat{I}}(x, y) D + w \sum_{i \in I} g_i(y_i)$$

на $X_{\widehat{I}} \times Y$, где $X_{\widehat{I}} = \{x \in X \mid x_i > 0 \Leftrightarrow i \in \widehat{I}\}$.

В силу теоремы 2 из [32] решение задачи двухуровневой оптимизации (4), (5) существует, а $y^* \in Y$ является этим решением тогда и только тогда, когда

$$y^* \in \arg\min_{y \in Y} \Big[\min_{\widehat{I} \subseteq I} \sup_{x \in X_{\widehat{I}}} \mathbb{f}_{\widehat{I}}(x, y) D + w \sum_{i \in I} g_i(y_i) \Big]. \tag{6}$$

При этом по следствию 1 из [32] если y^* является решением задачи двухуровневой оптимизации (4), (5), а x^* — решением задачи (5) для y^*, то пара (x^*, y^*) является решением задачи минимакса

$$\min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{I^*}} \varphi_{I^*}(x, y) \tag{7}$$

при

$$I^* \in \arg\min_{\widehat{I} \subseteq I} \min_{y \in Y} \sup_{x \in X_{\widehat{I}}} \varphi_{\widehat{I}}(x, y). \tag{8}$$

Иначе говоря, при решении задачи двухуровневой оптимизации (4), (5) множество активных переменных с необходимостью находится среди таких подмножеств $\widehat{I} \subseteq I$, которые обеспечивают наименьшее значение величины минимакса функции $\varphi_{\widehat{I}}(x, y)$.

3. Построение множества активных переменных

Лемма 1. *Если у функции* $\mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,y)$ *нет экстремумов внутри множества* $X_{\widehat{I}}$, *то*

$$\sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,y) = \max_{i\in\widehat{I}} f_i(0,y_i). \tag{9}$$

Доказательство. Если у непрерывной функции $\mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,y)$ нет экстремумов внутри открытого ограниченного множества $X_{\widehat{I}}$, то супремум $\mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,y)$ на $X_{\widehat{I}}$ достигается на границе этого множества. Поскольку

$$\mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,y) = \frac{f_j(x_j,y_j) + \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_j,y_j)\sum\limits_{i\in\widehat{I}\setminus j}\frac{f_i(x_i,y_i)}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i,y_i)}}{1+\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x_j,y_j)\sum\limits_{i\in\widehat{I}\setminus j}\frac{1}{\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i,y_i)}}, \quad j\in\widehat{I},$$

в силу (1) получаем

$$\lim_{x_j\to 0}\mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,y) = f_j(0,y_j), \quad j\in\widehat{I},$$

т. е. приходим к (9).

Теорема 1. *Если пара* $(\widehat{x},\widehat{y})\in X_{\widehat{I}}\times Y$ *является решением задачи минимакса*

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\widehat{I}}}\varphi_{\widehat{I}}(x,y) \tag{10}$$

и существует $p\in I\setminus\widehat{I}$ *такой, что* $f_p(0,\widehat{y}_p) < f_i(\widehat{x}_i,\widehat{y}_i)$ *для* $i\in\widehat{I}$, *то*

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\overline{I}}}\varphi_{\overline{I}}(x,y) < \min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\widehat{I}}}\varphi_{\widehat{I}}(x,y)$$

при $\overline{I} = \widehat{I}\cup p$.

Доказательство. Если пара $(\widehat{x},\widehat{y})\in X_{\widehat{I}}\times Y$ является решением задачи минимакса (10), то $\widehat{x}$ является точкой максимума функции $\mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,\widehat{y})$ на множестве $X_{\widehat{I}}$. В таком случае согласно лемме 2 из [32] имеем

$$f_i(\widehat{x}_i,\widehat{y}_i) = f_j(\widehat{x}_j,\widehat{y}_j), \quad i,j\in\widehat{I}.$$

При этом в силу вида функции $\mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,\widehat{y})$ получаем

$$\sup_{x\in X_{\widehat{I}}}\mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,\widehat{y}) = \mathbb{f}_{\widehat{I}}(\widehat{x},\widehat{y}) = f_i(\widehat{x}_i,\widehat{y}_i), \quad i\in\widehat{I}. \tag{11}$$

Рассмотрим систему уравнений $f_p(x_p,\widehat{y}_p) = f_i(x_i,\widehat{y}_i)$ для $i\in\widehat{I}$. Если на множестве $X_{\overline{I}}$ существует решение этой системы, то в силу непрерывности и строгого возрастания функций $f_i(x_i,\widehat{y}_i)$ по x_i на множестве положительных чисел, $i\in I$, это решение единственно, а поскольку

$f_p(0,\widehat{y}_p) < f_i(\widehat{x}_i,\widehat{y}_i)$ для $i \in \widehat{I}$, существуют такие $\Delta\widehat{x}_i > 0$, $i \in \widehat{I}$, что

$$f_i(\widehat{x}_i,\widehat{y}_i) > f_i(\widehat{x}_i - \Delta\widehat{x}_i,\widehat{y}_i) = f_p\Big(\sum_{i\in\widehat{I}} \Delta\widehat{x}_i,\widehat{y}_p\Big), \quad i \in \widehat{I}. \tag{12}$$

При этом согласно леммам 1 и 2 из [32] $\overline{x} \in X_{\overline{I}}$ такой, что $\overline{x}_i = \widehat{x}_i - \Delta\widehat{x}_i$, $i \in \widehat{I}$, и $\overline{x}_p = \sum\limits_{i\in\widehat{I}} \Delta\widehat{x}_i$, является единственной точкой максимума функции $\mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y})$ на множестве $X_{\overline{I}}$:

$$\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y}) = \mathbb{f}_{\overline{I}}(\overline{x},\widehat{y}) = f_p(\overline{x}_p,\widehat{y}_p). \tag{13}$$

На основании (11) и (13) в силу (12) получаем

$$\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y}) < \sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,\widehat{y}).$$

Если на множестве $X_{\overline{I}}$ не существует решения системы уравнений $f_p(x_p,\widehat{y}_p) = f_i(x_i,\widehat{y}_i)$, $i \in \widehat{I}$, то в силу непрерывности и строгого возрастания функций $f_i(x_i,\widehat{y}_i)$ по x_i на множестве положительных чисел, $i \in I$, поскольку $f_p(0,\widehat{y}_p) < f_i(\widehat{x}_i,\widehat{y}_i)$ для $i \in \widehat{I}$ существуют $\widetilde{I} \subset \widehat{I}$ и такие $\Delta\widehat{x}_i > 0$, $i \in \widetilde{I}$, что

$$f_j(0,\widehat{y}_j) > f_i(\widehat{x}_i - \Delta\widehat{x}_i,\widehat{y}_i) = f_p\Big(\sum_{i\in\widetilde{I}} \Delta\widehat{x}_i,\widehat{y}_p\Big), \quad i \in \widetilde{I},\ j \in \widehat{I}\setminus\widetilde{I}.$$

Таким образом,

$$f_j(0,\widehat{y}_j) > f_p\Big(\sum_{i\in\widetilde{I}} \Delta\widehat{x}_i,\widehat{y}_p\Big) > f_p(0,\widehat{y}_p), \quad j \in \widehat{I}\setminus\widetilde{I}. \tag{14}$$

Поскольку на множестве $X_{\overline{I}}$ не существует решения системы уравнений $f_p(x_p,\widehat{y}_p) = f_i(x_i,\widehat{y}_i)$, $i \in \widehat{I}$, в силу леммы 2 из [32] у функции $\mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y})$ нет экстремумов внутри множества $X_{\overline{I}}$, что с учётом леммы 1 ведёт к равенству

$$\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y}) = \max_{i\in\overline{I}} f_i(0,\widehat{y}_i). \tag{15}$$

Однако, благодаря (14) из (15) следует, что

$$\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y}) = \max_{i\in\widehat{I}} f_i(0,\widehat{y}_i). \tag{16}$$

В силу строгого возрастания функций $f_i(x_i,\widehat{y}_i)$, $i \in \widehat{I}$, на множестве положительных чисел, опираясь на (11) и (16), получаем

$$\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y}) < \sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,\widehat{y}).$$

Приходим к выводу, что в любом из возможных случаев справедливо неравенство

$$\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y}) < \sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,\widehat{y}). \tag{17}$$

В свою очередь, из (17) следует, что

$$\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y})D + \omega\sum_{i\in I} g_i(\widehat{y}_i) < \sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,\widehat{y})D + \omega\sum_{i\in I} g_i(\widehat{y}_i),$$

или

$$\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \Big[\mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y})D + \omega\sum_{i\in I} g_i(\widehat{y}_i)\Big] < \sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \Big[\mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,\widehat{y})D + \omega\sum_{i\in I} g_i(\widehat{y}_i)\Big], \tag{18}$$

при этом

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \Big[\mathbb{f}_{\overline{I}}(x,y)D + \omega\sum_{i\in I} g_i(y_i)\Big] \leqslant \sup_{x\in X_{\overline{I}}} \Big[\mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y})D + \omega\sum_{i\in I} g_i(\widehat{y}_i)\Big].$$

Таким образом, в силу (18) получаем

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \Big[\mathbb{f}_{\overline{I}}(x,y)D + \omega\sum_{i\in I} g_i(y_i)\Big] < \sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \Big[\mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,\widehat{y})D + \omega\sum_{i\in I} g_i(\widehat{y}_i)\Big],$$

при этом поскольку

$$\sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \Big[\mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,\widehat{y})D + \omega\sum_{i\in I} g_i(\widehat{y}_i)\Big] = \min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \Big[\mathbb{f}_{I}(x,y)D + \omega\sum_{i\in I} g_i(y_i)\Big],$$

окончательно получаем

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \Big[\mathbb{f}_{\overline{I}}(x,y)D + \omega\sum_{i\in I} g_i(y_i)\Big] < \min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \Big[\mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,y)D + \omega\sum_{i\in I} g_i(y_i)\Big].$$

Теорема 2. *Если $\widehat{y}\in Y$ таков, что*

$$\sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \varphi_{\widehat{I}}(x,\widehat{y}) = \min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \varphi_{\widehat{I}}(x,y),$$

но при этом не существует решения системы $f_i(x_i,\widehat{y}_i) = f_j(x_j,\widehat{y}_j)$, $i,j\in\widehat{I}$, на множестве $X_{\widehat{I}}$, то

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \varphi_{\overline{I}}(x,y) \leqslant \min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \varphi_{\widehat{I}}(x,y)$$

при $\overline{I} = \widehat{I}\setminus s$, где $f_s(0,\widehat{y}_s) = \max\limits_{i\in\widehat{I}} f_i(0,\widehat{y}_i)$.

Доказательство. Коль скоро на множестве $X_{\widehat{I}}$ не существует решения системы $f_i(x_i,\widehat{y}_i) = f_j(x_j,\widehat{y}_j)$, $i,j\in\widehat{I}$, согласно лемме 2 из [32]

у функции $\mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,\widehat{y})$ нет экстремумов внутри множества $X_{\widehat{I}}$. В таком случае по лемме 1

$$\sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,\widehat{y}) = \max_{i\in\widehat{I}} f_i(0,\widehat{y}_i). \tag{19}$$

Рассмотрим систему уравнений $f_i(x_i,\widehat{y}_i) = f_j(x_j,\widehat{y}_j)$ для $i,j\in\overline{I}$. Если на множестве $X_{\overline{I}}$ не существует её решения, то в силу леммы 2 из [32] у функции $\mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y})$ нет экстремумов внутри множества $X_{\overline{I}}$. В таком случае согласно лемме 1

$$\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y}) = \max_{i\in\overline{I}} f_i(0,\widehat{y}_i), \tag{20}$$

а поскольку $f_s(0,\widehat{y}_s) = \max\limits_{i\in\widehat{I}} f_i(0,\widehat{y}_i)$, из (19) и (20) следует, что

$$\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y}) \leqslant \sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,\widehat{y}).$$

Если же существует $\widetilde{x}\in X_{\overline{I}}$ такой, что $f_i(\widetilde{x}_i,\widehat{y}_i) = f_j(\widetilde{x}_j,\widehat{y}_j)$, $i,j\in\overline{I}$, то в силу лемм 1 и 2 из [32] имеем

$$\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y}) = f_i(\widetilde{x}_i,\widehat{y}_i), \quad i\in\overline{I}. \tag{21}$$

Предположим при этом, что $f_i(\widetilde{x}_i,\widehat{y}_i) > f_s(0,\widehat{y}_s)$, $i\in\overline{I}$. В таком случае в силу непрерывности и строгого возрастания функций $f_i(x_i,\widehat{y}_i)$ по x_i на множестве положительных чисел, $i\in I$, существуют такие $\Delta\widetilde{x}_i > 0$, $i\in\widehat{I}$, что

$$f_i(\widetilde{x}_i - \Delta\widetilde{x}_i,\widehat{y}_i) = f_s\Big(\sum_{i\in\overline{I}} \Delta\widetilde{x}_i,\widehat{y}_s\Big), \quad i\in\overline{I},$$

при $\widetilde{x}_i - \Delta\widetilde{x}_i > 0$, $i\in\overline{I}$, поскольку $f_i(0,\widehat{y}_i) \leqslant f_s(0,\widehat{y}_s)$ для всех $i\in\overline{I}$. Другими словами, предположив, что $f_i(\widetilde{x}_i,\widehat{y}_i) > f_s(0,\widehat{y}_s)$, $i\in\overline{I}$, приходим к необходимости существования решения системы $f_i(x_i,\widehat{y}_i) = f_j(x_j,\widehat{y}_j)$, $i,j\in\widehat{I}$. Таким образом, предположение оказалось неверным, а значит,

$$f_i(\widetilde{x}_i,\widehat{y}_i) \leqslant f_s(0,\widehat{y}_s), \quad i\in\overline{I}. \tag{22}$$

В силу (22) из (19) и (21) следует, что

$$\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y}) \leqslant \sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,\widehat{y}).$$

Приходим к выводу, что в любом из возможных случаев справедливо неравенство

$$\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y}) \leqslant \sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,\widehat{y}). \tag{23}$$

В свою очередь, из (23) следует, что

$$\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y})D+\omega\sum_{i\in I} g_i(\widehat{y}_i)\leqslant \sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,\widehat{y})D+\omega\sum_{i\in I} g_i(\widehat{y}_i),$$

или

$$\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \Big[\mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y})D+\omega\sum_{i\in I} g_i(\widehat{y}_i)\Big]\leqslant \sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \Big[\mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,\widehat{y})D+\omega\sum_{i\in I} g_i(\widehat{y}_i)\Big], \qquad (24)$$

при этом

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \Big[\mathbb{f}_{\overline{I}}(x,y)D+\omega\sum_{i\in I} g_i(y_i)\Big]\leqslant \sup_{x\in X_{\overline{I}}} \Big[\mathbb{f}_{\overline{I}}(x,\widehat{y})D+\omega\sum_{i\in I} g_i(\widehat{y}_i)\Big].$$

Таким образом, в силу (24) получаем

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \Big[\mathbb{f}_{\overline{I}}(x,y)D+\omega\sum_{i\in I} g_i(y_i)\Big]\leqslant \sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \Big[\mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,\widehat{y})D+\omega\sum_{i\in I} g_i(\widehat{y}_i)\Big],$$

или

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \Big[\mathbb{f}_{\overline{I}}(x,y)D+\omega\sum_{i\in I} g_i(y_i)\Big]\leqslant \min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \Big[\mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,y)D+\omega\sum_{i\in I} g_i(y_i)\Big].$$

4. Достаточность множества активных переменных

Теорема 3. *Пусть*

$$f_i(0,\dot{y}_i)=f_i(0,\ddot{y}_i),\quad i\in I,\ \dot{y}_i,\ddot{y}_i\in Y.$$

В таком случае если пара $(\widehat{x},\widehat{y})\in X_{\widehat{I}}\times Y$ *является решением задачи минимакса*

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\widehat{I}}}\varphi_{\widehat{I}}(x,y)$$

и при этом $f_i(\widehat{x}_i,l_i)\leqslant f_j(0,l_j)$ *для всех* $i\in\widehat{I}$, $j\in I\setminus\widehat{I}$, *то для любого* $s\in I\setminus\widehat{I}$ *справедливо неравенство*

$$\min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\widehat{I}}}\varphi_{\widehat{I}}(x,y)\leqslant\min_{y\in Y}\sup_{x\in X_{\overline{I}}}\varphi_{\overline{I}}(x,y),$$

где $\overline{I}=\widehat{I}\cup s$.

Доказательство. Если пара $(\widehat{x},\widehat{y})\in X_{\widehat{I}}\times Y$ является решением задачи минимакса для $\varphi_{\widehat{I}}(x,y)$, то $\widehat{x}\in X_{\widehat{I}}$ является точкой максимума функции $\mathbb{f}_{\widehat{I}}(x,\widehat{y})$ на множестве $X_{\widehat{I}}$. В таком случае согласно лемме 2 из [32] выполняются равенства

$$f_i(\widehat{x}_i,\widehat{y}_i)=f_j(\widehat{x}_j,\widehat{y}_j),\quad i,j\in\widehat{I}. \qquad (25)$$

Выстроим $f_i(\widehat{x}_i,l_i)$, $i\in\widehat{I}$, в порядке возрастания:

$$f_{i_1}(\widehat{x}_{i_1},l_{i_1})\leqslant\ldots\leqslant f_{i_m}(\widehat{x}_{i_m},l_{i_m}),$$

где $\widehat{I} = \{i_1, \ldots, i_m\}$. Поскольку функции $f_i(x_i, l_i)$ непрерывные и строго возрастающие по x_i на множестве положительных чисел, $i \in I$, существуют $\Delta\widehat{x}_i \geqslant 0$, $i \in \widehat{I}$, такие, что

$$f_{i_1}(\widehat{x}_{i_1} + \Delta\widehat{x}_{i_1}, l_{i_1}) = \cdots = f_{i_m}(\widehat{x}_{i_m} - \Delta\widehat{x}_{i_m}, l_{i_m}),$$

при $\sum\limits_{a=1}^{k-1} \Delta\widehat{x}_{i_a} = \sum\limits_{a=k}^{m} \Delta\widehat{x}_{i_a}$ и $\widehat{x}_{i_a} - \Delta\widehat{x}_{i_a} > 0$ для всех $a \in \overline{k, m}$, где k такой, что

$$f_{i_{k-1}}(\widehat{x}_{i_{k-1}} + \Delta\widehat{x}_{i_{k-1}}, l_{i_{k-1}}) = f_{i_k}(\widehat{x}_{i_k} - \Delta\widehat{x}_{i_k}, l_{i_k}).$$

Действительно, для любого $a \in \overline{k, m}$ справедливо

$$f_{i_a}(\widehat{x}_{i_a} - \Delta\widehat{x}_{i_a}, l_{i_a}) = f_{i_1}(\widehat{x}_{i_1} + \Delta\widehat{x}_{i_1}, l_{i_1}),$$

откуда в силу вида функции $f_{i_1}(x_{i_1}, l_{i_1})$ следует, что

$$f_{i_a}(\widehat{x}_{i_a} - \Delta\widehat{x}_{i_a}, l_{i_a}) \geqslant f_{i_1}(\widehat{x}_{i_1}, l_{i_1}),$$

при этом поскольку $f_{i_1}(\widehat{x}_{i_1}, y_{i_1})$ невозрастающая по y_{i_1} на Y_{i_1}, то

$$f_{i_1}(\widehat{x}_{i_1}, l_{i_1}) \geqslant f_{i_1}(\widehat{x}_{i_1}, \widehat{y}_{i_1}),$$

а значит,

$$f_{i_a}(\widehat{x}_{i_a} - \Delta\widehat{x}_{i_a}, l_{i_a}) \geqslant f_{i_1}(\widehat{x}_{i_1}, \widehat{y}_{i_1}). \tag{26}$$

Однако, в силу (25) выполняется равенство

$$f_{i_1}(\widehat{x}_{i_1}, \widehat{y}_{i_1}) = f_{i_a}(\widehat{x}_{i_a}, \widehat{y}_{i_a}),$$

а так как $\widehat{x}_{i_a} > 0$, то

$$f_{i_a}(\widehat{x}_{i_a}, \widehat{y}_{i_a}) > f_{i_a}(0, \widehat{y}_{i_a}),$$

а с учётом равенства $f_{i_a}(0, \widehat{y}_{i_a}) = f_{i_a}(0, l_{i_a})$, следующего из условия теоремы, получаем

$$f_{i_1}(\widehat{x}_{i_1}, \widehat{y}_{i_1}) > f_{i_a}(0, l_{i_a}). \tag{27}$$

Подставив (27) в (26), получим

$$f_{i_a}(\widehat{x}_{i_a} - \Delta\widehat{x}_{i_a}, l_{i_a}) > f_{i_a}(0, l_{i_a}),$$

откуда в силу вида функции $f_{i_a}(x_{i_a}, l_{i_a})$ следует, что $(\widehat{x}_{i_a} - \Delta\widehat{x}_{i_a}) > 0$ для всех $a \in \overline{k, m}$. Другими словами, существует $\widetilde{x} \in X_{\widehat{I}}$ такой, что

$$f_i(\widetilde{x}_i, l_i) = f_j(\widetilde{x}_j, l_j), \quad i, j \in \widehat{I}.$$

Предположим, что существует решение $\widetilde{x} \in X_{\widehat{I}}$ системы уравнений $f_i(x_i, l_i) = f_j(x_j, l_j)$, $i, j \in \widehat{I}$. Тогда найдётся $p \in \widehat{I}$, для которого справедливо

$$f_p(\widetilde{x}_p, l_p) \leqslant f_p(\widehat{x}_p, l_p),$$

поскольку в противном случае в силу непрерывности и строгого возрастания функций $f_i(x_i, \widehat{y}_i)$ по x_i на множестве положительных чисел, $i \in I$,

выполнялось бы неравенство $\widetilde{x}_i > \widehat{x}_i$ для всех $i \in \widehat{I}$, а значит, $\sum\limits_{i\in\widehat{I}} \widetilde{x}_i > \sum\limits_{i\in\widehat{I}} \widehat{x}_i = D$ (т. е. $\widetilde{x} \notin X_{\widehat{I}}$). В свою очередь, поскольку $f_p(\widehat{x}_p, l_p) \leqslant f_s(0, l_s)$ для произвольно выбранного $s \in I \setminus \widehat{I}$, то

$$f_i(\widetilde{x}_i, l_i) = f_p(\widetilde{x}_p, l_p) \leqslant f_s(0, l_s), \quad i \in \widehat{I}. \tag{28}$$

При этом в силу непрерывности и невозрастания функции $f_i(\widetilde{x}_i, y_i)$ по y_i на множестве Y_i, $i \in I$, справедливо

$$f_i(\widetilde{x}_i, \overline{y}_i) \leqslant f_i(\widetilde{x}_i, l_i), \quad i \in \widehat{I}, \tag{29}$$

где $\overline{y} \in Y$ такой, что

$$\sup_{x\in X_{\overline{I}}} \varphi_{\overline{I}}(x, \overline{y}) = \min_{y\in Y} \sup_{x\in X_{\overline{I}}} \varphi_{\overline{I}}(x, y)$$

при $\overline{I} = \widehat{I} \cup s$.

Рассмотрим систему уравнений $f_i(x_i, \overline{y}_i) = f_j(x_j, \overline{y}_j)$, $i, j \in \widehat{I}$. Если существует $\overline{x} \in X_{\widehat{I}}$, удовлетворяющий этой системе, то, как было показано выше, найдётся $q \in \widehat{I}$, для которого справедливо

$$f_q(\overline{x}_q, \overline{y}_q) \leqslant f_q(\widetilde{x}_q, \overline{y}_q),$$

так как в противном случае $\overline{x} \notin X_{\widehat{I}}$. В свою очередь, в силу (29) и (28) для найденного $q \in \widehat{I}$ справедливы неравенства

$$f_q(\widetilde{x}_q, \overline{y}_q) \leqslant f_q(\widetilde{x}_q, l_q) \leqslant f_s(0, l_s),$$

откуда следует, что

$$f_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i) = f_q(\overline{x}_q, \overline{y}_q) \leqslant f_s(0, l_s), \quad i \in \widehat{I}.$$

При этом поскольку $f_s(0, l_s) = f_s(0, \overline{y}_s)$, в силу условия теоремы окончательно получаем

$$f_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i) = f_q(\overline{x}_q, \overline{y}_q) \leqslant f_s(0, \overline{y}_s), \quad i \in \widehat{I}.$$

В силу непрерывности и строгого возрастания функций $f_i(x_i, \overline{y}_i)$ по x_i на множестве положительных чисел, $i \in I$, система $f_i(x_i, \overline{y}_i) = f_s(x_s, \overline{y}_s)$, $i \in \widehat{I}$, не имеет решения на множестве $X_{\overline{I}}$ и при этом

$$f_s(0, \overline{y}_s) = \max_{i\in\overline{I}} f_i(0, \overline{y}_i).$$

Следовательно, согласно теореме 2

$$\min_{y\in Y} \sup_{x\in X_{\widehat{I}}} \varphi_{\widehat{I}}(x, y) \leqslant \min_{y\in Y} \sup_{x\in X_{\overline{I}}} \varphi_{\overline{I}}(x, y). \tag{30}$$

Если же на множестве $X_{\widehat{I}}$ не существует решения системы $f_i(x_i, \overline{y}_i) = f_j(x_j, \overline{y}_j)$, $i, j \in \widehat{I}$, то и система $f_i(x_i, \overline{y}_i) = f_s(x_s, \overline{y}_s)$, $i \in \widehat{I}$, не имеет решения на множестве $X_{\overline{I}}$. При этом в силу (28) и (29) имеем

$$f_i(\widetilde{x}_i, \overline{y}_i) \leqslant f_s(0, l_s), \quad i \in \widehat{I},$$

откуда в силу вида функций $f_i(x_i, \overline{y}_i)$, $i \in \widehat{I}$, и условия теоремы следует, что

$$f_i(0, \overline{y}_i) < f_i(\widetilde{x}_i, \overline{y}_i) \leqslant f_s(0, l_s) = f_s(0, \overline{y}_s), \quad i \in \widehat{I},$$

т. е. $f_s(0, \overline{y}_s) = \max\limits_{i \in \overline{I}} f_i(0, \overline{y}_i)$. Следовательно в силу теоремы 2 приходим к (30).

5. Поиск оптимальной топологии сети

Теоремы 1 и 2 позволяют реализовать алгоритмы поиска множества активных переменных в задаче (4), (5). Действительно, они указывают, каким образом следует добавлять и удалять маршруты из рассмотрения, чтобы гарантированно уменьшать значение целевой функции (4). Рассмотрим, в частности, следующий алгоритм.

Алгоритм 1

1: $\widehat{I} = \varnothing$
2: $\widehat{I} \leftarrow \widehat{I} \cup \{j\}$ для некоторого $j = \arg\min\limits_{i \in I} f_i(0, l_i) \in I$
3: $(\widehat{y}, \widehat{x}) \leftarrow$ решение задачи минимакса $\min\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X_{\widehat{I}}} \varphi_{\widehat{I}}(x, y)$
4: **while** $\exists\, p \in I \setminus \widehat{I}\colon \forall\, i \in \widehat{I}\ (f_p(0, \widehat{y}_p) < f_i(\widehat{x}_i, \widehat{y}_i))$ **do**
5: $\quad \widehat{I} \leftarrow \widehat{I} \cup \{p\}$
6: $\quad (\widehat{y}, \widehat{x}) \leftarrow$ решение задачи минимакса $\min\limits_{y \in Y} \sup\limits_{x \in X_{\widehat{I}}} \varphi_{\widehat{I}}(x, y)$
7: **return** $\widehat{I}$

Реализация алгоритма 1 позволяет найти множество маршрутов, которые следует учитывать при решении задачи (4), (5). В то же время достаточность построенного таким образом множества маршрутов для решения задачи (4), (5) не гарантирована. Однако, благодаря теореме 3 можно оценить найденное множество маршрутов на достаточность, проверив выполнимость простого условия

$$f_i(\widehat{x}_i, l_i) \leqslant f_j(0, l_j), \quad i \in \widehat{I}, j \in I \setminus \widehat{I}. \tag{31}$$

Если условие (31) выполняется, то найденного множества маршрутов достаточно для поиска глобального оптимума в задаче (4), (5).

Рассмотрим результат применения предложенного алгоритма на примере сети с 8 попарно непересекающимися альтернативными маршрутами. Величины верхних и нижних границ пропускных способностей доступных альтернатив даны в табл. 1.

Таблица 1

Нижняя и верхняя границы пропускных способностей

Пропуск. способность	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8
Нижняя граница (l_i)	50	80	70	40	60	90	45	20
Верхняя граница (u_i)	80	100	95	60	70	110	65	50

Бюджетные затраты, связанные с увеличением пропускной способности альтернативы $i \in \overline{1,8}$ с величины l_i до величины y_i, будем описывать при помощи функции вида

$$g_i(y_i) = 100(y_i - l_i)^2, \quad i \in \overline{1,8},$$

а общий бюджет, который может быть инвестирован в увеличение пропускной способности всех альтернатив не должен превышать 200 000: $\sum\limits_{i=1}^{8} g_i(y_i) \leqslant 200\,000$. При этом каждая альтернатива $i \in \overline{1,8}$ характеризуется степенной функцией задержки $f_i(x_i, y_i)$ единицы потока x_i по альтернативе с пропускной способностью y_i:

$$f_i(x_i, y_i) = t_i^0 + 0{,}15\left(\frac{x_i}{y_i}\right)^4, \quad i \in \overline{1,8},$$

при параметрах, заданных в табл. 2.

Таблица 2

Параметры функций задержки

i	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i^0	21	24	18	29	34	32	30	35

Как только допустимый набор величин пропускных способностей задан, поток $D = 350$ распределяется среди доступных альтернатив в соответствии с принципом конкурентного равновесия при заданных функциях задержки. Если лидер на верхнем уровне стремится минимизировать общую задержку в сети за счёт минимальных инвестиций в увеличение пропускной способности альтернатив, то возникает задача двухуровневой оптимизации (4), (5). При этом будем считать, что $w = 0{,}01$, т. е. единицу затрат времени лидер оценивает в 100 единиц бюджета.

Результаты применения алгоритма 1 представлены в табл. 3.

Таблица 3

Результаты применения алгоритма 1

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$\widehat{x}_i$	124,61	22,66	202,73	0	0	0	0	0
$\widehat{y}_i$	58,92	81,18	80,61	40	60	90	45	20

При этом нетрудно проверить, что условие (31) выполняется для полученного при помощи алгоритма 1 подмножества $\widehat{I} = \{1, 2, 3\}$ и вектора $\widehat{x}$. Другими словами, выявленных маршрутов достаточно, чтобы найти глобальный оптимум в задаче (4), (5) для представленной сети: введение в рассмотрение дополнительных доступных маршрутов может лишь уменьшить значение целевой функции (4).

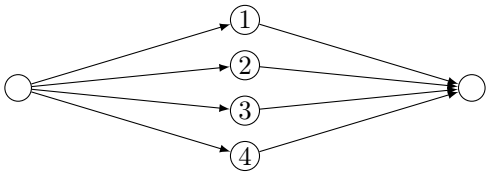


Рис. 1. Сеть с непересекающимися маршрутами

Стоит отметить, что сформулированная в настоящей статье задача двухуровневой оптимизации может относиться к разным прикладным задачам. Действительно, с одной стороны, задача (4), (5) может возникнуть в случае оптимизации участка улично-дорожной сети с непересекающимися путями (рис. 1). В таком случае можно считать, что участок улично-дорожной сети обслуживает D неатомарных пользователей, распределяющихся среди n маршрутов в стремлении минимизировать индивидуальное время движения.

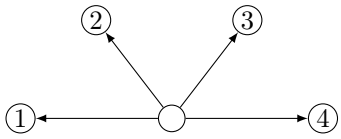


Рис. 2. Сеть типа звезда

С другой стороны, задача (4), (5) может возникнуть в случае оптимизации сети дистрибьюторского центра типа звезда (рис. 2). В таком случае можно считать, что дистрибьюторский центр способен поставить D неатомарных единиц продуктового потока, который распределяется среди n альтернативных покупателей по принципу аукциона. При этом если

на рис. 2 направить стрелочки в обратную сторону, то задача (4), (5) будет соответствовать ситуации, в рамках которой единственный покупатель удовлетворяет свой спрос в D единиц продуктового потока, закупаясь у n альтернативных поставщиков по принципу аукциона.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт Санкт-Петербургского гос. университета (проект № 116814048). Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Литература

1. **Cieslik D.** Network design problems // Encyclopedia of optimization. Boston, MA: Springer, 2008.
2. **Von Stackelberg H. F.** Marktform und Gleichgewicht. Berlin: Springer, 1934. [German].
3. **Migdalas A.** Bilevel programming in traffic planning: Models, methods and challenge // J. Global Optim. 1995. V. 7. P. 381–405.
4. **Samani A. R., Shetab-Boushehri S.-N., Mahmoudi R.** Reliable urban transportation network design problem considering recurrent traffic congestions // Adv. Ind. Eng. 2021. V. 55, No. 1. P. 69–89.
5. **Zweers B. G., van der Mei R. D.** Minimum costs paths in intermodal transportation networks with stochastic travel times and overbookings // Eur. J. Oper. Res. 2022. V. 300, No. 1. P. 178–188.
6. **Xing C., Jing Y., Wang S., Ma S., Poor H. V.** New viewpoint and algorithms for water-filling solutions in wireless communications // IEEE Trans. Signal Proces. 2020. V. 68. P. 1618–1634.
7. **Xu X., Chen A., Yang C.** A review of sustainable network design for road networks // KSCE J. Civil Eng. 2016. V. 20. P. 1084–1098.
8. **Yang H., Bell M. G. H.** Models and algorithms for road network design: A review and some new developments // Transp. Rev. 1998. V. 18, No. 3. P. 257–278.
9. **Крылатов А. Ю.** Распределение потока в сети как задача поиска неподвижной точки // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2016. Т. 23, № 2. С. 63–87.
10. **Magnanti T. L., Wong R. T.** Network design and transportation planning: Models and algorithms // Transp. Sci. 1984. V. 18. P. 1–55.
11. **Wong S. C., Yang H.** Reserve capacity of a signal-controlled road network // Transp. Res. Pt. B. 1997. V. 31. P. 397–402.
12. **Gao Z. Y., Wu J. J., Sun H. J.** Solution algorithm for the bi-level discrete network design problem // Transp. Res. Pt. B. 2005. V. 39. P. 479–495.

13. **Chen A., Zhou Z., Chootinan P., Ryu S., Yang C., Wong S. C.** Transport network design problem under uncertainty: A review and new developments // Transp. Rev. 2011. V. 31, No. 6. P. 743–768.
14. **Dafermos S. C.** Traffic assignment and resource allocation in transportation networks: PhD thesis. Baltimore, MD, 1968.
15. **Dantzig G. B., Harvey R. P., Lansdowne Z. F., Robinson D. W., Maier S. F.** Formulating and solving the network design problem by decomposition // Transp. Res. Pt. B. 1979. V. 13, No. 1. P. 5–17.
16. **Abdulaal M., LeBlanc L. J.** Continuous equilibrium network design models // Transp. Res. Pt. B. 1979. V. 13, No. 1. P. 19–32.
17. **Tan H. N., Gershwin S. B., Athans M.** Hybrid optimization in urban traffic networks. Rep. DOT-TSC-RSPA-79-7. Cambridge, MA: MIT, 1979. 106 p.
18. **Friesz T. L.** An equivalent optimization problem with combined multiclass distribution assignment and modal split which obviates symmetry restriction // Transp. Res. Pt. B. 1981. V. 15. P. 361–369.
19. **Friesz T. L., Anandalingam G., Mehta N. J., Nam K., Shah S. J., Tobin R. L.** The multiobjective equilibrium network design problem revisited: A simulated annealing approach // Eur. J. Oper. Res. 1993. V. 65. P. 44–57.
20. **Dafermos S.** Traffic equilibria and variational inequalities // Transp. Sci. 1980. V. 14. P. 42–54.
21. **Marcotte P.** Network optimization with continuous control parameters // Transp. Sci. 1983. V. 17, No. 2. P. 181–197.
22. **Meng Q., Yang H., Bell M. G. H.** An equivalent continuously differentiable model and a locally convergent algorithm for the continuous networks design problem // Transp. Res. Pt. B. 2001. V. 35. P. 83–105.
23. **Gao Z., Sun H., Zhang H.** A globally convergent algorithm for transportation continuous network design problem // Optim. Eng. 2007. V. 8. P. 241–257.
24. **Tobin R. L., Friesz T. L.** Sensitivity analysis for equilibrium network flow // Transp. Sci. 1988. V. 22, No. 4. P. 231–293.
25. **Tobin R. L.** Sensitivity analysis for variational inequalities // J. Optim. Theory Appl. 1986. V. 48, No. 1. P. 191–204.
26. **Chiou S.** Bilevel programming for the continuous transport network design problem // Transp. Res. Pt. B. 2005. V. 39, No. 4. P. 361–383.
27. **Meng Q., Yang H., Bell M. G. H.** An equivalent continuously differentiable model and a locally convergent algorithm for the continuous network design problem // Transp. Res. Pt. B. 2001. V. 35. P. 83–105.
28. **Suwansirikul C., Friesz T. L., Tobin R. L.** Equilibrium decomposed optimization: A heuristic for the continuous equilibrium network design problem // Transp. Sci. 1987. V. 21, No. 4. P. 227–292.
29. **Li C., Yang H., Zhu D., Meng Q.** A global optimization method for continuous network design problems // Transp. Res. Pt. B. 2012. V. 46, No. 9. P. 1144–1158.
30. **Du B., Wang D. Z. W.** Solving continuous network design problem with generalized geometric programming approach // Transp. Res. Record. 2016. V. 2567, No. 1. P. 38–46.

31. Gairing M., Harks T., Klimm M. Complexity and approximation of the continuous network design problem // SIAM J. Optim. 2017. V. 27, No. 3. P. 1554–1582.

32. Крылатов А. Ю. Поиск глобального оптимума в задаче оптимизации топологии сети // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2024. Т. 64, № 10. С. 1851–1867.

33. Schmeidler D. Equilibrium points of nonatomic games // J. Stat. Phys. 1973. V. 7, No. 4. P. 295–300.

34. Zhou Z., Yang M., Sun F., Wang Z., Wang B. A continuous transportation network design problem with the consideration of road congestion charging // Sustainability. 2021. V. 13. P. 7008.

Крылатов Александр Юрьевич

Статья поступила
25 марта 2025 г.
После доработки —
30 июля 2025 г.
Принята к публикации
22 декабря 2025 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2026. Vol. 33, No. 1. P. 91–113

UDC 519.8+518.25 DOI: 10.33048/daio.2026.33.831

SUFFICENCY IN THE OPTIMAL NETWORK DESIGN PROBLEM

A. Yu. Krylatov[1, 2, a, b]

[1] St. Petersburg State University,
7/9 Universitetskaya Embankment, 199034 St. Petersburg, Russia
[2] Institute of Transport Problems,
13 12th Line, V. O., 199178 St. Petersburg, Russia
E-mail: [a] a.krylatov@spbu.ru, [b] aykrylatov@yandex.ru

Abstract. The paper is devoted to the global optimum search in the network design problem with non-interfering routes. Within this paper, we assume that the network manager invests in capacity of the network to minimize overall delay caused by equilibrium flow assignment. We prove that solving the network design problem can be reduced to the subset of routes search, which gives the minimum value of goal function in a finite set of minimax problems. Moreover, we establish how such a subset should be generated in order to ensure that the corresponding value decreases. Eventually, under fairly natural assumptions, we obtain optimality conditions for solutions to emerging minimax problems. For demonstration purposes, we apply the obtained results to a concrete example. Tab. 3, illust. 2, bibliogr. 34.

Keywords: network design problem, overall cost minimization, equilibrium flow assignment.

References

1. **D. Cieslik,** Network design problems, in *Encyclopedia of Optimization* (Springer, Boston, MA, 2008).
2. **H. F. Von Stackelberg,** *Marktform und Gleichgewicht* (Springer, Berlin, 1934) [German].
3. **A. Migdalas,** Bilevel programming in traffic planning: Models, methods and challenge, *J. Global Optim.* **7**, 381–405 (1995).
4. **A. R. Samani, S.-N. Shetab-Boushehri,** and **R. Mahmoudi,** Reliable urban transportation network design problem considering recurrent traffic congestions, *Adv. Ind. Eng.* **55** (1), 69–89 (2021).

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **20** (1) (2026).

5. **B. G. Zweers,** and **R. D. van der Mei,** Minimum costs paths in intermodal transportation networks with stochastic travel times and overbookings, *Eur. J. Oper. Res.* **300** (1), 178–188 (2022).
6. **C. Xing, Y. Jing, S. Wang, S. Ma,** and **H. V. Poor,** New viewpoint and algorithms for water-filling solutions in wireless communications, *IEEE Trans. Signal Proces.* **68**, 1618–1634 (2020).
7. **X. Xu, A. Chen,** and **C. Yang,** A review of sustainable network design for road networks, *KSCE J. Civil Eng.* **20**, 1084–1098 (2016).
8. **H. Yang** and **M. G. H. Bell,** Models and algorithms for road network design: A review and some new developments, *Transp. Rev.* **18** (3), 257–278 (1998).
9. **A. Yu. Krylatov,** Network flow assignment as a fixed point problem, *Diskretn. Anal. Issled. Oper.* **23** (2), 63–87 (2016) [*J. Appl. Ind. Math.* **10** (2), 243–256 (2016)].
10. **T. L. Magnanti** and **R. T. Wong,** Network design and transportation planning: Models and algorithms, *Transp. Sci.* **18**, 1–55 (1984).
11. **S. C. Wong** and **H. Yang,** Reserve capacity of a signal-controlled road network, *Transp. Res., Pt. B*, **31**, 397–402 (1997).
12. **Z. Y. Gao, J. J. Wu,** and **H. J. Sun,** Solution algorithm for the bi-level discrete network design problem, *Transp. Res., Pt. B*, **39**, 479–495 (2005).
13. **A. Chen, Z. Zhou, P. Chootinan, S. Ryu, C. Yang,** and **S. C. Wong,** Transport network design problem under uncertainty: A review and new developments, *Transp. Rev.* **31** (6), 743–768 (2011).
14. **S. C. Dafermos,** Traffic assignment and resource allocation in transportation networks, *PhD Thesis* (Baltimore, MD, 1968).
15. **G. B. Dantzig, R. P. Harvey, Z. F. Lansdowne, D. W. Robinson, S. F. Maier,** Formulating and solving the network design problem by decomposition, *Transp. Res., Pt. B*, **13** (1), 5–17 (1979).
16. **M. Abdulaal** and **L. J. LeBlanc,** Continuous equilibrium network design models, *Transp. Res., Pt. B*, **13** (1), 19–32 (1979).
17. **H. N. Tan, S. B. Gershwin,** and **M. Athans,** Hybrid optimization in urban traffic networks, *Rep. DOT-TSC-RSPA-79-7* (MIT, Cambridge, MA, 1979).
18. **T. L. Friesz,** An equivalent optimization problem with combined multiclass distribution assignment and modal split which obviates symmetry restriction, *Transp. Res., Pt. B*, **15**, 361–369 (1981).
19. **T. L. Friesz, G. Anandalingam, N. J. Mehta, K. Nam, S. J. Shah,** and **R. L. Tobin,** The multiobjective equilibrium network design problem revisited: A simulated annealing approach, *Eur. J. Oper. Res.* **65**, 44–57 (1993).
20. **S. Dafermos,** Traffic equilibria and variational inequalities, *Transp. Sci.* **14**, 42–54 (1980).
21. **P. Marcotte,** Network optimization with continuous control parameters, *Transp. Sci.* **17** (2), 181–197 (1983).
22. **Q. Meng, H. Yang,** and **M. G. H. Bell,** An equivalent continuously differentiable model and a locally convergent algorithm for the continuous networks design problem, *Transp. Res., Pt. B*, **35**, 83–105 (2001).

23. Z. Gao, H. Sun, and **H. Zhang,** A globally convergent algorithm for transportation continuous network design problem, *Optim. Eng.* **8**, 241–257 (2007).
24. R. L. Tobin and **T. L. Friesz,** Sensitivity analysis for equilibrium network flow, *Transp. Sci.* **22** (4), 231–293 (1988).
25. R. L. Tobin, Sensitivity analysis for variational inequalities, *J. Optim. Theory Appl.* **48** (1), 191–204 (1986).
26. S. Chiou, Bilevel programming for the continuous transport network design problem, *Transp. Res., Pt. B*, **39** (4), 361–383 (2005).
27. Q. Meng, H. Yang, and **M. G. H. Bell,** An equivalent continuously differentiable model and a locally convergent algorithm for the continuous network design problem, *Transp. Res., Pt. B*, **35**, 83–105 (2001).
28. C. Suwansirikul, T. L. Friesz, and **R. L. Tobin,** Equilibrium decomposed optimization: A heuristic for the continuous equilibrium network design problem, *Transp. Sci.* **21** (4), 227–292 (1987).
29. C. Li, H. Yang, D. Zhu, and **Q. Meng,** A global optimization method for continuous network design problems, *Transp. Res., Pt. B*, **46** (9), 1144–1158 (2012).
30. B. Du and **D. Z. W. Wang,** Solving continuous network design problem with generalized geometric programming approach, *Transp. Res. Record.* **2567** (1), 38–46 (2016).
31. M. Gairing, T. Harks, and **M. Klimm,** Complexity and approximation of the continuous network design problem, *SIAM J. Optim.* **27** (3), 1554–1582 (2017).
32. A. Yu. Krylatov, Global optimum search in the network design problem, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* **64** (10), 1851–1867 (2024) [Russian] [*Comput. Math. Math. Phys.* **64** (10), 2238–2255 (2024)].
33. D. Schmeidler, Equilibrium points of nonatomic games, *J. Stat. Phys.* **7** (4), 295–300 (1973).
34. Z. Zhou, M. Yang, F. Sun, Z. Wang, and **B. Wang,** A continuous transportation network design problem with the consideration of road congestion charging, *Sustainability* **13**, 7008 (2021).

Aleksandr Yu. Krylatov

Received March 25, 2025
Revised July 30, 2025
Accepted December 22, 2025

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Январь–март 2026. Т. 33, № 1. С. 114–123

УДК 519.172.3 DOI: 10.33048/daio.2026.33.844

ПРОСТЫЕ И НЕПРОСТЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ ТУРНИРЫ

А. О. Шабаркова[a], *М. Б. Абросимов*[b]

Саратовский национальный исследовательский
гос. университет им. Н. Г. Чернышевского,
ул. Астраханская, 83, 410012 Саратов, Россия
E-mail: [a]shabarkova_alex.andra@mail.ru, [b]mic@rambler.ru

Аннотация. Рассматриваются регулярные турниры относительно свойства простоты. Описаны виды турниров и их структура, и показано, какие из них простые, а какие нет. Доказывается, что для каждого нечётного n существует по крайней мере один простой регулярный n-вершинный турнир. Для каждого $n = 3k$ существует турнир, не являющийся простым. Также приводится оценка числа турниров с такими структурами для различных значений размерности. Табл. 1, ил. 3, библиогр. 10.

Ключевые слова: турнир, регулярный турнир, простой турнир, теория графов.

Введение

Напомним, что турниром называется полный направленный граф, т. е. ориентированный граф, в котором между каждой парой вершин есть в точности одна дуга. Будем обозначать турнир через $\overrightarrow{T} = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество (вершины турнира), а $\alpha \subseteq V \times V$ — отношение смежности на множестве V (дуги турнира). В каждой вершине u турнира есть петля, т. е. дуга вида (u, u). При изображении турниров петли обычно опускаются. Основные определения следуют работе [1].

Классом эквивалентности ε на множестве S, соответствующим элементу, называется множество $\varepsilon(x) = \{y \in S \mid x \sim y\}$.

Пусть ε — некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин V орграфа $\overrightarrow{G}$. Фактор-графом орграфа $\overrightarrow{G}$ по эквивалентности ε называется орграф $\overrightarrow{G}/\varepsilon = (V/\varepsilon, \alpha_\varepsilon)$, где V/ε — множество классов эквивалентности ε, $\alpha_\varepsilon = \{(\varepsilon(v_1), \varepsilon(v_2)) \mid \exists\, u_1 \in \varepsilon(v_1),\ u_2 \in \varepsilon(v_2)\colon (u_1, u_2) \in \alpha\}$.

Конгруэнция турнира $\overrightarrow{T} = (V, \alpha)$ — это эквивалентность на множестве его вершин такая, что фактор-граф по ней является турниром. Тем самым конгруэнция турнира $\overrightarrow{T} = (V, \alpha)$ — это эквивалентность $\theta \subseteq$

© А. О. Шабаркова, М. Б. Абросимов, 2026

$V \times V$ такая, что никакие две вершины, соответствующие различным θ-классам, не имеют встречных дуг. Очевидно, что любой турнир имеет по крайней мере две конгруэнции — универсальную и тождественную. Совокупность $\mathrm{Con}\,\overrightarrow{T}$ всех конгруэнций турнира $\overrightarrow{T}$ образует решётку [2].

Турнир $\overrightarrow{T} = (V, \alpha)$ называется простым, если решётка $\mathrm{Con}\,\overrightarrow{T}$ двухэлементна, т. е. если $\overrightarrow{T}$ не содержит собственных нетождественных конгруэнций. В англоязычной литературе можно встретить различные термины для обозначения простого турнира: simple, prime, indecomposable.

Турнир $\overrightarrow{T} = (V, \alpha)$ называется простым (примитивным или неразложимым), если он не содержит никаких нетривиальных собственных однородных множеств. Однородное множество — это непустое подмножество вершин $H \subseteq V(T)$ такое, что для любой вершины $v \notin H$ все дуги между v и вершинами из H направлены одинаково, т. е. либо все вершины из H указывают на v, либо v указывает на все вершины из H. Тривиальные однородные множества — множества, состоящие из одной вершины, и всё множество вершин V. Нетривиальное собственное однородное множество H — это то, которое не является ни одним из вышеперечисленных (т. е. $1 < |H| < |V|$).

Модулем турнира $\overrightarrow{T} = (V, \alpha)$ называется подмножество его вершин X такое, что для любых $a, b \in X$ и $x \in V \setminus X$ дуги (a, x) и (b, x) принадлежат или не принадлежат множеству α одновременно. Турнир называется простым или неразложимым, если все его модули тривиальные. Модуль называется тривиальным, если он пуст, состоит из одной вершины или совпадает с V.

Граф называется регулярным, если все его вершины имеют одинаковые степени захода и исхода.

Списком смежности вершины v орграфа $\overrightarrow{T} = (V, \alpha)$ называется множество $N^+(u) = \{v \in V \mid (u, v) \in \alpha\}$. В списке смежности каждой вершины v турнира сама вершина v также присутствует. Для удобства записи для турнира вершину v не будем указывать в её списке смежности. Списком смежности орграфа называется совокупность списков смежности всех его вершин.

Эксцентриситет вершины графа — наибольшее из расстояний от этой вершины до всех остальных. Под расстоянием от вершины v до вершины u понимается длина кратчайшего пути от v до u. Диаметр графа — это наибольший из эксцентриситетов всех его вершин.

Строению турниров посвящено много работ (см., например, [3]), простые турниры рассмотрены в работе [4]. Структуре и использованию простых в смысле неразложимости графов посвящено также достаточно много работ [5, 6]. В [7] рассмотрено свойство простоты турнира в зависимости от диаметра, а именно, описана структура турнира и найдено

количество простых турниров с числом вершин больше 5, чей диаметр на 1 и 2 меньше размерности турнира. В настоящей работе обратимся к регулярным турнирам. Рассмотрим этот класс графов относительно уже упомянутого выше свойства простоты, а также опишем их структуру и найдём их число. Начнём с простого регулярного турнира.

1. Простые регулярные турниры

Теорема 1. *Для каждого нечётного n существует по крайней мере один простой регулярный турнир. При некоторой нумерации вершин список смежности такого турнира представим в виде*

$$\alpha = \left\{ (v_i, v_{(i+j) \bmod n}) \mid j \in \overline{1, \frac{n-1}{2}},\ i \in \overline{1, n} \right\}.$$

Доказательство. Покажем, что данный турнир простой. Для того чтобы турнир был простым, он должен иметь только две конгруэнции: тождественную и универсальную, которые есть всегда, значит, осталось показать, что не существует нетривиальной нетождественной конгруэнции. Докажем методом от противного. Рассмотрим два случая: когда в один класс конгруэнции входят вершины, которые не являются соседними, и когда в один класс конгруэнции входят соседние вершины.

Случай 1. Объединим вершины v_i и v_{i+k} в один класс конгруэнции. Тогда все вершины турнира будут разбиты на две части относительно этого класса и все вершины меньшей части, очевидно, будут входить в рассматриваемый класс конгруэнции, поскольку дуги её вершин будут иметь разное направление для v_i и для v_{i+k}. Рассмотрим две соседние вершины из полученного класса конгруэнции. Вершина, противоположная дуге между ними, также будет входить в класс конгруэнции, поскольку будет иметь разнонаправленные дуги в эти соседние вершины. Таким образом, перебирая последовательно все соседние пары вершин, обнаружим, что в полученный класс конгруэнции будут включены все вершины турнира.

Случай 2. Объединим соседние вершины v_i и v_{i+1} в один класс конгруэнции, при этом вершина, противоположная дуге между ними, также будет входить в этот класс конгруэнции. Затем, рассматривая различные объединения вершин из класса конгруэнции, получим ситуацию из случая 1, где вершины всего турнира можно разделить на две разновеликие части. Дальнейшее включение вершин проведём согласно случаю 2.

Таким образом, перебирая все возможные начальные пары вершин, видим, что при любом их выборе рассматриваемый турнир имеет двухэлементную решётку конгруэнций.

Значит, турнир простой. Теорема 1 доказана.

На рис. 1 демонстрируются простые регулярные турниры на трёх и пяти вершинах с описанной в теореме 1 структурой.

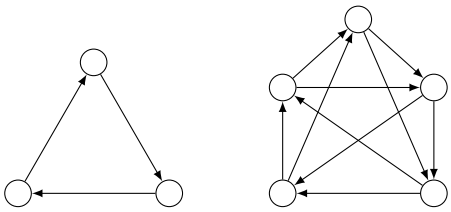


Рис. 1. Простые регулярные турниры со структурой из теоремы 1

Регулярный турнир также может не быть простым. Рассмотрим этот вопрос в следующем разделе.

2. Регулярные турниры, не являющиеся простыми

Теорема 2. *Для турнира размерности $n = 3k$ при $k > 5$ существует не менее $2C^3_{|k|} + |k|^2$ различных с точностью до изоморфизма регулярных турниров, не являющихся простыми, где $|k|$ — число неизоморфных регулярных турниров размерности k.*

Доказательство. Рассмотрим три регулярных турнира $\overrightarrow{T_1}$, $\overrightarrow{T_2}$, $\overrightarrow{T_3}$ размерности k. Объединим их в турнир размерности $3k$ следующим образом: дуги из всех вершин турнира $\overrightarrow{T_1}$ будут вести во все вершины турнира $\overrightarrow{T_2}$, дуги из всех вершин $\overrightarrow{T_2}$ — во все вершины $\overrightarrow{T_3}$, а дуги из всех вершин $\overrightarrow{T_3}$ — во все вершины $\overrightarrow{T_1}$. Очевидно, что полученный турнир простым не является: подтурниры $\overrightarrow{T_1}$, $\overrightarrow{T_2}$, $\overrightarrow{T_3}$ образуют нетривиальные классы конгруэнции, при этом он регулярный.

Определим, сколько турниров может быть получено по рассмотренной схеме. Данные по числу регулярных n-вершинных турниров при значениях $k \leqslant 25$ известны: 1, 1, 3, 15, 1223, 1 495 297, 18 400 989 629, 2 406 183 070 160 597 и т. д. [8, 9]. С ростом числа вершин их количество сильно растёт [10]. При $k = 1$ получим вырожденный случай, а именно, построенный по данной схеме турнир с выделением в отдельный класс конгруэнции каждой вершины будет обладать тождественной конгруэнцией и, следовательно, будет простым. При $k = 3, 5$ есть только один регулярный турнир, а значит, по предложенной схеме может быть получен также только один регулярный турнир, не являющийся простым, с числом вершин 9 и 15.

При $k \geqslant 7$ число регулярных k-вершинных турниров не менее 3. Обозначим через $|k|$ число регулярных турниров размерности k. Поскольку

в турнире, полученном по описанной схеме, используются три подтурнира, имеются три возможности:

1) взять все подтурниры изоморфными;
2) взять два изоморфных подтурнира, а третий отличным от них;
3) взять три разных турнира.

Случай 1 даёт нам $|k|$ неизоморфных турниров.

Случай 2. Можем выбрать турнир, который будет использован дважды, $|k|$ способами и турнир, который будет использован единожды, $|k| - 1$ способом. Конкретный выбор турниров $\overrightarrow{T_1}, \overrightarrow{T_2}, \overrightarrow{T_3}$ не имеет значения, так как в результате соединения получим изоморфные схемы. В отличие от следующего случая.

Случай 3. Три турнира можно выбрать $C^3_{|k|}$ способами. Вместе с тем, существует два различных способа назначения выбранных турниров турнирам $\overrightarrow{T_1}, \overrightarrow{T_2}, \overrightarrow{T_3}$: $\overrightarrow{T_1}, \overrightarrow{T_2}, \overrightarrow{T_3}$ и $\overrightarrow{T_1}, \overrightarrow{T_3}, \overrightarrow{T_2}$. Итого получается $2C^3_{|k|}$ неизоморфных турниров.

Суммируя три случая, получаем итоговое значение $2C^3_{|k|} + |k|^2$. Теорема 2 доказана.

В качестве примера турнира, удовлетворяющего условию теоремы 2, приведём турнир, имеющий 15 вершин, фактор-граф которого состоит из трёх вершин, а каждому классу конгруэнции принадлежат пять вершин. Данный турнир изображён на рис. 2.

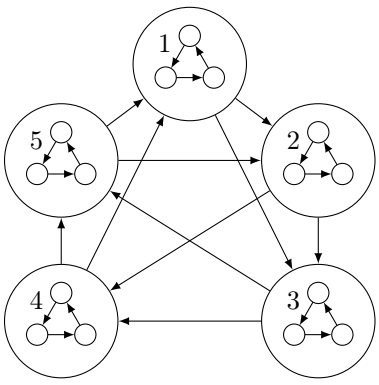


Рис. 2. Турнир с 15 вершинами, имеющий структуру из теоремы 2

Обобщим полученный результат.

Теорема 3. *Для турнира размерности $n = mk$ существует не менее $\overline{C}^m_{|k|}$ различных с точностью до изоморфизма регулярных турниров, не являющихся простыми, где m нечётное, $|k|$ — число регулярных турниров размерности k, а $\overline{C}^m_{|k|}$ — число сочетаний с повторениями.*

Доказательство. Рассмотрим m регулярных турниров размерности k и объединим их в турнир размерности mk следующим образом: за основу возьмём регулярный турнир размерности m, но его обычные вершины заменим регулярными турнирами размерности k. Турнир такой структуры для $m = 5$ и $k = 3$ изображён на рис. 3.

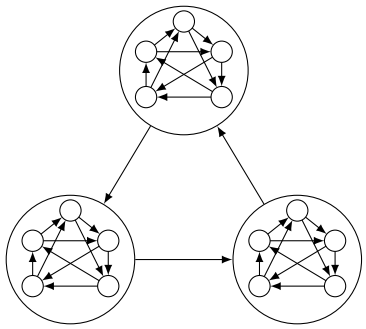


Рис. 3. Турнир с 15 вершинами

Очевидно, что полученный турнир регулярный. Нижняя граница числа турниров, имеющих подобную структуру, находится аналогично тому, как это сделано в доказательстве теоремы 2. Необходимо только изменить число вершин в основном турнире. Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Как видно из рис. 2 и 3, никаких иных ограничений, кроме нечётности, на k и m не накладывается. Любое из этих чисел может быть меньше или больше другого, а также они могут быть равны друг другу.

Таким образом, существуют как минимум один вид простых регулярных турниров и группа непростых регулярных турниров. Есть ли другие виды простых и непростых регулярных турниров? Для ответа на этот вопрос проведён вычислительный эксперимент, в ходе которого подсчитано число всех турниров до размерности 11 включительно, а также число

Таблица 1

Число непростых регулярных турниров на n вершинах

n	Общее число	Непростые	Регулярные	Непростые рег.
6	56	41	—	—
7	456	259	3	0
8	6 880	2 872	—	—
9	191 536	54 881	15	1
10	9 733 056	1 826 895	—	—
11	903 753 248	106 876 819	1 223	3

регулярных среди всех и число непростых среди регулярных турниров. Результаты подсчётов приведены в табл. 1. Так как регулярных турниров с чётным числом вершин не существует, в соответствующих местах стоят прочерки. Полученные результаты показывают, что существуют простые регулярные турниры, имеющие иную структуру, чем описано в теореме 1, а также, что существуют непростые регулярные турниры, не подходящие под условия теорем 2 и 3.

Замечание 2. Интересно провести сравнение результатов о простоте турнира относительно его регулярности с полученными ранее данными о простоте турнира относительно значения его диаметра. Как мы наблюдаем, регулярность не накладывает строгих ограничений на простоту: регулярный турнир может как быть простым, так и не быть. В этом она соотносится со значением диаметра, на 2 меньшим, чем число вершин турнира. Турниры с таким диаметром также могут как быть простыми, так и нет. В отличие от них турниры, обладающие диаметром, на 1 меньшим их размерности, всегда простые [7].

Финансирование работы

Исследование выполнено за счёт бюджета Саратовского национального исследовательского гос. университета им. Н. Г. Чернышевского. Дополнительных грантов на проведение или руководство этим исследованием получено не было.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Литература

1. **Богомолов А. М., Салий В. Н.** Алгебраические основы теории дискретных систем. М.: Физматлит, 1997. 368 с.
2. **Киреева А. В.** Конгруэнции турниров // Студенты — ускорению научного прогресса: Сб. студ. науч. работ. Вып. 2. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1990. С. 3–5.
3. **Moon J. W.** Topics on tournaments. New York: Holt, Rinehart, Winston, 1968. 138 p.
4. **Erdös P., Fried E., Hajnal A., Milner E. C.** Some remarks on simple tournaments // Algebra Univers. 1972. V. 2, No. 2. P. 238–245.
5. **Habib M., Maurer M. C.** On the X-join decomposition for undirected graphs // Discrete Appl. Math. 1979. V. 1. P. 201–207.
6. **Alrowily I. A.** Some structural results on prime graphs // J. Adv. Math. 2019. V. 17. P. 362–369.
7. **Шабаркова А. О., Абросимов М. Б.** Связь простоты турнира с различными значениями его диаметра // Int. J. Open Inf. Technol. 2022. Т. 10, № 6. С. 28–32.

8. Haglin D. J. Number of unlabeled regular tournaments with $2n+1$ nodes // The on-line encyclopedia of integer sequences. Highland Park, NJ: OEIS Found., 2025. URL: `oeis.org/A096368` (accessed: 19.10.2025).
9. Brinkmann G. Generating regular directed graphs // Discrete Math. 2012. V. 313. P. 1–7.
10. McKay B. The asymptotic numbers of regular tournaments, Eulerian digraphs and Eulerian oriented graphs // Combinatorica. 1990. V. 10. P. 367–377.

Шабаркова Александра Олеговна
Абросимов Михаил Борисович

Статья поступила
10 ноября 2025 г.
После доработки —
1 декабря 2025 г.
Принята к публикации
22 декабря 2025 г.

DISKRETNYI ANALIZ I ISSLEDOVANIE OPERATSII
/DISCRETE ANALYSIS AND OPERATIONS RESEARCH/
January–March 2026. Vol. 33, No. 1. P. 114–123

UDC 519.172.3 DOI: 10.33048/daio.2026.33.844

SIMPLE AND NON-SIMPLE REGULAR TOURNAMENTS

A. O. Shabarkova[a] and *M. B. Abrosimov*[b]

Saratov State University,
83 Astrakhanskaya Street, 410012 Saratov, Russia
E-mail: [a] shabarkova_alex.andra@mail.ru, [b] mic@rambler.ru

Abstract. We consider regular tournaments with respect to the property of simplicity. The types of tournaments and their structure are described, while it is shown which of them are simple and which are not. We prove that for every odd n there exists at least one simple regular n-vertex tournament and for every $n = 3k$ there is a tournament that is not simple. An estimate for the number of tournaments with such structures for different dimension values is also given. Tab. 1, illustr. 3, bibliogr. 10.

Keywords: tournament, regular tournament, simple tournament, prime tournament, graph theory.

References

1. **A. M. Bogomolov** and **V. N. Saliy,** *Algebraic Foundations of the Theory of Discrete Systems* (Fizmatlit, Moscow, 1997) [Russian].
2. **A. V. Kireeva,** Congruences of tournaments, in *Students — To Acceleration of Scientific Progress*, Vol. 2 (Izd. Saratov. Univ., Saratov, 1990), pp. 3–5 [Russian].
3. **J. W. Moon,** *Topics on Tournaments* (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968).
4. **P. Erdös, E. Fried, A. Hajnal,** and **E. C. Milner,** Some remarks on simple tournaments, *Algebra Univers.* **2** (2), 238–245 (1972).
5. **M. Habib** and **M. C. Maurer,** On the X-join decomposition for undirected graphs, *Discrete Appl. Math.* **1**, 201–207 (1979).
6. **I. A. Alrowily,** Some structural results on prime graphs, *J. Adv. Math.* **17**, 362–369 (2019).
7. **A. O. Shabarkova** and **M. B. Abrosimov,** Relation between the simplicity of a tournament and various values of its diameter, *Int. J. Open Inf. Technol.* **10** (6), 28–32 (2022) [Russian].

English transl.: *Journal of Applied and Industrial Mathematics* **20** (1) (2026).

8. D. J. Haglin, Number of unlabeled regular tournaments with $2n + 1$ nodes, in *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS Found., Highland Park, NJ, 2025), URL: `oeis.org/A096368` (accessed: 19.10.2025).

9. G. Brinkmann, Generating regular directed graphs, *Discrete Math.* **313**, 1–7 (2012).

10. B. McKay, The asymptotic numbers of regular tournaments, Eulerian digraphs and Eulerian oriented graphs, *Combinatorica* **10**, 367–377 (1990).

Aleksandra O. Shabarkova
Mikhail B. Abrosimov

Received November 10, 2025
Revised December 1, 2025
Accepted December 22, 2025

ДИСКРЕТНЫЙ АНАЛИЗ
И ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

2026 г. Том 33, № 1

Зав. редакцией Е. В. Горкунов

Журнал подготовлен с использованием макропакета LaTeX 2_ε.
The present publication has been typeset using LaTeX 2_ε.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ЭЛ № ФС77-85978 от 26.09.2023 г.
Размещение в сети Интернет: `math-sobolev.ru`.

Дата размещения в сети Интернет 21.08.2026 г.
Формат $70 \times 100\,1/16$. Усл. печ. л. 10,1. Объём 1,55 МБ.

Издательство Института математики,
пр. Академика Коптюга, 4, 630090 Новосибирск, Россия